République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Equations aux Dérivées Partielles**

Par :ZEDDOURI MERYEM

Intitulé

Bon conditionnement spectrale pour une classe d'opérateurs de convection-diffusion

Dirigé par :Dr.GUEBBAI HAMZA

Devant le jury

PRESIDENT	Dr.Hamlaoui Hamid	MCA	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr.Guebbai Hamza	MCB	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr.Tabouche Nora	MAA	Univ-Guelma

Session Juin 2014

Remerciement

En premier lieu et avant tout je tiens à exprimer mes remerciements au bon « **Dieu** » qui m'a entouré de sa bienveuillance et m'a renforcé avec le courage et la force pour avoir enfin mené à bien ce travail.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à mon Directeur de mémoire Mr. Guebbai Hamza, je le remercie de m'avoir ecadré, orienté, aidé et conseillé.

J'adresse mes sincéres remerciements A

Mes très chers parents, qui ont toujours été là pour moi « vous avez tout sacrifié pour vos enfant n'épargnant ni santé ni effort.Vous m'avez donné un magnifique modèle de labeur et de persévérance. Je suis redevable d'une éducation dont je suis fier.»

Je remercie mon frére Hafid et mes sœurs Sawsan, Marwa et Salima pour leur encouragement. A mon beaux frére Zoubir, et les petites Kawther et Rahma.

Je remercie très spécialement Zeyneb, Soumia,Nassima et Selma qui ont toujours été là pour moi. En fin je remercie tous mes ami(e)s que j'aime tant : Soumia, Jihad, Hanan, khawla Sara, Imen et Narimen. A tous ces intervenant,je

Présent mes remerciments, mon respect et ma gratitude

Meryem

Dédicace

Je dédie ce modeste travail

Â mon adorable pére qui a tant attendu ce moment

Â ma mére pour tout ce qu'elle a fait pour moi

Â mon frére et à mes sœurs pour leurs encouragement infini

Bon conditionnement spectrale pour une classe d'opérateurs de convection-diffusion

Zeddouri Meryem
Mémoire de master en mathématiques
Université de Guelma

11 juin 2014

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ

En utilisant des méthodes fonctionnelles, on localise le spectre d'une classe d'opérateurs différentiels. Dans ce travail, on étudie le conditionnement pseudospectrale pour une classe d'opérateurs de convection-diffusion non autoadjoints définis sur un ouvert non borné. À partir du résultat de conditionnement pseudospectrale, on localise le spectre de cette classe.

INTRODUCTION

La conaissance du spectre d'un opérateur de convonction-diffisiont est un problème trés compmlexe qui est jusqu'à maintennt ouvert. Nous allons essayer d'entamer ce problème en étudiant le spectre de l'opérateur suivant :

$$Au = -\triangle u + \left(-\nabla h(\prod_{i=1}^{n} x_i) \right) \cdot \nabla u + Vu,$$

où, h est une fonction continue et dérivable. Cet opérateur représente une généralisation du cas étudier dans [1], où $h(x) = x$.

L'avantage principal de la théorie pseudospectrale est la facilité de manipulation de ses outils comparés à ceux de la théorie spectrale. Un autre avantage est le bon conditionnement du psedospectre coparé au spectre. En s'appuyant sur ce dernies, on établit un résultat de conditionnement pseudospectral pour notre opérateurs. À partir de ce resultat on obtient une relation spectrale qui nous permet de localiser le spectre A.

Ce mémoire contient trois chapitres : Dans le premier chapitre nous rappelons des notions spectrales de base, et on construit le problème qu'on cherche à étudier. Notre idée consiste à l'utilisation de suites d'opérateurs pour approcher le spectre de notre opérateur.

Le deuxiéme chapitre est consacré à étudier les propriétés spectrale de ces suites d'opérateurs et on étudie la relation entre ces deux suites.

Dans le troisième chapitre, nous établissons une relation de stabilité de pseudospectre dans l'ordre de localiser celui de A, et nous établirons une nouveau résultat qui relie les différents spectres d'opérateurs construits.

CHAPITRE

1

RAPPELS ET DÉFINITION DU PROBLÈME

Dans cette section on rappelera les définitions et les résultats les plus importants. On entend par les plus importants, ceux dont on aura besoin pour démonter nos résultat.

1.1 Forme sectorielle

La notion des formes sesquilinéaire a pour but la généralisation de la notion du produit scalaire et le résultat de Lax-Milligrame. Nous commençons par la définition de ces formes puis nous donnerons un résultat sur la représentation de ces formes par un opérateur.

Soit t une application sur $H \times H$ dans $\mathbb{C}$ .t est dite sesqulinéaire si pour tout $u, v, w \in D$ et $\lambda \in \mathbb{C}$:

•$t[\lambda u, v] = \lambda t[u, v]$;

•$t[u, \lambda v] = \overline{\lambda} t[u, v]$;

•$t[u + w, v] = t[u, v] + t[w, v]$;

•$t[u, v + w] = t[u, v] + t[u, w]$.

D s'appellera le domaine de t et sera noté par $D(t)$. Essayons du définir $D(t)$:

$$D(t) = \{u \in H : t[u, v] \in \mathbb{C},\ \forall v \in D(t)\}.$$

On remarque que cette écriture est fausse Mathématiquement (voir la théorie Z.F des ensemble axiome 2) Pour cela on définit la forme quadratique Q associée à t par :

$$Q[u] = t[u, u].$$

La propriété suivante :

$$t[u, v] = \frac{1}{4} \left(t[u + v] - t[u - v] + it[u + iv] - it[u - iv] \right),$$

nous permet de définir $D(t)$ par :

$$D(t) = D(Q) = \{u \in H : Q(u) \in \mathbb{C}\}.$$

On définit le sous ensemble de $\mathbb{C}$ suivant :

$$Num(t) = \{t[u, u] : u \in D(t),\ \|u\|_H = 1\}.$$

Cet ensemble est appellé le **rang numérique** de t. t est dite **sectorielle** s'ils existet $\gamma, \theta \in \mathbb{R}$ tel que $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ et pour tout $\xi \in Num(t)$:

$$\begin{cases} Re(\xi) \geq \gamma, \\ |arg(\xi - \gamma)| \leq \theta. \end{cases}$$

On dit que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est **t-convergente** vers $u \in H$, notée ;

$$u_n \rightarrow_t u \quad et \quad t - \lim_{n\rightarrow+\infty} u_n = u.$$

Si

$$\begin{cases} u_n \in D(t) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \\ u_n \rightarrow_{n\rightarrow+\infty} u, \\ t[u_n - u_m] \rightarrow_{n,m\rightarrow+\infty} 0. \end{cases}$$

On dit que t est **fermé** si

$$u_n \rightarrow_t u \Longrightarrow u \in D(t).$$

Théorème 1. *Soit t une forme sesquilinéaire sectorielle, fermé et à domaine $D(t)$ dense dans H. Il existe un opérateur A tel que :*

1. *$D(A) \subseteq D(t)$.*
2. *$t[u,v] =< Au, v >$, pour tout $u \in D(A)$ et tout $v \in D(t)$.*
3. *Si pour $u \in D(t)$, $w \in H$ on*

$$t[u,v] =< w, v >,$$

pour tout v appartenant à un sous ensemble dense de $D(t)$, alors $u \in D(A)$ et $Au = w$.

Démonstration. Voir [4]. □

1.2 Notions spectrales

On se place dans un espace de Hilbert H muni du produit scalaire $< .,. >$. Soit A un opérateur linéaire défini de H dans lui méme, non borné fermé et à domaine $D(A)$ dense dans H. Soit W le sous ensemble de H défini par

$$W = \{v \in H : \exists \varphi \in H, \forall u \in D(A), < Au, v >=< u, \varphi >\}.$$

Si φ existe, elle est unique. En effet, si $< u, \varphi >=< u, \acute{\varphi} >$ pour tout $u \in D(A)$, alors $\varphi = \acute{\varphi}$ puisque $D(A)$ est dense dans H.

Définitions 1. – *L'opérateur* ***adjoint*** *de* A*, noté* A^* *est défini par son domaine* $D(A^*) = W$ *et sa formule est*

$$\forall v \in D(A^*), A^* v = \varphi.$$

– *L'opérateur* A *est dit* ***normal*** *si*

$$AA^* = A^* A$$

– *L'opérateur* A *est* ***auto-adjoint*** *si*

$$A = A^*$$

Pour l'opérateur A on défini les ensembles suivants :

– On appelle **spectre ponctuel** de A , noté $sp_p(A)$ le sous ensemble de $\mathbb{C}$ constitué des valeurs propres de A.

- On appelle **spectre essentiel** de A, noté $sp_{ess}(A)$ le sous ensemble de $\mathbb{C}$ constitué des valeurs $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que l'opérateur $\lambda I - A$ est injectif et non surjectif.
- Le **spectre** de A noté $sp(A)$, est la réunion du spectre ponctuel et du spectre essentiel.
- Pour $\varepsilon > 0$, le **pseudospectre** de l'opérateur A est l'union du spectre de A et de l'ensemble

$$\left\{\lambda \in \mathbb{C} : \|(\lambda I - A)^{-1}\| \geq \varepsilon^{-1}\right\},$$

notée $sp_\varepsilon(A)$.

Lemme 1. *Pour tout $\varepsilon > 0$, $\lambda \in sp_\varepsilon(A)$, si et seulement s'il existe $f \in D(A)$ tel que :*

$$\frac{\|Af - \lambda f\|}{\|f\|} \leq \varepsilon.$$

Démonstration. Cf. Proposition 4.15 dans [7]. □

Nous avons besoin d'une notion trés importante pour la localisation du pseudospectre. Soit S un sous ensemble de $\mathbb{C}$. On définit le **ε-voisinage** de S par :

$$N_\varepsilon(S) = \{s + z : s \in S, |z| \leq \varepsilon\}.$$

Les notions du ε-voisinage et du pseudopsctre sont liées à la notion du spectre dans le cas où A est normal.

Théorème 2. *Si A est normal, alors :*

$$sp_{\varepsilon}(A) = N_{\varepsilon}(sp(A)).$$

Démonstration. Il suffit d'utiliser l'égalité 3.31 page 277 de [4].

$$\text{Si } \lambda \notin sp(A); \quad \left\|(\lambda I - A)^{-1}\right\| = \frac{1}{\inf\limits_{\xi \in sp(A)} |\xi - \lambda|},$$

□

1.3 Présentation du problème

Soit Ω un ouvert non borné différent de $\mathbb{R}^n$, c-à-d $\Omega \subsetneq \mathbb{R}^n$. Soit $h \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Donc, $h(\prod_{i=1}^{n} x_i)$ est une fonction continue et dérivable pour $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \Omega$. Soit A l' opérateur de convection-diffusion défini, sur $L^2(\Omega, \mathbb{C})$ à image dans lui même, par :

$$Au = -\Delta u + \left(-\nabla h(\prod_{i=1}^{n} x_i)\right) \cdot \nabla u + Vu,$$

avec

$$V = \left\|\nabla h(\prod_{i=1}^{n} x_i)\right\|^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{i=1}^{n} x_i h'(\prod_{i=1}^{n} x_i)\right)^2.$$

On considère la forme hermitienne φ sur $L^2(\Omega, \mathbb{C})$ définie par :

$$\varphi(f,g) = \int_\Omega \nabla f \cdot \overline{\nabla g} d\mu + \int_\Omega \left(-\nabla h(\prod_{i=1}^{n} x_i)\right) \cdot \nabla f \overline{g} d\mu + \int_\Omega V f \overline{g} d\mu.$$

Où $d\mu = dx_1 dx_2 ....dx_n$ est la mesure de Lebesgue correspondante.
La forme quadratique associé à φ est :

$$Q(u) = \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega \left(-\nabla h(\prod_{i=1}^{n} x_i)\right) \cdot \nabla u \overline{u} d\mu + \int_\Omega V|u|^2 d\mu.$$

En intégrant par parties, nous obtenons

$$\begin{aligned} z &= \int_\Omega \left(-\nabla h(\prod_{i=1}^{n} x_i)\right) \overline{u} \cdot \nabla u d\mu, \\ &= \underbrace{\int_{\partial\Omega} \left(-\nabla h(\prod_{i=1}^{n} x_i)\right) |u|^2 d\mu}_{=0 \ sur \ \partial\Omega} + \int_\Omega \left(\Delta h(\prod_{i=1}^{n} x_i)\right) |u|^2 d\mu + \int_\Omega \left(\nabla h(\prod_{i=1}^{n} x_i)\right) \cdot \overline{\nabla u} u d\mu, \\ &= \int_\Omega \left(\Delta h(\prod_{i=1}^{n} x_i)\right) |u|^2 d\mu - \overline{z}. \end{aligned}$$

$$z + \overline{z} = 2Re(z) = \int_\Omega \left(\Delta h(\prod_{i=1}^n x_i) \right) |u|^2 d\mu.$$

Soit

$$K = \inf \left\{ \frac{1}{2}\Delta h(\prod_{i=1}^n x_i) + \|\nabla h(\prod_{i=1}^n x_i)\|^2_{L^2(\Omega)} / (x_1, ..., x_n) \in \Omega_\eta \right\}.$$

h est tel que $K \geq 0$.

$$\begin{aligned}
|Re(Q(u))| &= \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\int_\Omega \left(\Delta h(\prod_{i=1}^n x_i) \right) |u|^2 d\mu + \int_\Omega \|\nabla h(\prod_{i=1}^n x_i)\|^2_{L^2(\Omega)} |u|^2 d\mu. \\
&= \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega \left(\frac{1}{2}\Delta h(\prod_{i=1}^n x_i) + \|\nabla h(\prod_{i=1}^n x_i)\|^2_{L^2(\Omega)} \right) |u|^2 d\mu, \\
&\geq \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + K\|u\|^2_{L^2(\Omega)}, \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|Im(Q(u))| &= \left| Im \int_\Omega \left(-\nabla h(\prod_{i=1}^n x_i) \right) \overline{u} \cdot \nabla u d\mu \right|, \\
&= \left| \frac{z - Re(z)}{i} \right|, \\
&= \left| \frac{\int_\Omega \left(-\nabla h(\prod_{i=1}^n x_i) \right) \overline{u} \cdot \nabla u d\mu - \frac{1}{2}\int_\Omega \left(\Delta h(\prod_{i=1}^n x_i) \right) |u|^2 d\mu}{i} \right|, \\
&\leq \left| \int_\Omega \left(-\nabla h(\prod_{i=1}^n x_i) \right) \cdot \nabla u \overline{u} d\mu \right| + \frac{1}{2}\left| \int_\Omega \left(\Delta h(\prod_{i=1}^n x_i) \right) |u|^2 d\mu \right|, \\
&\leq \frac{1}{2}\left(\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega \|\nabla h(\prod_{i=1}^n x_i)\|^2_{L^2(\Omega)} |u|^2 d\mu \right) + \frac{1}{2}\left| \int_\Omega \left(\Delta h(\prod_{i=1}^n x_i) \right) |u|^2 d\mu \right|.
\end{aligned}$$

Par conséquent φ est une forme sectorielle définie sur l'espace linéaire suivant :

$$R = H_0^1(\Omega, \mathbb{C}) \bigcap \{u \in L^2(\Omega, \mathbb{C}) : Vu \in L^2(\Omega, \mathbb{C})\}.$$

On utilise le théroème 1, pour obtenir le domaine de l'opérateur A qui est :

$$D(A) = H^2(\Omega, \mathbb{C}) \bigcap H_0^1(\Omega, \mathbb{C}) \bigcap \{u \in L^2(\Omega, \mathbb{C}) : Vu \in L^2(\Omega, \mathbb{C})\}.$$

Notre objectif est de déterminer le spectre de A. On remarque que $D(A)$ contient les conditions aux limites de Dirichlet. Considérons d'abord le probléme de valeurs propres correspondant à A :
Trouver $\lambda \in \mathbb{C}$ et $u \in D(A) \setminus \{0\}$ tel que :

$$\begin{aligned} -\Delta u + \left(-\nabla h(\prod_{i=1}^{n} x_i)\right) \cdot \nabla u + Vu &= \lambda u \qquad \text{dans } \Omega \\ u &= 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Soit $\{\Omega_\eta\}_{\eta \in]0,1[}$, une suite d'ouverts bornés emboités, c.-à-d. $\Omega_{\acute{\eta}} \subset \Omega_\eta$, $\eta \leq \acute{\eta}$, tel que :

$$\bigcup_{\eta \in]0,1[} \Omega_\eta = \Omega.$$

Pour tout $\eta \in]0,1[$, on définit dans $L^2(\Omega_\eta, \mathbb{C})$, la forme hermitienne φ_η par :

$$\varphi_\eta(f, g) = \int_{\Omega_\eta} \nabla f \cdot \overline{\nabla g} d\mu + \int_{\Omega_\eta} \left(-\nabla h(\prod_{i=1}^{n} x_i)\right) \cdot \nabla f \overline{g} d\mu + \int_{\Omega_\eta} V f \overline{g} d\mu.$$

φ_η est une forme sectoriel dans

$$R_\eta = H_0^1(\Omega_\eta, \mathbb{C}).$$

CHAPITRE

3

PSEUDOSPECTRE ET SPECTRE DE A

Le pseudospectre est un outils mathématiques trés important. Il est plus facile à manipuler comparé au spectre et il est le mieux conditionné pour le passage à la limite. Nous allons établir un résultat de conditionnement du pseudospectre de A pour pouvoir localiser son spectre.

3.1 Pseudospectre

Dans cette section, nous établissons une relation de bon conditionnement de pseudospectre de A vue comme limite de celui de A_η et celui de B_η.

Théorème 6. *Pour tout $\varepsilon > 0$,*

$$sp_\varepsilon(A) = \bigcup_{\eta \in E} sp_\varepsilon(A_\eta) = \bigcup_{\eta \in E} sp_\varepsilon(B_\eta).$$

Démonstration. Soit $\lambda \in \bigcup_{0<\eta<1} \mathrm{sp}_\varepsilon(B_\eta)$. Il existe $\eta_1 \in E$ et $f \in D(B_{\eta_1})$ tels que :

$$\frac{\|B_{\eta_1} f - \lambda f\|_{L^2(\Omega_{\eta_1})}}{\|f\|_{L^2(\Omega_\eta)}} < \varepsilon.$$

On prolonge f par 0 sur Ω, ce qui donne

$$\frac{\|Af - \lambda f\|_{L^2(\Omega)}}{\|f\|_{L^2(\Omega)}} < \varepsilon.$$

Il s'en suit que λ appartient à $sp_\varepsilon(A)$ et

$$\bigcup_{\eta \in E} sp_\varepsilon(B_\eta) \subseteq sp_\varepsilon(A).$$

Réciprocement, soit $\lambda \in sp_\varepsilon(A)$. Alors il existe $f \in D(A)$ telle que :

$$\frac{\|Af - \lambda f\|_{L^2(\Omega)}}{\|f\|_{L^2(\Omega)}} < \varepsilon.$$

Sachant que $C_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $D(A)$ par rapport à la norme du graphe, alors pour tout $f \in D(A)$, il y a une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $C_c^\infty(\Omega)$ telle que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\|Af_n - \lambda f_n\|_{L^2(\Omega)}}{\|f_n\|_{L^2(\Omega)}} = \frac{\|Af - \lambda f\|_{L^2(\Omega)}}{\|f\|_{L^2(\Omega)}}.$$

De la même manière que dans la preuve du lemme 2, nous choisissons n_0 telle que :

$$\frac{\|Af_{n_0} - \lambda f_{n_0}\|_{L^2(\Omega)}}{\|f_{n_0}\|_{L^2(\Omega)}} < \varepsilon.$$

Il existe η suffisamment petit de telle que le support de $g = f_{n_0}$ est inclus dans Ω_η. Il s'ensuit que λ appartient à $sp_\varepsilon(A_\eta)$. Ainsi,

$$sp_\varepsilon(A) \subseteq \bigcup_{\eta \in E} sp_\varepsilon(A_\eta).$$

On conclue le résultat en utilisant le Lemme 2. □

D'aprés le théorème précédent, nous concluons que :

$$sp_\varepsilon(A) \subseteq N_\varepsilon(\mathbb{R}^+) = \{z \in \mathbb{C} : Rez > 0, |Imz| < \varepsilon\} \bigcup \{z \in \mathbb{C} : Rez < 0, |z| < \varepsilon\}.$$

En effet, pour tout $\eta \in E, A_\eta$ est auto-adjoint. Alors $sp_\varepsilon(A_\eta) = N_\varepsilon(sp(A_\eta))$. Mais, $sp(A_\eta) \subseteq \mathbb{R}^+$. Nous obtenons :

$$\bigcup_{\eta \in E} sp(A_\eta) \subseteq \mathbb{R}^+.$$

3.2 Spectre

Dans cette section, nous allons établir un nouveau résultat qui relie le spectre de A à celui de A_η. Nous commençons tout d'abord par un résultat topologique, qui va nous permettre d'obtenir le résultat souhaité.

Proposition 1. *Pour tout $\varepsilon > 0$,*

$$\bigcup_{\eta \in E} sp_\varepsilon(A_\eta) = N_\varepsilon\left(\bigcup_{\eta \in E} sp(A_\eta)\right).$$

Démonstration. Soit $\lambda \in \bigcup_{\eta\in E} \mathrm{sp}_\varepsilon(A_\eta)$. Il y a $\eta_1 \in E$ telle que :

$$\lambda \in sp_\varepsilon(A_{\eta_1}) = N_\varepsilon\left(sp(A_{\eta_1})\right).$$

Ainsi $\lambda = s + z$, où $s \in sp(A_{\eta_1})$ et $|z| < \varepsilon$. Mais, $s \in \bigcup_{\eta\in E} sp(A_\eta)$ ce qui donne

$$\lambda \in N_\varepsilon\left(\bigcup_{\eta\in E} sp(A_\eta)\right).$$

Réciproquement, soit $\lambda \in N_\varepsilon\left(\bigcup_{\eta\in E} sp(A_\eta)\right)$. Alors $\lambda = s+z$, où $s \in \bigcup_{\eta\in E} sp(A_\eta)$ et $|z| < \varepsilon$. Il existe $\eta_1 \in E$ tel que :

$$\lambda = s + z \in N_\varepsilon(sp(A_{\eta_1})) = sp_\varepsilon(A_{\eta_1}).$$

Alors $\lambda \in \bigcup_{\eta\in E} sp_\varepsilon(A_\eta)$. □

Théorème 7.

$$sp(A) = \bigcup_{\eta\in E} sp(A_\eta).$$

Démonstration. Soit $\lambda \in \bigcup_{\eta\in E} sp(A_\eta)$. Il y a $\eta_1 \in E$ tel que $\lambda \in sp(A_{\eta_1})$. Alors il existe $f \in D(A_{\eta_1})$, $A_{\eta_1} f - \lambda f = 0$. Sachant que, $C_c^\infty(\Omega_{\eta_1})$ est dense dans $D(A_{\eta_1})$ par rapport à la norme du graphe, il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $C_c^\infty(\Omega_{\eta_1})$ qui converge vers f par rapport à cette norme. Nous définissons la suite suivante, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$g_n = \begin{cases} \frac{f_n}{\|f_n\|_{L^2(\Omega_\eta)}} & \text{sur } \Omega_{\eta_1}, \\ 0 & \text{sur } \Omega/\Omega_{\eta_1}. \end{cases}$$

Nous avons, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} g_n &\in D(A), \\ \|g_n\|_{L^2(\Omega_\eta)} &= 1, \end{aligned}$$

alors

$$\lim_{n \to +\infty} \|Ag_n - \lambda g_n\|_{L^2(\Omega_\eta)} = 0.$$

Ainsi, $\lambda \in sp(A)$.

En utilisant le théorème 6,

$$sp(A) \subset sp_\varepsilon(A) = \bigcup_{\eta \in E} sp_\varepsilon(A_\eta),$$

par la proposition 1,

$$sp(A) \subset N_\varepsilon\left(\bigcup_{\eta \in E} sp(A_\eta)\right),$$

quand ε tend vers 0, nous obtenons

$$sp(A) \subseteq \bigcup_{\eta \in E} sp(A_\eta).$$

$\square$

CONCLUSION ET PERSPECTIVE

Notre étude nous a montré la grande éfficacité que représente la notion de conditionement pseudospectral pour la localisation du spectre d'opérateur non bornés. La classe d'opérateurs étudiés présente un grand intérêt mathématique, du fait qu'on a obtenu un résultat sur son spectre à partir de l'égalité pseudospectrale. En plus, cette classe d'opérateurs entre dans une catégorie d'opérateurs dont l'étude du spactre est encore un problème ouvert.

Cet opérateur, qui n'est pas auto-adjoint, a un spectre réel. En efft, le spectre de A_η est réel, pour tout $\eta \in]0,1[$, donc

$$sp(A) \subset \bigcup_{\eta \in E} sp(A_\eta) \subset \mathbb{R}_+.$$

En plus, nous obtenons les ensembles $sp(A_\eta)$ à partir d'opérateurs qui ont la même formule que A, mais qui sont définies sur des ouverts bornés. Ce qui veux dire que le calcule numérique nous permet d'approcher le spectre de A, malgré que Ω est non borné.

Comme perspectives, on essaiera d'appliquer les méthodes d'éléments finis pour approcher le spectre A et de voir la différence entre le spectre ponctuel de A_η et celui de B_η. On essaiera aussi de localiser le spectre essentiel de A et de généraliser nos résultats pour d'autres formes d'opérateurs non bornés.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Hamza Guebbai, Spectra and Pseudospectra of Convection-Diffusion Operator, Lobachevskii Journal of Mathematics **33** (2012) 3, p.274-283.

[2] E. B. Davies, "Pseudospectra of Differential Operators", J. Operator Theory **43** (2000) 243-262.

[3] E. B. Davies, *Spectral Theory and Differential Operators*, Cambridge University Press, 1995.

[4] T. Kato, *Perturbation Theory of Linear Operators*, Second edition, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg and New York, 1980.

[5] L. Boulton, "Non-self-adjoint harmonic oscillator, compact semi-groups and pseudospectra", preprint, Kings College London, 1999, Maths.SP/9909179.

[6] S. C. Reddy and L. N. Trefethen, "Pseudospectra of the convection-diusion operator", SIAM J. Appl. Math. **54** (1994) 1634-1649.

[7] S. Roch and B. Silbermann, "C* -algebra techniques in numerical analysis", J. Operator Theory **35** (1996) 241-280.

[8] L. N. Trefethen, *Pseudospectra of matrices*, pp 234-266 in D. F. Griffiths and G. A. Watson, *Numerical Analysis*, 1991, Longman Sci. Tech. Publ., Harlow, UK, 1992.

[9] L. N. Trefethen, "Pseudospectra of linear operators", SIAM Review **39** (1997) 383-406.

[10] R. A. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.

[11] E. Shargorodsky, "On the definition of pseudospectra", Bull. London Math. Soc. **41** (2009) 524-534