

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique

M/SAO.107

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques



Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Master Académique en Mathématiques
Option : **Equations aux Dérivées Partielles**



Par :

M^e. **GRABSSIA SAIDA**

Intitulé

La Méthode d'Eléments Finis par B-Splines

Dirigé par : Dr. **BENRABAH .A**

Devant le jury

PRESIDENT
RAPPORTEUR
EXAMINATEUR

Dr. **FERNANE.KH**
Dr. **BENRABAH .A**
Dr. **MEHRI.A**

Univ-Guelma
Univ-Guelma
Univ-Guelma

Session Juin 2014

Résumé

Ce travail est consacré à l'étude d'un exemple simple mais réaliste d'un problème de Dirichlet homogène en dimension un. Il s'agit d'étudier ce problème par deux méthodes et faire une analyse comparative au niveau de l'erreur.

En premier lieu on utilise la méthode d'éléments finis classique de Lagrange de degré un, deux et trois avec leurs implémentations numériques. Ensuite on traite la méthode d'éléments finis en changeant la base de Lagrange par la base des fonctions B-splines.

Remerciements

Je tiens à exprimer mes remerciements et ma gratitude, avant tout à dieu le tout puissant qui nous à donné le courage et la force pour mener à bien ce modeste travail.

Ce mémoire ma donné l'occasion de rencontrer et de travailler avec des personnes absolument épatantes. Au terme de ce travail, je remercie profondément :

En premier lieu je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à mon encadreur et mon enseignant le Docteur Mr. BENRABAH. Abderafik qui grâce à sa disponibilité, son soutien, ses conseils et ses encouragements ma permis de mener à bien ce travail.

On adresse l'expression de ma gratitude à notre enseignant le docteur FERNANE.KH, qui nous a fait l'honneur de présider ce jury et d'examiner ma mémoire.

Ainsi qu'au docteur : MEHRI. A, qui a accepté d'examiner ma mémoire et faire partie de ce jury.

Nous remercions également tous les enseignants du département de mathématique pour leur soutien moral et matériel.

En fin, je tiens à remercier tous ceux qui ont contribué à ce travail par leurs remarques, leurs suggestions et leurs soutiens.

Dédicace

Je dédie ce travail :

Mon cher père : En reconnaissance de sa patience et de ses efforts durant toute la durée de ma vie.

Ma chère mère : qui n'est pas cessé de prier m'encourage dans les moments difficiles.

Je dis pour vous, merci mille fois pour votre compréhension et pour votre soutien.

Mon unique frère Amar et épouse Assia.

A mes sœurs : Hadjira, fahima, Naima et sonia et ces maris : hamdi, rafik, Soufian et Nabil.

Et spécialement les enfants de mes sœurs : Mohamed taki Eddine, Rimas, raid et abd alhai.

A ma famille qui ma soutenue.

A tous mes amis.

A tous mes professeurs du département de mathématique, Université 08 Mai 1945 Guelma.

A toute ma promotion.

S A I D A

Table des matières

Table des matières

iii

1	Introduction	2
1.1	Bref historique	2
1.2	Applications	3
1.2.1	Importance de la méthode	4
1.3	Intégrale numérique	4
1.3.1	Principes généraux	4
1.3.2	Méthode de Simpson	5
1.3.3	Méthode des Trapèzes	5
1.4	Les B-Splines	6
1.4.1	Motivations	7
1.4.2	Idée : Fonctions de Base	7
1.4.2.1	Idée	7
1.4.2.2	Les Bases B-Splines	7
2	Eléments finis classique	10
2.1	Eléments finis de degré un	10
2.1.1	Ecriture du problème approché	12
2.1.2	Calcul des coefficients de la matrice	13
2.1.3	Calcul des composantes du second membre	14
2.1.4	Technique d'assemblage	15
2.2	Eléments finis de degré deux	17
2.2.1	Technique de l'élément de référence	19
2.2.2	Calcul de la matrice de masse élémentaire	19
2.2.3	Calcul de la matrice de raideur élémentaire	20
2.2.4	Calcul du second membre élémentaire	20

2.2.5	Technique d'assemblage	21
2.3	Éléments finis de degré trois	21
2.3.1	Technique de l'élément de référence	23
2.3.2	Calcul de la matrice de masse élémentaire	24
2.3.3	Calcul de la matrice de raideur élémentaire	24
2.3.4	Calcul du second membre élémentaire	25
2.3.5	Technique d'assemblage	25
3	Éléments finis par B-splines	28
3.1	Vecteur des noeuds	28
3.2	Les fonctions B-splines	28
3.3	Les dérivées de fonctions B-splines	30
3.3.1	Courbes B-splines	30
3.4	Interpolation par des courbes B-splines	32
3.4.1	Le problème linéaire	32
3.4.2	Résolution numérique d'un problème d'interpolation	34
3.4.3	Programme : Test d'interpolation	36
3.5	La méthode d'éléments finis par B-splines	38
3.5.1	Calcul de la matrice du membre gauche	39
3.5.2	Calcul des composantes du second-membre	40
3.5.3	Programme B-spline	40
3.6	Conclusion	42
	Bibliographie	46

Introduction

1.1 Bref historique

L'idée fondamentale derrière la méthode des éléments finis remonte loin en arrière. Les grecs par exemple avaient reconnu que l'on peut approcher la solution d'un problème complexe en le divisant en problèmes plus simples. On peut par exemple approcher le périmètre d'un cercle en calculant le périmètre d'un polygone à n côtés, pourvu que n soit suffisamment grand. Il suffit alors de connaître la longueur d'un segment de droite, problème beaucoup plus simple que celui de la longueur d'un arc de cercle.

L'application à la solution des équations aux dérivées partielles est évidemment plus récente et est intimement liée au développement de l'informatique. **Courant** [1] a introduit le concept de formulation variationnelle, qui est à la base de toute méthode d'éléments finis. Pour la méthode de **Ritz** [3], on part d'un problème posé dans un espace de dimension infinie. On approche ensuite la solution du problème initial en cherchant une solution dans une suite croissante de sous-espaces de dimension finie. Ces problèmes approchés sont en général beaucoup plus facile à résoudre. On peut de plus espérer que la solution du problème en dimension infinie peut être obtenue par un passage à la limite. Le choix des fonctions de base constituant ces espaces de dimension finie est délicat et initialement on les construisait globalement sur le domaine. C'est **Courant** qui eut l'idée d'introduire des fonctions à support local qui simplifient grandement leur construction. La théorie derrière la méthode des éléments finis a pris une forme plus rigoureuse avec les travaux de **Strang** et **Fix** [5].

Il existe plusieurs techniques permettant de résoudre les équations aux dérivées partielles. On pense par exemple aux méthodes de différences finies, de volumes finis, aux méthodes spectrales,

etc. On peut sans aucun doute affirmer que la plus largement répandue est la méthode des éléments finis. Cette popularité n'est pas sans fondement. La méthode des éléments finis est très générale et possède une base mathématique rigoureuse qui est fort utile, même sur le plan très pratique. En effet, cette base mathématique permet de prévoir jusqu'à un certain point la précision de notre approximation et même d'améliorer cette précision, via les méthodes adaptatives.

1.2 Applications

On retrouve les premières applications véritables de la méthode des éléments finis en 1956 en mécanique des structures. Un groupe de chercheurs (Turner, Clough, Martin et Topp [6]) de **Boeing** utilisent cette méthode pour calculer la voilure d'un avion.

La méthode des éléments finis est maintenant reconnue comme l'une des principales méthodes de résolution des équations aux dérivées partielles (EDP) dans des géométries quelconques, que ce soit en dimension un, deux ou trois. On trouve même des méthodes d'éléments finis en dimension 4, soit en espace-temps...

Les applications sont tout aussi nombreuses et variées. Les ingénieurs de diverses disciplines utilisent les éléments finis, que ce soit en mécanique des fluides ou des solides, mais aussi pour les problèmes thermiques, électro-magnétiques, chimiques, etc. On retrouve aussi des applications en physique, et notamment en astrophysique...

Dans cette mémoire nous présentons la méthode des éléments finis qui est la méthode numérique de référence pour le calcul des solutions de problèmes aux limites. Le principe de la méthode est directement issu de l'approche variationnelle.

L'idée de base de la méthode des éléments finis est de remplacer l'espace de Hilbert V sur lequel est posée la formulation variationnelle par un sous espace de dimension finie. Le problème approché posé sur V_h se ramène à la résolution d'un système linéaire, dont la matrice est appelée matrice de rigidité.

La mémoire est composée de trois chapitres, on commence par une introduction, et dans le 2^{ème} chapitre on présente la méthode des éléments finis de degré un, deux et trois en dimension $n = 1$, et on termine la mémoire par la la méthode des éléments finis en utilisant comme base les fonction B-splines.



1.2.1 Importance de la méthode

De très nombreux problèmes physiques s'expriment sous forme d'équations aux dérivées partielles soumises à des conditions aux limites particulières. De manière industrielle, l'objectif est souvent la diminution de coûts, en cernant mieux la réalité physique. D'autre fois par exemple via la simulation, l'objectif est d'investiguer des domaines difficiles ou dangereux. Par exemple, que se passe-t-il lorsqu'un TGV prend feu à mi-chemin dans le tunnel sous la manche ? Quel élément est-il préférable d'améliorer dans les structures ? Bien qu'une expérimentation finale grandeur nature soit souvent le seul arbitre définitif, il est beaucoup plus aisé d'utiliser une simulation pour chercher à optimiser les paramètres.

- **Avantages** : traitement possible de géométrie complexe, détermination plus naturelle des conditions aux limites, possibilité de démonstration mathématique de convergence et majoration de l'erreur.
- **Inconvénients** : complexité de mise en oeuvre et coût en temps de calcul et en mémoire.

1.3 Intégrale numérique

L'intégrale numérique est une composante essentielle de toute méthode d'éléments finis, s'il est toujours préférable d'utiliser l'intégration exacte lorsque cela est possible, on doit toute fois recourir fréquemment à l'intégration numérique si on souhaite développer des méthodes des éléments finis relativement générales. Dans les méthodes d'intégrations ; l'intégrale d'une fonction continue sur $[a, b]$ borné est remplacée par une somme finie. Le choix de la subdivision de l'intervalle d'intégration et celui des coefficients qu'interviennent dans la somme approchant l'intégrale sont des critères essentiels pour minimiser l'erreur.

1.3.1 Principes généraux

Soit f une fonction continue de $[a, b]$ dans \mathbb{R} , on se propose d'évaluer l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$, en subdivisant l'intervalle d'intégration $a < x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ et en approchant f sur chaque intervalle par une somme finie de la forme :

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \sum_{i=0}^{n-1} a_i f(x_i). \quad (1.3.1)$$



Une méthode d'intégration est dite d'ordre k si l'erreur commise en approchant l'intégrale pour une somme discrète :

$$e(f) = \int_a^b f(x)dx - \sum_{i=0}^{n-1} a_i f(x_i), \quad (1.3.2)$$

est nulle lorsque f est un polynôme de degré $\leq k$ et non nulle au moins pour un polynôme de degré $\geq (k+1)$.

1.3.2 Méthode de Simpson

Dans la méthode de **Thomas Simpson (1710-1761)** la fonction f est remplacée par un polynôme du second degré définissant avec un arc de parabole passant par les points d'ordonnées $f(x_i)$, $f(x_{i+1})$ et $f(x_{i+2})$. La méthode s'écrit :

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \sum_{i=0}^{n-1} 1/6 [(x_{i+1}) - (x_i)] \left[f(x_{i+1}) + f(x_i) + 4f\left(\frac{x_{i+1} + x_i}{2}\right) \right]. \quad (1.3.3)$$

Lorsque la subdivision se réduit à sa plus simple expression $x_0 = a$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$, et $x_2 = b$; la formule précédente devient : $\int_a^b f(x)dx \simeq 1/3(b-a)f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)$.

La méthode de **Simpson** est une méthode d'ordre 4.

L'erreur dans la méthode de **Simpson** est donnée par :

$$\left| \int_a^b f(x)dx - S \right| \leq 1/4 \frac{(b-a)^5}{n^4} \sup_{x \in [a,b]} |f^{(5)}(x)|. \quad (1.3.4)$$

La somme S qui approche l'intégrale s'exprime par :

$$S = h/2 \sum_{i=0}^{n-1} [f(a+ih) + f(a+(i+1)h) + 4f(a+ih+h/2)]. \quad (1.3.5)$$

1.3.3 Méthode des Trapèzes

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ une subdivision régulière l'intervalle $[a, b]$, on note le pas de cette subdivision. Dans la méthode des **Trapèzes** la fonction f est remplacée sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ par la droite joignant les points $(x_i, f(x_i))$ et $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$. Soit :

$$h(x) = \frac{(x-x_i)f(x_{i+1}) - (x-x_{i+1})f(x_i)}{x_{i+1} - x}, \quad \forall x \in [x_i, x_{i+1}]. \quad (1.3.6)$$



La méthode s'écrit :

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \sum_{i=0}^{n-1} [(x_{i+1}) - (x_i)] \frac{f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2}. \quad (1.3.7)$$

Lorsque la subdivision se réduit à sa plus simple expression ; $x_0 = a, x_1 = b$; On a :

$$\int_a^b f(x)dx \simeq 1/2(b-a)[f(a) + f(b)].$$

La méthode des **Trapèzes** est une méthode d'ordre 1. L'erreur dans la méthode des **Trapèzes** est donnée par l'expression :

$$\left| \int_a^b f(x)dx - S \right| \leq 1/12 \frac{(b-a)^3}{n^2} \sup_{x \in [a,b]} |f^{(2)}(x)|. \quad (1.3.8)$$

La somme $S = h/2[f(a) + f(b) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)]$. Pour améliorer la précision ; on considère parfois la formule des **Trapèzes** corrigée suivante :

$$\int_a^b f(x)dx \simeq h/2[f(a) + f(b) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)]. \quad (1.3.9)$$

1.4 Les B-Splines

Les problèmes d'interpolation et d'approximation sont un vaste sujet qui s'étend de l'ajustement de mesures à la conception d'images de synthèse en passant par la création de polices de caractères. Le comte de Lagrange s'est penché sur les problèmes d'interpolation au *XVIII^e* siècle mais il faut attendre l'arrivée des ordinateurs pour que le domaine se développe réellement. Au *XVIII^e* siècle, l'interpolation et l'approximation servaient surtout à relier ou approcher des mesures : l'intérêt était avant tout scientifique. Avec la révolution industrielle, les machines sont apparues, il a fallu dessiner les pièces pour pouvoir les produire. Pour tracer des courbes, les dessinateurs utilisaient des méthodes manuelles qui reposaient sur la déformation de lames de métal, de ressorts et l'utilisation de pistolets. Pour les surfaces, des gabarits étaient construits en 3 dimensions. Puis vers 1950 les machines à commandes numériques sont arrivées : il devenait obligatoire d'exprimer ces courbes mathématiquement. La première approche a été de numériser le travail des dessinateurs mais cela était long et coûteux, la nécessité de trouver des courbes capables d'être utilisées depuis la conception jusqu'à la réalisation s'est donc fait sentir. Les splines cubiques ont été



la première méthode mise au point, puis les courbes de **Bézier** sont arrivées, avec une conception différente, plus souple. L'évolution s'est poursuivie avec les **B-Splines**, généralisation des courbes de **Bézier**, puis avec les **NURBS** dans les années 1980.

Puis les courbes ont vu leur domaine s'étendre avec l'apparition de l'informatique domestique : les logiciels de dessin vectoriel utilisent les courbes de **Bézier** ainsi que les **B-Splines**. Ces courbes sont aussi à la base des images de synthèse, des jeux vidéo, etc. Certains concepts sont encore au stade de développement ou ne sont pas documentés. Il est par exemple impossible de connaître les algorithmes internes des programmes de conception en 3D.

1.4.1 Motivations

Il s'agit de fabriquer une courbe qui présente tous les avantages des courbes de **Bézier** mais sans ses inconvénients. Ainsi, la courbe devra approximer les points de contrôle, être simple à manipuler, présenter les mêmes propriétés que les courbes de **Bézier**, etc.

Le degré de la courbe ne devra pas être proportionnel au nombre de points de contrôle mais fixe. La modification d'un point ne doit pas affecter toute la courbe.

Les B-Splines ont été développées chez **Boeing** dans les années 70 et 80. Les B-Splines existait déjà avant mais n'était pas utilisées et le concept pas finalisé.

1.4.2 Idée : Fonctions de Base

1.4.2.1 Idée

L'idée principale des B-Splines est de remplacer les polynômes de **Bernstein** par des fonctions. Ensuite, nous sommerons ces fonctions avec les points de contrôles pour obtenir la courbe. Une B-Spline ne dépend pas uniquement des points de contrôle mais aussi d'un vecteur noeud.

1.4.2.2 Les Bases B-Splines

Nous choisissons un vecteur noeud composé de $t_0, t_1, t_2, \dots, t_m$ que nous noterons $T = \{t_0, t_1, t_2, \dots, t_m\}$.

Nous choisissons $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_m$. Nous prendrons des nombres réels comme noeuds. Nous choisissons également des points $P_0, P_1, P_2, \dots, P_m$. Le choix de l'origine O n'ayant pas d'importance, nous noterons $P_i = \overrightarrow{OP_i}$. Nous voulons construire une courbe $X_0(t)$ telle que :

- $X_0(t_0) = P_0$
- $X_0(t_1) = P_1$
- $X_0(t_i) = P_i$ pour $i \in \{0, \dots, m\}$



La courbe définie par $X_0(t) = P_i$ pour $t \in [t_i, t_{i+1}[$ satisfait les conditions. Cette courbe a la forme suivante :

$$X_0(t) = \sum_i B_{i,0}(t) \cdot P_i, \quad (1.4.1)$$

où $B_{i,0}(t) = \mathbf{1}_{[t_i, t_{i+1}[}$. C'est-à-dire la fonction qui vaut 0 sauf sur $[t_i, t_{i+1}[$ où elle vaut 1. Cette solution n'est pas très satisfaisante, la courbe présentant des sauts. Nous cherchons à approcher cette courbe discontinue $X_0(t)$ par une meilleure courbe qui sera linéaire par morceaux, soit quand t varie de t_i à t_{i+1} , $X_1(t)$ parcourt la droite reliant P_{i-1} à P_i :

$$X_1(t) = \left(1 - \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}\right) P_{i-1} + \left(\frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}\right) P_i \quad \text{pour } t \in [t_i, t_{i+1}[. \quad (1.4.2)$$

Avec cette courbe, nous avons :

- $X_1(t_i) = P_{i-1}$
- $X_1(t_{i+1}) = P_i$.

Si $t_0, t_1, t_2, \dots, t_m$ sont distincts, alors $X_1(t)$ est continue. Nous pouvons écrire $X_1(t)$ comme ceci :

$$X_1(t) = \sum_i B_{i,1}(t) \cdot P_i, \quad (1.4.3)$$

où nous allons chercher ce qui vaut $B_{i,1}(t)$.

$$X_1(t) = \left(\frac{t_{i+1} - t}{t_{i+1} - t_i}\right) P_{i-1} + \left(\frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}\right) P_i \quad \text{pour } t \in [t_i, t_{i+1}[. \quad (1.4.4)$$

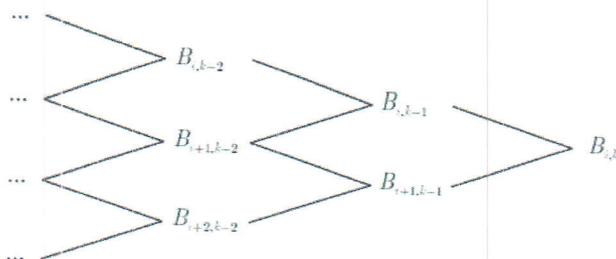
pour $t \in [t_0, t_m]$, nous avons :

$$\begin{aligned} X_1(t) &= \sum_i \left[\left(\frac{t_{i+1} - t}{t_{i+1} - t_i}\right) \cdot \mathbf{1}_{[t_i, t_{i+1}[} \cdot P_{i-1} + \left(\frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}\right) \cdot \mathbf{1}_{[t_i, t_{i+1}[} \cdot P_i \right] \\ &= \sum_i \left(\frac{t_{i+1} - t}{t_{i+1} - t_i}\right) \cdot \mathbf{1}_{[t_i, t_{i+1}[} \cdot P_{i-1} + \sum_i \left(\frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}\right) \cdot \mathbf{1}_{[t_i, t_{i+1}[} \cdot P_i \end{aligned} \quad (1.4.5)$$

Nous posons $i' = i - 1$:

$$\begin{aligned} X_1(t) &= \sum_{i'} \left(\frac{t_{i'+2} - t}{t_{i'+2} - t_{i'+1}}\right) \cdot \mathbf{1}_{[t_{i'+1}, t_{i'+2}[} \cdot P_{i'} + \sum_i \left(\frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}\right) \cdot \mathbf{1}_{[t_i, t_{i+1}[} \cdot P_i \\ &= \sum_i \left[\left(\frac{t_{i+2} - t}{t_{i+2} - t_{i+1}}\right) \cdot \mathbf{1}_{[t_{i+1}, t_{i+2}[} + \sum_i \left(\frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}\right) \cdot \mathbf{1}_{[t_i, t_{i+1}[} \right] P_i \\ &= \sum_i \left[\left(\frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}\right) \cdot B_{i,0}(t) + \left(\frac{t_{i+2} - t}{t_{i+2} - t_{i+1}}\right) \cdot B_{i+1,0}(t) \right] P_i \end{aligned} \quad (1.4.6)$$



FIGURE 1.1 - Schéma récursif pour les $B_{i,k}$

Donc

$$B_{i,1}(t) = \left(\frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} \right) \cdot B_{i,0}(t) + \left(\frac{t_{i+2} - t}{t_{i+2} - t_{i+1}} \right) \cdot B_{i+1,0}(t) \quad (1.4.7)$$

Nous avons donc une définition de la fonction de degré 1, $X_1(t) = \sum_i B_{i,1}(t) \cdot P_i$ à partir de $X_0(t) = \sum_i B_{i,0}(t) \cdot P_i$ qui est de degré 0. De la même manière, nous définissons la fonction $X_k(t)$ de degré k à partir de $X_{k-1}(t)$:

$$X_k(t) = \sum_i B_{i,k}(t) \cdot P_i \quad (1.4.8)$$

avec :

$$B_{i,k}(t) = \left(\frac{t - t_i}{t_{i+k} - t_i} \right) \cdot B_{i,k-1}(t) + \left(\frac{t_{i+1+k} - t}{t_{i+1+k} - t_{i+1}} \right) \cdot B_{i+1,k-1}(t). \quad (1.4.9)$$

Cela nous donne une relation de récurrence pour les $B_{i,k}(t)$ qui sont calculés avec le schéma de la figure (1.1)

Si $t_i = t_{i+k}$ alors le coefficient $\frac{t - t_i}{t_{i+k} - t_i}$ sera posé comme étant nul et chaque fois que nous aurons $\left(\frac{\dots}{0} \right)$, nous poserons ce quotient égal à 0.

La fonction $B_{i,k}(t)$ représente une fonction de base d'une B-Splines et est parfois appelée base de B-Splines.

Attention à la notation : $B_{i,k}$ n'est pas un polynôme de **Bernstein** qui se note B_n^i .



Eléments finis classique

2.1 Eléments finis de degré un

Considérons le problème de Dirichlet homogène en dimension $n = 1$:

$$\begin{cases} -\alpha u''(x) + \beta u(x) = f(x) & \text{sur }]a, b[\\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases} \quad (2.1.1)$$

où α, β sont des constantes et f est une fonction continue. La formulation variationnelle de ce problème s'écrit : Trouver la fonction u appartenant à $H_0^1([a, b])$ telle que pour tout $v \in H_0^1([a, b])$ on ait :

$$\int_a^b \alpha u'(x)v'(x)dx + \int_a^b \beta u(x)v(x)dx = \int_a^b f(x)v(x)dx \quad (2.1.2)$$

L'existence et l'unicité d'une solution pour ce problème se démontrent en utilisant le théorème de Lax-Milgram :

Théorème 2.1.1. (Théorème de Lax-Milgram) Soient V un espace de Hilbert et a une forme bilinéaire continue sur $V \times V$ et coercive sur V . Supposons que L est une forme linéaire continue sur V . Alors, il existe un unique fonctions u de V tel que l'équation

$$a(u, v) = L(v) \quad \text{pour tout } v \text{ de } V.$$

On suppose maintenant que l'on connaît un sous-espace $V_h \subset V$ de dimension finie, paramétré par h et tel que pour tout $v \in V$ il existe un élément $r_h v \in V_h$ vérifiant :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|r_h v - v\| = 0.$$



FIGURE 2.1 – Discrétisation (maillage) du segment $[a, b]$ en éléments finis P1

Considérons alors le problème suivant : Trouver la fonction u_h appartenant à V_h tel que :

$$a(u_h, v_h) = L(v_h), \quad \forall v_h \in V_h.$$

Ce problème admet également une solution unique car V_h est un sous-espace fermé de V et donc les hypothèses du théorème de Lax-Milgram sont également vérifiées dans V_h . Supposons u et u_h les solutions correspondant à les problèmes $a(u, v) = L(v)$ et $a(u_h, v_h) = L(v_h)$. On a alors un résultat général de majoration d'erreur suivant.

Théorème 2.1.2. Soit M la constante intervenant dans l'hypothèse de continuité de a :

$$a(u, v) \leq M \|u\| \|v\|,$$

et m la constante intervenant dans l'hypothèse de coercive : $a(u, v) \geq m \|v\|^2$ on a la majoration d'erreur suivante :

$$\|u - u_h\| \leq \frac{M}{m} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|.$$

Introduisons une discrétisation de l'intervalle $[a, b]$ en N sous-intervalles ou éléments $T_i = [x_{i-1}, x_i]$. Les éléments T_i n'ont pas forcément même longueur. $V_{0,b}$ est alors l'espace des fonctions continues affines par morceaux (affines sur les segments T_i) et nulles aux extrémités a et b .

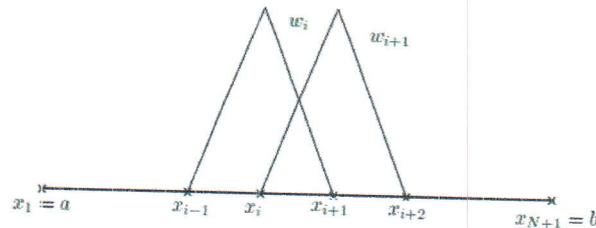
Rappelons que chaque fonction $v_h \in V_{0,b}$ est déterminée de manière unique par la donnée de ses valeurs aux points x_i pour $i = 2, \dots, N$. L'espace $V_{0,b}$ est de dimension $N - 1$ et il est engendré par la base de Lagrange qui est formée des $N - 1$ fonctions $w_i \in V_{0,b}$ définies par :

$$w_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \forall i = 2, \dots, N \quad \text{et} \quad \forall j = 2, \dots, N. \quad (2.1.3)$$

D'où :

$$w_i = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & \text{si } x \in [x_{i-1}, x_i], \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & \text{si } x \in [x_i, x_{i+1}], \\ 0 & \text{si } x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}] \end{cases} \quad (2.1.4)$$



FIGURE 2.2 – Fonctions de base P_1

Une fonction v_b quelconque s'écrit dans cette base :

$$v_b(x) = \sum_{i=2}^N v_i w_i(x) \quad (2.1.5)$$

avec $v_i = v_b(x_i)$. Les coefficients v_i sont donc les valeurs de v_b aux points x_i .

2.1.1 Ecriture du problème approché

Ecrivons le problème approché dans $V_{0,b}$:

Trouver la fonction u_b appartenant à V_b telle que pour tout $v_b \in V_{0,b}$ on ait :

$$\int_a^b u_b'(x) v_b'(x) dx + \int_a^b u_b(x) v_b(x) dx = \int_a^b f(x) v_b(x) dx. \quad (2.1.6)$$

Le problème étant linéaire, l'égalité est vraie pour tout v_b si et seulement si elle est vraie pour une base de l'espace vectoriel $V_{0,b}$ c'est-à-dire :

$$(2.1.6) \text{ est vérifiée } \forall v_b \in V_{0,b} \iff (2.1.6) \text{ est vérifiée } \forall w_i \text{ pour } i = 2, \dots, N.$$

D'autre part, si u_b est solution du problème approché dans $V_{0,b}$ on peut l'exprimer dans la base des w_i comme suit :

$$u_b(x) = \sum_{j=2}^N u_j w_j(x),$$

avec $u_j = u_b(x_j)$ est la valeur approchée de la solution exacte au point x_j .

Ainsi le problème approché s'écrit :

Chercher u_2, u_3, \dots, u_N tels que

$$\sum_{j=2}^N \left(\int_a^b \alpha w_j(x) w_i(x) dx + \int_a^b \beta w_j(x) w_i(x) dx \right) u_j = \int_a^b f(x) w_i(x) dx, \quad (2.1.7)$$



posons

$$F_i = \int_a^b f(x)\omega_i(x)dx \quad (2.1.8)$$

$$A_{ij} = \int_a^b \alpha \omega'_j(x)\omega'_i(x)dx + \int_a^b \beta \omega_j(x)\omega_i(x)dx \quad (2.1.9)$$

On remarque que le problème approché prend la forme d'un système linéaire de $N - 1$ équations à $N - 1$ inconnues, qui peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$AU = F \quad (2.1.10)$$

2.1.2 Calcul des coefficients de la matrice

La matrice A apparaît comme la somme de deux matrices K et M .

K est appelée matrice de raideur. Elle est donnée par

$$K_{ij} = \alpha \int_a^b w'_j(x)w'_i(x)dx, \quad (2.1.11)$$

M est la matrice de masse. Son expression est la suivante :

$$M_{ij} = \beta \int_a^b w_j(x)w_i(x)dx. \quad (2.1.12)$$

On obtient sans difficulté les contributions de chaque élément T_i aux matrices de raideur et de masse, dites matrices élémentaires de raideur et matrices élémentaires de masse.

Matrice élémentaire de raideur On calcule les coefficients K_{ij} en sommant les contributions des différents éléments selon :

$$K_{ij} = \alpha \int_a^b w'_j(x)w'_i(x)dx = \alpha \sum_{k=1}^N \int_{x_k}^{x_{k+1}} w'_j(x)w'_i(x)dx. \quad (2.1.13)$$

Considérons par exemple l'élément $T_i = [x_i, x_{i+1}]$. Sur cet élément, il n'y a que deux fonctions de base non nulles : w_i et w_{i+1} . L'élément T_i produira donc effectivement une contribution non nulle aux quatre coefficients $K_{i,i}$, $K_{i+1,i}$, $K_{i+1,i+1}$ et $K_{i,i+1}$ de la matrice globale K .

Calculons les contributions élémentaires de T_i et disposons les sous la forme d'une matrice élémentaire 2×2 :

$$ElemK_i = \alpha \begin{pmatrix} e_{1,1}^i & e_{1,2}^i \\ e_{2,1}^i & e_{2,2}^i \end{pmatrix},$$

avec

$$e_{1,1}^i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} w_i'^2(x) dx = \frac{1}{x_{i+1} - x_i},$$

$$e_{1,2}^i = e_{2,1}^i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} w_i'(x) w_{i+1}'(x) dx = -\frac{1}{x_{i+1} - x_i},$$

$$e_{2,2}^i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} w_{i+1}'^2(x) dx = \frac{1}{x_{i+1} - x_i}.$$

D'où :

$$ElemK_i = \alpha \begin{pmatrix} \frac{1}{x_{i+1} - x_i} & -\frac{1}{x_{i+1} - x_i} \\ -\frac{1}{x_{i+1} - x_i} & \frac{1}{x_{i+1} - x_i} \end{pmatrix} = \alpha \frac{1}{x_{i+1} - x_i} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice élémentaire de masse Avec le même raisonnement, on obtient la matrice de masse élémentaire :

$$ElemM_i = \beta \frac{x_{i+1} - x_i}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2.1.3 Calcul des composantes du second membre

Chaque F_i du vecteur second-membre global est calculé également par assemblage de contributions élémentaires :

$$F_i = \int_a^b f(x) w_i(x) dx = \sum_{k=1}^N \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) w_i(x) dx. \quad (2.1.14)$$

On utilise des formules d'intégration numérique, par exemple la formule des trapèzes ou la formule de Simpson.

Avec des fonctions tests $w_i \in P_1$, la méthode des trapèzes conduit à une valeur approchée de l'intégrale, qui dans le cas de points équidistribués de pas h redonne le résultat

$$F_i = h f_i,$$

obtenu en différences finies.

La méthode de Simpson permet aussi un calcul approché et donne dans le même cas

$$F_i = \frac{h}{6} [f_i + 4f_i + f_{i+1}].$$



2.1.4 Technique d'assemblage

Considérons un maillage à N éléments et notons B la matrice globale à assembler (matrice de raideur ou de masse globale), b_k les matrices élémentaires correspondantes relatives à chaque élément T_k et F la matrice globale du second membre, l_k les matrices élémentaires correspondantes relatives à chaque élément T_k .

L'algorithme d'assemblage est très simple dès lors que l'on dispose d'un tableau associant les points d'un élément T_k et les noeuds du maillage global. Son schéma en le suivant :

Pour les matrices

POUR $K = 1 : N$ FAIRE ! boucle sur les éléments

 POUR $i = 1 : 2$ FAIRE ! boucle sur les numéros locaux

 POUR $j = 1 : 2$ FAIRE ! boucle sur les numéros locaux

$I = K + i - 1$! numéros globaux

$J = K + j - 1$! numéros globaux

$B(I,J) = B(I,J) + b(i,j)$! B : matrice globale, b : matrice élémentaire

FIN DES 3 BOUCLES

Pour le second membre

POUR $K = 1 : N$ FAIRE ! boucle sur les éléments

 POUR $i = 1 : 2$ FAIRE ! boucle sur les numéros locaux

$I = K + i - 1$! numéros globaux

$F(I) = F(I) + l(i)$! F : matrice globale, l : matrice élémentaire

FIN DES 2 BOUCLES

Dans ce cas très simple d'éléments de degré un en dimension un, chaque élément T_k comprend 2 noeuds x_{k+1} , x_k . On a alors les programmes suivants en matlab :

PROGRAMME P_1 .

function test=EFdegre1;

alpha=1; beta=1; N=16; h=1/N; a=0; b=1;

K=(alpha /h)*[1, -1; -1, 1];

M=(beta /3*h)*[1,0.5; 0.5,1];

I=**linspace**(a,b,N+1);

elFinis=**linspace**;

$y = x^4$;



```

ms=zeros(N+1,N+1);
for ie =1 :N
    for i =1 :2
        ig=ie+i-1;
        for j=1 :2
            jg=ie+j-1;
            ms(ig,jg)=ms(ig,jg)+K(i,j)+M(i,j);
        end
    end
end;
A=ms;
A(1, :)=0;
A(1,1)=1;
A(N+1, :)=0;
A(N+1,N+1)=1;
F=zeros(N+1,1);
for s=1 :N
    x1=elFinis(s);
    x2=elFinis(s+1);
    l=zeros(2,1);
    function y=r1(x)
        y=f(x1+h*x)*phi1(x);
    end
    function y=r2(x)
        y=f(x1+h*x)*phi2(x);
    end
    l(1)=aproximationtrapezes(r1);
    l(2)=aproximationtrapezes(r2);
    ; for i =1 :2
        ig=s+i-1;
        F(ig)=F(ig)+h*l(i);
    end
end;

```



```

F(N+1)=0; U = A\F;
c2 = (37-24*exp(1))/(exp(1)-exp(-1));
c1 = -24-c2;
sexact=c1 * exp(I) + c2 * exp(-I) + I.^4 + 12 * I.^2 + 24;
err=g-sexact';
em=max(abs(err));
I=linspace(a,b,200);
s=c1 * exp(I) + c2 * exp(-I) + I.^4 + 12 * I.^2 + 24;
hold on
p=plot(I,s);
q=plot(elFinis,g,'red');
hold off
end

```

2.2 Éléments finis de degré deux

On part à nouveau d'une discrétisation de l'intervalle $[a, b]$ en N sous-intervalles ou éléments T_i . Les éléments T_i n'ont pas forcément la même longueur. L'espace V_b considéré ici est ensemble des fonctions continues sur $[a, b]$ et étant polynomiales de degré deux sur chaque sous-intervalle. Un polynôme de degré deux est fixé par ses valeurs en trois points. On prend les extrémités et le milieu de chaque élément T_i . On est ainsi amené à considérer une discrétisation de $[a, b]$ en N sous-intervalles comportant eux-mêmes trois points, ce qui nous conduit globalement à une discrétisation par $2N + 1$ points où les noeuds x_i sont donnés par

$$x_1 = a < x_2 < x_3 < \dots < x_{2N} < x_{2N+1} = b,$$

avec

$$x_{2i} = \frac{x_{2i-1} + x_{2i+1}}{2} \quad \text{pour } i = 1, \dots, N,$$

et

$$T_i = [x_{2i-1}, x_{2i+1}] \quad \text{pour } i = 1, \dots, N.$$

Soit encore la base $\{w_i\}$ avec $i = 1, \dots, 2N + 1$ de V_b données par les condition :

$$w_i(x) = \delta_{ij} \quad \forall i = 1, \dots, 2N \text{ et } \forall j = 1, \dots, 2n + 1. \quad (2.2.1)$$

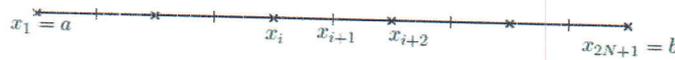


FIGURE 2.3 – Discrétisation (maillage) du segment $[a, b]$ en éléments finis P_2

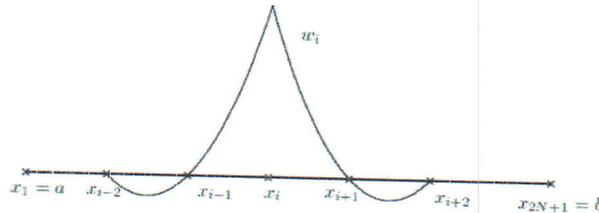


FIGURE 2.4 – Fonction de base P_2 associée à une extrémité

Après des calculs élémentaires on obtient :

$$w_i(x) = \begin{cases} \frac{(x - x_{i-2})(x - x_{i-1})}{(x_i - x_{i-2})(x_i - x_{i-1})} & \text{si } x \in [x_{i-2}, x_i], \\ \frac{(x - x_{i+1})(x - x_{i+2})}{(x_i - x_{i+1})(x_i - x_{i+2})} & \text{si } x \in [x_i, x_{i+2}], \\ 0 & \text{si } x \notin [x_{i-2}, x_{i+2}], \end{cases} \quad (2.2.2)$$

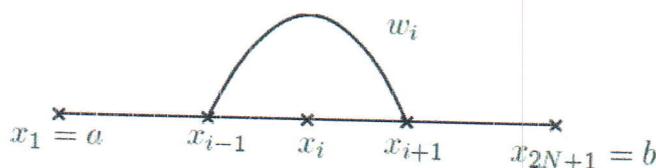
$$w_i(x) = \begin{cases} \frac{(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})}{(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})} & \text{si } x \in [x_{i-1}, x_{i+1}], \\ 0 & \text{si } x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}]. \end{cases} \quad (2.2.3)$$

lorsque w_i correspondent à un point milieu d'un élément (voir Figure (2.3)). La formulation variationnelle du problème de Dirichlet homogène consiste à chercher la fonction u appartenant à $H_0^1[a, b]$ telle que (2.1.6) soit satisfaite. Ainsi le problème approché s'écrit :

Chercher u_2, \dots, u_{2N} tels que :

$$\sum_{j=2}^{2N} \left(\int_a^b \alpha w_j'(x) w_i'(x) dx + \int_a^b \beta w_j(x) w_i(x) dx \right) u_j = \int_a^b f(x) w_i(x) dx \quad \forall i = 2, \dots, 2N. \quad (2.2.4)$$



FIGURE 2.5 – Fonction de base P_2 associée à un milieu

2.2.1 Technique de l'élément de référence

Par le changement de variable

$$F_i = x_{i+1} + \frac{x_{i+2} - x_i}{2} t,$$

on passe de $t \in [-1, 1]$, $x \in [x_i, x_{i+2}]$.

Les fonctions de base dans $[x_i, x_{i+2}]$ s'expriment donc à l'aide des trois fonctions suivantes définies sur $[-1, 1]$

$$\hat{w}_1(t) = \frac{t(t-1)}{2}, \quad \hat{w}_2(t) = -(t-1)(t+1), \quad \hat{w}_3(t) = \frac{t(t+1)}{2}. \quad (2.2.5)$$

L'expression des dérivées est :

$$\frac{d\hat{w}_1}{dt} = t - \frac{1}{2}, \quad \frac{d\hat{w}_2}{dt} = -2t, \quad \frac{d\hat{w}_3}{dt} = t + \frac{1}{2}. \quad (2.2.6)$$

2.2.2 Calcul de la matrice de masse élémentaire

Par $w_{2i+k} \circ F_i = \hat{w}_{k+2}$ avec la fonction F_i est définie par le changement de variable précédent et $k = -1, 0, 1$.

Les coefficients de la matrice de masse pour l'élément $[x_i, x_{i+2}]$ sont :

$$\beta \frac{x_{i+2} - x_i}{2} \int_{-1}^1 \hat{w}_i(t) \hat{w}_j(t) dt \quad \text{pour } i, j = 1, 2, 3. \quad (2.2.7)$$

On obtient ainsi la matrice de masse élémentaire suivante pour cet élément :

$$M_i = \beta \frac{x_{i+2} - x_i}{2} \begin{pmatrix} \frac{4}{15} & \frac{2}{15} & -\frac{1}{15} \\ \frac{2}{15} & \frac{16}{15} & \frac{2}{15} \\ -\frac{1}{15} & \frac{2}{15} & \frac{4}{15} \end{pmatrix}. \quad (2.2.8)$$

2.2.3 Calcul de la matrice de raideur élémentaire

on a $\frac{d\omega_{2i+k}}{dx} = \frac{d\hat{\omega}_{k+2}}{dt} \frac{dt}{dx}$ pour $k = -1, 0, 1$ et $i = 1, \dots, N$. Ainsi les coefficients de la matrice de raideur sont :

$$\alpha \frac{2}{x_{i+2} - x_i} \int_{-1}^1 \hat{\omega}'_i(t) \hat{\omega}'_j(t) dt \quad \text{pour } i, j = 1, 2, 3, \quad (2.2.9)$$

et on obtient :

$$K_i = \alpha \frac{2}{x_{i+2} - x_i} \begin{pmatrix} \frac{7}{6} & -\frac{4}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{4}{3} & \frac{8}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{4}{3} & \frac{7}{6} \end{pmatrix}. \quad (2.2.10)$$

2.2.4 Calcul du second membre élémentaire

Chaque composante F_i du vecteur second-membre global est donnée par

$$F_i = \int_a^b f(x) \omega_i(x) dx$$

est également calculée par assemblage des contributions élémentaires $F_i^{(k)}$.

On a :

$$F_i = \sum_{k=1}^N F_i^k = \sum_{k=1}^N \int_{x_{2k-1}}^{x_{2k+1}} f(x) \omega_i(x) dx, \quad (2.2.11)$$

où les F_i^k désignent les contributions des éléments K .

Sur l'élément $T_k = [x_{2k-1}, x_{2k+1}]$, il n'y a que 3 fonctions de base non nulles : $\omega_{2k-1}, \omega_{2k}, \omega_{2k+1}$.

Ainsi les seules contributions non nulles sont $F_{2k-1}^{(k)}, F_{2k}^{(k)}, F_{2k+1}^{(k)}$.

On utilise la formule de Simpson pour les calculs,

$$\int_{x_{2k-1}}^{x_{2k+1}} \Phi(x) dx \approx \frac{x_{2k-1} - x_{2k+1}}{6} [\Phi(x_{2k-1}) + 4\Phi(x_{2k}) + \Phi(x_{2k+1})] \quad (2.2.12)$$

Au final, le second membre correspond à l'élément $[x_{2k-1}, x_{2k+1}]$ s'écrit :

$$\begin{pmatrix} F_{2k-1}^{(k)} \\ F_{2k}^{(k)} \\ F_{2k+1}^{(k)} \end{pmatrix} = \frac{x_{2k+1} - x_{2k-1}}{6} \begin{pmatrix} f_{2k-1} \\ f_{2k} \\ f_{2k+1} \end{pmatrix} \quad (2.2.13)$$

2.2.5 Technique d'assemblage

Considérons un maillage à N éléments et notons B la matrice globale à assembler (matrice de raideur ou de masse globale), b_k les matrices élémentaires correspondantes relatives à chaque élément T_k et F la matrice globale du second membre, l_k les matrices élémentaires correspondantes relatives à chaque élément T_k .

L'algorithme d'assemblage est très simple dès lors que l'on dispose d'un tableau associant les points d'un élément T_k et les noeuds du maillage global. Dans ce cas très simple d'éléments de degré deux en dimension un, chaque élément T_k comprend trois noeuds $x_{2k-1}, x_{2k}, x_{2k+1}$. Son schéma est le suivant :

Pour des matrices

POUR $K = 1 : N$ FAIRE ! boucle sur les éléments

POUR $i = 1 : 3$ FAIRE ! boucle sur les numéros locaux

POUR $j = 1 : 3$ FAIRE ! boucle sur les numéros locaux

$I = 2 * K + i - 2!$ numéros globaux

$J = 2 * K + j - 2!$ numéros globaux

$B(I, J) = B(I, J) + b(i, j)!$ B : matrice globale, b : matrice élémentaire

FIN DES 3 BOUCLES

Pour second membre

POUR $K = 1 : N$ FAIRE ! boucle sur les éléments

POUR $i = 1 : 3$ FAIRE ! boucle sur les numéros locaux

$I = 2 * K + i - 2!$ numéros globaux

$F(I) = F(I) + l(i)!$ F : matrice globale, l : matrice élémentaire

FIN DES 2 BOUCLES

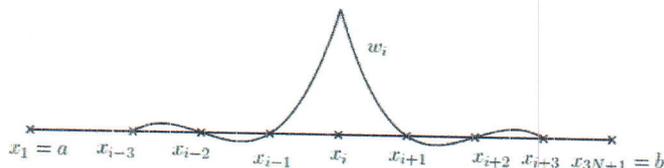
On a alors les programmes suivants en matlab :

2.3 Éléments finis de degré trois

On conserve toujours les mêmes notations de bases, mais cette fois l'espace V_b est la ensemble des fonctions continues sur $[a, b]$ et étant polynomiales de degré trois sur chaque sous-intervalle. Un polynôme de degré trois est fixé par ses valeurs en quatre points. On considère donc une discrétisation globale en $3N + 1$ points ou noeuds x_i indexés par $i = 1, \dots, 3N + 1$:

$$x_1 = a < x_2 < x_3 < \dots < x_{3N} < x_{3N+1} = b$$



FIGURE 2.6 - Discretisation (maillage) du segment $[a, b]$ en éléments finis P_3 FIGURE 2.7 - Fonction de base P_3 associée à une extrémité

avec

$$x_{3i-1} = x_{3i-2} + \frac{x_{3i+1} - x_{3i-2}}{3} \quad \text{pour } i = 1, \dots, N,$$

$$x_{3i} = x_{3i-2} + 2 \frac{x_{3i+1} - x_{3i-2}}{3} \quad \text{pour } i = 1, \dots, N$$

et $T_i = [x_{3i-2}, x_{3i-1}]$ pour $i = 1, \dots, N$.

Soit encore la base w_i avec $i = 1, \dots, 3N + 1$ de V_b données par :

$$w_i(x_j) = \delta_{ij} \quad \forall i = 1, \dots, 3N + 1 \quad \text{et} \quad \forall j = 1, \dots, 3N + 1. \quad (2.3.1)$$

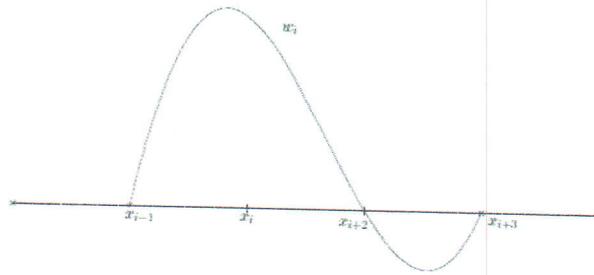
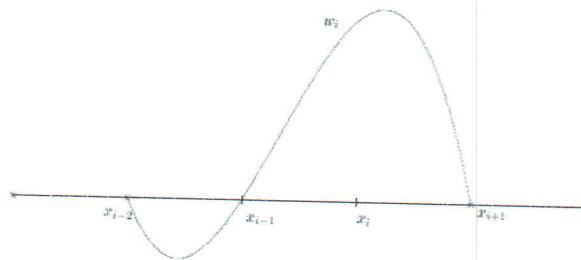
Ainsi, lorsque les fonctions w_i correspondant à un point x_i qui est extrémité d'un élément, il vient :

$$w_i(x) = \begin{cases} \frac{(x - x_{i-1})(x - x_{i-2})(x - x_{i-3})}{(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i-2})(x_i - x_{i-3})} & \text{si } x \in [x_{i-3}, x_i], \\ \frac{(x - x_{i+1})(x - x_{i+2})(x - x_{i+3})}{(x_i - x_{i+1})(x_i - x_{i+2})(x_i - x_{i+3})} & \text{si } x \in [x_i, x_{i+3}], \\ 0 & \text{si } x \notin [x_{i-3}, x_{i+3}], \end{cases} \quad (2.3.2)$$

et lorsque les fonctions w_i correspondant aux deux points intérieurs d'un élément, nous obtenons :

$$w_i(x) = \begin{cases} \frac{(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})(x - x_{i+2})}{(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})(x_i - x_{i+2})} & \text{si } x \in [x_{i-1}, x_{i+2}], \\ 0 & \text{si } x \notin [x_{i-1}, x_{i+2}], \end{cases} \quad (2.3.3)$$



FIGURE 2.8 – Fonction de base P_3 associée à premier point intérieurFIGURE 2.9 – Fonction de base P_3 associée à deuxième point intérieur

si x_i est le premier point intérieur d'un élément. Et

$$w_i(x) = \begin{cases} \frac{(x - x_{i-2})(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})}{(x_i - x_{i-2})(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})} & \text{si } x \in [x_{i-2}, x_{i+1}], \\ 0 & \text{si } x \notin [x_{i-2}, x_{i+1}], \end{cases} \quad (2.3.4)$$

si x_i est le deuxième point intérieur d'un élément.

À partir de la formulation variationnelle (2.1.6), nous obtenons maintenant un problème approché qui s'écrit :

Trouver u_2, \dots, u_{3N} tels que :

$$\sum_{j=2}^{3N} \left(\int_a^b \alpha \omega'_j(x) \omega'_i(x) dx + \int_a^b \beta \omega_j(x) \omega_i(x) dx \right) u_j = \int_a^b f(x) \omega_i(x) dx \quad \forall i = 2, \dots, 3N. \quad (2.3.5)$$

2.3.1 Technique de l'élément de référence

Par le changement de variable $F_i = \frac{x_i + x_{i+3}}{2} + \frac{x_{i+3} - x_i}{2} t$ on passe de $t \in [-1, 1]$ $x \in [x_i, x_{i+3}]$. Les fonctions de base dans $[x_i, x_{i+3}]$ s'expriment donc à l'aide des quatre fonctions suivantes définies



sur $[-1,1]$:

$$\begin{aligned}\widehat{w}_1(t) &= \frac{1}{16}(1-t)(3t-1)(3t+1), & \widehat{w}_2(t) &= \frac{9}{16}(t+1)(t-1)(3t-1), \\ \widehat{w}_3(t) &= \frac{9}{16}(t+1)(1-t)(3t+1), & \widehat{w}_4(t) &= \frac{1}{16}(t+1)(3t-1)(3t+1),\end{aligned}$$

dont les dérivées sont respectivement égales à

$$\begin{aligned}\frac{d\widehat{w}_1}{dt} &= \frac{1}{16}(-27t^2 + 18t + 1), & \frac{d\widehat{w}_2}{dt} &= \frac{9}{16}(-9t^2 - 2t - 3), \\ \frac{d\widehat{w}_3}{dt} &= \frac{9}{16}(-9t^2 - 2t + 3), & \frac{d\widehat{w}_4}{dt} &= \frac{1}{16}(-27t^2 + 18t - 1).\end{aligned}$$

2.3.2 Calcul de la matrice de masse élémentaire

Par $w_{3i+k} \circ F_i = \widehat{w}_{k+3}$ avec la fonction F_i est définie par le changement de variable précédent et $k = -2, -1, 0, 1$.

Le calcul des coefficients de la matrice de masse se ramène à l'évaluation des intégrales :

$$\beta \frac{x_{i+3} - x_i}{2} \int_{-1}^1 \widehat{w}_i(t) \widehat{w}_j(t) dt \quad \text{pour } i, j = 1, 2, 3, 4. \quad (2.3.6)$$

2.3.3 Calcul de la matrice de raideur élémentaire

On a

$$\frac{dw_{3i+k}}{dx} = \frac{d\widehat{w}_{k+3}}{dt} \frac{dt}{dx} \quad \text{pour } k = -2, -1, 0, 1 \text{ et } i = 1, \dots, N.$$

Donc, les coefficients de la matrice de raideur dans élément $[x_i, x_{i+3}]$ sont

$$\alpha \frac{2}{x_{i+3} - x_i} \int_{-1}^b \phi'_i(t) \phi'_j(t) dt \quad \text{pour } i, j = 1, 2, 3, 4. \quad (2.3.7)$$



2.3.4 Calcul du second membre élémentaire

Chaque composante F_i du vecteur second-membre global

$$F_i = \int_a^b f(x)w_i(x)dx$$

est calculée également par assemblage de contributions élémentaires $F_i^{(k)}$ selon

$$F_i = \sum_{k=1}^N F_i^{(k)} = \sum_{k=1}^N \int_{x_{3k-2}}^{x_{3k+1}} f(x)w_i(x)dx, \quad (2.3.8)$$

où les $F_i^{(k)}$ désignent les contributions des éléments k .

Sur élément $T_k = [x_{3k-2}, x_{3k+1}]$, il n'y a que 4 fonctions de base non nulles : $w_{3k-2}, w_{3k-1}, w_{3k}, w_{3k+1}$. Donc, sur cet élément, il n'y a que les contributions non nulles. Sur l'élément $T_k = [x_{2k-1}, x_{2k+1}]$, il n'y a que 4 fonctions de base non nulles : $w_{3k-2}, w_{3k-1}, w_{3k}, w_{3k+1}$. Ainsi les seules contributions non nulles sont $F_{3k-2}^{(k)}, F_{3k-1}^{(k)}, F_{3k}^{(k)}, F_{3k+1}^{(k)}$.

2.3.5 Technique d'assemblage

Considérons un maillage à N éléments et notons B la matrice globale à assembler (matrice de raideur ou de masse globale), b_k les matrices élémentaires correspondantes relatives à chaque élément T_k et F la matrice globale du second membre, l_K les matrices élémentaires correspondantes relatives à chaque élément T_k .

L'algorithme d'assemblage est très simple dès lors que l'on dispose d'un tableau associant les points d'un élément T_k et les noeuds du maillage global. Dans ce cas très simple d'éléments de degré deux en dimension un, chaque élément T_k comprend trois noeuds $x_{3k-2}, x_{3k-1}, x_{3k}, x_{3k+1}$.

Son schéma est la suivante :

Pour des matrices :

POUR $K = 1 : N$ FAIRE ! boucle sur les éléments

POUR $i = 1 : 4$ FAIRE ! boucle sur les numéros locaux

POUR $j = 1 : 4$ FAIRE ! boucle sur les numéros locaux

$I = 3 * K + i - 3$! numéros globaux

$J = 3 * K + j - 3$! numéros globaux



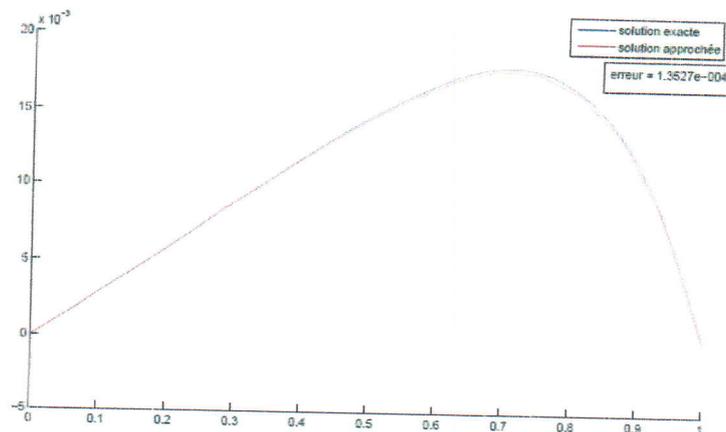


FIGURE 2.10 – Approcher la solution avec la méthode d'éléments finis de degré 1

$B(I,J) = B(I,J) + b(i,j)$! B : matrice globale, b : matrice élémentaire

FIN DES 3 BOUCLES Pour second membre :

POUR $K = 1 : N$ FAIRE ! boucle sur les éléments

POUR $i = 1 : 4$ FAIRE ! boucle sur les numéros locaux

$I = 3 * K + i - 3$! numéros globaux

$F(I) = F(I) + l(i)$! F : matrice globale, l : matrice élémentaire

FIN DES 2 BOUCLES

On reçoit les résultats des programmes en Matlab pour résolution numérique de la solution pour le problème :

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = x^4 & \text{sur }]0, 1[, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (2.3.9)$$

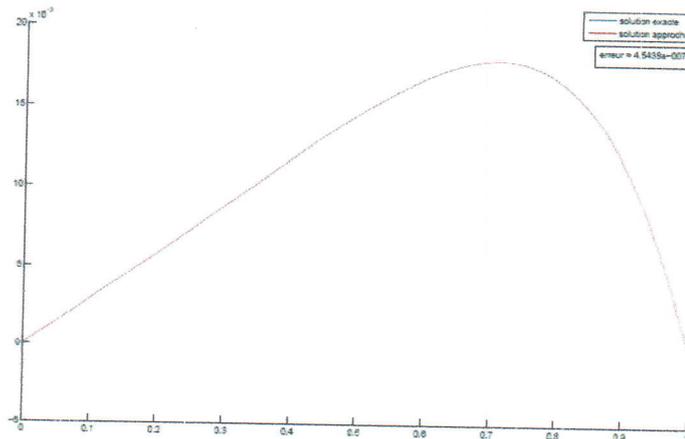


FIGURE 2.11 – Approcher la solution avec la méthode d'éléments finis de degré 2

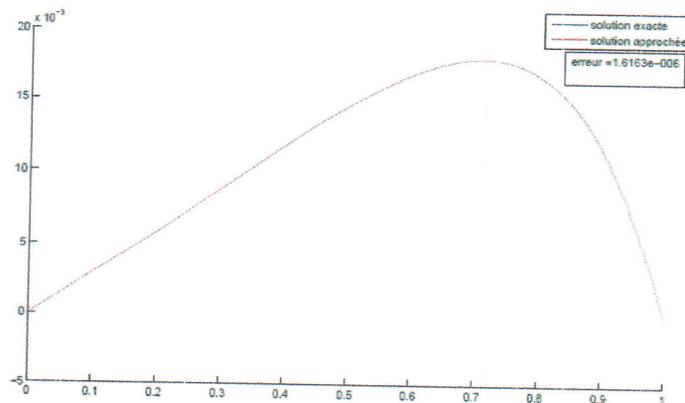


FIGURE 2.12 – Approcher la solution avec la méthode d'éléments finis de degré 3

Remarque 2.3.1. les figures (2.11), et (2.12) sont l'issues des programmes de la méthode d'éléments finis de degré deux et de degré trois respectivement et les programmes en matlab sont similaires à celles utiliser en P1

Eléments finis par B-splines

Dans la méthode d'éléments finis classique, le principal défaut de cette méthode est que la solution approchée est une fonction qui n'est pas continue. Or, dans de nombreuses applications, par exemple en informatique graphique, il est préférable d'utiliser des fonctions ayant au moins une dérivée continue. Cette propriété sera satisfaite dans la méthode d'éléments finis par B-spline.

Spline est une fonction polynomiale définie par morceaux et de degré p sur chaque intervalle. Une B-spline est une combinaison linéaire de splines non-négatives à support compact minimal. Pour construire les fonctions base des B-splines, on doit d'abord introduire la définition de vecteur des noeuds.

3.1 Vecteur des noeuds

Dans l'espace dimension un, un vecteur de noeuds $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$ est un ensemble non décroissant de coordonnées dans l'espace des paramètres, où n est le nombre de points de contrôle et p est le degré de la spline.

Si les noeuds $\xi_i, i = 1, \dots, n+p+1$ sont équidistants, on dit que ce vecteur de noeuds est uniforme. Et si les noeuds en première et dernière position sont répétés $p+1$ fois, on dit que ce vecteur de noeuds est ouvert.

3.2 Les fonctions B-splines

Soit $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k\}$ un vecteur de noeuds. Les fonctions B-splines $N_{i,p}$ sont définies par récurrence sur p par les relations suivantes : Pour $p = 0$:

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \text{ pour } i = 1, \dots, k-1. \quad (3.2.1)$$



Pour $p = l \geq 1$:

$$N_{i,l}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+1} - \xi_i} N_{i,l-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+l+1} - \xi}{\xi_{i+l+1} - \xi_{i+l}} N_{i+1,l-1}(\xi) \quad \text{pour } i = 1, \dots, k - (l + 1). \quad (3.2.2)$$

Remarque 3.2.1. 1. La fonction $N_{i,p}$ est un polynôme de degré inférieur ou égale p sur chaque intervalle $[\xi_j, \xi_{j+1}[$.

2. La fonction $N_{i,p}$ s'annule en dehors de l'intervalle $]\xi_i, \xi_{i+p+1}[$.

3. La fonction $N_{i,p}$ s'annule aussi en ξ_i sauf si $\xi_i = \xi_{i+1} = \dots = \xi_{i+p} < \xi_{i+p+1}$ auquel cas $N_{i,p}(\xi_i) = 1$.

4. $N_{i,p} \geq 0, \forall \xi$ et $\sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) = 1 \forall \xi$.

On peut construire une matrice de dimension $(n + p) \times (p + 1)$ qui stocke toutes les fonctions B-splines $N_{i,l}(\xi)$ avec $0 \leq l \leq p$ en forme :

$$\begin{pmatrix} N_{1,0}(\xi) & N_{1,1}(\xi) & \dots & N_{1,p}(\xi) \\ N_{2,0}(\xi) & N_{2,1}(\xi) & \dots & N_{2,p}(\xi) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ N_{n,0}(\xi) & N_{n,1}(\xi) & \dots & N_{n,p}(\xi) \\ N_{n+1,0}(\xi) & N_{n+1,1}(\xi) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ N_{n+p-1,0}(\xi) & N_{n+p-1,1}(\xi) & \dots & 0 \\ N_{n+p,0}(\xi) & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

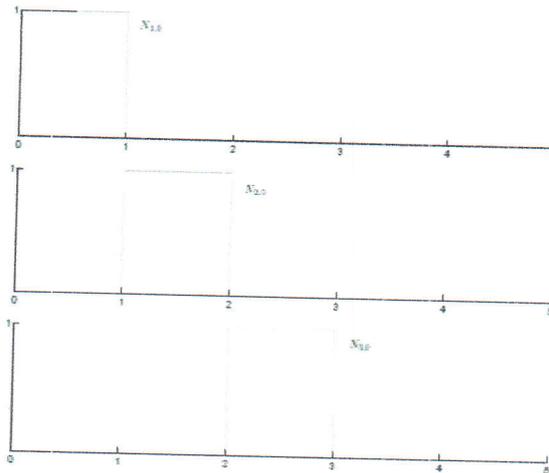


FIGURE 3.1 – Fonctions B-splines de degré 0

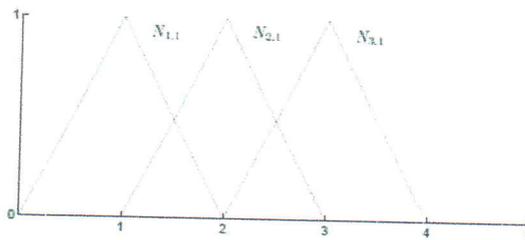


FIGURE 3.2 – Fonctions B-splines de degré 1

3.3 Les dérivées de fonctions B-splines

La dérivée d'une fonction de base B-spline est donnée par :

$$N'_{i,p} = \frac{p}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) - \frac{p}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi)$$

3.3.1 Courbes B-splines

Une courbe B-splines de degré p définie par n points de contrôle P_1, P_2, \dots, P_n est de la forme :

$$X_p(\xi) = (x(\xi), y(\xi)) = \sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) P_i, \quad (3.3.1)$$

où $P_i = (X_i, Y_i)$ sont les coordonnées de la i ème-point de contrôle.

Remarque 3.3.1. :



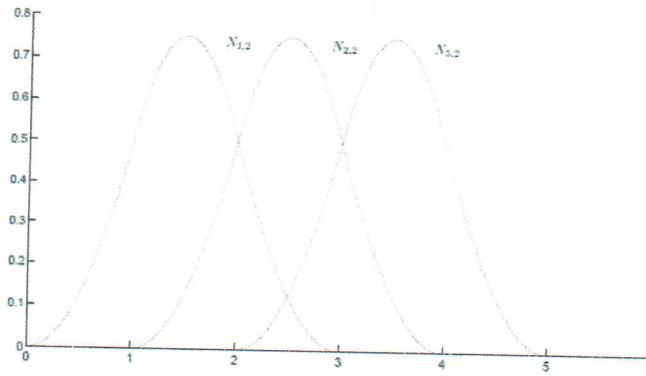


FIGURE 3.3 – Fonctions B-splines de degré 2

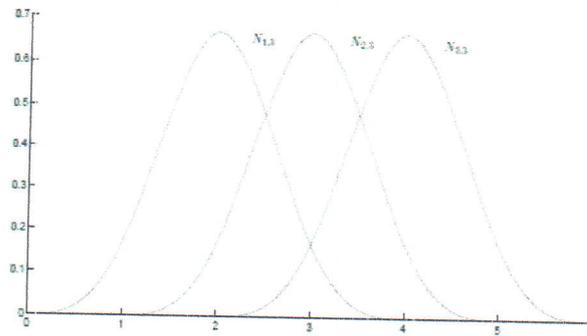


FIGURE 3.4 – Fonctions B-splines de degré 3

1. Les composantes de $x_p(\xi)$ sont des polynômes de degré p sur chaque intervalle $[\xi_i, \xi_{i+1}[$,
2. Si $\xi \in [t_i, t_{i+1}[$, $x_p(\xi)$ ne dépend que des points de contrôle p_{i-p}, \dots, p_i et se trouve dans l'enveloppe convexe de ces points,
3. Si ξ_i est un noeud simple et $p \geq 1$, $x_p(\xi_i)$ ne dépend que des points de contrôle p_{i-p}, \dots, p_{i-1} et se trouve dans l'enveloppe convexe de ces points.

3.4 Interpolation par des courbes B-splines

On se limite aux courbes de degré 3 par morceaux. On cherche à faire passer une courbe B-spline en $N - 1$ points Q_i et en imposant la dérivées aux extrémités. Le problème se divise en deux phases.

Première phase : On se fixe un vecteur de noeuds t et on cherche un polygone de contrôle P tel que la courbe B-spline X_k correspondante passe par les Q_i aux noeuds. L'interpolation se traduit alors par la résolution d'un système linéaire.

Deuxième phase : On cherche à optimiser le choix du vecteur de noeuds. Ce problème est typiquement non linéaire.

3.4.1 Le problème linéaire

On a le théorème suivant pour des B-splines de degré 3.

Théorème 3.4.1. Soient Q_0, \dots, Q_N des points de \mathbb{R}^n . Soient v_a, v_b deux vecteurs de \mathbb{R}^n . Soit t un vecteur de noeuds vissé aux extrémités, de la forme

$$t_0 = t_1 = t_2 = t_3 = a < t_4 < \dots < t_{N+2} < b = t_{N+3} = t_{N+4} = t_{N+5} = t_{N+6}$$

Il existe un unique polygone de contrôle $P = (P_0, \dots, P_{N+2})$ tel que la courbe B-spline de degré 3 associée satisfasse

$$\forall i = 0, \dots, N, \quad X_3(t_{i+3}) = Q_i, \quad X'(a) = v_a \quad \text{et} \quad X'(b) = v_b.$$

Lemme 3.4.1. Soient $f, x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^2 . On suppose que

- x est polynomiale de degré 3 sur chaque intervalle,
- $f(t_i) = x(t_i)$ pour $i = 3, \dots, N + 3$ et $f'(a) = x'(a)$, $f'(b) = x'(b)$.

Alors,

$$\int_a^b (f''(t) - x''(t))^2 dt = \int_a^b f''(t)^2 dt - \int_a^b x''(t)^2 dt.$$



Démonstration. On vérifie immédiatement que

$$\int_a^b (f''(t) - x''(t))^2 dt - \int_a^b f''(t)^2 dt + \int_a^b x''(t)^2 dt = -2R$$

ou

$$R = \int_a^b (f''(t) - x''(t))x''(t) dt$$

On intègre par parties sur chaque intervalle

$$\begin{aligned} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (f''(t) - x''(t))x''(t) dt &= (f'(t_{i+1}) - x'(t_{i+1}))x''(t_{i+1}) - (f'(t_i) - x'(t_i))x''(t_i) \\ &\quad - \int_{t_i}^{t_{i+1}} (f'(t) - x'(t))x'''(t) dt \\ &= (f'(t_{i+1}) - x'(t_{i+1}))x''(t_{i+1}) - (f'(t_i) - x'(t_i))x''(t_i) \\ &\quad - (f(t_{i+1}) - x(t_{i+1}))x'''(t_{i+1}) + (f(t_i) - x(t_i))x'''(t_i) \\ &\quad + \int_{t_i}^{t_{i+1}} (f(t) - x(t))x''''(t) dt \\ &= (f'(t_{i+1}) - x'(t_{i+1}))x''(t_{i+1}) - (f'(t_i) - x'(t_i))x''(t_i), \end{aligned}$$

car $x^4 = 0$ et $f(t_{i+1}) - x(t_{i+1}) = f(t_i) - x(t_i) = 0$. En additionnant, il vient

$$R = (f'(b) - x'(b))x''(b) - (f'(a) - x'(a))x''(a) = 0,$$

car $f'(a) - x'(a) = f'(b) - x'(b) = 0$. □

Théorème 3.4.2. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 . Soit X_3 la fonction B-spline de degré 3 qui l'interpole en $N + 1$ point plus les dérivées aux bornes, selon le théorème 1. Alors

$$\|f - x_3\|_\infty \leq \frac{h^3}{2} \|f''\|_2 \quad \text{et} \quad \|f' - x'_3\|_\infty \leq h^{1/2} \|f''\|_2,$$

où $h = \max |t_{i+1} - t_i|$.

Démonstration. Posons $g = f - x_3$. Le lemme 2 donne

$$\begin{aligned} \|g''\|_2^2 &= \int_a^b g''(t)^2 dt \\ &= \int_a^b f''(t)^2 dt - \int_a^b x_3''(t)^2 dt \\ &\leq \|f''\|_2^2. \end{aligned}$$



Par construction, g s'annule aux t_i , donc, d'après le théorème de **Rolle**, g' s'annule au moins une fois dans chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}]$. Tout point $t \in [a, b]$ est donc à distance au plus h d'un point t' tel que $g'(t') = 0$. On écrit :

$$\begin{aligned} |g'(t)| &= |g'(t) - g'(t')| \\ &= \left| \int_{t'}^t g''(s) ds \right| \\ &\leq \left(\int_{t'}^t ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{t'}^t g''(s) ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq h^{\frac{1}{2}} \|g''\|_2 \\ &\leq h^{\frac{1}{2}} \|f''\|_2, \end{aligned}$$

d'après l'inégalité de **Cauchy-Schwarz**. Ceci montre que

$$\|g'\|_{\infty} \leq h^{\frac{1}{2}} \|f''\|_2.$$

Tout point $t \in [a, b]$ est à distance au plus $\frac{h}{2}$ d'un point t'' tel que $g(t'') = 0$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} |g(t)| &= |g(t) - g(t'')| \\ &= \left| \int_{t''}^t g'(s) ds \right| \\ &\leq |t - t''| \|g'\|_{\infty} \\ &\leq \frac{h^{\frac{1}{2}}}{2} \|f''\|_2 \end{aligned}$$

□

Remarque 3.4.1. Le choix de l'espacement uniforme n'est pas la meilleure solution.

3.4.2 Résolution numérique d'un problème d'interpolation

On se donne le vecteur de noeuds $t_0 = t_1 = t_2 = t_3 = 0 < t_4 = 1 < \dots < t_{N+2} = N - 1 < N = t_{N+3} = t_{N+4} = t_{N+5} = t_{N+6}$ dans l'intervalle $[0, N]$. Il s'agit de trouver le polygone de contrôle (à $N + 3$ sommets) de la B-spline qui passe par le point Q_i en t_{i+3} et pour dérivées v_0 (resp. v_N) aux extrémités.



On peut supposer que $n = 1$. Il s'agit de résoudre le système $AP = Q$ pour $Q = (Q_0, v_0, Q_1, \dots, Q_{N-1}, v_N, Q_N)$ et $P \in \mathbb{R}^{N+3}$ et

$$A = \begin{pmatrix} N_{1,p}(a) & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ N_{1,p}(a) & N'_{2,p}(a) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & N_{2,p}(a+b) & N_{3,p}(a+b) & N_{4,p}(a+b) & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & N'_{N,p}(b) \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & N_{N,p}(b) \end{pmatrix},$$

avec $p = 3, b = t_i - t_{i-1} = 1$. On utilise les valeurs des fonctions B-splines relatives au vecteur de noeuds ci-dessus :

$$X_3(0) = 0,$$

$$X'_3(0) = 3(P_i - P_0),$$

$$X_3(t_4) = \frac{1}{4}P_1 + \frac{17}{12}P_2 + \frac{1}{6}P_3,$$

$$X_3(t_{i+3}) = \frac{1}{6}P_i + \frac{2}{3}P_{i+1} + \frac{1}{6}P_{i+2}.$$

Pour $i \geq 2$. On a la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -3 & 3 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{7}{12} & \frac{1}{6} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \frac{1}{6} & \frac{7}{12} & \frac{1}{4} & 0 \\ \vdots & -3 & 3 \\ \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

On peut montrer directement que le système linéaire $AP = Q$ a exactement une solution en montrant que la matrice A est inversible. On remarque que $\det A = 3 \det B$ où la matrice B est :

$$B = \begin{pmatrix} \frac{7}{12} & \frac{1}{6} & 0 & \dots & \dots \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \dots & \dots \\ 0 & \ddots & \ddots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \frac{1}{6} & \frac{7}{12} \end{pmatrix}.$$

Pour montrer que B est inversible, on prouve que $(Bv, v) \neq 0, \forall v \in \mathbb{R}^{N-1} \setminus \{0\}$, $v = (v_1, \dots, v_{N-1})$.

$$\begin{aligned} (Bv, v) &= \left(\frac{7}{12}v_1 + \frac{1}{6}v_2 \right) v_1 + \sum_{i=1}^{N-3} \left(\frac{1}{6}v_i + \frac{2}{3}v_{i+1} + \frac{1}{6}v_{i+2} \right) v_{i+1} \\ &\quad + \left(\frac{7}{12}v_{N-1} + \frac{1}{6}v_{N-2} \right) v_{N-1} \\ &= \frac{1}{3} \sum_{i=2}^{N-2} v_1^2 + \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{N-2} (v_i + v_{i+1})^2 + \frac{5}{12}v_1^2 + \frac{5}{12}v_{N-1}^2 > 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^{N-1} \setminus \{0\} \end{aligned}$$

. ce qui montre que la matrice B est inversible.

En Matlab, on a le programme suivant pour tester l'interpolation de la courbe par calcul automatique des points de contrôle :

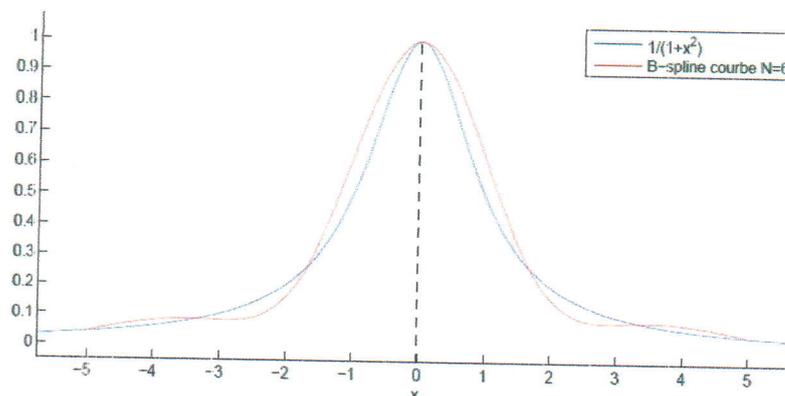
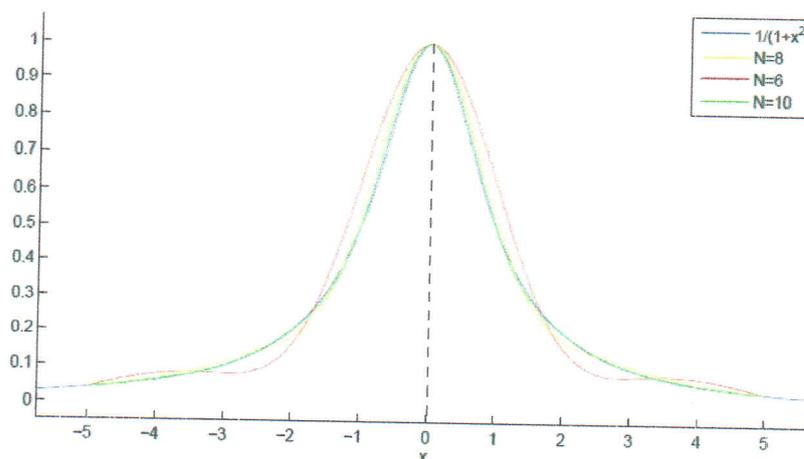
3.4.3 Programme : Test d'interpolation

```
function test1=spline1() p=3;
a=-5; b=5; N=6;
points2trace=linspace(a,b,1000);
ksiVector=zeros(1,N+2*p+1);
ksiVector(1:p)=a;
ksiVector(p+1:N+p+1)=linspace(a,b,N+1);
ksiVector(N+p+2:N+2*p+1)=b;
vi=0; vf=0;
Qp=zeros(N+1);
for
```



```
i=1:N+1 w=ksiVector(i+p);
Qp(i)=1/(1+w^2);
end pc=control(N,p,vi,vf,a,b,Qp);
pointsControles=zeros(2,N+3);
pointsControles(1,:)=ksiVector(p:N+p+2);
for i=1:N+3
pointsControles(2,i)=pc(i,1);
end m2=ip(ksiVector,pointsControles,p,points2trace);
hold on ezplot('1/(1+x*x)');
q=plot(m2(:,1),m2(:,2),'green');
hold off
end
```



FIGURE 3.5 - Interpolation sur $[-5, 5]$ avec $N = 6$ FIGURE 3.6 - Interpolation sur $[-5, 5]$ avec $N = 6, N = 8, N = 10$

3.5 La méthode d'éléments finis par B-splines

Dans cette méthode, on reconsidère le problème de Dirichlet homogène dans la méthode d'éléments finis classique. Mais, les fonctions bases de V_b sont les fonctions B-splines de degré p : $w_i := N_{i,p}, i = 1, \dots, n$. Alors on peut écrire le problème approché dans $V_{0,b}$ comme suit :

Trouver la fonction u_b , appartenant à $V_{0,b}$ telle que :

$$\begin{aligned} \int_a^b \alpha u_b'(x) N_{i,p}'(x) dx + \alpha u_b'(a) N_{i,p}(a) - \alpha u_b'(b) N_{i,p}(b) + \int_a^b \beta u_b(x) N_{i,p}(x) dx \\ = \int_a^b f(x) N_{i,p}(x) dx, \forall i = 2, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (3.5.1)$$

D'autre part, si u_b est une solution du problème approché dans $V_{0,b}$ on peut exprimer :

$$u_b = \sum_{j=2}^{n-1} u_j N_{j,p}(x) \quad (3.5.2)$$

Ainsi, le problème approché devient :

Trouver u_2, u_3, \dots, u_{n-1} tels que :

$$\begin{aligned} \sum_{j=2}^{n-1} \left(\int_a^b \alpha N_{j,p}'(x) N_{i,p}'(x) dx + \alpha N_{j,p}'(a) N_{i,p}(a) - \alpha N_{j,p}'(b) N_{i,p}(b) + \int_a^b \beta N_{j,p}(x) N_{i,p}(x) dx \right) u_j \\ = \int_a^b f(x) N_{i,p}(x) dx, \forall i = 2, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (3.5.3)$$

Posons

$$F_i = \int_a^b f(x) N_{i,p}(x) dx, \quad (3.5.4)$$

$$A_{ij} = \int_a^b \alpha N_{j,p}'(x) N_{i,p}'(x) dx + \alpha N_{j,p}'(a) N_{i,p}(a) - \alpha N_{j,p}'(b) N_{i,p}(b) + \int_a^b \beta N_{j,p}(x) N_{i,p}(x) dx. \quad (3.5.5)$$

On remarque que le problème approché prend la forme d'un système linéaire de $n-2$ équations à $n-2$ inconnues, qui peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$AU = F. \quad (3.5.6)$$

3.5.1 Calcul de la matrice du membre gauche

Chaque composante $A_{i,j}$ de la matrice membre gauche s'écrit

$$A_{ij} = m_{ij} + c_{ij}, \quad (3.5.7)$$

où

$$m_{ij} = \int_a^b \alpha N_{j,p}'(x) N_{i,p}'(x) dx + \int_a^b \beta N_{j,p}(x) N_{i,p}(x) dx, \quad (3.5.8)$$



et

$$c_{i,j} = \alpha N'_{j,p}(a)N_{i,p}(a) - \alpha N'_{j,p}(b)N_{i,p}(b). \quad (3.5.9)$$

Chaque composante $m_{i,j}$ est également calculée par assemblage de contributions élémentaires :

$$\begin{aligned} m_{ij} &= \int_a^b \left(\alpha N'_{j,p}(x)N'_{i,p}(x) + BN_{j,p}(x)N_{i,p}(x) \right) dx, \\ &= \sum_{s=1}^{n-p} \int_{T_s} \left(\alpha N'_{j,p}(x)N'_{i,p}(x) + BN_{j,p}(x)N_{i,p}(x) \right) dx. \end{aligned} \quad (3.5.10)$$

On remarque que sur l'élément T_s , il n'a que $p + 1$ fonctions B-splines $N_{s,p}, N_{s+1,p}, \dots, N_{s+p,p}$ non nulles et il n'a que $p + 1$ dérivés $N'_{s,p}, N'_{s+1,p}, \dots, N'_{s+p,p}$ non nulles. On peut donc utiliser la technique d'assemblage pour calculer les composantes $m_{i,j}$.

3.5.2 Calcul des composantes du second-membre

Chaque composante F_i du vecteur second-membre global est également calculée par assemblage de contributions élémentaires :

$$F_i = \int_a^b f(x)N_{i,p}(x)dx = \sum_{s=1}^{n-p} \int_{T_s} f(x)N_{i,p}(x)dx. \quad (3.5.11)$$

Sur élément T_s , il n'a que $p + 1$ fonctions B-splines $N_{s,p}, N_{s+1,p}, \dots, N_{s+p,p}$ non nulles. On peut donc utiliser la technique d'assemblage pour calculer les composantes F_i . On a le programme suivant en matlab pour approximation solution u par B-splines :

3.5.3 Programme B-spline

```
function test=ElementFini1DparBspline()
```

```
    ComparaisonparBspline();
```

```
end
```

```
function
```

```
test0=Comparaison par B-spline()
```

```
    nh=15;
```

```
    p=3; alpha=1; beta=1; a=0; b=1;
```

```
    nbpt=200;
```

```
    shift=(b-a)/1000;
```

```
    I=linspace(a,b-shift,nbpt);
```



```

function y=f(x)
    y = x4;
end
[g,G]= solution(p,nh,alpha,beta,f,a,b,I);
gp=derSolution(p,nh,G,I,a,b);
x=I;
c2=(37-24*exp(1))/(exp(1)-exp(-1));
c1=-24-c2;
s - exact=zeros(1,size(x,2));
for i=1 : size(x,2)
    s - exact(i)=c1*exp(x(i))+c2*exp(-x(i))+ x(i)4 + 12*x(i)2 + 24
end
err=g-s - exact;
em=max(abs(err))
hold on
close all;
e=plot (I,err);
xlabel('x');
ylabel('Erreur');
title('Erreur du solution exacte');
set(e,'Color','black','LineWidth',2);
hold off
figure;
p=plot(I,s - exact);
xlabel('x');
ylabel('u(x)');
title('Solution exacte');
set(p,'Color','blue','LineWidth',2);
figure;
q=plot(I,g);
xlabel('x');
ylabel('u(x)');
title('Solution approchée');

```



```
set(q,'Color','red','LineWidth',1.5);
hold off
figure;
d=plot(I,gp);
xlabel('x');
ylabel('u"(x)');
title('Première dérivée de la solution approchée');
set(d,'Color','blue','LineWidth',1.5);
hold off
end
```

3.6 Conclusion

1. La similarité

- Dans les deux méthodes, on utilise la même formulation variationnelle et la même technique d'assemblage.

2. La différence

- La base : Dans la méthode d'éléments finis classique, on choisit les fonctions d'interpolations de Lagrange et dans la méthode d'éléments finis par B-splines, on choisit les fonctions B-splines. Pour le degré un, les bases des deux méthodes coïncident, mais elles sont différentes en degré supérieur à 1.
- La continuité : Les fonctions d'interpolations de Lagrange de degré p sont seulement de classe C^0 mais les fonctions B-splines de degré p sont de classe C^{p-1} .
- Les fonctions d'interpolations de Lagrange peuvent recevoir des valeurs négatives, mais les fonctions B-splines sont toujours positives, donc tous les composants de la matrice de raideur dans la méthode des éléments finis par B-splines sont toujours positifs.
- Le nombre de fonctions de base : Avec le même N éléments, dans la méthode des éléments finis classique pour degré p on doit calculer $N \times p + 1$ fonctions de base, mais dans la méthode des éléments finis par B-splines, on doit seulement calculer $N + p$ fonctions de base.
- L'erreur entre les deux méthodes :



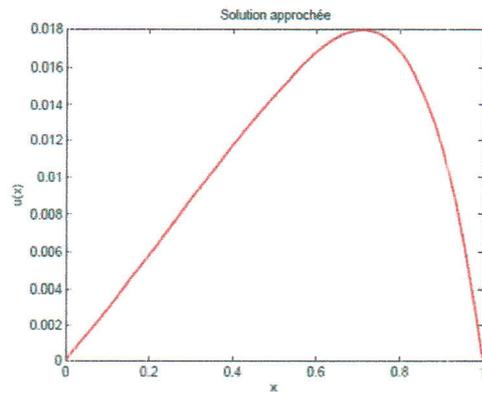


FIGURE 3.7 – Solution approchée

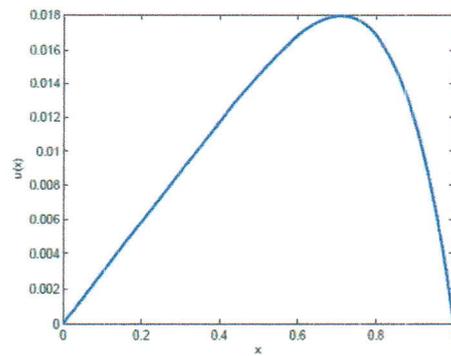


FIGURE 3.8 – Solution exacte

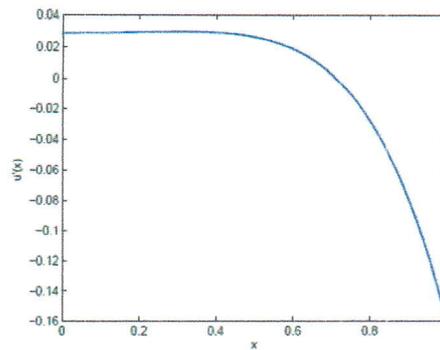


FIGURE 3.9 – Première dérivée de la solution approchée

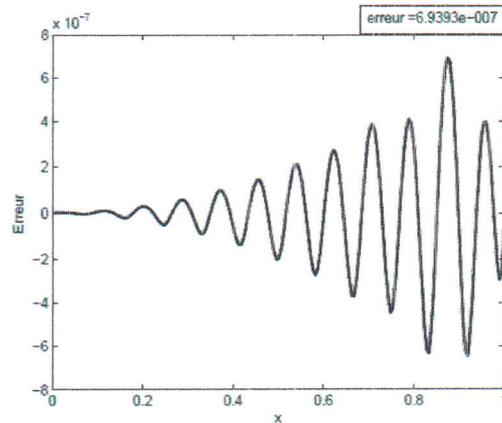


FIGURE 3.10 – Erreur du solution exacte

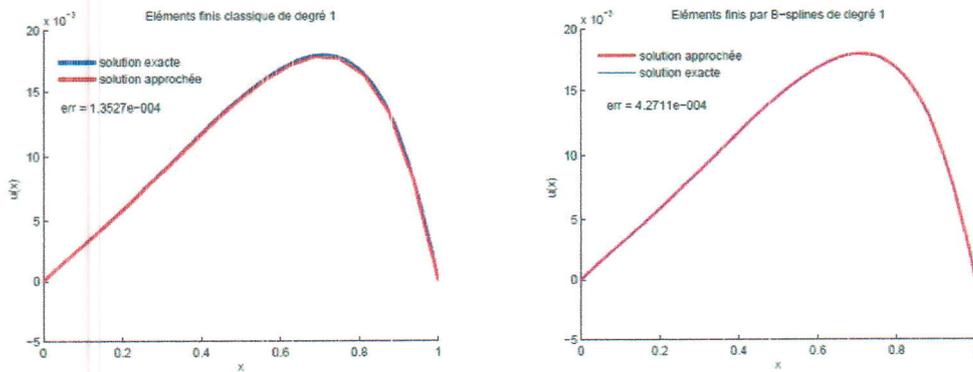


FIGURE 3.11 – Erreur : Eléments finis P1 et Eléments finis par B-splines de degré 1

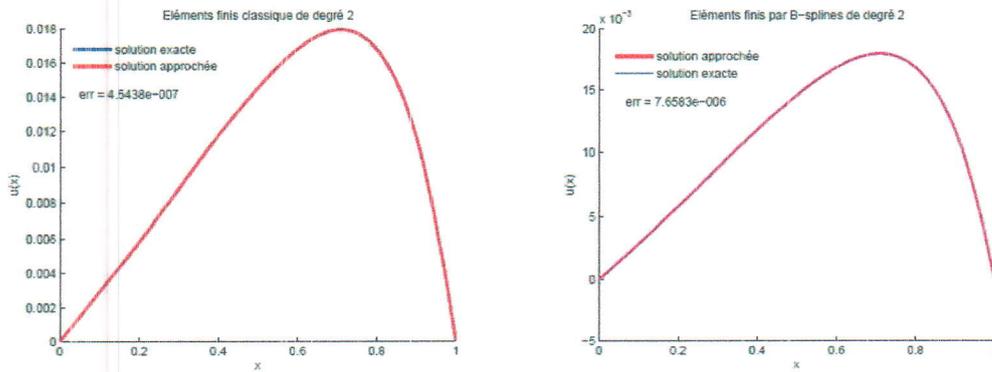


FIGURE 3.12 – Erreur : Éléments finis P2 et Éléments finis par B-splines de degré 2

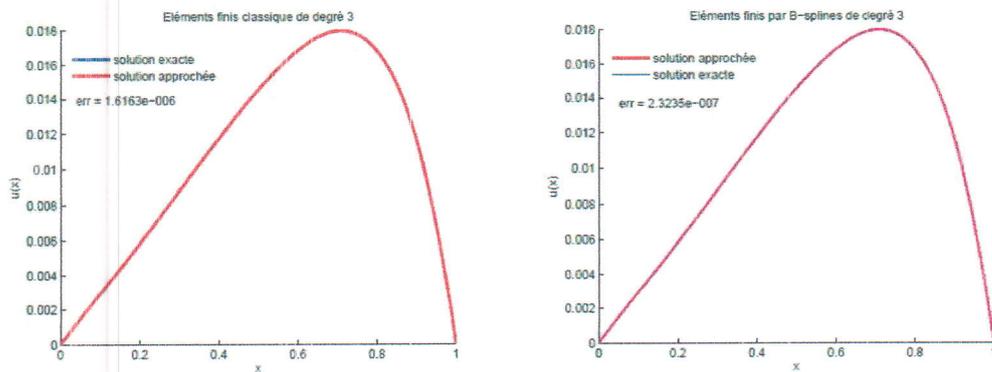


FIGURE 3.13 – Erreur : Éléments finis P3 et Éléments finis par B-splines de degré 3

Bibliographie

- [1] Courant, R. L, *Variational Methods for the Solution of Problems of Equilibrium and Vibration*. Bulletin of the American Mathematical Society, 49 :1 23, 1943.
- [2] Danaila.I, Joly. P, Kaber. S. D et Postel. M, *Introduction au calcul scientifique par la pratique ; 12 projets résolus avec MATLAB*, Dunod, Paris, 2005.
- [3] Ritz, W, *Ueber eine neue Methode zur Losung gewisser Variations probleme der mathematischen Physik*. J. Reine Angew. Math., 135 :161, 1908.
- [4] A. Quarteroni, R. Sacco et F. Saleri. *Méthodes Numériques (Algorithmes, analyse et applications)*, Springer, fevrier 2007.
- [5] Strang, G. et G. Fix : *An Analysis of the Finite Element Method*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1973.
- [6] Turner, M.J., R.W. Clough, H.C. Martin et L.C. Topp : *Stiffness and De ection Analysis of Complex Structures*. Journal of the Aeronautical Sciences, 23 :805 882, 1956.
- [7] NGUYEN T.T et TRINH T.H, *Eléments finis :du classique au isogéométrique*, Mémoire de Master, Universté de Nice sophia Antipolis, France, 2012.
- [8] M.K. Kadalbajoo and A.S.Yadaw,*Finite Difference, Finite element and B-Spline Collocation Methods Applied to Two Parameter Singularly Perturbed Boundary Value Problems*, Journal of Numerical Analysis, Industrial and Applied Mathematics (JNAIAM) vol. 5, no. 3-4, 2011, pp. 163-180

