

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique

N/510.108

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques



Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Master Académique en Mathématiques
Option : **Equations aux Dérivées Partielles**

Par :

FAKRAOUI-Malika

Intitulé

*Estimation d'Erreur et Taux de Convergence du Procédé
Alternatif de Schwarz pour un Problème non Symétrique de
Valeur aux Limites en Dimension Deux - Cas Dirichlet et
Neumann*

Dirigé par : Dr.MEHRI-A

Devant le jury

**PRESIDENT
RAPPORTEUR
EXAMINATEUR**

**Dr.FERNANE-K
Dr.MEHRI -A
Dr.DEBBOUCHE-A**

**MCA
MCA
MCA**

**Univ-Guelma
Univ-Guelma
Univ-Guelma**

Session Juin 2014



Dédicaces

Je dédie ce travail :

*À mon cher père qui était le meilleur père dans ce monde,
Grâce à son encouragement, sa confiance et son soutien moral
et pour son amour infini en exprimant mes gratitudes,
Mon profond amour et ma passion,
Je le dit à Papa j'espère qui sera au paradis in sha Allah,
Je t'aime très fort
À ma marie très chère à mon cœur.
À ma sœurs : AKILA, RIMA et mes frères : SALEH, NASSRE.
À tous mes meilleures amies.
À ma famille qui m'a soutenue.
À tous mes professeurs.
À tous les autres que je n'ai pas cités mais à qui pense aussi.
À tous mes collègues de la promotion .*

Malika

Remerciements

Au nom de Dieu, Clément et Miséricordieux « Lis, au nom de ton Seigneur qui a créé tout, Qui a créé l'homme de sang coagulé Lis car ton Seigneur est plus généreux, Il t'a appris l'usage de la plume Il apprend l'homme, ce que l'homme ne savait pas ».

Je tiens à exprimer toutes mes reconnaissances à monsieur

ALLAOUA-Mehri,

De m'avoir proposé ce sujet de recherche et d'avoir dirigé mon travail.

Je lui témoigne aussi, ma gratitude pour son soutien, sa grande disponibilité et surtout ses conseils et ses encouragements tout au long de mes recherches.

J'adresse mes vifs remerciements à monsieur, pour le grand honneur qu'il me fait en présidant le jury de soutenance.

J'exprime également mes chaleureux remerciements à monsieur

FERNANE-Kh et à monsieur DEBBOUCHE-A,

Pour l'honneur qu'ils m'ont fait d'avoir acceptés de faire partie de ce jury.

Table des matières

Introduction	3
1 Problème Continu	5
1.1 Position du Problème Continu	5
1.2 Procédé Alternatif de Schwarz	6
1.3 Estimation d'Erreur	7
1.4 Valeur Maximale du Facteur de Convergence	25
1.5 Taux de Convergence	26
2 Problème Discret	27
2.1 Position du Problème Discrèt	27
2.2 Procédé Alternatif de Schwarz	29
2.3 Estimation d'Erreur Discrète.	29
2.4 Expérimentations Numériques	39
2.5 Conclusion et Perspectives	47

Résumé

Dans ce mémoire nous étudions l'estimation de l'erreur et la convergence de la solution du procédé alternatif de *Schwarz* pour un problème non symétrique de valeurs aux limites en dimension deux avec conditions de *Dirichlet* – *Neumann* au bord. Nous introduisons aussi la méthode numérique des différences finies et nous estimons un facteur de convergence de la solution.

Introduction

La modélisation réaliste de problèmes physiques passe par des systèmes d'équations aux dérivées partielles, non linéaires dans le cas général, posés sur des domaines qui peuvent être à la fois de forme complexe et de grande taille. Dans la plupart des cas, la méthode numérique sélectionnée nécessite une discrétisation du domaine de la solution, et le nombre de degrés de liberté à déterminer peut rapidement excéder les capacités de calcul de l'équipement informatique. Par exemple, une simulation d'écoulement autour d'un avion par éléments finis 3D nécessitera une discrétisation du domaine de calcul sur quelques millions de points, avec plusieurs inconnues à déterminer en chaque point.

Les méthodes de calcul peuvent en plus être implicites et donc faire intervenir la résolution de systèmes linéaires avec ce nombre impressionnant d'inconnues. Dans le cas où l'on ne dispose pas d'un super ordinateur-réservé à quelques centres de recherches très spécialisés, la matrice du système ne tiendra même pas dans la mémoire vive de l'ordinateur !

Une réponse simple à cette difficulté est de découper le problème en plusieurs problèmes plus petits, c'est-à-dire de calculer la solution morceau par morceau comme solution de problèmes posés sur des sous-domaines du domaine initial. Au final, la solution globale sera la juxtaposition des solutions sur chaque sous-domaine.

Cette méthode permet aussi de simplifier la résolution de problèmes posés sur des domaines de forme complexe en choisissant un découpage en sous-domaine de forme élémentaire donc plus facile à discrétiser.

La difficulté posée par cette stratégie est de déterminer les conditions limites à imposer

aux bords de chaque sous-domaine, en effet ces bords étant des frontières fictives, la physique du problème ne permet pas d'y fixer des conditions. Deux stratégies, toutes les deux itératives, sont possibles :

1. La première consiste à découper le domaine global en sous-domaines qui se recouvrent partiellement et à utiliser la solution de l'étape précédente sur les sous-domaines voisins pour déterminer les conditions aux limites sur le sous-domaine considéré.

2. La deuxième consiste à découper le domaine sur une partition et à imposer des conditions de continuité aux interfaces.

Une fois la stratégie de découpage adoptée, la méthode de résolution sur chaque sous-domaine sera identique à celle envisagée sur le domaine global, mais fera cette fois-ci intervenir un nombre raisonnable de degrés de liberté.

Du point de vue historique la première méthode de Procédé Alternatif de *Schwarz* a été développée à la fin du 19^{ème} siècle par le mathématicien H.A.Schwarz dans le but d'étudier l'opérateur de Laplace. Son idée est d'étudier le problème dans le cas où Ω est la réunion de domaines simples, par exemple : l'union d'un rectangle et d'un disque.

Dans notre travail nous allons appliquer cette méthode à un problème de valeurs aux limites en dimension deux. Dans le premier chapitre nous définissons le Procédé Alternatif de *Schwarz* pour un problème de valeurs aux limites non symétrique avec conditions mixtes *Dirichlet* – *Neumann*, nous prouvons un théorème d'estimation d'erreur, puis nous établissons le facteur et le taux de convergence. Au deuxième chapitre nous étudions le problème discret, plus précisément nous introduisons la méthode des différences finies, nous démontrons un résultat de convergence de la solution. Et pour valider notre théorie nous présentons un test numérique d'un problème aux limites non symétrique en dimension deux.

Chapitre 1

Problème Continu

1.1 Position du Problème Continu

On considère le problème non symétrique suivant

$$\begin{cases} Au = -\Delta u + 2R \frac{\partial u}{\partial x} + q^2 u = f(x, y) & \text{dans } \Omega \\ L_1 u = \alpha(x, y) \frac{\partial u}{\partial n} + \beta(x, y) u = \phi(x, y) & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (1)$$

$$\Omega = \{(x, y) / 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$$

$$\Gamma = \partial\Omega$$

où $\alpha(0, y) = \alpha_0, \beta(0, y) = \beta_0, \alpha(1, y) = \alpha_1, \beta(1, y) = \beta_1$ pour $0 < y < 1$, et

$\alpha(x, 0) = \alpha(x, 1) = 0, \beta(x, 0) = \beta(x, 1) = 1$ pour $0 < x < 1$, $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, R, q$ sont des constantes, et f, ϕ sont des fonctions données. On sait que ce problème admet une solution unique, et on peut la calculer par des méthodes analytiques ou numériques. Dans ce travail nous allons appliquer une autre méthode plus générale. C'est la méthode du Procédé Alternatif de Schwarz.

1.2 Procédé Alternatif de Schwarz

On divise le domaine Ω en deux sous domaines Ω_1 et Ω_2 tel que

$$\Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset$$

on pose

$$\Omega_1 = \{(x, y) / 0 < x < x_k, 0 < y < 1\}$$

$$\Omega_2 = \{(x, y) / x_r < x < 1, 0 < y < 1\}$$

$$\Gamma'_1 = \{(x, y) / x = x_k, 0 < y < 1\}$$

$$\Gamma'_2 = \{(x, y) / x = x_r, 0 < y < 1\}$$

$$\Gamma_1 = \partial\Omega_1 \setminus \Gamma'_1$$

$$\Gamma_2 = \partial\Omega_2 \setminus \Gamma'_2$$

on note la distance

$$d = \text{dist}(x_k, x_r) \text{ et } x_k = x_r + d, d > 0$$

ainsi le problème (1) est équivalent aux deux sous problèmes suivants

$$\begin{cases} Au = f & \text{dans } \Omega_1 \\ L_1 u = \phi & \text{sur } \Gamma_1 \\ L_2 u = L_2 v & \text{sur } \Gamma'_1 \end{cases} \quad (2)$$

et

$$\begin{cases} Av = f & \text{dans } \Omega_2 \\ L_1 v = \phi & \text{sur } \Gamma_2 \\ L_3 v = L_3 u & \text{sur } \Gamma'_2 \end{cases} \quad (3)$$

où

$$L_2 u \equiv a \frac{\partial u}{\partial n} + bu, \quad L_3 u \equiv c \frac{\partial u}{\partial n} + du$$

et a, b, c, d sont des constantes. Où la solution u du problème initial (1) est définie par

$$u = \begin{cases} u & \text{dans } \Omega_1 \\ v & \text{dans } \Omega_2 \end{cases}$$

Les points x_k et x_r sont appelés pseudo-frontières locales. Nous définissons le Procédé Alternatif de *Schwarz* comme suit.

Etant donné $L_2 v^{(0)}$ sur Γ'_1 valeur initiale, trouvons la suite $u^{(i+1)}$ sur Ω_1 solution de

$$\begin{cases} Au^{(i+1)} = f & \text{dans } \Omega_1 \\ L_1 u^{(i+1)} = \phi & \text{sur } \Gamma_1 \\ L_2 u^{(i+1)} = L_2 v^{(i)} & \text{sur } \Gamma'_1 \end{cases} \quad (4)$$

où $i = 0, 1, 2, \dots$

et $v^{(i+1)}$ sur Ω_2 solution de

$$\begin{cases} Av^{(i+1)} = f & \text{dans } \Omega_2 \\ L_1 v^{(i+1)} = \phi & \text{sur } \Gamma_2 \\ L_3 v^{(i+1)} = L_3 u^{(i+1)} & \text{sur } \Gamma'_2 \end{cases} \quad (5)$$

où $i = 0, 1, 2, \dots$

1.3 Estimation d'Erreur

On note la solution du problème (1) par u^* et l'erreur de la solution du problème (4) par

$$e^{(i)}(x, y) = u^*(x, y) - u^{(i)}(x, y)$$

et celle du problème (5) par

$$E^{(i)}(x, y) = u^*(x, y) - v^{(i)}(x, y)$$

Par soustraction de (1) et (4), (1) et (5) nous obtenons deux sous problèmes relatifs à l'erreur

$$\begin{cases} Ae^{(i+1)} = 0 & \text{dans } \Omega_1 \\ L_1 e^{(i+1)} = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \\ L_2 e^{(i+1)} = L_2 E^{(i)} & \text{sur } \Gamma'_1 \end{cases} \quad (6)$$

où $i = 0, 1, 2, \dots$

et

$$\begin{cases} AE^{(i+1)} = 0 & \text{dans } \Omega_2 \\ L_1 E^{(i+1)} = 0 & \text{sur } \Gamma_2 \\ L_3 E^{(i+1)} = L_3 e^{(i+1)} & \text{sur } \Gamma'_2 \end{cases} \quad (7)$$

où $i = 0, 1, 2, \dots$

En utilisant la méthode de séparation des variable, nous calculons la solution de (6)
on pose

$$e^{(i+1)}(x, y) = X^{(i+1)}(x).Y^{(i+1)}(y)$$

on trouve

$$A(X^{(i+1)}(x).Y^{(i+1)}(y)) = 0$$

donc

$$-X^{(i+1)''}Y^{(i+1)} - X^{(i+1)}Y^{(i+1)''} + 2RX^{(i+1)'}Y^{(i+1)} + q^2X^{(i+1)}Y^{(i+1)} = 0$$

$$-\frac{X^{(i+1)''}}{X^{(i+1)}} - \frac{Y^{(i+1)''}}{Y^{(i+1)}} + 2R\frac{X^{(i+1)'}}{X^{(i+1)}} + q^2 = 0$$

$$-\frac{X^{(i+1)''}}{X^{(i+1)}} + 2R\frac{X^{(i+1)'}}{X^{(i+1)}} + q^2 = \frac{Y^{(i+1)''}}{Y^{(i+1)}} = \lambda$$

on a

$$L_1 e^{(i+1)}(x, y) = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \Rightarrow \alpha(x, y) \frac{\partial e^{(i+1)}}{\partial n}(x, y) + \beta(x, y) e^{(i+1)} = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \quad (8)$$

où

$$\Gamma_1 = \{(0, y) / 0 < y < 1\} \cup \{(x, 0) / 0 < x < x_k\} \cup \{(x, 1) / 0 < x < x_k\}$$

Chapitre 1. Problème Continu

soit

$$(x, y) \in \{(0, y) / 0 < y < 1\} \Rightarrow -\alpha_0 \frac{\partial e^{(i+1)}}{\partial x}(0, y) + \beta_0 e^{(i+1)}(0, y) = 0$$

$$\text{et } (x, y) \in \{(x, 0) / 0 < x < x_k\} \Rightarrow e^{(i+1)}(x, 0) = 0 \Rightarrow Y^{(i+1)}(0) = 0$$

$$\text{et } (x, y) \in \{(x, 1) / 0 < x < x_k\} \Rightarrow e^{(i+1)}(x, 1) = 0 \Rightarrow Y^{(i+1)}(1) = 0$$

Soit le problème de *Sturm - Liouville*

$$\begin{cases} Y^{(i+1)} = \lambda Y^{(i+1)}, 0 < y < 1 \\ Y^{(i+1)}(0) = 0 \\ Y^{(i+1)}(1) = 0 \end{cases}$$

le signe de λ :

$$\lambda \leq 0$$

il est facile de montrer que $\lambda = 0$ n'est pas valeur propre.

On pose

$$\lambda = -\mu^2, \mu \in \mathbb{R}^*$$

soit l'équation caractéristique

$$r^2 = -\mu^2, r_{1,2} = \pm i\mu$$

ainsi la solution du problème de *Sturm - Liouville*

$$Y^{(i+1)}(y) = c_1 \cos \mu y + c_2 \sin \mu y$$

on a

$$Y^{(i+1)}(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

et

$$Y^{(i+1)}(1) = 0$$

alors

$$c_2 \sin \mu = 0$$

$$\Rightarrow \sin \mu = 0$$

$$\Rightarrow \mu = m\pi, m \in \mathbb{N}^*$$

Chapitre 1. Problème Continu

d'où

$$\begin{aligned}\lambda_m &= -m^2\pi^2, m \in \mathbb{N}^* \\ Y_m^{(i+1)}(y) &= c_m^{(i+1)} \sin m\pi y\end{aligned}$$

soit l'équation différentielle

$$\begin{cases} -X''^{(i+1)} + 2RX'^{(i+1)} + (q^2 - \lambda)X^{(i+1)} = 0 \\ -\alpha_0 X'^{(i+1)}(0) + \beta_0 X^{(i+1)}(0) = 0 \end{cases}$$

on résout son équation caractéristique, on trouve

$$\begin{aligned}-r^2 + 2Rr + (q^2 + m^2\pi^2) &= 0 \\ \Delta &= 4R^2 + 4(q^2 + m^2\pi^2) = 4w_m^2 \\ r_1 &= R - w_m, \quad r_2 = R + w_m\end{aligned}$$

par conséquent

$$X_m^{(i+1)}(x) = c_1 \exp(R - w_m)x + c_2 \exp(R + w_m)x$$

et

$$X_m'^{(i+1)}(x) = (R - w_m)c_1 \exp(R - w_m)x + (R + w_m)c_2 \exp(R + w_m)x$$

$$-\alpha_0 X'^{(i+1)}(0) + \beta_0 X^{(i+1)}(0) = 0$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow -\alpha_0 [(R - w_m)c_1 + (R + w_m)c_2] + \beta_0 [c_1 + c_2] &= 0 \\ \Rightarrow c_2 &= -\frac{[\alpha_0(R - w_m) - \beta_0]}{[\alpha_0(R + w_m) - \beta_0]} c_1\end{aligned}$$

on conclut alors

$$\begin{aligned}X_m^{(i+1)}(x) &= c_1 \exp(R - w_m)x - \frac{[\alpha_0(R - w_m) - \beta_0]}{[\alpha_0(R + w_m) - \beta_0]} c_1 \exp(R + w_m)x \\ &= \frac{c_1 \exp(Rx)}{[\alpha_0(R + w_m) - \beta_0]} \{ [\alpha_0(R + w_m) - \beta_0] \exp(-w_m x) - [\alpha_0(R - w_m) - \beta_0] \exp(w_m x) \} \\ &= \frac{c_m^{(i+1)} \exp(Rx)}{[\alpha_0(R + w_m) - \beta_0]} [-2(\alpha_0 R - \beta_0) \sinh w_m x + 2\alpha_0 w_m \cosh w_m x]\end{aligned}$$

Chapitre 1. Problème Continu

enfin la solution générale du problème (6)

$$e^{(i+1)}(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} X_m^{(i+1)}(x) \cdot Y_m^{(i+1)}(y)$$

$$e^{(i+1)}(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2c_m^{(i+1)} \exp(Rx)}{[\alpha_0(R + w_m) - \beta_0]} [(\beta_0 - \alpha_0 R) \sinh w_m x + \dots$$

$$\alpha_0 w_m \cosh w_m x] \sin m\pi y$$

$$0 < x < x_k, \quad 0 < y < 1$$
(9)

de la même manière, on résout le problème (7) par la méthode de séparation des variables, en effet on pose

$$E^{(i+1)}(x, y) = X^{(i+1)}(x) \cdot Y^{(i+1)}(y)$$

et

$$L_1 E^{(i+1)}(x, y) = 0 \text{ sur } \Gamma_2 \Rightarrow \alpha(x, y) \frac{\partial E^{(i+1)}}{\partial n}(x, y) + \beta(x, y) E^{(i+1)} = 0 \text{ sur } \Gamma_2$$
(10)

où

$$\Gamma_2 = \{(1, y) / 0 < y < 1\} \cup \{(x, 0) / x_r < x < 1\} \cup \{(x, 1) / x_r < x < 1\}$$

soit

$$(x, y) \in \{(1, y) / 0 < y < 1\} \Rightarrow \alpha_1 \frac{\partial E^{(i+1)}}{\partial x}(1, y) + \beta_1 E^{(i+1)}(1, y) = 0$$

$$\text{et } (x, y) \in \{(x, 0) / x_r < x < 1\} \Rightarrow E^{(i+1)}(x, 0) = 0 \Rightarrow Y^{(i+1)}(0) = 0$$

$$\text{et } (x, y) \in \{(x, 1) / x_r < x < 1\} \Rightarrow E^{(i+1)}(x, 1) = 0 \Rightarrow Y^{(i+1)}(1) = 0$$

soit le problème de *Sturn - Liouville*

$$\begin{cases} Y''^{(i+1)} = \lambda Y^{(i+1)}, 0 < y < 1 \\ Y^{(i+1)}(0) = 0 \\ Y^{(i+1)}(1) = 0 \end{cases}$$

on montre facilement que λ est négative et $\lambda = 0$ n'est pas valeur propre.

On pose

$$\lambda = -\mu^2$$

Chapitre 1. Problème Continu

on introduit l'équation caractéristique on trouve

$$r^2 = -\mu^2, r_{1,2} = \pm i\mu$$

$$Y^{(i+1)}(y) = b_1 \cos \mu y + b_2 \sin \mu y$$

or

$$Y^{(i+1)}(0) = 0$$

c-à-d

$$b_1 = 0$$

et

$$Y^{(i+1)}(1) = 0$$

ce qui donne

$$b_2 \sin \mu = 0$$

$$\sin \mu = 0$$

$$\mu = m\pi, m \in \mathbb{N}^*$$

$$\lambda_m = -m^2 \pi^2, m \in \mathbb{N}^*$$

d'où

$$Y_m^{(i+1)}(y) = b_m^{(i+1)} \sin m\pi y, m \in \mathbb{N}^*$$

soit l'équation différentielle :

$$\begin{cases} -X''^{(i+1)} + 2RX'^{(i+1)} + (q^2 - \lambda)X^{(i+1)} = 0 \\ \alpha_1 X'^{(i+1)}(1) + \beta_1 X^{(i+1)}(1) = 0 \end{cases}$$

on résout son équation caractéristique, on trouve

$$-r^2 + 2Rr + (q^2 + m^2 \pi^2) = 0$$

$$\Delta = 4R^2 + 4(q^2 + m^2 \pi^2) = 4w_m^2$$

$$r_1 = R - w_m, \quad r_2 = R + w_m$$

Chapitre 1. Problème Continu

$$X_m^{(i+1)}(x) = b_1 \exp(R - w_m)x + b_2 \exp(R + w_m)x$$

et

$$X_m^{(i+1)}(x) = (R - w_m)b_1 \exp(R - w_m)x + (R + w_m)b_2 \exp(R + w_m)x$$

$$\alpha_1 X_m^{(i+1)}(1) + \beta_1 X_m^{(i+1)}(1) = 0$$

$$\Rightarrow b_2 = -\frac{[\alpha_1(R - w_m) + \beta_1]}{[\alpha_1(R + w_m) + \beta_1]} b_1 \exp(-2w_m)$$

par conséquent

$$\begin{aligned} X_m^{(i+1)}(x) &= b_1 \exp(R - w_m)x - \frac{[\alpha_1(R - w_m) + \beta_1]}{[\alpha_1(R + w_m) + \beta_1]} b_1 \exp(-2w_m) \exp(R + w_m)x \\ &= \frac{b_1 \exp(Rx) \exp(-w_m)}{[\alpha_1(R + w_m) + \beta_1]} \{ [\alpha_1(R + w_m) + \beta_1] \exp w_m(1 - x) - [\alpha_1(R - w_m) + \beta_1] \dots \\ &\quad \exp -w_m(1 - x) \} \\ &= \frac{b_m^{(i+1)} \exp(Rx) \exp(-w_m)}{[\alpha_1(R + w_m) + \beta_1]} [2(\alpha_1 R + \beta_1) \sinh w_m(1 - x) + 2\alpha_1 w_m \cosh w_m(1 - x)] \end{aligned}$$

finalemt la solution générale du problème (7) est donnée par

$$E^{(i+1)}(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} X_m^{(i+1)}(x) \cdot Y_m^{(i+1)}(y)$$

$$E^{(i+1)}(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2b_m^{(i+1)} \exp(Rx) \exp(-w_m)}{[\alpha_1(R + w_m) + \beta_1]} [(\alpha_1 R + \beta_1) \sinh w_m(1 - x) + \dots \quad (11)$$

$$\alpha_1 w_m \cosh w_m(1 - x)] \sin m\pi y$$

$$x_r < x < 1, \quad 0 < y < 1$$

Calculons les constantes $c_m^{(i+1)}$, en effet on a

$$\begin{aligned} L_2 e^{(i+1)} &= L_2 \mathbf{e}^{(i+1)} \text{ sur } \Gamma'_1 \\ \Rightarrow a \frac{\partial e^{(i+1)}}{\partial n}(x, y) + b e^{(i+1)}(x, y) &= a \frac{\partial E^{(i)}}{\partial n}(x, y) + b E^{(i)}(x, y) \text{ sur } \Gamma'_1 \\ \Rightarrow a \frac{\partial e^{(i+1)}}{\partial n}(x_k, y) + b e^{(i+1)}(x_k, y) &= a \frac{\partial E^{(i)}}{\partial n}(x_k, y) + b E^{(i)}(x_k, y), \quad 0 < y < 1 \\ \Rightarrow a \frac{\partial e^{(i+1)}}{\partial x}(x_k, y) + b e^{(i+1)}(x_k, y) &= a \frac{\partial E^{(i)}}{\partial x}(x_k, y) + b E^{(i)}(x_k, y), \quad 0 < y < 1 \end{aligned}$$

Chapitre 1. Problème Continu

ce qui donne

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial e^{(i+1)}}{\partial x}(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_m^{(i+1)} \exp(Rx)}{[\alpha_0(R + w_m) - \beta_0]} \dots \\
 &\quad \{[-2R(\alpha_0 R - \beta_0) \sinh w_m x + 2R\alpha_0 w_m \cosh w_m x] + \dots \\
 &\quad [-2w_m(\alpha_0 R - \beta_0) \cosh w_m x + 2\alpha_0 w_m^2 \sinh w_m x]\} \sin m\pi y \\
 \\
 a \frac{\partial e^{(i+1)}}{\partial x}(x_k, y) + b e^{(i+1)}(x_k, y) & \\
 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_m^{(i+1)} \exp(Rx_k)}{[\alpha_0(R + w_m) - \beta_0]} \{[-2aR(\alpha_0 R - \beta_0) + 2a\alpha_0 w_m^2 - 2b(\alpha_0 R - \beta_0)] \sinh w_m x_k + \dots \\
 [2aR\alpha_0 w_m - 2aw_m(\alpha_0 R - \beta_0) + 2b\alpha_0 w_m] \cosh w_m x_k\} \sin m\pi y
 \end{aligned} \tag{12}$$

de la même manière on a

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial E^{(i)}}{\partial x}(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2b_m^{(i)} \exp(-w_m) \exp(Rx)}{[\alpha_1(R + w_m) + \beta_1]} \dots \\
 &\quad \{[R(\alpha_1 R + \beta_1) \sinh w_m(1 - x) + R\alpha_1 w_m \cosh w_m(1 - x)] - \dots \\
 &\quad [(\alpha_1 R + \beta_1)w_m \cosh w_m(1 - x) + \alpha_1 w_m^2 \sinh w_m(1 - x)]\} \sin m\pi y \\
 \\
 a \frac{\partial E^{(i)}}{\partial x}(x_k, y) + b E^{(i)}(x_k, y) & \\
 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2b_m^{(i)} \exp(Rx_k - w_m)}{[\alpha_1(R + w_m) + \beta_1]} \dots \\
 &\quad \{[aR(\alpha_1 R + \beta_1) - a\alpha_1 w_m^2 + b(\alpha_1 R + \beta_1)] \sinh w_m(1 - x_k) + \dots \\
 &\quad [aR\alpha_1 w_m - aw_m(\alpha_1 R + \beta_1) + b\alpha_1 w_m] \cosh w_m(1 - x_k)\} \sin m\pi y
 \end{aligned} \tag{13}$$

par comparaison (12) = (13), nous obtenons

$$c_m^{(i+1)} = b_m^{(i)} \exp(-w_m) \frac{[\alpha_0(R + w_m) - \beta_0]}{[\alpha_1(R + w_m) + \beta_1]} \bar{\rho}_m$$

où

$$\bar{\rho}_m = \frac{(b\alpha_1 - a\beta_1) w_m \cosh w_m(1 - x_k) + [\alpha_1(aR^2 - aw_m^2 + bR) + (aR + b)\beta_1] \sinh w_m(1 - x_k)}{(b\alpha_0 + a\beta_0) w_m \cosh w_m x_k - [\alpha_0(aR^2 - aw_m^2 + bR) - (aR + b)\beta_0] \sinh w_m x_k}$$

Chapitre 1. Problème Continu

donc la solution particulière du problème (6) est

$$e^{(i+1)}(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2b_m^{(i)} \exp(-w_m)}{[\alpha_1(R + w_m) + \beta_1]} \bar{\rho}_m [(\beta_0 - \alpha_0 R) \sinh w_m x \dots + \alpha_0 w_m \cosh w_m x] \exp(Rx) \sin m\pi y \quad (14)$$

De la même manière nous calculons les constantes $b_m^{(i+1)}$, en effet on a

$$\begin{aligned} L_3 E^{(i+1)} &= L_3 e^{(i+1)} \quad \text{sur } \Gamma'_2 \\ \Rightarrow c \frac{\partial E^{(i+1)}}{\partial n}(x, y) + d E^{(i+1)}(x, y) &= c \frac{\partial e^{(i+1)}}{\partial n}(x, y) + d e^{(i+1)}(x, y) \quad \text{sur } \Gamma'_2 \\ \Rightarrow c \frac{\partial E^{(i+1)}}{\partial n}(x_r, y) + d E^{(i+1)}(x_r, y) &= c \frac{\partial e^{(i+1)}}{\partial n}(x_r, y) + d e^{(i+1)}(x_r, y), \quad 0 < y < 1 \\ \Rightarrow -c \frac{\partial E^{(i+1)}}{\partial x}(x_r, y) + d E^{(i+1)}(x_r, y) &= -c \frac{\partial e^{(i+1)}}{\partial x}(x_r, y) + d e^{(i+1)}(x_r, y), \quad 0 < y < 1 \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} &-c \frac{\partial E^{(i+1)}}{\partial x}(x_r, y) + d E^{(i+1)}(x_r, y) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2b_m^{(i+1)} \exp(Rx_r - w_m)}{[\alpha_1(R + w_m) + \beta_1]} \dots \\ &\quad \{ [-cR(\alpha_1 R + \beta_1) + c\alpha_1 w_m^2 + d(\alpha_1 R + \beta_1)] \sinh w_m(1 - x_r) + \dots \\ &\quad [-cR\alpha_1 w_m + c w_m(\alpha_1 R + \beta_1) + d\alpha_1 w_m] \cosh w_m(1 - x_r) \} \sin m\pi y \end{aligned} \quad (15)$$

et

$$\begin{aligned} &-c \frac{\partial e^{(i+1)}}{\partial x}(x_r, y) + d e^{(i+1)}(x_r, y) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2c_m^{(i+1)} \exp(Rx_r)}{[\alpha_0(R + w_m) - \beta_0]} \{ [cR(\alpha_0 R - \beta_0) - c\alpha_0 w_m^2 - d(\alpha_0 R - \beta_0)] \sinh w_m x_r + \dots \\ &\quad [-cR\alpha_0 w_m + c w_m(\alpha_0 R - \beta_0) + d\alpha_0 w_m] \cosh w_m x_r \} \sin m\pi y \end{aligned} \quad (16)$$

par comparaison (15) = (16), nous obtenons

$$b_m^{(i+1)} = c_m^{(i+1)} \exp(w_m) \frac{[\alpha_1(R + w_m) + \beta_1]}{[\alpha_0(R + w_m) - \beta_0]} \tilde{\rho}_m$$

où

$$\tilde{\rho}_m = \frac{(d\alpha_0 - c\beta_0) w_m \cosh w_m x_r - [\alpha_0(cw_m^2 - cR^2 + dR) + (cR - d)\beta_0] \sinh w_m x_r}{(d\alpha_1 + c\beta_1) w_m \cosh w_m(1 - x_r) + [\alpha_1(cw_m^2 - cR^2 + dR) - (cR - d)\beta_1] \sinh w_m(1 - x_r)}$$

Chapitre 1. Problème Continu

on obtient alors la solution particulière du problème (7)

$$E^{(i+1)}(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2c_m^{(i+1)}}{[\alpha_0(R + w_m) + \beta_0]} \tilde{\rho}_m [(\alpha_1 R + \beta_1) \sinh w_m(1 - x) + \dots \alpha_1 w_m \cosh w_m x] \exp(Rx) \sin m\pi y \quad (17)$$

on déduit aussi

$$b_m^{(i+1)} = b_m^{(i)} \bar{\rho}_m \cdot \tilde{\rho}_m \quad \text{et} \quad c_m^{(i+1)} = c_m^{(i)} \bar{\rho}_m \cdot \tilde{\rho}_m$$

donc

$$e^{(i+1)}(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2c_m^{(i)} \bar{\rho}_m \cdot \tilde{\rho}_m}{[\alpha_0(R + w_m) - \beta_0]} [(\beta_0 - \alpha_0 R) \sinh w_m x \dots \alpha_0 w_m \cosh w_m x] \exp(Rx) \sin m\pi y \quad (18)$$

on pose

$$P_m^{(i+1)}(x) = \frac{2c_m^{(i)} \bar{\rho}_m \cdot \tilde{\rho}_m}{[\alpha_0(R + w_m) - \beta_0]} [(\beta_0 - \alpha_0 R) \sinh w_m x + \alpha_0 w_m \cosh w_m x] \exp(Rx)$$

ce qui donne

$$P_m^{(i+1)}(x) = \bar{\rho}_m \cdot \tilde{\rho}_m P_m^{(i)}(x) = \rho_m P_m^{(i)}(x)$$

et

$$e^{(i+1)}(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} P_m^{(i+1)}(x) \sin m\pi y$$

de la même façon

$$E^{(i+1)}(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2b_m^{(i)} \bar{\rho}_m \cdot \tilde{\rho}_m \exp(-w_m)}{[\alpha_1(R + w_m) + \beta_1]} [(\beta_1 + \alpha_1 R) \sinh w_m(1 - x) + \dots \alpha_1 w_m \cosh w_m(1 - x)] \exp(Rx) \sin m\pi y \quad (19)$$

on pose

$$Q_m^{(i+1)}(x) = \frac{2b_m^{(i)} \bar{\rho}_m \cdot \tilde{\rho}_m \exp(-w_m)}{[\alpha_1(R + w_m) + \beta_1]} \dots [(\beta_1 + \alpha_1 R) \sinh w_m(1 - x) + \alpha_1 w_m \cosh w_m(1 - x)] \exp(Rx)$$

ce qui donne

$$Q_m^{(i+1)}(x) = \bar{\rho}_m \cdot \tilde{\rho}_m Q_m^{(i)}(x) = \rho_m Q_m^{(i)}(x)$$

Chapitre 1. Problème Continu

et

$$E^{(i+1)}(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} Q_m^{(i+1)}(x) \sin m\pi y$$

où

$$\rho_m = \bar{\rho}_m(x_r, x_k) \cdot \tilde{\rho}_m(x_r, x_k) \quad (20)$$

$$\rho_m = \frac{(b\alpha_1 - a\beta_1) w_m \cosh w_m(1 - x_k) + [\alpha_1(aR^2 - aw_m^2 + bR) + (aR + b)\beta_1] \sinh w_m(1 - x_k)}{(b\alpha_0 + a\beta_0) w_m \cosh w_m x_k - [\alpha_0(aR^2 - aw_m^2 + bR) - (aR + b)\beta_0] \sinh w_m x_k} \cdot \frac{(d\alpha_0 - c\beta_0) w_m \cosh w_m x_r - [\alpha_0(cw_m^2 - cR^2 + dR) + (cR - d)\beta_0] \sinh w_m x_r}{(d\alpha_1 + c\beta_1) w_m \cosh w_m(1 - x_r) + [\alpha_1(cw_m^2 - cR^2 + dR) - (cR - d)\beta_1] \sinh w_m(1 - x_r)}$$

Théorème 1.1 *Sous les notations et les conditions précédentes, on a les estimations suivantes*

$$\|e^{(i+1)}(x, y)\|_{L^2(\Omega_1)} \leq \rho \|e^{(i)}(x, y)\|_{L^2(\Omega_1)} \quad (21)$$

et

$$\|E^{(i+1)}(x, y)\|_{L^2(\Omega_2)} \leq \rho \|E^{(i)}(x, y)\|_{L^2(\Omega_2)} \quad (22)$$

où ρ est le facteur de convergence.

Preuve. Soit

$$\begin{aligned}
 \|e^{(i+1)}(x, y)\|_{L^2(\Omega_1)}^2 &= \int_0^1 \left[\int_0^{x_k} |e^{(i+1)}(x, y)|^2 dx \right] dy \\
 &= \int_0^1 \left[\int_0^{x_k} \left(\sum_{m=1}^{\infty} P_m^{(i+1)}(x) \sin m\pi y \right)^2 dx \right] dy \\
 &= \int_0^1 \left[\int_0^{x_k} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_m^{(i+1)}(x) P_n^{(i+1)}(x) \sin m\pi y \sin n\pi y dx \right] dy \\
 &= \int_0^{x_k} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_m^{(i+1)}(x) P_n^{(i+1)}(x) \int_0^1 \sin m\pi y \sin n\pi y dy \right] dx \\
 &= \int_0^{x_k} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_m^{(i+1)}(x) P_n^{(i+1)}(x) \int_0^1 \frac{\cos(m-n)\pi y - \cos(m+n)\pi y}{2} dy \right] dx \\
 &= \int_0^{x_k} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_m^{(i+1)}(x) P_n^{(i+1)}(x) \left(\frac{1}{2} \delta_{m,n} \right) \right] dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{x_k} \sum_{m=1}^{\infty} (P_m^{(i+1)}(x))^2 dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{x_k} \sum_{m=1}^{\infty} \rho_m^2 (P_m^{(i)}(x))^2 dx.
 \end{aligned}$$

Soit

$$\rho = \max_{m \in \mathbb{N}^*} \{|\rho_m|\}$$

alors

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2} \int_0^{x_k} \sum_{m=1}^{\infty} \rho_m^2 (P_m^{(i)}(x))^2 dx \\
 &\leq \rho^2 \int_0^{x_k} \sum_{m=1}^{\infty} (P_m^{(i)}(x))^2 dx \\
 &= \rho^2 \|e^{(i)}(x, y)\|_{L^2(\Omega_1)}^2
 \end{aligned}$$

Chapitre 1. Problème Continu

ce qui donne

$$\|e^{(i+1)}(x, y)\|_{L^2(\Omega_1)} \leq \rho \|e^{(i)}(x, y)\|_{L^2(\Omega_1)}$$

de même

$$\begin{aligned} \|E^{(i+1)}(x, y)\|_{L^2(\Omega_2)}^2 &= \int_0^1 \left[\int_{x_r}^1 |E^{(i+1)}(x, y)|^2 dx \right] dy \\ &= \int_0^1 \left[\int_{x_r}^1 \left(\sum_{m=1}^{\infty} Q_m^{(i+1)}(x) \sin m\pi y \right)^2 dx \right] dy \\ &= \int_0^1 \left[\int_{x_r}^1 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Q_m^{(i+1)}(x) Q_n^{(i+1)}(x) \sin m\pi y \sin n\pi y dx \right] dy \\ &= \int_{x_r}^1 \left[\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Q_m^{(i+1)}(x) Q_n^{(i+1)}(x) \int_0^1 \sin m\pi y \sin n\pi y dy \right] dx \\ &= \int_{x_r}^1 \left[\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Q_m^{(i+1)}(x) Q_n^{(i+1)}(x) \int_0^1 \frac{\cos(m-n)\pi y - \cos(m+n)\pi y}{2} dy \right] dx \\ &= \int_{x_r}^1 \left[\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Q_m^{(i+1)}(x) Q_n^{(i+1)}(x) \left(\frac{1}{2} \delta_{m,n} \right) \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{x_r}^1 \sum_{m=1}^{\infty} (Q_m^{(i+1)}(x))^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{x_r}^1 \sum_{m=1}^{\infty} \rho_m^2 (Q_m^{(i)}(x))^2 dx. \end{aligned}$$

Soit

$$\rho = \max_{m \in \mathbb{N}^*} \{|\rho_m|\}$$

Chapitre 1. Problème Continu

alors

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^{x_k} \sum_{m=1}^{\infty} \rho_m^2 (Q_m^{(i)}(x))^2 dx \\ & \leq \rho^2 \int_0^{x_k} \sum_{m=1}^{\infty} (Q_m^{(i)}(x))^2 dx \\ & = \rho^2 \|E^{(i)}(x, y)\|_{L^2(\Omega_2)}^2 \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\|E^{(i+1)}(x, y)\|_{L^2(\Omega_2)} \leq \rho \|E^{(i)}(x, y)\|_{L^2(\Omega_2)}.$$

■

Théorème 1.2 *Sous les notations et les conditions précédentes, et si $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$, alors on a les estimations suivantes*

1) si $a = c = 0$, on a

$$\rho = \frac{\sinh w_1(1 - x_k)}{\sinh w_1 x_k} \frac{\sinh w_1 x_r}{\sinh w_1(1 - x_r)} < 1$$

2) si $b = d = R = 0$, on a

$$\rho = \frac{\cosh w_1(1 - x_k)}{\cosh w_1 x_k} \frac{\cosh w_1 x_r}{\cosh w_1(1 - x_r)} < 1$$

3) si $a = d = R = 0$ et $0 < x_r < x_k < \frac{1}{2} < 1$, on a

$$\rho = \frac{\sinh w_1(1 - x_k)}{\sinh w_1 x_k} \frac{\cosh w_1 x_r}{\cosh w_1(1 - x_r)} < 1$$

Preuve. 1) Pour 1^{ère} cas

$$\bar{\rho}_m = \frac{b\beta_1 \sinh w_m(1 - x_k)}{b\beta_0 \sinh w_m x_k}, \text{ et } \tilde{\rho}_m = \frac{d\beta_0 \sinh w_m x_r}{d\beta_1 \sinh w_m(1 - x_r)}$$

alors

$$\rho_m = \bar{\rho}_m \tilde{\rho}_m = \frac{\sinh w_m(1 - x_k)}{\sinh w_m x_k} \frac{\sinh w_m x_r}{\sinh w_m(1 - x_r)}$$

comme ρ_m est une suite décroissante on trouve

$$\rho_m \leq \rho_1, \forall m \in \mathbb{N}^*$$

Chapitre 1. Problème Continu

donc

$$\rho = \max_{m \in \mathbb{N}^*} \{|\rho_m|\} = |\rho_1| = \frac{\sinh w_1(1-x_k)}{\sinh w_1 x_k} \frac{\sinh w_1 x_r}{\sinh w_1(1-x_r)}$$

Montrons que $\rho < 1$, en effet on a

$$\begin{aligned} w_1(1-x_k) &< w_1(1-x_r) \Rightarrow \sinh w_1(1-x_k) < \sinh w_1(1-x_r) \\ &\Rightarrow \frac{\sinh w_1(1-x_k)}{\sinh w_1(1-x_r)} < 1 \longrightarrow (*) \end{aligned}$$

et

$$w_1 x_r < w_1 x_k \Rightarrow \sinh w_1 x_r < \sinh w_1 x_k \Rightarrow \frac{\sinh w_1 x_r}{\sinh w_1 x_k} < 1 \longrightarrow (**)$$

de (*) et (**) on obtient

$$\rho = \frac{\sinh w_m(1-x_k)}{\sinh w_m x_k} \frac{\sinh w_m x_r}{\sinh w_m(1-x_r)} < 1.$$

2) Pour le 2^{eme} cas

$$\bar{\rho}_m = \frac{-a\beta_1 w_m \cosh w_m(1-x_k)}{a\beta_0 w_m \cosh w_m x_k}, \text{ et } \tilde{\rho}_m = \frac{-c\beta_0 w_m \cosh w_m x_r}{c\beta_1 w_m \cosh w_m(1-x_r)}$$

alors

$$\rho_m = \bar{\rho}_m \cdot \tilde{\rho}_m = \frac{\cosh w_m(1-x_k)}{\cosh w_m x_k} \frac{\cosh w_m x_r}{\cosh w_m(1-x_r)}$$

comme ρ_m est une suite décroissante on trouve

$$\rho_m \leq \rho_1, \forall m \in \mathbb{N}^*$$

donc

$$\rho = \max_{m \in \mathbb{N}^*} \{|\rho_m|\} = |\rho_1| = \frac{\cosh w_1(1-x_k)}{\cosh w_1 x_k} \frac{\cosh w_1 x_r}{\cosh w_1(1-x_r)}.$$

Montrons que $\rho < 1$, en effet on a

$$\begin{aligned} w_1(1-x_k) &< w_1(1-x_r) \Rightarrow \cosh w_1(1-x_k) < \cosh w_1(1-x_r) \\ &\Rightarrow \frac{\cosh w_1(1-x_k)}{\cosh w_1(1-x_r)} < 1 \longrightarrow (*) \end{aligned}$$

et

$$w_1 x_r < w_1 x_k \Rightarrow \cosh w_1 x_r < \cosh w_1 x_k \Rightarrow \frac{\cosh w_1 x_r}{\cosh w_1 x_k} < 1 \longrightarrow (**)$$

Chapitre 1. Problème Continu

de (*) et (**) on obtient

$$\rho = \frac{\cosh w_m(1-x_k)}{\cosh w_m x_k} \frac{\cosh w_m x_r}{\cosh w_m(1-x_r)} < 1.$$

3) Pour le 3^{eme} cas

$$\bar{\rho}_m = \frac{b\beta_1 \sinh w_m(1-x_k)}{b\beta_0 \sinh w_m x_k}, \text{ et } \tilde{\rho}_m = \frac{-c\beta_0 \cosh w_m x_r}{c\beta_1 \cosh w_m(1-x_r)}$$

alors

$$\rho_m = \bar{\rho}_m \cdot \tilde{\rho}_m = \frac{\sinh w_m(1-x_k)}{\sinh w_m x_k} \frac{-\cosh w_m x_r}{\cosh w_m(1-x_r)}$$

comme ρ_m est une suite décroissante on trouve

$$\rho_m \leq \rho_1, \forall m \in \mathbb{N}^*$$

donc

$$\rho = \max_{m \in \mathbb{N}^*} \{|\rho_m|\} = |\rho_1| = \frac{\sinh w_1(1-x_k)}{\sinh w_1 x_k} \frac{\cosh w_1 x_r}{\cosh w_1(1-x_r)}.$$

Montrons que $\rho < 1$, comme $0 < x_r < \frac{1}{2} < x_k < 1$.

$$\sinh w_1(1-x_k) < \sinh w_1 x_k \text{ si } 1-x_k < x_k \Rightarrow \frac{\sinh w_1(1-x_k)}{\sinh w_1 x_k} < 1 \longrightarrow (*)$$

et

$$\cosh w_1 x_r < \cosh w_1(1-x_r) \text{ si } x_r < (1-x_r) \Rightarrow \frac{\cosh w_1 x_r}{\cosh w_1(1-x_r)} < 1 \longrightarrow (**)$$

de (*) et (**) on obtient

$$\rho = \frac{\sinh w_1(1-x_k)}{\sinh w_1 x_k} \frac{\cosh w_1 x_r}{\cosh w_1(1-x_r)} < 1 \text{ si } 0 < x_r < \frac{1}{2} < x_k < 1.$$

■

Théorème 1.3 *Sous les notations et les conditions précédentes, et si $\beta_0 = \beta_1 = 0$, alors on a les estimations suivantes*

1) si $b = d = 0$, on a

$$\rho = \frac{\sinh w_1(1-x_k)}{\sinh w_1(1-x_r)} \frac{\sinh w_1 x_r}{\sinh w_1 x_k} < 1$$

2) si $a = c = R = 0$, on a

$$\rho = \frac{\cosh w_1(1-x_k)}{\cosh w_1(1-x_r)} \frac{\cosh w_1 x_r}{\cosh w_1 x_k} < 1$$

Chapitre 1. Problème Continu

3) si $a = d = R = 0$ et $0 < x_r < x_k < \frac{1}{2} < 1$, on a

$$\rho = \frac{\cosh w_1(1 - x_k)}{\cosh w_1 x_k} \frac{\sinh w_1 x_r}{\sinh w_1(1 - x_r)} < 1$$

Preuve. La démonstration est la même qu'à celle donnée dans le théorème (1.2). ■

Remarque 1.1 La condition mixte de Dirichlet–Neumann sur Γ peut être remplacée par deux conditions indépendantes une de Dirichlet et l'autre de Neumann, et dans ce cas le problème aux limites s'écrit alors

$$\begin{cases} -\Delta u + 2R \frac{\partial u}{\partial x} + q^2 u = f \\ \alpha(x, y) \frac{\partial u}{\partial n} = \phi_1, \quad (x, y) \in \{(x, y)/x = 0 \text{ ou } x = 1, 0 < y < 1\} \\ \beta(x, y) u = \phi_2, \quad (x, y) \in \{(x, y)/y = 0 \text{ ou } y = 1, 0 < x < 1\} \end{cases}$$

Le Procédé Alternatif de Schwarz peut être appliqué facilement à ce problème.

Théorème 1.4 Sous les notations et les conditions précédentes, et si $\alpha_0 = \beta_1 = R = 0$, alors on a les estimations suivantes

1) si $b = c = 0$, on a

$$\rho = \frac{\sinh w_1 x_r}{\cosh w_1 x_k} \frac{\sinh w_1(1 - x_k)}{\cosh w_1(1 - x_r)} < 1$$

2) si $a = c = 0$, on a

$$\rho = \frac{\sinh w_1 x_r}{\sinh w_1 x_k} \frac{\cosh w_1(1 - x_k)}{\cosh w_1(1 - x_r)} < 1$$

3) si $b = d = 0$ et $0 < x_r < x_k < \frac{1}{2} < 1$, on a

$$\rho = \frac{\cosh w_1 x_r}{\cosh w_1 x_k} \frac{\sinh w_1(1 - x_k)}{\sinh w_1(1 - x_r)} < 1$$

Preuve. La démonstration est la même qu'à celle donnée dans le théorème (1.2). ■

Remarque 1.2 Du théorème (1.4) on sait que le facteur de convergence dans le cas (1) est plus petit que les facteurs de convergence dans les cas (2) et (3). On déduit alors que dans le cas $\alpha_0 = \beta_1 = R = 0$, on choisit naturellement dans le Procédé Alternatif de Schwarz le cas $b = c = 0$.

Chapitre 1. Problème Continu

Théorème 1.5 *On a les estimations d'erreurs suivantes*

$$\|e^{(i+1)}(x, y)\|_{L^2(\Omega_1)} \leq \rho^i \|E^{(0)}(x_k, y)\|_{L^2(\Omega_2)}$$

et

$$\|E^{(i+1)}(x, y)\|_{L^2(\Omega_2)} \leq \rho^{i+1} \|E^{(0)}(x_k, y)\|_{L^2(\Omega_2)}$$

Preuve. Du théorème (1.1), et par induction sur l'itération i , on a

$$\begin{aligned} \|e^{(i+1)}(x, y)\|_{L^2(\Omega_1)} &\leq \rho \|e^{(i)}(x, y)\|_{L^2(\Omega_1)} \\ &\leq \rho^2 \|e^{(i-1)}(x, y)\|_{L^2(\Omega_1)} \\ &\leq \dots \leq \rho^{p+1} \|e^{(i-p)}(x, y)\|_{L^2(\Omega_1)} \end{aligned}$$

on pose

$$p = i - 1$$

ce qui donne

$$\|e^{(i+1)}(x, y)\|_{L^2(\Omega_1)} \leq \rho^i \|e^{(1)}(x, y)\|_{L^2(\Omega_1)}$$

par le principe du maximum

$$\|e^{(1)}(x, y)\|_{L^2(\Omega_1)} \leq \|e^{(1)}(x_k, y)\|_{L^2(\Gamma'_1)} = \|E^{(0)}(x_k, y)\|_{L^2(\Gamma'_1)} \leq \|E^{(0)}(x_k, y)\|_{L^2(\Omega_2)}$$

d'où

$$\|e^{(i+1)}(x, y)\|_{L^2(\Omega_1)} \leq \rho^i \|E^{(0)}(x_k, y)\|_{L^2(\Omega_2)}$$

de manière analogue et du théorème (1.1), on a

$$\begin{aligned} \|E^{(i+1)}(x, y)\|_{L^2(\Omega_2)} &\leq \rho \|E^{(i)}(x, y)\|_{L^2(\Omega_2)} \\ &\leq \rho^2 \|E^{(i-1)}(x, y)\|_{L^2(\Omega_2)} \\ &\leq \dots \leq \rho^{p+1} \|E^{(i-p)}(x, y)\|_{L^2(\Omega_2)} \end{aligned}$$

on pose

$$p = i$$

ce qui donne

$$\|E^{(i+1)}(x, y)\|_{L^2(\Omega_2)} \leq \rho^{i+1} \|E^{(0)}(x, y)\|_{L^2(\Omega_2)}$$

Chapitre 1. Problème Continu

par le principe du maximum on a

$$\|E^{(0)}(x, y)\|_{L^2(\Omega_2)} \leq \|E^{(0)}(x_k, y)\|_{L^2(\Omega_2)}$$

d'où

$$\|E^{(i+1)}(x, y)\|_{L^2(\Omega_2)} \leq \rho^{i+1} \|E^{(0)}(x_k, y)\|_{L^2(\Omega_2)}.$$

■

Corollaire 1.1 *Les suites itérés de schwarz convergent vers la solution exacte u^* du problème (1), et on a*

$$\lim_{i \rightarrow \infty} e^{(i)}(x, y) = 0 \quad \text{dans } \Omega_1 \quad \text{et} \quad \lim_{i \rightarrow \infty} E^{(i)}(x, y) = 0 \quad \text{dans } \Omega_2$$

plus précisément on a

$$\lim_{i \rightarrow \infty} u^{(i)}(x, y) = u^*(x, y) \quad \text{dans } \Omega_1 \quad \text{et} \quad \lim_{i \rightarrow \infty} v^{(i)}(x, y) = u^*(x, y) \quad \text{dans } \Omega_2$$

Preuve. Puisque le facteur de convergence $0 \leq \rho < 1$, alors du théorème précédent on obtient le résultat. ■

1.4 Valeur Maximale du Facteur de Convergence

- Cas $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$ et $a = c = 0$

Soit : $x_k = x_r + d$, ainsi on peut écrire

$$\rho(x_r, x_k) = \rho(x_r, x_r + d) = \frac{\sinh w_1(1 - x_r - d)}{\sinh w_1(1 - x_r)} \frac{\sinh w_1 x_r}{\sinh w_1(x_r - d)}$$

soit d fixe, on dérive $\rho(x_r, x_r + d)$ par rapport à la variable x_r , on trouve

$$\begin{aligned} \frac{d\rho(x_r, x_r + d)}{dx_r} &= 0 \\ \Rightarrow 2w_1 \sinh w_1(2x_r - 1 + d) &= 0 \\ \Rightarrow (2x_r - 1 + d) &= 0 \end{aligned}$$

Chapitre 1. Problème Continu

on obtient alors

$$\begin{aligned}x_r &= \frac{1-d}{2} \\x_k &= \frac{1+d}{2}\end{aligned}$$

dans ce cas le facteur de convergence $\rho(x_r, x_r + d)$ atteint sa valeur maximale

$$\begin{aligned}\rho\left(\frac{1-d}{2}, \frac{1+d}{2}\right) &= \max_{0 < x_r < 1} \rho(x_r, x_r + d) = \left(\frac{\sinh w_1\left(\frac{1-d}{2}\right)}{\sinh w_1\left(\frac{1+d}{2}\right)} \right)^2 \\0 &< \rho \leq \rho\left(\frac{1-d}{2}, \frac{1+d}{2}\right)\end{aligned}$$

1.5 Taux de Convergence

Corollaire 1.2 Si $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$, $a = c = 0$, le taux de convergence du Procédé Alternatif de Schwarz vérifie.

$$R \geq -\ln \rho\left(\frac{1-d}{2}, \frac{1+d}{2}\right)$$

Preuve. En effet

$$\begin{aligned}\rho(x_r, x_k) &\leq \rho\left(\frac{1-d}{2}, \frac{1+d}{2}\right) \\ \Rightarrow -\ln \rho(x_r, x_k) &\geq -\ln \rho\left(\frac{1-d}{2}, \frac{1+d}{2}\right) \\ \Rightarrow R &\geq -\ln \rho\left(\frac{1-d}{2}, \frac{1+d}{2}\right)\end{aligned}$$

■

- Cas $q = 0$, $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$ et $a = c = 0$

$$\rho(x_r, x_k) = \frac{\sinh \sqrt{R^2 + \pi^2}(1 - x_k) \sinh \sqrt{R^2 + \pi^2}x_r}{\sinh \sqrt{R^2 + \pi^2}x_k \sinh \sqrt{R^2 + \pi^2}(1 - x_r)}$$

qui est la valeur maximale du facteur de convergence.

Chapitre 2

Problème Discret

2.1 Position du Problème Discrèt

On discrétise le domaine Ω , en considérant un maillage Ω^h dont les noeuds (x_s, y_j) tel que

$$x_s = sh, x_j = jh$$

où $h = \frac{1}{N}$, $N \in \mathbb{N}^*$ est le pas de discrétisation. Les dérivées $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, et $\frac{\partial u}{\partial x}$ sont remplacées par les différences finies centrales

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{u_{s+1,j} - 2u_{s,j} + u_{s-1,j}}{h^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{u_{s,j+1} - 2u_{s,j} + u_{s,j-1}}{h^2} \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{u_{s+1,j} - u_{s-1,j}}{2h}\end{aligned}$$

Conditions aux limites :

En utilisant le développement de *Taylor*, on obtient

$$\begin{aligned}u(h, jh) &= u(0, jh) + h \frac{\partial u}{\partial x}(0, jh) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\xi, jh), \quad 0 < \xi < h \\ \frac{u(h, jh) - u(0, jh)}{h} &= \frac{\partial u}{\partial x}(0, jh) + \frac{h}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\xi, jh), \quad 0 < \xi < h \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, jh) &\simeq \frac{u(h, jh) - u(0, jh)}{h}, \quad 0 < j < N\end{aligned}$$

Chapitre 2. Problème Discret

alors on a

$$\begin{aligned}
 L_1 u(0, y) &= \alpha(0, y) \frac{\partial u}{\partial n}(0, y) + \beta(0, y) u(0, y) = \phi(0, y), \quad 0 < y < 1 \\
 &= -\alpha_0 \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) + \beta_0 u(0, y) = \phi(0, y), \quad 0 < y < 1 \\
 L_1 u(0, jh) &\simeq -\alpha_0 \left(\frac{u(h, jh) - u(0, jh)}{h} \right) + \beta_0 u(0, jh) = \phi(0, jh) \\
 &\simeq \alpha_0 \left(\frac{u(0, jh) - u(h, jh)}{h} \right) + \beta_0 u(0, jh) = \phi(0, jh) \\
 &\Rightarrow \alpha_0 (u(0, jh) - u(h, jh)) + \beta_0 h u(0, jh) = h \phi(0, jh)
 \end{aligned}$$

on pose

$$L_0 u_{0,j} = \alpha_0 (u_{0,j} - u_{1,j}) + \beta_0 h u_{0,j} = h \phi_{0,j}, \quad 0 < j < N$$

et

$$\begin{aligned}
 u((N-1)h, jh) &= u(Nh, jh) - h \frac{\partial u}{\partial x}(Nh, jh) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\xi, jh), \quad (N-1)h < \xi < Nh \\
 \frac{\partial u}{\partial x}(Nh, jh) &= \frac{u(Nh, jh) - u((N-1)h, jh)}{h} + \frac{h}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\xi, jh) \\
 \frac{\partial u}{\partial x}(Nh, jh) &\simeq \frac{u(Nh, jh) - u((N-1)h, jh)}{h} \simeq \frac{u_{N,j} - u_{N-1,j}}{h}
 \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
 L_1 u(1, jh) &\simeq \alpha_1 \left[\frac{u_{N,j} - u_{N-1,j}}{h} \right] + \beta_1 u_{N,j} = \phi_{N,j}, \quad 0 < j < N \\
 &\Rightarrow \alpha_1 (u_{N,j} - u_{N-1,j}) + \beta_1 h u_{N,j} = h \phi_{N,j}, \quad 0 < j < N
 \end{aligned}$$

on pose aussi

$$L_N u_{N,j} = \alpha_1 (u_{N,j} - u_{N-1,j}) + \beta_1 h u_{N,j} = h \phi_{N,j}, \quad 0 < j < N$$

en substituant dans le problème (1), nous obtenons le système :

$$\left\{ \begin{aligned}
 (4 + q^2 h^2) u_{s,j} - (1 + Rh) u_{s-1,j} - (1 - Rh) u_{s+1,j} - u_{s,j+1} - u_{s,j-1} &= h^2 f_{s,j} \\
 u_{s,0} = \phi_{s,0}, \quad u_{s,N} = \phi_{s,N}, \quad &\text{pour } 0 < s, j < N \\
 L_0 u_{0,j} = \alpha_0 (u_{0,j} - u_{1,j}) + \beta_0 h u_{0,j} &= h \phi_{0,j} \\
 L_N u_{N,j} = \alpha_1 (u_{N,j} - u_{N-1,j}) + \beta_1 h u_{N,j} &= h \phi_{N,j}
 \end{aligned} \right. \quad (23)$$

Chapitre 2. Problème Discret

soit $x_r = rh$, $x_k = kh$, en utilisant le développement de *Taylor* alors on a :

$$\begin{aligned} L_k u_{k,j}^{(i+1)} &= L_k v_{k,j}^{(i)} \Leftrightarrow a(u_{k,j}^{(i+1)} - u_{k-1,j}^{(i+1)}) + bh u_{k,j}^{(i+1)} = a(v_{k,j}^{(i)} - v_{k-1,j}^{(i)}) + bh v_{k,j}^{(i)} \\ L_r v_{r,j}^{(i+1)} &= L_r u_{r,j}^{(i+1)} \Leftrightarrow c(v_{r,j}^{(i+1)} - u_{r+1,j}^{(i+1)}) + dh v_{r,j}^{(i+1)} = c(u_{r,j}^{(i+1)} - u_{r+1,j}^{(i+1)}) + dh u_{r,j}^{(i+1)} \end{aligned}$$

2.2 Procédé Alternatif de Schwarz

On définit le Procédé Alternatif de *Schwarz* Discret comme suit :

$$\begin{cases} A_h u_{s,j}^{(i+1)} = h^2 f_{s,j}, \text{ pour } 0 < j < N, 0 < s < k \\ u_{s,0}^{(i+1)} = \phi_{s,0}, u_{s,N}^{(i+1)} = \phi_{s,N} \\ L_0 u_{0,j}^{(i+1)} = h \phi_{0,j} \\ L_k u_{k,j}^{(i+1)} = a(u_{k,j}^{(i+1)} - u_{k-1,j}^{(i+1)}) + bh u_{k,j}^{(i+1)} = L_k v_{k,j}^{(i)} \end{cases} \quad (24)$$

$i = 0, 1, 2, \dots$

et

$$\begin{cases} A_h v_{s,j}^{(i+1)} = h^2 f_{s,j}, \text{ pour } 0 < j < N, r < s < N \\ v_{s,0}^{(i+1)} = \phi_{s,0}, v_{s,N}^{(i+1)} = \phi_{s,N} \\ L_r v_{r,j}^{(i+1)} = c(v_{r,j}^{(i+1)} - v_{r+1,j}^{(i+1)}) + dh v_{r,j}^{(i+1)} = L_r u_{r,j}^{(i+1)} \\ L_N v_{N,j}^{(i+1)} = h \phi_{N,j} \end{cases} \quad (25)$$

$i = 0, 1, 2, \dots$

où a, b, c, d sont des constantes données, et $L_k v_{k,j}^{(0)}$ est une valeur initial.

2.3 Estimation d'Erreur Discrète.

On note la solution exacte du problème (23) par $u_{s,j}^*$ et les erreurs par

$$e_{s,j}^{(i)} = u_{s,j}^* - u_{s,j}^{(i)}, \text{ et } E_{s,j}^{(i)} = u_{s,j}^* - v_{s,j}^{(i)}$$

Chapitre 2. Problème Discret

alors les erreurs satisfont les systèmes suivants

$$\left\{ \begin{array}{l} A_h e_{s,j}^{(i+1)} = 0, \text{ pour } 0 < j < N, 0 < s < k \\ L_0 e_{0,j}^{(i+1)} = 0 \\ e_{s,0}^{(i+1)} = e_{s,N}^{(i+1)} = 0 \\ L_k e_{k,j}^{(i+1)} = L_k E_{k,j}^{(i)} \end{array} \right. \quad (26)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} A_h E_{s,j}^{(i+1)} = 0, \text{ pour } 0 < j < N, r < s < N \\ E_{s,0}^{(i+1)} = E_{s,N}^{(i+1)} = 0 \\ L_r E_{r,j}^{(i+1)} = L_r e_{r,j}^{(i+1)} \\ L_N E_{N,j}^{(i+1)} = 0 \end{array} \right. \quad (27)$$

où

$$e_{s,j}^{(i+1)} = \sum_{m=1}^{N-1} P_{s,m}^{(i+1)} \sin j m \pi h$$

et

$$E_{s,j}^{(i+1)} = \sum_{m=1}^{N-1} Q_{s,m}^{(i+1)} \sin j m \pi h.$$

Soit les vecteurs solutions

$$e_S^{(i+1)} = \begin{bmatrix} e_{S,1}^{(i+1)} \\ \vdots \\ e_{S,N-1}^{(i+1)} \end{bmatrix} = \sum_{m=1}^{N-1} P_{s,m}^{(i+1)} \begin{bmatrix} \sin m \pi h \\ \vdots \\ \sin (N-1) m \pi h \end{bmatrix} \quad 0 < s < k \quad (28)$$

et

$$E_S^{(i+1)} = \begin{bmatrix} E_{S,1}^{(i+1)} \\ \vdots \\ E_{S,N-1}^{(i+1)} \end{bmatrix} = \sum_{m=1}^{N-1} Q_{s,m}^{(i+1)} \begin{bmatrix} \sin m \pi h \\ \vdots \\ \sin (N-1) m \pi h \end{bmatrix} \quad r < s < N \quad (29)$$

Chapitre 2. Problème Discret

on remplace l'expression (28) dans le système (26) on trouve

$$\begin{aligned}
 A_h e_{s,j}^{(i+1)} &= (4 + q^2 h^2) \sum_{m=1}^{N-1} P_{s,m}^{(i+1)} \sin jm\pi h - (1 + Rh) \sum_{m=1}^{N-1} P_{s-1,m}^{(i+1)} \sin jm\pi h - \dots \\
 &\quad (1 - Rh) \sum_{m=1}^{N-1} P_{s+1,m}^{(i+1)} \sin jm\pi h - \sum_{m=1}^{N-1} P_{s,m}^{(i+1)} \sin(j+1)m\pi h - \dots \\
 &\quad \sum_{m=1}^{N-1} P_{s,m}^{(i+1)} \sin(j-1)m\pi h \\
 &= \sum_{m=1}^{N-1} \left\{ (4 + q^2 h^2 - 2 \cos m\pi h) P_{s,m}^{(i+1)} - (1 + Rh) P_{s-1,m}^{(i+1)} - (1 - Rh) P_{s+1,m}^{(i+1)} \right\} \dots \\
 &\quad \sin jm\pi h \\
 &= \sum_{m=1}^{N-1} \left\{ 2w_m P_{s,m}^{(i+1)} - (1 + Rh) P_{s-1,m}^{(i+1)} - (1 - Rh) P_{s+1,m}^{(i+1)} \right\} \sin jm\pi h
 \end{aligned}$$

où

$$w_m = 1 + \frac{q^2 h^2}{2} + 2 \sin^2 \frac{m\pi h}{2}$$

Conditions aux limites :

$$\begin{aligned}
 L_0 e_{0,j}^{(i+1)} &= 0 \iff \alpha_0 (e_{0,j}^{(i+1)} - e_{1,j}^{(i+1)}) + \beta_0 h e_{0,j}^{(i+1)} = 0 \\
 &\iff \sum_{m=1}^{N-1} \left[\alpha_0 (P_{0,m}^{(i+1)} - P_{1,m}^{(i+1)}) + \beta_0 h P_{0,m}^{(i+1)} \right] \sin jm\pi h = 0 \\
 &\iff \sum_{m=1}^{N-1} L_0 P_{0,m}^{(i+1)} \sin jm\pi h = 0, \quad 0 < j < N
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L_k e_{k,j}^{(i+1)} &= L_k E_{k,j}^{(i+1)} \\
 &\iff a(e_{k,j}^{(i+1)} - e_{k-1,j}^{(i+1)}) + b h e_{k,j}^{(i+1)} = a(E_{k,j}^{(i)} - E_{k-1,j}^{(i)}) + b h E_{k,j}^{(i)} \\
 &\iff \sum_{m=1}^{N-1} \left[a(P_{k,m}^{(i+1)} - P_{k-1,m}^{(i+1)}) + b h P_{k,m}^{(i+1)} \right] \sin jm\pi h = \sum_{m=1}^{N-1} L_k Q_{k,m}^{(i)} \sin jm\pi h \\
 &\iff \sum_{m=1}^{N-1} L_k (P_{k,m}^{(i+1)} - Q_{k,m}^{(i)}) \sin jm\pi h = 0
 \end{aligned}$$

ainsi le problème (26) s'écrit alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{m=1}^{N-1} \left[2w_m P_{s,m}^{(i+1)} - (1+Rh) P_{s-1,m}^{(i+1)} - (1-Rh) P_{s+1,m}^{(i+1)} \right] \begin{bmatrix} \sin m\pi h \\ \vdots \\ \sin (N-1)m\pi h \end{bmatrix} = 0 \\ \sum_{m=1}^{N-1} L_k \left(P_{k,m}^{(i+1)} - Q_{k,m}^{(i)} \right) \begin{bmatrix} \sin m\pi h \\ \vdots \\ \sin (N-1)m\pi h \end{bmatrix} = 0 \\ \sum_{m=1}^{N-1} L_0 P_{0,m}^{(i+1)} \begin{bmatrix} \sin m\pi h \\ \vdots \\ \sin (N-1)m\pi h \end{bmatrix} = 0. \end{array} \right. \quad (30)$$

De manière analogue pour le problème (27)

$$A_h E_{s,j}^{(i+1)} = \sum_{m=1}^{N-1} \left\{ 2w_m Q_{s,m}^{(i+1)} - (1+Rh) Q_{s-1,m}^{(i+1)} - (1-Rh) Q_{s+1,m}^{(i+1)} \right\} \sin jm\pi h$$

Conditions aux limites :

$$\begin{aligned} L_N e_{N,j}^{(i+1)} &= 0 \iff \alpha_1 (E_{N,j}^{(i+1)} - E_{N-1,j}^{(i+1)}) + \beta_1 h E_{N,j}^{(i+1)} = 0 \\ &\iff \sum_{m=1}^{N-1} \left[\alpha_1 (Q_{N,m}^{(i+1)} - Q_{N-1,m}^{(i+1)}) + \beta_1 h Q_{N,m}^{(i+1)} \right] \sin jm\pi h = 0 \\ &\iff \sum_{m=1}^{N-1} L_N Q_{N,m}^{(i+1)} \sin jm\pi h = 0, \quad 0 < j < N \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_r E_{r,j}^{(i+1)} &= L_r e_{r,j}^{(i+1)} \\ &\iff c(E_{r,j}^{(i+1)} - E_{r+1,j}^{(i+1)}) + dh E_{r,j}^{(i+1)} = c(e_{r,j}^{(i+1)} - e_{r+1,j}^{(i+1)}) + dh e_{r,j}^{(i+1)} \\ &\iff \sum_{m=1}^{N-1} \left[c(Q_{r,m}^{(i+1)} - Q_{r+1,m}^{(i+1)}) + dh Q_{r,m}^{(i+1)} \right] \sin jm\pi h = \sum_{m=1}^{N-1} L_r P_{r,m}^{(i+1)} \sin jm\pi h \\ &\iff \sum_{m=1}^{N-1} L_r (Q_{r,m}^{(i+1)} - P_{r,m}^{(i+1)}) \sin jm\pi h = 0 \end{aligned}$$

alors on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{m=1}^{N-1} \left[2w_m Q_{s,m}^{(i+1)} - (1+Rh) Q_{s-1,m}^{(i+1)} - (1-Rh) Q_{s+1,m}^{(i+1)} \right] \begin{bmatrix} \sin m\pi h \\ \vdots \\ \sin (N-1)m\pi h \end{bmatrix} = 0 \\ \sum_{m=1}^{N-1} L_r \left(Q_{r,m}^{(i+1)} - P_{r,m}^{(i+1)} \right) \begin{bmatrix} \sin m\pi h \\ \vdots \\ \sin (N-1)m\pi h \end{bmatrix} = 0 \\ \sum_{m=1}^{N-1} L_N Q_{N,m}^{(i+1)} \begin{bmatrix} \sin m\pi h \\ \vdots \\ \sin (N-1)m\pi h \end{bmatrix} = 0. \end{array} \right. \quad (31)$$

Finalement on a les deux systèmes suivants

$$\left\{ \begin{array}{l} 2w_m P_{s,m}^{(i+1)} - (1+Rh) P_{s-1,m}^{(i+1)} - (1-Rh) P_{s+1,m}^{(i+1)} = 0 \\ L_k P_{k,m}^{(i+1)} = L_k Q_{k,m}^{(i)} \\ L_0 P_{0,m}^{(i+1)} = 0 \end{array} \right. \quad (32)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} 2w_m Q_{s,m}^{(i+1)} - (1+Rh) Q_{s-1,m}^{(i+1)} - (1-Rh) Q_{s+1,m}^{(i+1)} = 0 \\ L_r Q_{r,m}^{(i+1)} = L_r P_{r,m}^{(i+1)} \\ L_N Q_{N,m}^{(i+1)} = 0 \end{array} \right. \quad (33)$$

Cherchons la solution du système (32) :

On a par exemple pour $N = 5, k = 4, s = 3$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2w_m P_{1,m}^{(i+1)} - (1+Rh) P_{0,m}^{(i+1)} - (1-Rh) P_{2,m}^{(i+1)} = 0 \\ 2w_m P_{2,m}^{(i+1)} - (1+Rh) P_{1,m}^{(i+1)} - (1-Rh) P_{3,m}^{(i+1)} = 0 \\ 2w_m P_{3,m}^{(i+1)} - (1+Rh) P_{2,m}^{(i+1)} - (1-Rh) P_{4,m}^{(i+1)} = 0 \end{array} \right.$$

et

$$\begin{aligned} P_{4,m}^{(i+1)} &= Q_{4,m}^{(i)} + \frac{a}{a+bh} (P_{3,m}^{(i+1)} - Q_{3,m}^{(i)}) \\ P_{0,m}^{(i+1)} &= \frac{\alpha_0}{\alpha_0 + \beta_0 h} P_{1,m}^{(i+1)} \end{aligned}$$

où $Q_{4,m}^{(0)}, Q_{3,m}^{(0)}$ sont données.

Chapitre 2. Problème Discret

En substituant dans le système précédent, on obtient

$$\begin{cases} \left(2w_m - (1 + Rh) \frac{\alpha_0}{\alpha_0 + \beta_0 h} \right) P_{1,m}^{(i+1)} - (1 - Rh) P_{2,m}^{(i+1)} = 0 \\ - (1 + Rh) P_{1,m}^{(i+1)} + 2w_m P_{2,m}^{(i+1)} - (1 - Rh) P_{3,m}^{(i+1)} = 0 \\ - (1 + Rh) P_{2,m}^{(i+1)} + \left(2w_m - (1 - Rh) \frac{a}{a + bh} \right) P_{3,m}^{(i+1)} = (1 - Rh) \left(Q_{4,m}^{(i)} - \frac{a}{a + bh} Q_{3,m}^{(i)} \right) \end{cases}$$

en utilisant la méthode de *Gramer*, la solution s'écrit alors

$$\begin{aligned} P_{1,m}^{(i+1)} &= \frac{(1 - Rh)^3 \left[Q_{4,m}^{(i)} - \frac{a}{a + bh} Q_{3,m}^{(i)} \right]}{\left[2w_m - \frac{\alpha_0(1 + Rh)}{\alpha_0 + \beta_0 h} \right] \left[4w_m^2 - \frac{2aw_m(1 - Rh)}{a + bh} - (1 - R^2 h^2) \right] \dots} \\ &\quad - (1 - Rh) \left[2w_m(1 - Rh) - \frac{a(1 - R^2 h^2)}{a + bh} \right] \\ P_{2,m}^{(i+1)} &= \frac{(1 - Rh)^2 \left[2w_m - \frac{\alpha_0(1 + Rh)}{\alpha_0 + \beta_0 h} \right] \left[Q_{4,m}^{(i)} - \frac{a}{a + bh} Q_{3,m}^{(i)} \right]}{\left[2w_m - \frac{\alpha_0(1 + Rh)}{\alpha_0 + \beta_0 h} \right] \left[4w_m^2 - \frac{2aw_m(1 - Rh)}{a + bh} - (1 - R^2 h^2) \right] \dots} \\ &\quad - (1 - Rh) \left[2w_m(1 - Rh) - \frac{a(1 - R^2 h^2)}{a + bh} \right] \\ P_{3,m}^{(i+1)} &= \frac{(1 - Rh) \left\{ 2w_m \left[2w_m - \frac{\alpha_0(1 + Rh)}{\alpha_0 + \beta_0 h} \right] - (1 - R^2 h^2) \right\} \left[Q_{4,m}^{(i)} - \frac{a}{a + bh} Q_{3,m}^{(i)} \right]}{\left[2w_m - \frac{\alpha_0(1 + Rh)}{\alpha_0 + \beta_0 h} \right] \left[4w_m^2 - \frac{2aw_m(1 - Rh)}{a + bh} - (1 - R^2 h^2) \right] \dots} \\ &\quad - (1 - Rh) \left[2w_m(1 - Rh) - \frac{a(1 - R^2 h^2)}{a + bh} \right] \\ m &= 1, 2, 3, 4; \quad i = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

de manière générale les solutions de (32) et (33) sont (voir[3]) :

$$\begin{cases} P_{s,m}^{(i+1)} = \frac{(aD_{1,m} + bD_{2,m})(cD_{3,m} + dD_{4,m})(T_m t_m)^k}{(aD_{5,m} + bD_{6,m})(cD_{7,m} + dD_{8,m})(T_m t_m)^{r+1}} P_{s,m}^{(i)} \\ \quad i = 1, 2, \dots; \quad m = 1, 2, \dots, N - 1, \quad 0 < s < k \\ Q_{s,m}^{(i+1)} = \frac{(aD_{1,m} + bD_{2,m})(cD_{3,m} + dD_{4,m})(T_m t_m)^k}{(aD_{5,m} + bD_{6,m})(cD_{7,m} + dD_{8,m})(T_m t_m)^{r+1}} Q_{s,m}^{(i)} \\ \quad i = 1, 2, \dots; \quad m = 1, 2, \dots, N - 1, \quad r < s < N \end{cases}$$

où

$$T_m = \frac{w_m + \sqrt{w_m^2 + R^2 h^2 - 1}}{1 - Rh}, \quad t_m = \frac{w_m - \sqrt{w_m^2 + R^2 h^2 - 1}}{1 - Rh}$$

$$T_m t_m = \frac{1 + Rh}{1 - Rh}, \quad g_m(x) = T_m^x - t_m^x$$

et

$$\begin{aligned} D_{1,m} &= -(\alpha_1 + h\beta_1)g_m(N - k + 1) + [T_m t_m(\alpha_1 + h\beta_1)]g_m(N - k) - \dots \\ &\quad \alpha_1 T_m t_m g_m(N - k - 1) \\ D_{2,m} &= -T_m t_m h(\alpha_1 + h\beta_1)g_m(N - k) - \alpha_1 T_m t_m h g_m(N - k - 1) \\ D_{3,m} &= -(\alpha_0 + h\beta_0)g_m(r + 1) + (\alpha_0 + h\beta_0 + \alpha_0 T_m t_m)g_m(r) - \alpha_0 T_m t_m g_m(r - 1) \\ D_{4,m} &= h(\alpha_0 + h\beta_0)g_m(r) - \alpha_0 T_m t_m h g_m(r - 1) \\ D_{5,m} &= -(\alpha_0 + h\beta_0)g_m(k) + (\alpha_0 + h\beta_0 + \alpha_0 T_m t_m)g_m(k - 1) - \alpha_0 T_m t_m g_m(k - 2) \\ D_{6,m} &= -h(\alpha_0 + h\beta_0)g_m(k) + \alpha_0 T_m t_m h g_m(k - 1) \\ D_{7,m} &= -(\alpha_1 + h\beta_1)g_m(N - r) + [(\alpha_1 + h\beta_1)T_m t_m + \alpha_1]g_m(N - r - 1) - \dots \\ &\quad \alpha_1 T_m t_m g_m(N - r - 2) \\ D_{8,m} &= -(\alpha_1 + h\beta_1)h g_m(N - r) + \alpha_1 h g_m(N - r - 1) \end{aligned}$$

alors les composantes des vecteurs solutions $e_s^{(i+1)}, E_s^{(i+1)}$ s'écrivent sous la forme finale

$$e_{s,j}^{(i+1)} = \sum_{m=1}^{N-1} P_{s;m}^{(i+1)} \sin j m \pi h = \sum_{m=1}^{N-1} \bar{\rho}_m P_{s;m}^{(i)} \sin j m \pi h \quad (34)$$

et

$$E_{s,j}^{(i+1)} = \sum_{m=1}^{N-1} Q_{s;m}^{(i+1)} \sin j m \pi h = \sum_{m=1}^{N-1} \bar{\rho}_m Q_{s;m}^{(i)} \sin j m \pi h \quad (35)$$

où

$$\bar{\rho}_m = \frac{(aD_{1,m} + bD_{2,m})(cD_{3,m} + dD_{4,m})(T_m t_m)^k}{(aD_{5,m} + bD_{6,m})(cD_{7,m} + dD_{8,m})(T_m t_m)^{r+1}} \quad (36)$$

Théorème 2.1 Si $\alpha_0 = \alpha_1 = 0, \beta_0 = \beta_1 = 1, a = c = 0, b = d = 1$ et $R^2 h^2 < 1$, alors on a les estimations suivantes

$$\|e_s^{(i+1)}\|_2 \leq \bar{\rho} \|e_s^{(i)}\|_2 \quad \text{et} \quad \|E_s^{(i+1)}\|_2 \leq \bar{\rho} \|E_s^{(i)}\|_2$$

Chapitre 2. Problème Discret

où $\bar{\rho}$ est le facteur de convergence donné par la formule suivante

$$\bar{\rho} = \left(\frac{t_1}{T_1}\right)^{k-r} \frac{\left[1 - \left(\frac{t_1}{T_1}\right)^{N-k}\right] \left[1 - \left(\frac{t_1}{T_1}\right)^r\right]}{\left[1 - \left(\frac{t_1}{T_1}\right)^k\right] \left[1 - \left(\frac{t_1}{T_1}\right)^{N-r}\right]}$$

Preuve. On a

$$D_{1,m} = -hg_m(N-k+1) + hg_m(N-k)$$

$$D_{2,m} = T_m t_m h^2 g_m(N-k)$$

$$D_{3,m} = -hg_m(r+1) + hg_m(r)$$

$$D_{4,m} = h^2 g_m(r)$$

$$D_{5,m} = -hg_m(k) + hg_m(k-1)$$

$$D_{6,m} = -h^2 g_m(k)$$

$$D_{7,m} = -hg_m(N-r) + [hT_m t_m] g_m(N-r-1)$$

$$D_{8,m} = -h^2 g_m(N-r)$$

en substituant dans l'expression de $\bar{\rho}_m$, on obtient

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_m &= \frac{[T_m t_m h^2 g_m(N-k)] [h^2 g_m(r)] [T_m t_m]^k}{[-h^2 g_m(k)] [-h^2 g_m(N-r)] [T_m t_m]^{r+1}} \\ &= \frac{[T_m^{N-k} - t_m^{N-k}] [T_m^r - t_m^r] [T_m t_m]^k}{[T_m^k - t_m^k] [T_m^{N-r} - t_m^{N-r}] [T_m t_m]^r} \end{aligned}$$

Chapitre 2. Problème Discret

comme $\bar{\rho}_m$ est une suite décroissante, alors on a

$$\begin{aligned}
 \bar{\rho}_m &\leq \bar{\rho}_1 = \frac{[T_1^{N-k} - t_1^{N-k}] [T_1^r - t_1^r] [T_1 t_1]^k}{[T_1^k - t_1^k] [T_1^{N-r} - t_1^{N-r}] [T_1 t_1]^r} \\
 &= \frac{T_1^{N-k} \left[1 - \left(\frac{t_1}{T_1}\right)^{N-k}\right] T_1^r \left[1 - \left(\frac{t_1}{T_1}\right)^r\right]}{T_1^k \left[1 - \left(\frac{t_1}{T_1}\right)^k\right] T_1^{N-r} \left[1 - \left(\frac{t_1}{T_1}\right)^{N-r}\right]} [T_1 t_1]^{k-r} \\
 &= T_1^{-2k+2r} \frac{\left[1 - \left(\frac{t_1}{T_1}\right)^{N-k}\right] \left[1 - \left(\frac{t_1}{T_1}\right)^r\right]}{\left[1 - \left(\frac{t_1}{T_1}\right)^k\right] \left[1 - \left(\frac{t_1}{T_1}\right)^{N-r}\right]} [T_1 t_1]^{k-r} \\
 &= \left(\frac{t_1}{T_1}\right)^{k-r} \frac{\left[1 - \left(\frac{t_1}{T_1}\right)^{N-k}\right] \left[1 - \left(\frac{t_1}{T_1}\right)^r\right]}{\left[1 - \left(\frac{t_1}{T_1}\right)^k\right] \left[1 - \left(\frac{t_1}{T_1}\right)^{N-r}\right]}
 \end{aligned}$$

si on pose

$$\bar{\rho} = \left(\frac{t_1}{T_1}\right)^{k-r} \frac{\left[1 - \left(\frac{t_1}{T_1}\right)^{N-k}\right] \left[1 - \left(\frac{t_1}{T_1}\right)^r\right]}{\left[1 - \left(\frac{t_1}{T_1}\right)^k\right] \left[1 - \left(\frac{t_1}{T_1}\right)^{N-r}\right]}$$

d'où on a l'estimation suivante

$$\begin{aligned}
 \|e_s^{(i+1)}\|_2^2 &= \sum_{j=1}^{N-1} |e_{s,j}^{(i+1)}|^2 = \sum_{j=1}^{N-1} \left| \sum_{m=1}^{N-1} \bar{\rho}_m P_{s;m}^{(i)} \sin jm\pi h \right|^2 \\
 &\leq \sum_{j=1}^{N-1} \bar{\rho}^2 \left| \sum_{m=1}^{N-1} P_{s;m}^{(i)} \sin jm\pi h \right|^2 \\
 &= \sum_{j=1}^{N-1} \bar{\rho}^2 |e_{s,j}^{(i)}|^2 \\
 &\leq \bar{\rho}^2 \sum_{j=1}^{N-1} |e_{s,j}^{(i)}|^2 = \bar{\rho}^2 \|e_s^{(i)}\|_2^2 \\
 &\Rightarrow \|e_s^{(i+1)}\|_2 \leq \bar{\rho} \|e_s^{(i)}\|_2
 \end{aligned}$$

Chapitre 2. Problème Discret

de manière analogue on a cette estimation

$$\begin{aligned}
 \|E_s^{(i+1)}\|_2^2 &= \sum_{j=1}^{N-1} |E_{s,j}^{(i+1)}|^2 = \sum_{j=1}^{N-1} \left| \sum_{m=1}^{N-1} \bar{\rho}_m Q_{s;m}^{(i)} \sin jm\pi h \right|^2 \\
 &\leq \sum_{j=1}^{N-1} \bar{\rho}^2 \left| \sum_{m=1}^{N-1} Q_{s;m}^{(i)} \sin jm\pi h \right|^2 \\
 &= \sum_{j=1}^{N-1} \bar{\rho}^2 |E_{s,j}^{(i)}|^2 \\
 &\leq \bar{\rho}^2 \sum_{j=1}^{N-1} |E_{s,j}^{(i)}|^2 = \bar{\rho}^2 \|E_s^{(i)}\|_2^2 \\
 &\Rightarrow \|E_s^{(i+1)}\|_2 \leq \bar{\rho} \|E_s^{(i)}\|_2
 \end{aligned}$$

■

C.Q.F.D.

Corollaire 2.1 Si $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$, $\beta_0 = \beta_1 = 1$, $a = c = 0$, $b = d = 1$ et $R^2 h^2 < 1$, alors on a les estimations suivantes

$$\|e_s^{(i+1)}\|_2 \leq \bar{\rho}^i \|E_s^{(0)}\|_2 \quad \text{et} \quad \|E_s^{(i+1)}\|_2 \leq \bar{\rho}^i \|E_s^{(0)}\|_2$$

où $\bar{\rho}$ est le facteur de convergence.

2.4 Expérimentations Numériques

Dans cette section nous considérons un test numérique simple. Soit le problème aux limites non symétrique de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u + 2R \frac{\partial u}{\partial x} + q^2 u = f & \text{dans } \Omega \\ u = \phi & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

où $\Omega = \{(x, y) / 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$, $R = 1$ ou $R = -1$, $q = 1$, $\phi = x^2 \sin(\pi y)$, et $f = \{(1 + \pi^2)x^2 + 4Rx - 2\} \sin(\pi y)$.

La solution exacte est donnée par $u^* = x^2 \sin(\pi y)$. On prend $x_k = 4/7$, $x_r = 3/7$, $\Omega_1 =]0, 4/7[\times]0, 1[$, $\Omega_2 =]3/7, 1[\times]0, 1[$, la valeur initiale $v^{(0)} = 0$, et le test d'arrêt $\epsilon = 1e-06$.

Où à chaque macro-itération (itération de *Schwarz*) nous avons résolu deux systèmes d'équations linéaires en utilisant la méthode itérative de *Gauss - Seidel*.

Table 2.1 : Cas : $R = 1$, $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$, $\beta_0 = \beta_1 = 1$, $a = c = 0$

h	$it3$	$it2$	$it1$	$temps(s)$
1/7	25	29	26	0.8424
1/14	25	105	90	11.1697
1/28	25	366	303	92.1186

$it3$, indique l'itération de *Schwarz*,

$it1, it2$, indiquent les micro-itérations de la méthode itérative de *Gauss - Seidel* pour chaque sous-problème (itérations intérieures).

On remarque que le facteur de convergence est $\rho(x_r, x_k) = 0.3491861 < 1$.

Table 2.2 : Cas : $R = -1$,

h	$it3$	$it2$	$it1$	$temps(s)$
1/7	25	30	26	0.8424
1/14	26	106	92	7.3944
1/28	26	371	312	130.8068

Table 2.3 : Cas : $R = 1$,

h	1/7	1/14	1/28	<i>solution exacte</i>
$u^{(25)}(1/7, 1/7)$	$0.9049375e - 2$	$0.8900592e - 2$	$0.8852774e - 2$	$0.8854770e - 2$
$u^{(25)}(2/7, 2/7)$	$0.6467000e - 1$	$0.6402668e - 1$	$0.6383289e - 1$	$0.6382297e - 1$
$v^{(25)}(4/7, 4/7)$	0.3209979	0.3189971	0.3184485	0.3183438
$v^{(25)}(5/7, 5/7)$	0.4014356	0.3995225	0.3990073	0.3988936

on remarque que la solution numérique en ces quatres points converge.

Table 2.4 : Cas : $R = 1$,

h	1/7	1/14	1/28
erreur dans Ω_1	$0.18405708e - 2$	$0.56835158e - 3$	$0.94879283e - 4$
erreur dans Ω_2	$0.31694946e - 2$	$0.80301926e - 3$	$0.14711947e - 3$

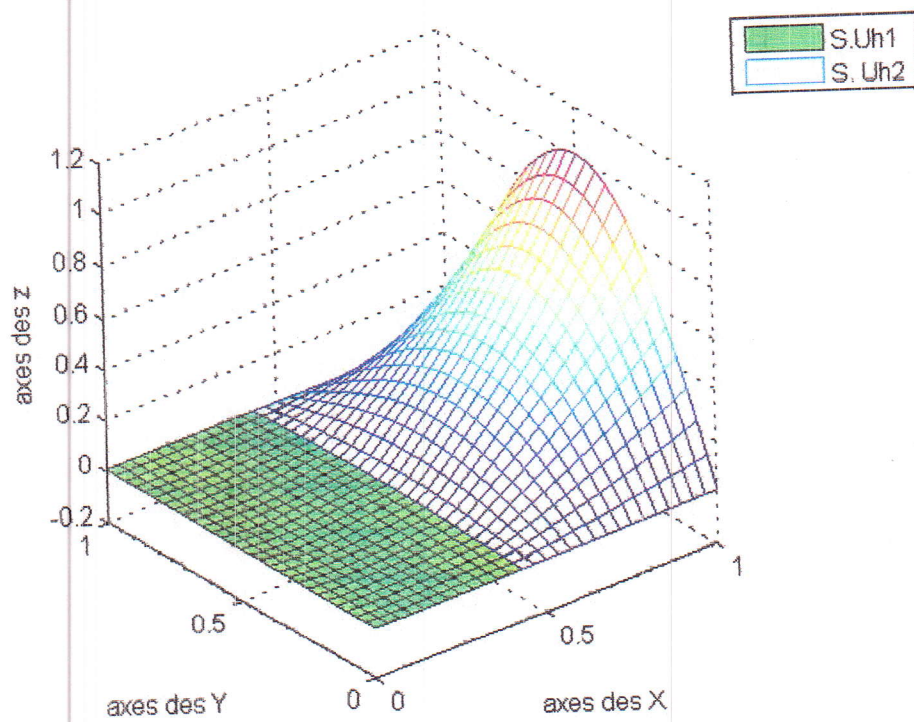


FIG. 2.1 – Surface de la solution numérique à l'itération de Schwarz $it_3=1$

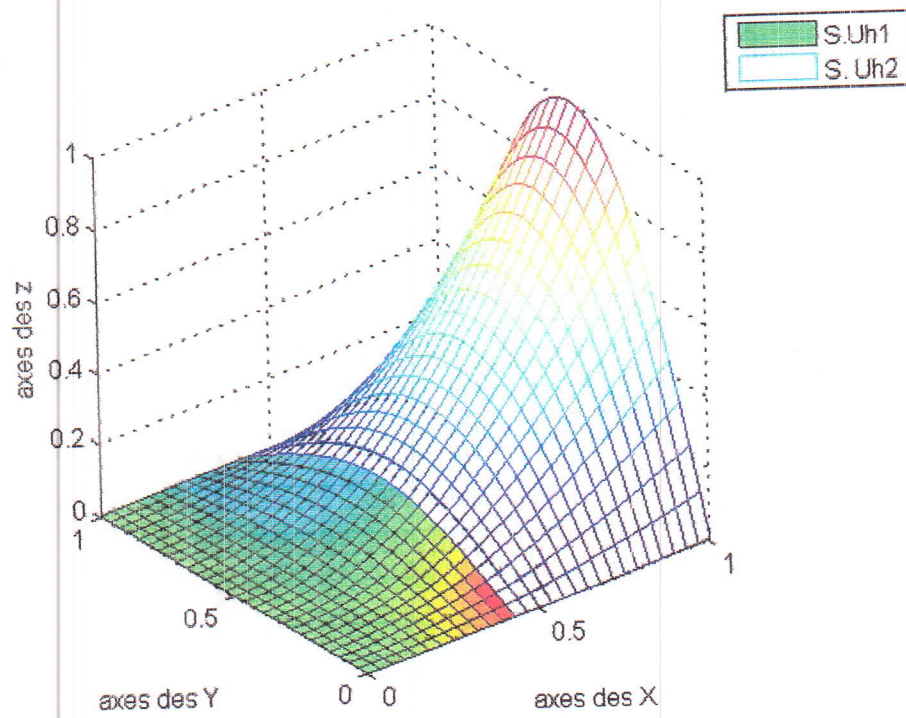


FIG. 2.2 – Surface de la solution numérique à l'itération de Schwarz it3=5

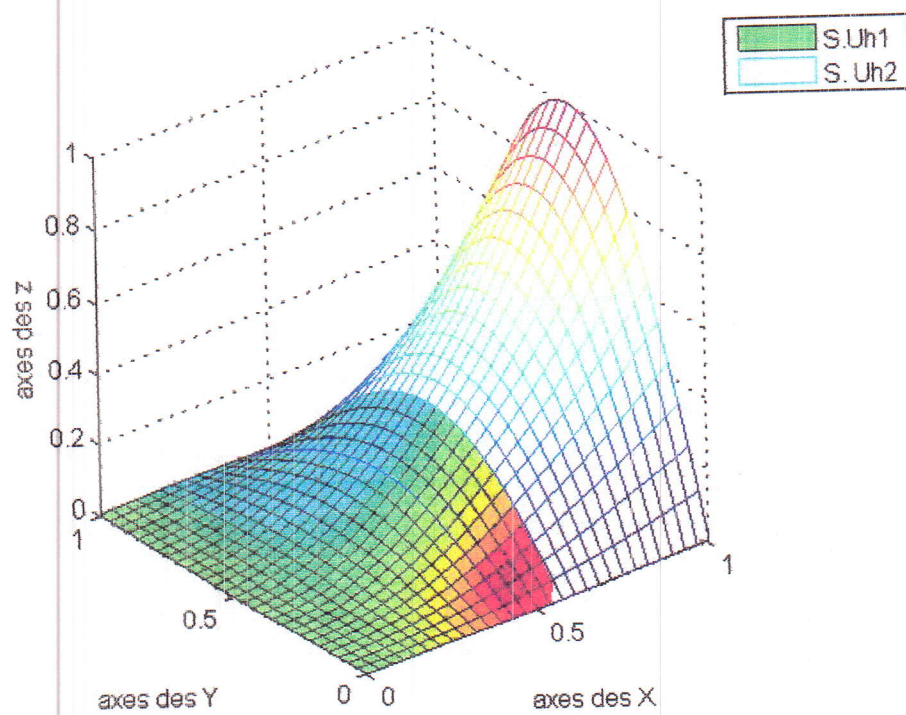


FIG. 2.3 – Surface de la solution numérique à l'itération de Schwarz it3=10

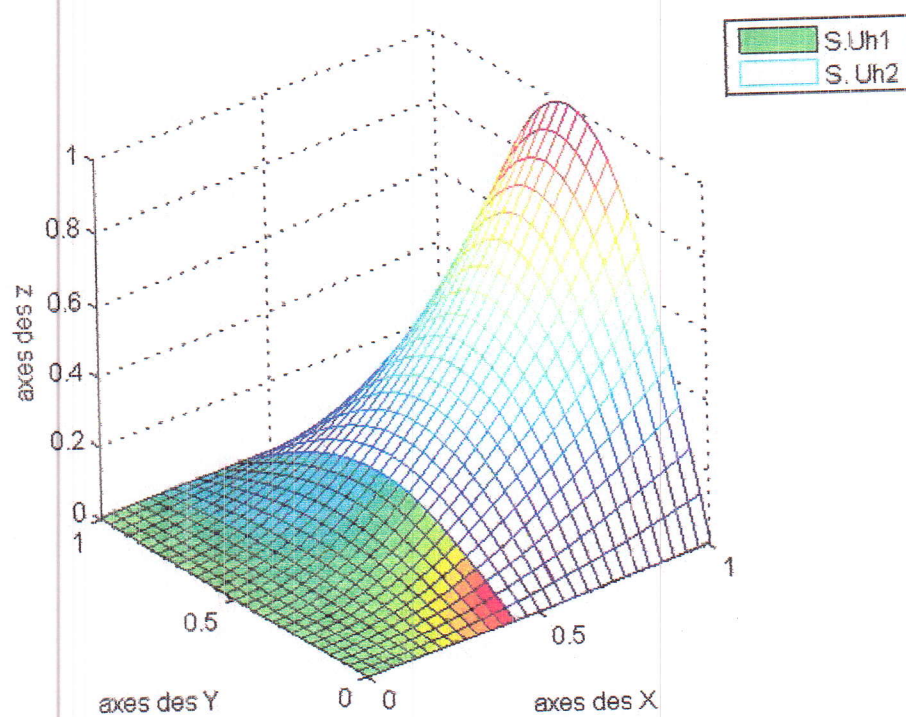


FIG. 2.4 – Surface de la solution numérique à l'itération de Schwarz $it3=15$

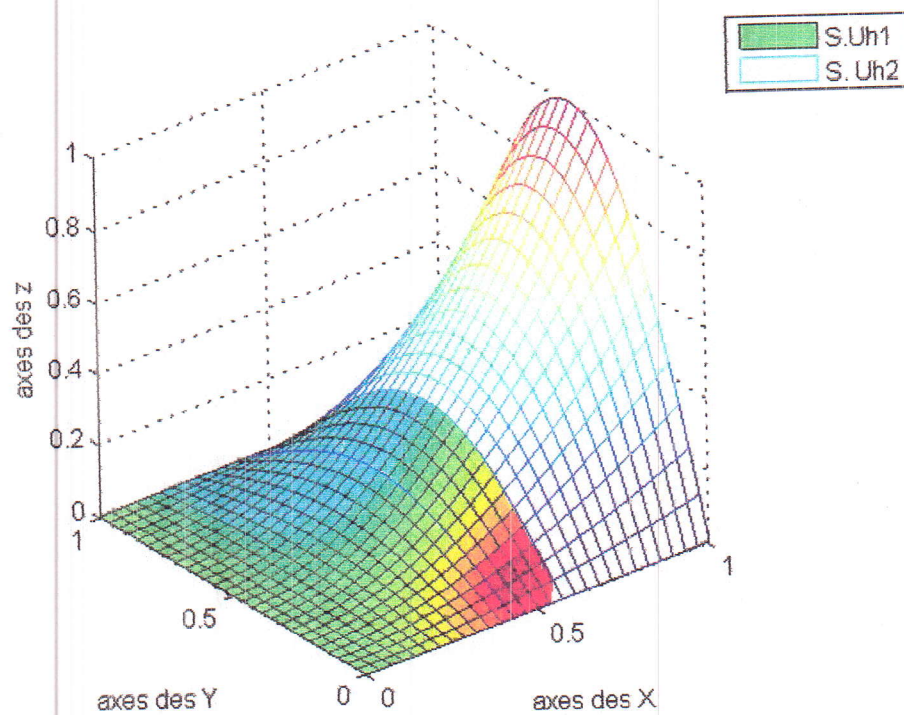


FIG. 2.5 – Surface de la solution numérique à l'itération de Schwarz it3=20

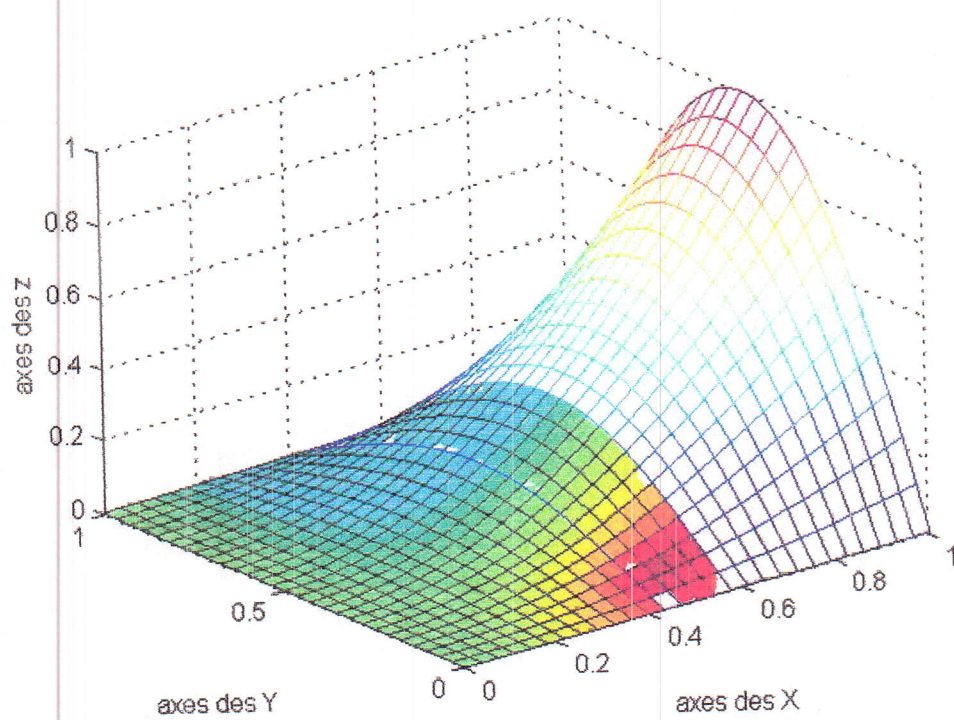


FIG. 2.6 – Surface de la solution numérique à l'itération de Schwarz it3=25

2.5 Conclusion et Perspectives

D'après ce qui précède, nous pouvons conclure ce qui suit :

L'approche utilisée dans notre mémoire pour le problème non symétrique de valeurs aux limites mixtes.

Dans la première partie, nous avons obtenu un facteur de convergence strictement inférieur à un, ce qui nous permet d'avoir une bonne convergence de l'itération de *Schwarz* dans chaque sous domaine.

Concernant la deuxième partie, en appliquant le même procédé mais pour le problème discret, l'estimation d'erreur obtenue sur chaque sous domaine est quasi optimal et dépend de la donnée initial.

De bons résultats numériques ont été obtenus aussi dans ce sens ; qui sont en adéquation avec le résultat d'approximation théorique.

Nous suggérons, cependant, quelques problèmes à développer :

- Application de la méthode des éléments finis pour le problème discret.
- Extension du Procédé Alternatif de *Schwarz* pour plusieurs sous domaines.
- Estimation d'erreur globale
- Méthode de *Schwarz* additive et multiplicative pour une classe d'équations variationnelles.

Bibliographie

- [1] D. J. Evans , S. J. Ping, K. L. Shan, and C. Y. Ping, The Convergence Rate of the Schwarz Alternating Procedure (II) : For Two Dimensional Problems, Intern. J. Computer Math., 1986, Vol. 20, pp. 325-339.
- [2] K.L. Shan, D.J. Evans, The Convergence Rate of the Schwarz Alternating Procedure (III) : For Neumann Problems, Intern. J. Computer Math., 1987, Vol. 21, pp. 85-108.
- [3] S.J. Ping, K.L. Shan and C.Y. Ping, The Convergence Rate of the Schwarz Alternating Procedure (VI) : For Unsymmetric Problems, Intern. J. Computer Math., 1988, Vol. 25, pp. 139-152.
- [4] S. Badraoui, Estimation d'Erreur et Taux de Convergence du procédé Alternatif de Schwarz pour un Problème de valeur aux limites en Dimension Un - Cas Dirichlet et Neumann, Mémoire de Master, 2012.
- [5] D. Dehamchia et R. Ouarech, Estimation d'Erreur et Taux de Convergence du procédé Alternatif de Schwarz pour un Problème de valeur aux limites en Dimension Deux - Cas Dirichlet et Neumann, Mémoire de Master, 2013.