République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Equations aux Dérivées Partielles**

Par :

Gharmouli fatma zohra

intitulé

Spectre essentiel des opérateurs de transport avec des conditions aux limites abstraites

Dirigé par :Debbar Rabah

Devant le jury

PRESIDENT	Dr.A Benrabhh	MCB	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr.R Debbar	MCB	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr.N Seliami	MCB	Univ-Guelma

Session Juin 2014

Remerciements

Tout d'abord, j'adresse mes remerciements très particuliément a ALLAH pour la voloné la force, la santé de et la patience qu'il m'a donne afin de réaliser ce travail.

Je tiens a exprimer toutes mes reconnaissances au **Docteur DEBBAR RABAH**, de m'avoir proposé ce sujet de recherche et d'avoir dirigé mon travail.

Je lui témoigne aussi, ma gratitude pour son soutien sa grande disponibilité et surtout ses conseils et ses encouragements tout au long de mes recherches.

J'adresse mes vifs remerciements au **Docteur BENRABAH ABED RAFFIK**, pour le grand honneur qu'il me fait en présidant le jury de soutenance.

J'exprime également mes chaleureux remerciement au **Docteur N SELLAMI**, pour l'honneur qu'il m'ont fait d'avoir accepté de faire partie de ce jury.

Dédicace

En plein joie et amour je dédie

ce modeste travail à :

A la lumière de mes yeux et le

bonheur de ma vie « ma mère »
pour m'mont donnée confiance,
courage et sécurité.

A mon cher « père » pour son
sacrifice ses conseils et ses
encouragements.

A mon marie.

A mes sœurs et mes frères.

A toute ma famille.

A mes amis.

RÉSUMÉ

Cette mémoire traite de l'analyse du spectre essentiel de l'opérateur de transport unidimensionnel avec conditions aux limites générales où un opérateur de limite abstrait concerne l'entrée et les flux sortants. Après une description complète du spectre de l'équation de transport avec des conditions aux limites du vide, les conditions suffisantes sont données en termes des opérateurs de délimitation et de collision assurant la stabilité du spectre essentiel. Le travail se termine par une analyse du spectre essentiel de l'opérateur de transport des neutrons en dimension arbitraire. Enfin, certains problèmes ouverts sont indiqués.

ABSTRACT

This memoire deals with the analysis of the essential spectrum of the one-dimensional transport operator with general boundary conditions where an abstract boundary operator relates the incoming and the outgoing fluxes. After a complete description of the spectrum of the transport equation with vacuum boundary conditions, sufficient conditions are given in terms of boundary and collision operators assuring the stability of the essential spectrum. The work ends with an analysis of the essential spectrum of the neutron transport operator in arbitrary dimension. Finally, some open problems are indicated.

Table des matières

Introduction

L'objet de la présente mémoire est d'étudier le spectre essentiel de l'opérateur l'integro-différentielle suivant :

$$A_H\psi(x;\xi) = -\xi\frac{\partial\psi}{\partial x} - \sigma(\xi)\psi(x;\xi) + \int_{-1}^{1}\kappa(\xi,\xi')\psi(x;\xi')\,d\xi' = T_H\psi + K\psi$$

dans la géométrie de bloc avec des conditions aux limites suivants :

$$\begin{pmatrix} \psi_1^i \\ \psi_2^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_1^0 \\ \psi_2^0 \end{pmatrix}$$

où

$$\begin{cases} \psi_1^i : \xi \in (0,1) \to \psi(-a;\xi), \\ \psi_2^i : \xi \in (-1,0) \to \psi(a;\xi), \\ \psi_1^o : \xi \in (-1,0) \to \psi(-a;\xi), \\ \psi_2^o : \xi \in (0,1) \to \psi(a;\xi), \end{cases} \tag{0.1}$$

et $H = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix}$, H_{11},H_{12},H_{21},et H_{22}sont les opérateurs linéaires abstraits définis sur des espaces approprié de frontière.

Ici ψ représente la densité angulaire des particules (par exemple, molécules de gaz, photons, ou neutrons) dans un bloc homogène d'épaisseur 2a.

Les fonctions $\sigma(.)$et $\kappa(.,.)$ sont appelés, respectivement, la fréquence de collision et le noyau de diffusion

Nos hypothéses générales sont

$$\begin{cases} \sigma(.) \in L^{\infty}(-1,1), \\ H \text{ est un opérateur de limite bornée} \\ K \in \mathcal{L}(L_p[(-a,a)\times(-1,1)]), \end{cases}$$

où K est l'opérateur intégral de noyau $\kappa(\xi,\xi')$.

Plusieurs formes de l'équation de transport sont prises en compte dans les différents domaines de la physique mathématique pour décrire les processus de transport des particules a'travers un milieu d'accueil. Nous citons seulement la théorie de transport des neutrons, transfert radiatif, le transport de particules chargées, et la théorie cinétique des gaz. En particulier

il a été étudié pour différents conditions aux limites ,(frontière de vide, les reflets spéculaires , périodiques, réflexions diffuses , généralisées et le type mixte limite conditions [3, 4, 9, 11, 16, 35].Tous ces conditions aux limites sont des exemples particuliers de notre cadre général décrit ci-dessus.

l'objectif principal de cet mémoire est de donner une classe d'opérateurs de collision K pour qui

$\sigma_{ess}(T_H+K) = \sigma_{ess}(T_H)$ indépendamment de l'opérateur limite H [$\sigma_{ess}(U)$ qui représente l'essentiel spectre de l'opérateur U].Deuxièmement,nous montrons sous certaines hypothéses sur l'opérateur de frontière H que $\sigma_{ess}(T_H) = \sigma_{ess}(T_0)$ où T_0 est l'opérateur de diffusion bien connu dans la théorie du transport de neutrons $(H=0)$ dont le spectre est facile a' analyser. Nos principaux outils pour prouver la stabilité du spectre essentiel sont compacité résultats [33, 34, 38] (pour le plaisir d'étre complet, nous mentionner les résultats de compacité développés dans les Références. [1, 19, 23], et [24] ,à savoir, la vitesse moyenne résultats qui appartiennent a' un même cercle d'idées que celles utilisées ici).

Dans la théorie du transport de neutron classique $(H=0)$ en dimension arbitraire, il est bien connu que

$$\sigma_{ess}(T_0+K)=\{\lambda\in\mathbb{C}/\ R_e\lambda\leqslant-\lambda^*\}, \qquad \text{si}\ \ K=0, \qquad (0.2)$$
$$\lambda^*=\liminf_{|\xi|\to 0}\sigma(\xi).$$

Si $K\neq 0$ et si une certaine puissance de $(\lambda-T_0)^{-1}K$ est compact alors il est bien connu que

$\sigma(T_0+K)\cap\{\lambda\in\mathbb{C}/\ R_e\lambda>-\liminf_{|\xi|\to 0}\sigma(\xi)\}$ se compose uniquement de valeurs propres isolées avec multiplicities algébrique fini (voir, par exemple,[30] et[38], Gerçure.12).

D'autre part, sous les hypothéses ci-dessus, le demi-plan $\{\lambda\in\mathbb{C}/\ R_e\lambda\leqslant-\liminf_{|\xi|\to 0}\sigma(\xi)\}$ peuvent contenir, a priori, certains trous dans l'ensemble résolvent de T_0+K. Alore que l'équation.(1.2)

n'est pas, a priori, vrais si $K\neq 0$

et un certain pouvoire de$(\lambda-T_0)^{-1}K$ est compact.Nous allons prouver que l'équation . (1.2) est, en fait , vraie, pour un général classe d'opérateurs de collision K en profitant d'un résultat de compacité par Mokhtar-Kharroubi dans $L_p\,(1<p<\infty)$ .Le cas $p=1$ est ouvert.

Notre mémoire est organisé comme suit .dans sec II, nous donnons une description compléte du spectre de $T_0\,(H=0)$. La section III est consacré à l'analyse du spectre essentiel des opérateurs de transport avec des conditions aux limites abstraits.Il se composé de deux paragraphes . Le premier traite de limite conservutive ou dispersive conditions $(\|H\|\leqslant 1)$,le deuxième paragraphe est concerné avec les multiplicateurs compact $(\|H\|>1)$.des Conditions suffisantes en termes de H et K assurant la stabilité du spectre essentiel de

T_0 et T_H sont donnés.Enfin, en Sec. III nous analysons le spectre essentiel des opérateurs de transport avec des conditions aux limites vide en dimension arbitraire.

Nous terminons cette introduction en notant que, dans la Sec.III, certains problèmes ouverts sont indiqués.

Chapitre 1

Résultats préliminaires

Les équations de la neutronique décrivent l'évolution temporelle des distribution des neutrons dans un milieu fissile ou pas. Elles sont naturellement linéaires.En effet, la proportion des neutrons est
infinitésimale par rapport aux atomes du milieu dans lequel ils se propagent (de l'ordre de 10^{-11} [32]) de sorte que les interactions neutron-neutron sont
négligeables par rapport aux interactions des neutrons avec le milieu ambiant dont les propriétés sont supposées indépendantes
de la population neutronique. Ces équations s'écrivent sous la forme

$$\frac{\partial\psi}{\partial\xi}(x,\xi,t)+v\frac{\partial\psi}{\partial x}(x,\xi,t)+\sigma(x,\xi)\,\psi(x,\xi,t)=K\psi(x,\xi,t) \qquad (1.1)$$

avec généralement un flux rentrant nul

$$\psi_{|\Gamma_-}=0 \qquad (1.2)$$

et une distribution initiale

$$\psi(x,\xi,0)=\psi_0(x,\xi) \qquad (1.3)$$

où $(x,\xi)\in\Omega\times V,\Omega$ est un ouvert régulier de $\mathbb{R}^N, V\subset\mathbb{R}^N$ est l'ensemble des vitesses admissibles et

$$\Gamma_-=\{(x,\xi)\in\Omega\times V:\xi \text{ est rentrant en } x\in\partial\Omega\}.$$

La condition aux limites(1.3)signifie physiquement que tout neutron arrivant en un point de $\partial\Omega$ et venant de l'intérieur de Ω disparaît et qu'aucun neutron

n'arrive de l'extérieur : ce sont les conditions aux limites dites absorbantes. La fonction $\sigma(.,.)$ représente la fréquence de collision (appelée aussi section efficace

d'absorption). L'opérateur K est un opérateur linéaire dit **opérateur de collision.** Il rend compte aussi bien de la réflexion (= scattering) des neutrons

que de leur production (en présence de matériaux fissiles) par fission. Classiquement cet opérateur est donné par

$$K\psi(x,\xi) = \int_V k(x,\xi,\xi')\,\psi(x,\xi')\,d\mu(\xi'), \tag{1.4}$$

où $k(.,.,.)$ est appelé noyau de collision et V est le support d'une mesure de Radon positive sur $\mathbb{R}^N$ non nécessairement finie notée μ .Dans le modèle continu,

V représente une couronne fermée$\left\{v \in \mathbb{R}^N : a \leq |\xi| \leq b\right\}$ $(0 \leq a < b \leq \infty)$ munie de la mesure de Lebesgue volumique et dans le modèle multigroupe,V est

une réunion finie de sphères centrées en zéro, muni d'une mesure μ combinaison de mesures de Lebesgue surfaciques correspondant à ces sphères (on notera que

le recours au modèle multigroupe est dicté notamment par des considérations numériques). Pour les détails sur les considérations physiques de ces équations on pourra consulter par exemple les ouvrages [8, 17, 20] [47] Chapitre XXI, § 1].

Il est traditionnel de mettre le problème d'évolution (0.1)-(0.3) sous la forme d'un problème de Cauchy abstrait dans $L^P(\Omega \times V)\,(1 \leq p < \infty)$

$$\begin{cases} \frac{d\psi}{dt}(t) = (T+K)\,\psi(t) & t > 0 \\ \psi(0) = \psi_0 \end{cases} \tag{1.5}$$

où T désigne l'**opérateur d'absorption :**

$$T_\psi = -\xi\frac{\partial\psi}{\partial x}\sigma(x,\xi)\,\psi(x,\xi)$$

$D(T) = \left\{\psi \in L^P(\Omega \times V) : v\frac{\partial\psi}{\partial x} \in L^P(\Omega \times V),\ \psi_{|\Gamma} = 0\right\}$,(pour le sens précis de la définition de $D(T)$ et la théorie des traces voir [6, 7, 14, 15, 45] et

K est l'opérateur de collision. L'opérateur T engendre un C_0-semigroupe explicite dit **semigroupe d'absorption**

$$U(t) : L^P(\Omega \times V) \ni \psi \; e^{\int_0^t \sigma(x-s\xi,\xi)ds}\psi(x-t\xi,\xi)\,\chi_{\{t<\tau(x,\xi)\}} \in L^P(\Omega \times V)^1,$$

où $\tau(x,\xi) = \inf\{s > 0 : (x - sv) \notin \Omega\}$ .Physiquement,$\tau(x,\xi)$ est le temps mis par un neutron, initialement en $x \in \Omega$ animé de la vitesse $-v$, pour atteindre

(pour la première fois) le bord $\partial\Omega$.Comme dans la plupart des modèles physiques l'opérateur de collision K est borné [12, 39],**l'opérateur de transport** $T + K$ engendre un

C_0 -semigroupe $(V(t))_{t\geq 0}$,dit **semigroupe de transport**, qui résout le problème d'évolution (0.1)-(0.3). Ce semigroupe est donné par une série dite de Dyson-Phillips

$$V(t) = \sum_{j=0}^{\infty} U_j(t), \tag{1.6}$$

où

$$U_0(t) = U(t) \text{ et } U_{j+1}(t) = \int_0^t U_0(t-s)\,KU_j(s)\,ds, j \geq 0, t \geq 0.$$

Le but de ce travail est de contribuer à la compréhension spectrale du semigroupe$(V(t))_{t\geq 0}$ et de son générateur $T + K$ aussi bien pour le modèle collisionel

classique (0.4) que pour le modèle plus complexe introduit par E.W. Larsen et P.F. Zweifel [49].Ces propriétés sont importantes notamment pour comprendre

le comportement asymptotique($t \to \infty$)des solutions du problème d'évolution précédent.

1.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de rappeler l'essentiel des notions et résultats chapitre nous avons omis, volontiers, certains détails et présenté des versions particulières

de certains résultats. Pour les lecteurs désireux de plus de détails, des références à la littérature seront systématiquement données. Le chapitre est organisé

comme suit : En premier lieu, nous rappelons quelques définitions et résultats sur la théorie spectrale des opérateurs. La Section 1.3 a pour objet d'examiner et

de présenter la théorie spectrale des semigroupes et d'explorer les liens spectraux entre un.C_0 -semigroupe et son générateur. Nous discuterons les théorèmes d'applications spectrales et nous introduirons la notion de spectre critique qui jouera un rôle essentiel dans cette thèse. Nous rappelons aussi l'importance du type essentiel dans la détermination du comportement asymptotique d'un semigroupe.Dans la Section 1.4, nous survolerons les techniques de perturbations spectrales.
Enfin, dans la dernière section, nous analyserons, en détail, le spectre du semigroupe d'absorption et celui de son générateur en complétant essentiellement des résultats de [37].

1.2 Théorie spectrale des opérateurs

Soit X un espace de Banach complexe et

$$T : D(T) \subset X \to X$$

un opérateur non borné que l'on suppose fermé et à domaine dense[1]. On appelle ensemble résolvant de T , l'ensemble

$$\rho(T) := \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda - T : D(T) \to X \text{ est bijectif }\}.$$

Son complémentaire dans le plan complexe s'appelle le spectre de T et sera noté $\sigma(T)$ .On notera que si $\lambda \in \rho(T)$,l'inverse

$$R(\lambda, T) := (\lambda - T)^{-1}$$

est défini sur tout l'espace et est fermé. Par le théorème du graphe fermé, il est borné, i.e.

$$R(\lambda, T) \in \mathcal{L}(X),$$

où $\mathcal{L}(X)$ désigne l'ensemble des opérateurs bornés de X,Cet opérateur est appelé la résolvante de T (au point λ). L'ensemble résolvant $\rho(T)$est un ouvert du plan complexe et l'application

$$\rho(T) \ni \lambda \mapsto R(\lambda, T)$$

$$\sigma_R(T) = \{\lambda; \lambda - T : D(T) \to X \text{ injectif à image non dense}\}$$

On a toujours

$$\sigma(T) = \sigma_{ap}(T) \cup \sigma_R(T) \text{ et } \sigma_p(T) \subset \sigma_{ap}(T),$$

mais les deux ensembles $\sigma_R(T)$ et $\sigma_{ap}(T)$ ne sont pas nécessairement disjoints.

La proposition suivante donne une autre caractérisation du spectre approché et explique la raison de l'appellation spectre approché.

Proposition 1.2.1.soit $\lambda \in \sigma(T)$ .Alore $\lambda \in \sigma_{ap}(T)$ si et seulement si il existe une suite $(x_n)_n \subset D(T)$,dite suite approximante, telle que

$$\|x_n\| = 1 \text{ et } \|(\lambda - T) x_n\| \to 0 \text{ quand } n \to \infty.$$

Un intérêt particulier mérite d'être accordé aux valeurs propres isolées.

Valeurs propres isolées de multiplicité algébrique finie

soit $\lambda_0 \subset \mathbb{C}$ un point isolé de $\sigma(T)$ .La fonction $\lambda \mapsto R(\lambda, T)$ est alors définie dans un voisinage de ce point (mais privée de λ_0) et on peut donc la développer en série de Laurent autour de ce point :

$$R(\lambda, T) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\lambda - \lambda_0)^k T_k$$

pour tout $0 < |\lambda - \lambda_0| < \delta$ (δ petit de sorte que $\sigma(T) \cap D(\lambda_0, \delta) = \{\lambda_0\})^3$.le coefficient $T_k \in l(X)$ est donné par le calcul de Dunford

$$T_k = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{R(\lambda,T)}{(\lambda-\lambda_0)^{k+1}} d\lambda, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

où γest le cercle de centre $\lambda_0$et de rayon $\delta/2$ parcouru une fois dans le sens direct. Le résidu $T_{-1} \in \mathcal{L}(X)$est une projection, notée P_{λ_0}et appelée projection spectrale associée à λ_0.S'il existe $n > 0$ tel que $T_{-n} \neq 0$ et $T_{-k} = 0$ pour tout $k > n$, alors on dira que $\lambda_0$est un pôle (d'ordre n) de la résolvante$R(., T)$: On montre alors que $\lambda_0$est une valeur propre, la dimension (finie) de l'image de P_{λ_0} est appelée la multiplicité algébrique de λ_0. Lorsque cette dernière vaut un, la valeur propre λ_0 est dite algébriquement simple. Pour plus de détails on pourra,

par exemple, voir[22], p. 230] ou [31], p. 180].

Spectre essentiel

Le spectre essentiel joue un rôle important en théorie spectrale mais, malheureusement,il n'existe pas de définition unanimement acceptée de cette notion.De nombreuses définitions, non équivalentes,

existent dans la littérature. On se bornera à la plus classique, que l'on peut consulter, par exemple, dans l'ouvrage

de M. Schechter [41], p. 14].

Définition 1.2.1. On appellera **spectre essentiel** de T l'ensemble

$$\sigma_{ess}(T) := \cap_{K\in k(X)}\sigma(T+K),$$

où $k(X) \subset \mathcal{L}(X)$ désigne l'espace des opérateurs compacts de X dans X.

On constate que $\sigma_{ess}(T)$ est un sous-ensemble fermé de $\sigma(T)$. Il représente la partie de $\sigma(T)$ invariante par perturbation de T par tout opérateur compact. On a donc

$$\sigma_{ess}(T+K) = \sigma_{ess}(T), \forall K \in k(X).$$

Remarque 1.2.1. Une valeur propreλ isolée de multiplicité algébrique finie de T n'appartient pas au spectre essentiel de T. Notons qu'en général $\sigma(T) \setminus \sigma_{ess}(T) \subset \sigma_p(T)$ mais ne se réduit pas à des valeurs propres isolées de multiplicité algébrique finie.

Remarque 1.2.2. Le complémentaire de $\sigma_{ess}(T)$ caractérise en terme d'indice de Fredholm. En effet, $\lambda \notin \sigma_{ess}(T)$ si et seulement si $\lambda - T$ est un opérateur

de Fredholm d'indice zéro [41], Theorem 4.5, p. 15].

Lorsque X est de dimension infinie et T est un opérateur borné,$\sigma_{ess}(T)$ est un compact non vide, son rayon spectral essentiel est défini alors par

$$r_{ess}(T) := \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_{ess}(T)\}.$$

Il peut aussi être caractérisé par

$$r_{ess}(T) = \inf\{r > 0 : \lambda \in \sigma(T), |\lambda| > r \text{ est un pôle de multiplicité algébrique finie}\}. \quad (1.7)$$

On notera que le rayon spectral essentiel est le même quel que soit le concept du spectre essentiel utilisé [21], Corollary 4.11, p. 44].
La Proposition 1.2.2, ci-dessous, peut se révéler forte utile dans la détermination du spectre essentiel.

Proposition 1.2.2. Soit

$$T : D(T) \subset X \to X$$

un opérateur fermé et $\lambda \in \mathbb{C}$.On suppose qu'il existe une suite $(x_n)_n \subset D(T)$ telle que

$$\|Tx_n - \lambda x_n\| \to 0, \|x_n\| = 1$$

est telle que $(x_n)_n$n'admet aucune sous-suite convergente en norme. Alors $\lambda \in \sigma_{ess}(T)$.
La suite$(x_n)_n$ de la proposition précédente s'appelle **une suite singulière** associée à la valeur spectrale , $\lambda \in \sigma_{ess}(T)$.

Remarque 1.2.3. Nous illustrerons l'utilisation de la proposition précédente par la détermination de spectre essentiel du semigroupe d'absorbation (cf. Théorème
1.5.5).

Enfin, on signale le résultat de stabilité du spectre essentiel dû à M. Schechter [41], Theorem 4.7, p. 17].

Proposition 1.2.3. Soient T et S deux opérateurs fermés à domaine dense dans X.S'il existe $\lambda \in \rho(T) \cap \rho(S)$ telle que $R(\lambda, T) - R(\lambda, S)$soit compact, alors

$$\sigma_{ess}(T) = \sigma_{ess}(S).$$

1.3 Théorie spectrale des semigroupes

On commence par rappeler la définition d'un C_0-semigroupe (ou un semigroupe fortement continu). Pour un exposé de base sur la théorie des C_0-semigroupes,

le lecteur peut consulter les livres de E.E.B. Davies [18],E.J. Engel et R. Nagel [22], Hille et R.S. Phillips [29], et A. Pazy [40].

Définition 1.3.1. Soit $(U(t))_{t>0}$ une famille d'opérateurs linéaires bornés de X. On dit que $(U(t))_{t>0}$ est un C_0-semigroupe si les conditions suivantes sont

satisfaites :

- $U(0) = I_X$ (l'opérateur identité).
- $U(t+s) = U(t)U(s)$ pour $t, s \geq 0$ (propriété de semigroupe).
- $0 \leq t \to U(t)x$ est continue pour tout $x \in X$ (continuité forte).

A ce C_0-semigroupe on peut associer un générateur T défini par

$$Tx = \lim_{t\downarrow 0} \tfrac{U(t)x-x}{t}$$

de domaine

$$D(T) := \{x \in X : \lim_{t\downarrow 0} \tfrac{U(t)x-x}{t} \text{ existe } \}$$

On vérifie alors que$T$, ainsi défini, est un opérateur fermé à domaine dense. Le célèbre théorème de Hille-Yosida établit une correspondance biunivoque entre les

C_0-semigroupes et les générateurs [22, 29, 40].

Théorème 1.3.1. Soit T un opérateur fermé à domaine dense de X. Alors$T$est générateur d'un C_0-semigroupe de X si et seulement s'il existe deux réels

$M > 0$ et ω tels que$\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > \omega\} \subset \rho(T)$ et

$$\|R(\lambda, T)^n\| \leq M/(\operatorname{Re}\lambda > \omega)^n \qquad \operatorname{Re}\lambda > \omega, n \geq 0.$$

La résolvante $R(\lambda, T)$ peut s'écrire comme transformée de Laplace de semigroupe :

$$\|\psi^i;X_p^i\| = \left[\|\psi_1^i;X_{1,p}^i\|^p + \|\psi_2^i;X_{2,p}^i\|^p\right]^{1/p} = \left[\int_0^1 |\psi(-a,\xi)|^p |\xi| \, d\xi + \int_{-1}^0 |\psi(a,\xi)|^p |\xi| \, d\xi\right]^{1/p}.$$

Nous définissons l'espace de Sobolev partiel W_p par

$$W_p = \left\{\psi \in X_p \text{ tels que } \xi \tfrac{\partial \psi}{\partial x} \in X_p\right\}.$$

Il est bien connu que toute fonction ψ en W_p a des traces sur $\{-a\}$ et $\{a\}$ dans X_p^o et X_p^i (voir, par exemple, [17] ou [25]).Ils sont désignés, respectivement, par ψ^oet ψ^1, et elles représenter l'sortants et les flux et entrants ("o" pour sortant et "i" pour entrants). soit H l'opérateur limite suivante :

$$\begin{cases} H : X_p^0 \to X_p^i \\ u \to Hu, \\ Hu := \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \end{cases}$$

où $H_{11} \in \mathcal{L}\left(X_{1,p}^0; X_{1,p}^i\right)$, $H_{12} \in \mathcal{L}\left(X_{2,p}^0; X_{1,p}^i\right)$, $H_{21} \in \mathcal{L}\left(X_{1,p}^0; X_{2,p}^i\right)$,et $H_{22} \in \mathcal{L}\left(X_{2,p}^0; X_{2,p}^i\right)$ nous définissons l'opérateur T_H par

$$\begin{cases} T_H : D(T_H) \subset X_p \to X_p \\ \psi \to T_H\psi(x,\xi) = -\xi\frac{\partial \psi}{\partial x}(x,\xi) - \sigma(\xi)\psi(x,\xi), \\ D(T_H) = \left\{\psi \in W_p \text{ tels que } H\psi^0 = \psi^i\right\} \end{cases}$$

où $\sigma(.) \in L^\infty(-1,1)$, $\psi^o = (\psi_1^o \psi_2^o)$,et $\psi^i = (\psi_1^i \psi_2^i)$ avec $\psi_1^o, \psi_2^o, \psi_1^i$et ψ_2^i donné par l'équation (0.1)
considérons maintenant l'équation de la résolvante de l'opérateur T_H , c'est-á.dire,

$$(\lambda - T_H)\psi = \phi, \qquad (2,1)$$

où ϕ une fonction donnée dans X_p.soit $\lambda^* = \liminf_{|\xi|\to 0} \sigma(\xi)$,pour $\operatorname{Re}\lambda + \lambda^* > 0$,la solution de l'équation $(2,1)$ est formellement donnée par

$$\psi(x,\xi)=\begin{cases}\psi(-a,\xi)\exp\left(-\frac{[(\lambda+\sigma(\xi))|a+x|]}{|\xi|}\right)+\frac{1}{|\xi|}\int_{-a}^{x}\exp\left(-\frac{[(\lambda+\sigma(\xi))|x-\acute{x}|]}{|\xi|}\right)\phi(\acute{x},\xi)\,d\acute{x}, \\ \qquad 0<\xi<1; \\ \psi(a,\xi)\exp\left(-\frac{[(\lambda+\sigma(\xi))|a-x|]}{|\xi|}\right)+\frac{1}{|\xi|}\int_{x}^{a}\exp\left(-\frac{[(\lambda+\sigma(\xi))|x-\acute{x}|]}{|\xi|}\right)\phi(\acute{x},\xi)\,d\acute{x}, \\ \qquad -1<\xi<0.\end{cases};\qquad (2,2)$$

Noter que

$$\psi(a,\xi)=\psi(-a,\xi)\exp\left(-2a\frac{[(\lambda+\sigma(\xi))]}{|\xi|}\right)+\frac{1}{|\xi|}\int_{-a}^{a}\exp\left(-\frac{[(\lambda+\sigma(\xi))|a-x|]}{|\xi|}\right)\phi(x,\xi)\,dx,$$

$$0<\xi<1,$$

$$(2,3)$$

$$\psi(-a,\xi)=\psi(a,\xi)\exp\left(-2a\frac{[(\lambda+\sigma(\xi))]}{|\xi|}\right)+\frac{1}{|\xi|}\int_{-a}^{a}\exp\left(-\frac{[(\lambda+\sigma(\xi))|a+x|]}{|\xi|}\right)\phi(x,\xi)\,dx,$$

$$-1<\xi<0.$$

$$(2.4)$$

Pour la clarté de notre analyse ultérieure, nous introduisons les opérateurs bornés suivants :

$$\begin{cases}M_\lambda : X_p^i \to X_p^o,\ M_\lambda u := \left(M_\lambda^+ u, M_\lambda^- u\right) & \text{avec} \\ \left(M_\lambda^+ u\right)(-a,\xi) := u(-a,\xi)\,\varrho^{\left(-2a/|\xi|\right)(\lambda+\sigma(\xi))}, & 0<\xi<1; \\ \left(M_\lambda^- u\right)(a,\xi) := u(a,\xi)\,\varrho^{\left(-2a/|\xi|\right)(\lambda+\sigma(\xi))}, & -1<\xi<0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}B_\lambda : X_p^i \to X_p,\ B_\lambda u := \chi_{(-1,0)}(\xi)\,B_\lambda^- u+\chi_{(0,1)}(\xi)\,B_\lambda^+ u & \text{avec} \\ \left(B_\lambda^+ u\right)(-a,\xi) := u(-a,\xi)\,\varrho^{-(1/|\xi|)(\lambda+\sigma(\xi))|a+x|}, & 0<\xi<1; \\ \left(B_\lambda^- u\right)(a,\xi) := u(a,\xi)\,\varrho^{-(1/|\xi|)(\lambda+\sigma(\xi))|a-x|}, & -1<\xi<0;\end{cases}$$

$$\begin{cases} G_\lambda : X_p \to X_p^i, G_\lambda\phi := \left(G_\lambda^+\phi, G_\lambda^-\phi\right) & \text{avec} \\ G_\lambda^+\phi := \frac{1}{|\xi|}\int\limits_a^a \varrho^{-(1/|\xi|)(\lambda+\sigma(\xi))|a-x|}\phi(x,\xi)\,dx, & 0<\xi<1; \\ G_\lambda^-\phi := \frac{1}{|\xi|}\int\limits_a^a \varrho^{-(1/|\xi|)(\lambda+\sigma(\xi))|a+x|}\phi(x,\xi)\,dx, & -1<\xi<0; \end{cases}$$

et enfin

$$\begin{cases} C_\lambda : X_p \to X_p, C_\lambda\phi := \chi_{(-1,0)}(\xi)\,C_\lambda^-\phi + \chi_{(0,1)}(\xi)\,C_\lambda^+\phi & \text{avec} \\ C_\lambda^+\phi := \frac{1}{|\xi|}\int\limits_{-a}^x \varrho^{-(1/|\xi|)(\lambda+\sigma(\xi))|x-x'|}\phi(x',\xi)\,dx' & 0<\xi<1; \\ C_\lambda^-\phi := \frac{1}{|\xi|}\int\limits_x^a \varrho^{-(1/|\xi|)(\lambda+\sigma(\xi))|x-x'|}\phi(x',\xi)\,dx' & -1<\xi<0, \end{cases}$$

où $\chi_{(-1,0)}(.)$ et $\chi_{(0,1)}(.)$ désignent, respectivement, les fonctions caractéristiques des intervalles $(-1,0)$ et $(0,1)$.

On vérifie que

$$\|M_\lambda\| \leqslant \varrho^{-2a(\mathrm{Re}\ \lambda+\lambda^*)} \tag{2.5}$$

Pour plus de détails voir la [33], sec. 1

2.2 Spectre de l'opérateur d'absorption

Cette section est consacrée à l'analyse du spectre de $T_0, \sigma(T_0)$, où

$$\begin{cases} T_0 : D(T_0) \subset X_{p\to}X_p \\ \psi \to T_0\psi(x,\xi) = -\xi\frac{\partial\psi}{\partial x}(x,\xi) - \sigma(\xi)\,\psi(x,\xi) \\ D(T_0) = \{\psi \in W_p \quad \text{tels que} \quad \psi^i = 0\}. \end{cases}$$

Le spectre de $T_0 + K$ où $K\,\psi = (c/2)\int_{-1}^{1}\psi(x,\xi)\,d\xi$ a été analysée en détail dans le article classique par Lehner et Wing.En particulier

$$\sigma C\left(T_0+K\right)=\{\lambda\in\mathbb{C}\ \text{ tels que }\ \operatorname{Re}\lambda\ \leqslant-\lambda^*\},$$

où $\sigma C\left(T_0+K\right)$ représente le spectre continu de T_0+K .Leur démonstration est très technique en raison de la présence de $K\neq 0$. Nous donnons ici une preuve élémentaire de ce résultat lorsque $K=0$.En sec III nous prouvons par des arguments de stabilité (du spectre essentiel) pour une classe générale des opérateurs limites H que

$$\sigma_{ess}\left(T_H\right)=\{\lambda\in\mathbb{C}\text{ tels que }\operatorname{Re}\lambda\ \leqslant-\lambda^*\}\ .$$

Nous prouvons aussi par des arguments de stabilité pour une classe générale des opérateurs de collision K que

$$\sigma_{ess}\left(T_H+K\right)=\{\lambda\in\mathbb{C}\text{ tels que }\operatorname{Re}\lambda\ \leqslant-\lambda^*\}.$$

soit $\varphi\in X_p$ et $\lambda\in\mathbb{C}$ tels que $\operatorname{Re}\lambda\ >-\lambda^*$ ·Nous cherchons ψ dans $D\left(T_0\right)$ satisfaisant

$$\left(\lambda-T_0\right)\psi=\varphi. \tag{2.6}$$

La solution de l'équation (2.6) se lit comme suit :

$$\psi\left(x,\xi\right)=\int_0^{\tau(x,\xi)}e^{-(\lambda+\sigma(\xi))s}\varphi\left(x-s\xi,\xi\right)ds,$$

où

$$\tau_{(x,\xi)}=\begin{cases}\frac{x+a}{\xi}, & \text{si}\quad \xi\in(0,1)\\ \frac{x-a}{\xi}, & \text{si}\quad \xi\in(-1,0)\ .\end{cases}$$

Ainsi, nous avons$\{\lambda\in\mathbb{C}\text{ tels que }\ \operatorname{Re}\lambda>-\lambda^*\}\subset\rho\left(T_0\right)$ où $\rho\left(T_0\right)$ dénote l'ensemble résolvent de T_0.

Remarque 2.2.1. Nous rappelons que T_0 un générateur d' un C_0-semigroupe dont le type est égal á $-\lambda^*$(cf. [45]).Cela implique que

$\sigma\left(T_0\right)\subset\{\lambda\in\mathbb{C}/\operatorname{Re}\lambda\ \leqslant-\lambda^*\}$. En fait, $\sigma\left(T_0\right)=\{\lambda\in\mathbb{C}/\operatorname{Re}\lambda\ \leqslant-\lambda^*\}$(voir le [30], corollaire 12.11, p. 272).

Dans ce qui suit, nous allons montrer que cette région est le spectre continu de T_0,$\sigma C\left(T_0\right)$.

En effet, soit $\lambda\in\mathbb{C}$ tels que $\operatorname{Re}\lambda\ \leqslant-\lambda^*$. La solution du problème aux valeurs propres $\left(\lambda\ -T_0\right)\psi=0$ est formellement donnée par

$$\psi(x,\xi) = k(\xi)\, e^{-(1/|\xi|)(\lambda\, +\, \sigma(\xi))x}.$$

De plus,ψ doit satisfaire les conditions aux limites, c'est-á-dire, $\psi^i = 0$. Donc, nous obtenons $k(\xi) \equiv 0$ sur$(0,1)$.

par conséquent , $\psi \equiv 0$ et nous pouvons affirmer.

Lemme 2.2.1. Le spectre ponctuel de l'opérateur T_0 est vide, c'est-á-dire, $\sigma P(T_0) = \phi$.

Notre prochaine tâche sera de montrer que le spectre résiduel de $T_0, \sigma R(T_0)$,est également vide.Pour faire cela, nous allons d'abord étudier le spectre de point de l'opérateur dual de T_0,T_0^*.

L'opérateur T_0^* est donnée par

$$\begin{cases} T_0^* : D(T_0^*) \subset X_q \rightarrow X_q \\ \psi \rightarrow T_0^*\psi(x,\xi) = \xi \frac{\partial\psi}{\partial x}(x,\xi)\,\sigma(\xi)\,\psi(x,\xi) \\ D(T_0^*) = \{\psi \in W_p \text{ telsque } \psi^o = 0\}, \end{cases}$$

où q est le conjugé de p $(q = p/(p-1))$.prenons le problème aux valeurs propres

$$(\lambda\ - T_0^*)\,\psi = 0, \qquad (2,7)$$

avec $\operatorname{Re}\lambda\ \leqslant -\lambda^*$[parce que $\sigma(T_0) = \sigma(T_0^*)$].

compte tenu des conditions aux limites, un calcul simple montre que le problème $(3,2)$admet que la solution triviale. Ensuite, nous avons $\sigma P(T_0^*) = \phi$. Depuis $\sigma R(T_0) \subset\ \sigma P(T_0^*)$,nous peut indiquer

Lemme 2.2.2. Le spectre résiduel de T_0 est vide, c'est-á-dire, $\sigma R(T_0) = \phi$.

Maintenant, nous résumons nos résultats précédents dans le théorème suivant :

Théorème 2.2.1. Les notations étant présenté ci-dessus, nous avons

$$\sigma(T_0) = \sigma C(T_0) = \{\lambda \in \mathbb{C} \text{ tels que } \operatorname{Re}\lambda\ \leqslant -\lambda^*\}.$$

Chapitre 3

Stabilité du spectre essentiel de l'opérateur de transport avec conditions aux limites abstraites

Ce chapitre est composée de trois sous-sections. Le premier traite de la stabilité du spectre essentiel des opérateurs de transport avec des conditions aux limites conservatives ou dissipatives. Le deuxième paragraphe est consacré aux opérateurs de transport avec des conditions aux limites de multiplication compact. Le troisième étudie Cas multidimensionnelles
Pour la commodité du lecteur, nous rappelons quelques définitions et résultats sur le spectre essentiel que nous aurons besoin par la suite.
soit X un espace de Banach. A opérateur linéaire fermé á domaine $D(A)$ dense est dit Fredholm si

(1) $\alpha(A) = \dim(N(A)) < \infty$;

(2) $R(A)$est fermé ;

(3) $\beta(A) = co\dim(R(A)) < \infty$,

où $R(A)$ et $N(A)$ sont, respectivement, l'image et l'espace nul de A.
Le nombre $i(A) = \alpha(A) - \beta(A)$ est appelé l'indice de A. On note ϕ_A l'ensemble $\phi_A := \{\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $\lambda - A$ est un opérateur de Fredholm sur $X\}$.
Nous définissons le spectre essentiel de A près

$$\sigma_{ess}(A) = \cap_{C\in k(X)} \quad \sigma(A + C),$$

où $k(X)$ représente l'idéal de tous les opérateurs compacts sur X.

Comme une simple conséquence de la définition précédente, nous avons

(i) Le spectre essentiel est un ensemble fermé ;

(ii) Si $C \in k(X)$, $\sigma_{ess}(A+C) = \sigma_{ess}(A)$.

Dans la section suivante, nous aurons besoin des deux résultats suivants :

Proposition 3.0 ([41], théorème 4.5, p. 15). Soit T un opérateur fermé á domaine dense de X. Nous avons

$$\lambda \notin \sigma_{ess}(A) \quad \text{si et seulement si} \quad \lambda \in \phi_A \text{ et } i(\lambda - A) = 0.$$

Théorème 3.0 ([41], théorème 4.7, p. 17). Soit A, B deux opérateurs fermé á domaine dense sur X. Si pour quelque $\lambda \in \rho(A) \cap \rho(B)$ l'opérateur $(\lambda - A)^{-1} - (\lambda - B)^{-1}$est compact sur X,alors $\sigma_{ess}(A) = \sigma_{ess}(B)$.

Comme une conséquence immédiate de la proposition 3.0,nous avons

Lemme 3.0. Soit A un opérateur fermé á domaine dence sur X.Alors

(i) $\sigma C(A) \subset \sigma_{ess}(A)$;

(ii) $\sigma R(A) \subset \sigma_{ess}(A)$,

où $\sigma C(A)$ [resp.$\sigma R(A)$] représente le spectre continu de A (resp. le spectre résiduel de A).

Remarque 3.0. En vue du théorème 2.2.1 et le lemme 3.0 nous déduisons que

$$\sigma(T_0) = \sigma_{ess}(T_0).$$

3.1 condition aux limites conservatives ou dissipatives

Toute au long de se paragraphe, nous supposons que l'opérateur limite H est borné satisfait l'estimatio suivante :

$$\|H\|_{\mathcal{L}(X_P^0 . X_P^I)} \leqslant 1. \tag{3.1}$$

Soit d'abord déterminer la résolvant de l'opérateur T_H.En effet, l'utilisation des opérateurs définis á la Sec.je nous permet d'écrire les équation abstraite.(2.3) et (2.4) comme une équation de la frontière de l'espace X_p^0,c'est-à-dire,

$$\psi^o = M_\lambda H \psi^o + G_\lambda \phi.$$

Compte tenu des équations.(2.5) et (3.1), nous avons $\|M_\lambda H\| < 1$ pour Re $\lambda + \lambda^* > 0$ puis ψ^oest donné par

$$\psi^o = \sum_{n_\geq 0} (M_\lambda H)^n G_\lambda \phi.$$

D'autre part, Eq.(2.2) peut être écrit comme suit :

$$\psi = B_\lambda H \psi^0 + C_\lambda \phi.$$

Par conséquent, nous obtient

$$\psi = \sum_{n_\geq 0} B_\lambda H (M_\lambda H)^n G_\lambda \phi + C_\lambda \phi.$$

Enfin, la résolvante de l'opérateur T_H est donnée par

$$R(\lambda, T_H) = \sum_{n_\geq 0} B_\lambda H (M_\lambda H)^n G_\lambda + G_\lambda.$$

Noter que l'opérateur C_λn'est rien d'autre que $(\lambda - T_0)^{-1}$, nous avons donc

$$(\lambda - T_H)^{-1} - (\lambda - T_0)^{-1} = j, \tag{3.2}$$

avec $J = \sum_{n_\geq 0} B_\lambda H (M_\lambda H)^n G_\lambda$.

Théorème 3.1.1. Avec les notations introduites ci-dessus,si H est un opérateur de limite compact, alors

$$\sigma_{ess}(T_H) = \sigma_{ess}(T_0).$$

Preuve : En vertu de la compacité de H, l'opérateur J est compact sur X_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$.Maintenant, le résultat du théorème 3.0.

Remarque 3.1.1. Comme cela est représenté sur la proposition suivante, le théorème précédent n'est pas optimale

Q.E.D.

En effet, fixer $P = 2$ et supposons que la fréquence de collision est constante $(\sigma(.) = \sigma)$.soit H l'opérateur limite suivant :

$$\begin{cases} \bar{H} : X_2^o \to X_2^i \\ u \to \bar{H}u, \\ \bar{H}u = \begin{bmatrix} H_{11} & 0 \\ H_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \end{cases}$$

où

$$\begin{cases} H_{11} : X_{1,2}^o \to X_{1,2}^i \\ u(-a,\xi) \to u(-a,-\xi) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} H_{21} : X_{1,2}^o \to X_{2,2}^i \\ H_{21} \in \mathcal{L}\left(X_{1,2}^o \to X_{2,2}^i\right), \end{cases}$$

avec H_{21}, un opérateur quelqonque.Noter que puisque H_{11} et H_{21}, ne sont pas compact, l'opérateur $\bar{H}$ n'est pas compact non plus.

Proposition 3.1.1. Avec les notations ci-dessus, nous avons

$$\sigma_{ess}(T_{\bar{H}}) = \sigma C(T_{\bar{H}}) = \{\lambda \in \mathbb{C} \text{ tels que } \operatorname{Re}\lambda \leqslant -\lambda^*\}.$$

Preuve : La preuve est composé de trois étapes

Étape I : Notre objectif est de montrer $\{\lambda \in \mathbb{C} \text{ tels que } \operatorname{Re}\lambda \leqslant -\sigma\} = \sigma(T_H)$.À cette fin, nous allons utiliser le résultat classique suivant (voir, par exemple, [17], p. 1134).

Si pour une donnée $\lambda \in \mathbb{C}$, il existe une famille des fonctions $u_\delta \in D(T_{\bar{H}})$ de facon que

$$\|u_\delta\| \geqslant c > 0, \qquad (3.3)$$

$$\|(\lambda - T_{\bar{H}}) u_\delta\| \to 0 \quad \text{come} \quad \delta \to 0 \qquad (3.4)$$

alors λ appartient à $\sigma(T_{\bar{H}})$.

Nous allons maintenant présenter un tel ensemble.

soit $for\ 0 < \delta < \frac{1}{2}$ et Re $\lambda + \sigma = \beta < 0$

$$u_\delta(x,\xi) = \exp\left\{-\frac{1}{\xi}\beta(x-a)\right\} b_\delta(\xi) f(x),$$

où $f(x) = (a+x)/a$ et $b_\delta(\xi) = \chi_{(\delta^2,\delta)}(\xi)(1/\delta)$.

Il est clair que $u_\delta \in D(T_H)$.Évaluons Maintenant sa norme

$$\|u_\delta\|^2 = \int_{-a}^{a}\int_{-1}^{1} |u_\delta(x,\xi)|^2 dxd\xi = \int_{-1}^{1}\int_{-a}^{a} \varrho^{-(2\beta/|\xi|)(x-a)} b_\delta^2(\xi) f^2(x) dxd\xi$$

$$> \frac{1}{2|\beta|}\int_{\delta^2}^{\delta} \frac{\xi}{\delta^2}\left(1 - e^{-2a\beta/\zeta}\right) d\xi$$

$$\geqslant \frac{c_1}{\delta^2}\int_{\delta^2}^{\delta} \xi d\xi = \frac{c_1}{2}\left(1-\delta^2\right) > c_2,$$

où $c_1$et c_2 sont indépendants de δ.Ainsi l'équation.(3.3) est satisfaite.

Deuxiéme

$$(\lambda - T_{\bar{H}}) u_\delta(x,\xi) = \xi \varrho^{-(\beta/\xi)(x-a)} b_\delta(\xi) f'(x) = S,$$

$$\|S\|^2 = \int_{-a}^{a}\int_{-1}^{1} \xi^2 \exp\left\{-\frac{2\beta}{\xi}(x-a)\right\} b_\delta^2(\xi) f'^2(x) dxd\xi$$

$$= \frac{1}{a^2}\int_{-1}^{1} \xi^2 b_\delta^2(\xi) \frac{1}{2|\beta|}\left(\left[\varrho^{(-2\beta/\xi)(x-a)}\right]_{-a}^{a}\right) d\xi$$

$$= \frac{1}{2a^2\delta^2|\beta|}\int_{\delta^2}^{\delta}\xi^3\left(1-\exp\left\{\frac{4a}{\xi}\beta\right\}\right)d\xi$$
$$= \frac{1}{8a^2\delta^2|\beta|}\left(\delta^4-\delta^6\right) = \frac{\delta^2-\delta^6}{8a^2|\beta|} \to 0 \text{ comme } \delta \to 0.$$

Cela prouve Eq.(3.4).Maintenant, en utilisant le fait que le spectre est un ensemble fermé, on obtient

$$\{\lambda \in \mathbb{C} / \operatorname{Re}\lambda \leqslant -\sigma\} \subset \sigma\left(T_{\bar{H}}\right).$$

D'autre part, pour tous les $\lambda \in \mathbb{C}$ satisfaire $\operatorname{Re}\lambda > -\sigma$,l'équation résolvante $(\lambda - T_{\bar{H}})\psi = \varphi$ où φ est une fonction donnée dans X_2 et ψ, est inconnu,a une solution unique (voir la [33]).Par conséquent,

on obtenons

$$\sigma\left(T_{\bar{H}}\right) = \{\lambda \in \mathbb{C} \text{ tels que } \operatorname{Re}\lambda \leqslant -\sigma\}.$$

Étape 2 : Considérons le problème aux valeurs propres

$$(\lambda - T_{\bar{H}})\psi = 0, (\operatorname{Re}\lambda \leqslant \sigma). \tag{3.5}$$

La solution de l'équation(3.5) est formellement donné par

$$\psi(x,\xi) = k(\xi)\, e^{-(1/\xi)(\lambda+\sigma)x}.$$

De plus,ψ doit satisfaire les conditions aux limites qui impliquent que l'équation. (3.5) á seulement la solution triviale.Ainsi, nous concluons que le spectre ponctuel de $T_{\bar{H}}$ est vide, $\sigma P\left(T_{\bar{H}}\right) = \emptyset$.

Étape 3 : Ensuite, nous allons montrer que le spectre résiduel de $T_{\bar{H}}$ est vide.En effet,l'opérateur dual de $T_{\bar{H}}$ est donné par

$$\begin{cases} T_{\bar{H}}^* : D\left(T_{\bar{H}}^*\right) \subset X_2 \to X_2 \\ \psi \to T_{\bar{H}}^*\psi(x,\xi) = \xi\frac{\partial\psi}{\partial x}(x,\xi) - \sigma(\xi)\psi(x,\xi), \\ D\left(T_{\bar{H}}^*\right) = \{\psi \in W_2 \text{ tels que } \bar{H}^*\psi^i = \psi^0\}, \end{cases}$$

où $\bar{H}^*$est donnée par

$$\begin{cases} \bar{H}^* : X_2^i \to X_2^0 \\ u \to H^*u, \\ \bar{H}^*u = \begin{bmatrix} H_{11}^* & H_{12}^* \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

et où H_{11}^* et H_{12}^*sont, respectivement, les opérateurs adjoints de H_{11} et H_{12}.

Pour plus des détails, nous nous référons à la [33], p. 49.

Un raisonnement similaire à celle de l'étape 2 montre que

$$\sigma P\left(\bar{H}^*\right) = \emptyset.$$

Par conséquent, le spectre résiduel de $T_{\bar{H}}$ est vide,$\sigma R\left(T_{\bar{H}}\right) = \emptyset$.

Maintenant, en combinant les étapes 1, 2, et 3, nous déduit que

$$\sigma\left(T_{\bar{H}}\right) = \sigma C\left(T_{\bar{H}}\right) = \{\lambda \in \mathbb{C} \text{ tels que } \operatorname{Re}\lambda \leqslant -\sigma\}.$$

Ceci termine la preuve.

Ensuite, nous considérons l'opérateur de transport $A_H = T_H + K$ où K est donnée par

$$\begin{cases} K : X_P \to X_P \\ \psi \to \int_{-1}^{1} k\left(\xi, \xi'\right) \psi\left(x, \xi'\right) d\xi'. \end{cases}$$

Definition 3.1.1. Un opérateur borné K, défini comme ci-dessus, est dite réguliére si sa restriction à $L_p\left(-1, 1\right)$ est compact .

Théorème 3.1.2 ([33], théorème 2.1, p. 521). Si K est un opérateur régulier sur X_p alors $\left(\lambda - T_H\right)^{-1} K$ est compact sur X_p, pour $1 < p < \infty$ et faiblement compact sur X_1. soit $\lambda \in \rho\left(T_H\right)$ telle que $r_\sigma\left[\left(\lambda - T_H\right)^{-1} K\right] < 1$(rayon spectral), alors $\lambda \in \rho\left(T_H + K\right)$ et

$$(\lambda - A_H)^{-1} - (\lambda - T_H)^{-1} = \sum_{n_\cdot 0} \left[(\lambda - T_H)^{-1} K\right]^n (\lambda - T_H)^{-1}. \tag{3.6}$$

Maintenant, nous sommes en mesure d'affirmer le résultat suivant :

Théorème 3.1.3. Supposons que l'opérateur de collision K est réguliére sur X_p. Alors

$$\sigma_{ess}(A_H) = \sigma_{ess}(T_H).$$

Preuve :Cela résulte immédiatement de l'équation. $(3,6)$,le fait que $(\lambda - T_H)^{-1} K$ est com pact (théorème 3.1.2), et le théorème 3.0. Q.E.D.

Corollaire 3.1.1. Supposons que K est réguliére sur X_p.et H est un opérateur de limite compact.Alore

$$\sigma_{ess}(T_H) = \{\lambda \in \mathbb{C} \text{ tels que } \operatorname{Re}\lambda \leqslant \lambda^*\}.$$

Preuve :La compacité de H implique que l'opérateur J sur X_p .Maintenant l'utilisation des équations. $(3,2)$, $(3,6)$ et le théorème 3.1.2 avec le théorème 3.0 donne le résultat. Q.E.D.

Remarque 3.1.1 : corollaire 3.1.1 est ouverte si $P = 1$.

3.2 la multiplication des conditions aux limites compacts

Le but de ceparagraphe est d'établir des résultats similaires à ceux du théorème 3.1.1 et le corollaire 3.1.1 pour les conditions aux limites de multiplication compact.Ainsi, nous supposons que l'opérateur limite H est compact et satisfait $\|H\| > 1$.

Définir $\Gamma := \{\lambda \in \mathbb{C} \text{ tels que } \operatorname{Re}\lambda \geqslant -\lambda^*\}$ et soit $\lambda_0 := -\lambda^* + (1/2a)\log(\|H\|)$.
Notre premier objectif est de déterminer l'expression de $(\lambda - T_H)^{-1}$.À cet effet, nous considérons l'équation de résolvant de T_H

$$(\lambda - T_H)\psi = \varphi, \qquad (3.7)$$

où φ est une fonction donnée dans X_P.Comme dans le paragraphe précédente, l'utilisation des opérateurs aux limites définies en sec II nous permet d'écrire les équations abstraite.(2.3)et(2.4)en tant que

$$\psi_0 = M_\lambda H\psi^0 + G_\lambda\varphi. \qquad (3.8)$$

En tenant compte de l'équation. (2.5) ,un calcul simple montre que ,pour $\operatorname{Re}\lambda > \lambda_0$

$$\|M_\lambda H\| < 1 \qquad (3.9)$$

Par conséquent, la solution de l'équation. (3.8)est donnée par

$$\psi^0 = \sum_{n_\geq 0} (M_\lambda H)^n G_\lambda\varphi.$$

D'autre part, Eq.(2.2)peut être écrite comme suit

$$\psi = B_\lambda H\psi^0 + C_\lambda\varphi \qquad (3.10)$$

Définir

$$\Gamma_{\lambda_0} := \{\lambda \in \mathbb{C} \text{ tele que } \operatorname{Re}\lambda > \lambda_0\}.$$

Ensuite, la solution de l'équation.(3.7) est

$$\psi = \sum_{n_\geq 0} B_\lambda H (M_\lambda H)^n G_\lambda\varphi + C_\lambda\varphi \qquad \lambda \in \Gamma_{\lambda_0}$$

.

Enfin, la résolvente ensemble de l'opérateur $T_H, \rho(T_H)$,contient Γ_{λ_0}et $\lambda \in \Gamma_{\lambda_0}$,nous avons

$$R(\lambda, T_H) = \sum_{n_\geq 0} B_\lambda H (M_\lambda H)^n G_\lambda + C_\lambda. \qquad (3.11)$$

Contrairement á Sec. III A, la bande $\lambda^* < \operatorname{Re}\lambda \leqslant \lambda_0$ n'est généralement pas inclus dans l'ensemble résolvent de T_H Cependant, en utilisant le fait que son H est compact,on peut obtenir plus d'informations sur sa structure.En effet, compte tenu de la compacité de H ,la fonction définie sur Γpar $\Gamma \ni \lambda \to M_\lambda H$ est un opérateur d'une valeur fonction analytique,dont les valeurs sont compact pour chaque $\lambda \in \Gamma$.L'estimation (3.9) avec le théorème de Gohberg-Shmul'yan (voir [30], le théorème 11.4, p. 258) implique que $(I - M_\lambda H)$ est inversible pour tous $\lambda \in I \setminus \Lambda$ où Λ est un sous-ensemble discret de Γ,c'est á dire, un ensemble qui n'a pas de poits d'accumulation dans Γ.De l'équation.(3.11) nous concluons que le sous-ensemble Λest contenu dans la bande $\lambda^* < \operatorname{Re}\lambda \leqslant \lambda_0$

soit λ appartennent à $\{\lambda^* < \operatorname{Re}\lambda \leqslant \lambda_0\} \setminus \Lambda$.L'équation (3.8) a une solution donnée par

$$\psi^o = (I - M_\lambda H)^{-1} G_\lambda \varphi. \qquad (3.12)$$

La combinaison de l'équation.(3.10) avec l'équation.(3.12), nous obtenons

$$R(\lambda, T_H) = B_\lambda H (I - M_\lambda H)^{-1} G_\lambda + C_\lambda.$$

Nous rappelons que $\Gamma_{\lambda_0} \subset \rho(T_H)$ et pour $\lambda \in \Gamma_{\lambda_0}$,$R(\lambda, T_H)$ est donnée par l'équation.(3.11).

Notez que l'opérateur C_λ n'est rien d'autre que $(\lambda - T_0)^{-1}$ .Donc, nous avons

$$(\lambda - T_H)^{-1} - (\lambda - T_0)^{-1} = L, \qquad (3.13).$$

où $\quad L = B_\lambda H (I - M_\lambda H)^{-1} C_\lambda$

.

Théorème 3.2.1. Soit H un opérateur de limite multiplicateur compact, alore

$$\sigma_{ess}(T_H) = \sigma_{ess}(T_0).$$

Preuve : La compacité de H implique que de L sur $X_P\,(1 \leqslant p < \infty)$.Théorème 3.0 et Eq.(3.13) donner le résultat désiré. Q.E.D

Considérons maintenant l'opérateur de transport $A_H = T_H + K$ et soit $\lambda \in \rho(T_H)$ tels que $r_\sigma\left[(\lambda - T_H)^{-1} K\right] < 1$. Alors $\lambda \in \rho(T_H + K)$ et

$$\left(\lambda - A_H\right)^{-1} - \left(\lambda - T_H\right)^{-1} = \sum_{n\geqslant 0} \left[\left(\lambda - T_H\right)^{-1} K\right]^n \left(\lambda - T_H\right)^{-1}. \qquad (3.14).$$

Maintenant, nous sommes en mesure d'affirmer le résultat suivant :

Théorème 3.2.2. Supposer que l'opérateur de collision K est réguliére sur X_P.Alors

$$\sigma_{ess}\left(A_H\right) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} \text{ tele que } \operatorname{Re}\lambda \leqslant -\lambda^*\right\}.$$

Preuve : Faisant usage de l'équation.(3.13), nous pouvons exprimer l'équation.(3.14) sous la forme

$$\left(\lambda - A_H\right)^{-1} - \left(\lambda - T_0\right)^{-1} = L + \sum_{n\geqslant 0} \left[\left(\lambda - T_H\right)^{-1} K\right]^n \left(\lambda - T_H\right)^{-1}. \qquad (3.15).$$

Le fait que K est réguliére implique la compacité de $\left(\lambda - T_H\right)^{-1} K$ sur X_P (voir[34], théorème 3.1).Ainsi, l'opérateur

$$\sum_{n\geqslant 0} \left[\left(\lambda - T_H\right)^{-1} K\right]^n \left(\lambda - T_H\right)^{-1}$$

est compact.D'autre part, sur l'hypothèse sur H implique la compacité de L. maintenant le résultat de l'équation ci-aprés.(3.15) et le théorème 3.0. Q.E.D.

Remarque 3.2.1. Théorème 3.2.1 est ouverte si $p = 1$.

3.3 Cas multidimensionnelles

Dans ce qui suit, nous considérons l'opérateur de transport de neutrons

$$A_0\psi = -\xi\frac{\partial\psi}{\partial x}\sigma\left(\xi\right)\psi\left(x,\xi\right) + \int_V k\left(\xi,\xi'\right)\psi\left(x,\xi'\right)d\xi' = T_0\psi + K\psi,$$

où T_0 est l'opérateur de diffusion en continu et K désigne la partie entiére de A_0 (l'opérateur de collision), $(x,\xi) \in D \times V$,où l'espace configuration D est un sous-ensemble ouvert et borné de

$R^N, N \geqslant 1$, tandis que l'espace vitesse V est un ouvert arbitraire de R^N.L'opérateur non borné A_0 (c'est á dire, $H = 0$) est étudié dans les espaces de Banach $L_P(D \times V)\,(1 \leqslant P < \infty)$. Son domaine est

$$D(A_0) = D(T_0) = \{\psi \in L_P(D \times V)/\, \xi \tfrac{\partial \psi}{\partial x} \in L_P(D \times V), \psi_{|\Gamma_-} = 0\},$$

où $\Gamma_- = \{(x, \xi) \in \partial D \times V/\xi$ entrant au $x \in \partial D\}$.

Il est bien connu que

$$\sigma(T_0) = \{\lambda \in \mathbb{C} \text{ tele que } \operatorname{Re}\lambda \leqslant -\lambda^*\}$$

(voir, par exemple, [30], corollaire 12.11, p. 272).

En fait, nous pouvons facilement montrer cela $\sigma(T_0)$est réduite à $\sigma C(T_0)$,le spectre continu de T_0.

En conséquent, il résulte du lemme 2.2.1 (i) cela

$$\sigma_{ess}(T_0) = \sigma C(T_0) = \{\lambda \in \mathbb{C} \text{ tele que } \operatorname{Re}\lambda \leqslant -\lambda^*\}$$

D'autre part, l'existence des valeurs propres de $T_0 + K$ dans le demi-plan de telle sorte que$\{\lambda \in \mathbb{C}$ tele que $\operatorname{Re}\lambda > -\lambda^*\}$ est lié à la compacité de certain sitération de $(\lambda - T_0)^{-1} K$ (voir la référence.13, chapitre.12).Malheureusement, cela n'empêche pas l'apparition des trous inclus dans ensemble resolvent de A_0 en la région $\{\lambda \in \mathbb{C}$ tele que $\operatorname{Re}\lambda \leqslant -\lambda^*\}$.par contre, si K est compact sur $L_P(V)\,(1 < p < \infty)$puis $(\lambda - T_0)^{-1} K$ est compact sur $L_P(D \times V)$([38], 1, lemme 2.1) et par conséquente

Théorème 3.3.1. Supposons que K est compact sur $L_P(V)\,(1 < p < \infty)$ Alors

$$\sigma_{ess}(A_0) = \{\lambda \in \mathbb{C} \text{ tele que } \operatorname{Re}\lambda \leqslant -\lambda^*\}.$$

preuve : Soit λ tels que $\operatorname{Re}\lambda > s(A_0)$(spectrale lié de A_0). Ensuite nous pouvons écrire

$$(\lambda - A_0)^{-1} - (\lambda - T_0)^{-1} = \sum_{n_\geq 1} \left[(\lambda - T_0)^{-1} K\right]^n (\lambda - T_0)^{-1}.$$

La compacité de K sur $L_P(V)$ implique que de $\sum_{n,1} \left[(\lambda - T_0)^{-1} K \right]^n (\lambda - T_0)^{-1}$ .Maintenant le résultat découle du théorème 3.0. Q.E.D.

Remarque 3.3.1. Théorème 3.3.1 est ouverte si $P = 1$.

Bibliographie

[1] V. Agoshkov, "Spaces of functions with differential-difference characteristics and smoothness of the transport equation,"Sov. Math. **29**, 662-666 (1984).

[2] F. Andreu, J. Martinez and J.M. Mazon. A spectral mapping theorem for the perturbed strongly continuous semigroups. Math. Ann. **291** (1991),453–462.

[3] N. Angelescu, N. Marinescu, and V. Protopopescu, "Linear monoenergetic transport with reflecting boundary conditions,"Rev. Roum. Phy. **19**, 17-26 (1974).

[4] N. Angelescu, N. Marinescu, and V. Protopopescu, "Neutron transport with periodic boundary conditions," Tramp.Theor. Stat. Phys. **5**, 115-125 (1976).

[5] W. Arendt. Kato's equality and spectral decomposition for positive C_0-groups. Manuscripta Math. **40** (1982), 277–298.

[6] C. Bardos. Problèmes aux limites pour les équations aux dérivées partielles du premier ordre à coefficients réels : théorèmes d'approximation ; application à l'équation de transport. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **3** (1970), 185–233.

[7] R. Beals and V. Protopopescu. Abstract time-dependent transport equations. J. Math. Anal. Appl. **121** (1987), 370–405.

[8] G.I. Bell and S. Glasstone. Nuclear reactor theory, Van Norstrandt,1970.

[9] A. Belleni-Morante, "Neutron transport in a nonuniform slab with generalized boundary conditions," J. Math. Phys. **11**,1553-1558 (1970).

[10] M.D. Blake. A spectral bound for asymptotically norm-continuous semigroups J. Operator Theory **45** (2001), 111–130

[11] G. Borgioli and S. Totaro, "On the spectrum of the transport operator with mixed type boundary conditions," AttiCongruso, Aimeta, **1**, 393-398 (1986).

[12] M. Borysiewicz and J. Mika. Time behaviour of thermal neutrons in moderating media. J. Math. Anal. Appl. **26** (1969), 461–478.

[13] S. Brendle, R. Nagel and J. Poland. On the spectral mapping theorem for perturbed strongly continuous semigroups. Arch. Math. **74**(5) (2000), 365–378.

[14] M. Cessenat. Théorèmes de trace L_P pour des espaces de fonctions de la neutronique. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **299**(16) (1984), 831–834.

[15] M. Cessenat. Théorèmes de trace pour des espaces de fonctions de la neutronique.C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **300**(3) (1985), 89–92.

[16] A. Cordiovei and V. Protopopescu, "On the spectrum of the linear transport operator with diffuse reflections," Rev.Roum. Phys. **21**, 713-719 (1976).

[17] R. Dautray and J. L. Lions, Analyse mathématique et calcul numérique, (Masson, Paris, 1988), Tome 9.

[18] E.B. Davies. One-parameter semigroups. Academic Press, London, 1980.

[19] A. Dehici and R. Debbar,"Some Spectral Properties of Linear Operators on Exotic Banach Spaces" Lobachevskii Journal of Mathematics, **33** (1) 56–67 (2012).

[20] J.J. Duderstadt and W.R. Martin. Transport theory. John Wiley and Sons, Inc. 1979.

[21] D.E. Edmunds and W.D. Evans. Spectral Theory and Differential Operations.Oxford Mathematical Monographs, 1989.

[22] K.-J. Engel and R. Nagel. One-parameter semigroups for linear evolution equations. Springer, New York Berlin Heidelberg, 1999.

[23] F Golse P L Lions B. Perthame and R. Sentis, "Regularity of the moments of the solution of a transport equation," J : Funct.'Ani. **76**, 1;O-125 (1988).

[24] F Golse 3 B. Perthame, and R. Sentis, "Un resultat de compacite pour les equations de transport et application au calcul de la valeur propre principale d'un opdrateur de transport," C. R. Acad. Sci. Paris **305**, 341-344 (1985).

[25] W. Greenberg, G. Van der Mee, and V. Protopopescu, Boundary Value Problems in Absrract Kinetic Theory (Birkhauser,Basel, 1987).

[26] G. Greiner and R. Nagel. On the stability of strongly continuous semigroups of positive operators on $L^2(\mu)$. Ann. Scuaola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci-**X**(2) (1983), 257–262.

[27] G. Greiner, J. Voigt and M. Wolff. On the spectral bound of the generator of semigroups of positive operators. J. Operator Theory. **5** (1981),245–256.

[28] J. Hejtmanek and H.G. Kaper. Counterexample to the spectral mapping theorem for the exponential function. Proc. Amer. Math. Soc. **96**(4) (1986),563–568.

[29] E. Hille and R.S. Phillips. Functional analysis and semigroups. Amer.Math. Soc. Colloq. Publ. 31, 1957.

[30] H G Kaper C. G. Lekkerkerker, and J. Hejtmanek, Spectral Merhods in Linear Transport Theory (Birkhauser, Basel,1982).

[31] T. Kato. Perturbation Theory for linear operators. Springer-Verlag, 1966.

[32] I. Kuščer. A survey of neutron transport theory. Acta. Physica Austriaca supp. **X** (1973), 491-528.

[33] K. Latrach, "Compactness properties for linear transport operator with abstract boundary conditions in slab geometry,"Trans. Theor. Stat. Phys. **22**, 39-65 (1993).

[34] K. Latrach, "Time asymptotic behavior for linear transport equation with abstract boundary conditions in slab geometry,"Trans. Theor. Stat. Phys. **23**, 633-670 (1994).

[35] J. Lehner and M. Wing, "On the spectrum of an unsymmetric operator arising in the transport theory of neutrons,"Commun. Pure Appl. Math. **8**, 217-234 (1955).

[36] J. Martinez and J.M. Mazon. C_0-semigroups norm continuous at infinity.Semigroup Forum **52** (1996), 213–224.

[37] M. Mokhtar-Kharroubi. Spectral properties of a class of positive semigroups on Banach lattices and transport absorption operators. Positivity. Aparaître.

[38] M. Mokhtar-Kharroubi, "Time asymptotic behavior and compactness in neutron transport theory," Eur. J. Mech. Fluid B **11**, 39-68 (1992).

[39] B. Montagnini and M.L. Demuru. Complete continuituy of the free gas scattering operator in neutron thermalization theory. J. Math. Anal. Appl.**12** (1965), 49–57.

[40] A. Pazy. Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. Springer, New York, 1983.

[41] Schechter, Spectra of Partial Differential Operators (North-Holland, Amsterdam, 1971).

[42] D.G. Song. A note on the growth bound of C_0-semigroups. Semigroup Forum **54** (1997), 190–198.

[43] P. Takac. Two counterexamples to the spectral mapping theorem for semigroups of positive operators. Integral Equations Operator Theory 9(3) (1986), 460–467.

[44] J. Voigt. Functional analytic treatment of the initial boundary value problem for collisionless gases. München, Habilitationsschrift (1981).

[45] 16J. Voigt, "Spectral properties of the neutron transport equation," J. Math. Anal. Appl. **106**, 140-153 (1985).

[46] L. Weis. The stability of positive semigroups on Lp spaces. Proc. Amer.Math. Soc. **123** (1995), 3089–3094.

[47] M.M.R. Williams. Mathematical methods in particle transport theory.London Butterworths (1971).

[48] J. Zabczyk. A note on C0-semigroups. Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci.Math. Astronom. Phys. 23 (1975), 895–898.