République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

M/510.098

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

جامعة 08 ماي 45 قالمة
قسم الرياضيات
كلية الرياضيات، الإعلام الآلي وعلوم المادة

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Equations aux Dérivées Partielles**

جامعة 08 ماي 45 قالمة
مصلحة الإعارة الخارجية
كلية الرياضيات، الإعلام الآلي وعلوم المادة

Par : **M^elle^.**

Bouhalit Amina

Intitulé

Sur quelques inégalités intégrales à deux variables indépendantes aux échelles de temps et leurs applications

Dirigé par : Dr.K.Boukerrioua

Devant le jury

PRESIDENT	Dr.S.Badraoui	Prof	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr.K.Boukerrioua	MCB	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr.F.Lakhal	MCA	Univ-Guelma

Session Juin 2014

Remerciement

Nous tenons tout d'abord à remercier Dieu le tout puissant et miséricordieux, qui nous a donné la force et la patience d'accomplir ce modeste travail.

En second lieu, nous tenons à remercier notre encadreur **DR .Boukerrioua**, son précieux conseil et son aide durant toute la période du travail.

Nous remercions également **Monsieur Meftah** qui est contribué à notre formation, auxquels exprimons notre plus grand respect et profonde reconnaissance.

Nos vifs remerciements vont également aux membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre recherche en acceptant d'examiner notre travail et de l'enrichir par leurs propositions.

En fin, Nous désirons exprimer nos remerciements à tout ce qui nous ont aidés de loin ou de prés grâce à leur conseil, encouragements et leurs critiques.

Table des matières

0.1 Introduction

Les inégalités apparaissent partout et dans toutes les disciplines, elles jouent un rôle important et significatif dans toutes les branches de Mathématiques. Durant ces dernières années, les inégalités ont attiré l'attention de plusieurs mathématiciens et une intense littérature est apparue sur ce sujet. En particulier les inégalités intégrales ont connues un grand développement et des nouvelles idées et techniques sont apparues ce qui a contribué à la résolution de nombreux problèmes importants en théorie de l'approximation et en analyse numérique où l'estimation des erreurs d'approximation est exigée.

La théorie des inégalités intégrales joue un rôle important dans l'étude des équations différentielles et intégraux-différentielles, les applications dans ce domaine ont été développées d'une façon très remarquables au cours de ces dernières années dans l'étude de l'existence, l'unicité, la dépendance continue de la solution par rapport aux données initiales, l'existence globale, la stabilité de la solution et l'erreur d'estimation dans les problèmes d'approximation. La littérature dans ce sens est très riche et connaît une croissance explosive en théorie et aux applications, pour plus de détails on peut consulter le livre de Pachpatte [11].

Il s'avère que l'utilisation des inégalités intégrales donne des bornes explicites pour les fonctions inconnues. Pour ces raisons l'introduction des inégalités intégrales dans l'étude des propriétés des solutions des équations différentielles est indispensable. Une des inégalités intégrales la plus connue est celle de Gronwall (1919) qui a été appliquée à la résolution de quelques problèmes concernant les équations différentielles ordinaires.

Le but de ce travail est de développer un résultat obtenu dans [12] autour de l'étude des propriétés des solutions des équations dynamique partielles aux échelles de temps.

Une échelle de temps $\mathbb{T}$ est un sous ensemble fermé non vide de $\mathbb{R}$. Par exemple, les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et l'ensemble triadique de Cantor sont des échelles de temps. On sous-entend que la topologie de $\mathbb{T}$ est induite par celle de $\mathbb{R}$. La théorie des équations dynamiques aux échelles de temps a été introduite en 1988 par Stefan Hilger [8, 9] dans sa thèse de doctorat où il a notamment définie la Δ-dérivée de la façon suivante.

Définition 0.1 *Soit $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ une fonction et $t \in \mathbb{T}^k$, f est dite $\Delta-$différentiable en t s'il existe un vecteur $f^{\Delta}(t) \in \mathbb{R}^n$ tel que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un voisinage U de t tel que*

$$\left\| f(\sigma(t)) - f(s) - f^{\Delta}(t)(\sigma(t) - s) \right\| \leq \epsilon \mid \sigma(t) - s \mid,$$

pour tout $s \in U$. On appelle $f^{\Delta}(t)$ la $\Delta-$dérivée de f en t. Si f est $\Delta-$différentiable en t pour tout $t \in \mathbb{T}^k$, alors $f^{\Delta} : \mathbb{T}^k \to \mathbb{R}^n$ est dite la $\Delta-$dérivée de f sur $\mathbb{T}^k$.

Ici, $\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\}$, $\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{T} : s < t\}$ et

$$\mathbb{T}^k = \begin{cases} \mathbb{T}/\left]\rho(\sup \mathbb{T}), \sup \mathbb{T}\right] & \text{si} \sup \mathbb{T} < \infty \\ \mathbb{T} & \text{si} \sup \mathbb{T} = \infty \end{cases}.$$

C'est à partir de cette définition qu'ont été introduites les équations aux échelles de temps qui ont la même forme qu'une équation différentielle à l'exception que par exemple, dans une équation du premier ordre, la dérivée d'une fonction x (x') est remplacée par la Δ-dérivée (x^{Δ}) de cette fonction. Nous verrons plus loin dans le texte que si $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, la Δ-dérivée équivaut à la dérivée au sens classique et les équations aux échelles de temps deviennent des équations différentielles. Si $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, les équations aux échelles de temps deviennent des équations aux différences finies, pour plus de détails, on peut consulter les deux livres [1, 2]. D'ailleurs, l'intérêt pour ce dernier type d'équations a connu un essor considérable au cours des dernières années pour expliquer plusieurs phénomènes discrets notamment en économie, psychologie et génie. Qui plus est, l'informatique fait appel aux ensembles discrets et donc, les équations aux différences finies sont abondamment utilisées pour faire avancer cette science. La théorie des équations aux échelles de temps vient dans un premier temps unifier ce qui peut être fait dans les domaines des équations différentielles et les équations aux différences finies. En travaillant sous l'angle d'une échelle de temps générale, il est possible de faire progresser simultanément ces deux champs des mathématiques. Dans un deuxième temps, la théorie développée autour des échelles de temps permet l'étude de phénomènes se modélisant d'une façon qui fait appel simultanément au discret et au continu. Ainsi, une équation définie sur une échelle de temps de la forme $\cup_{n=0}^{n=\infty}[2n, 2n+1]$ est très utile pour décrire des phénomènes saisonniers. Par exemple, ce pourrait être pour l'étude d'une population d'insectes qui après un certain temps disparaît, pour réapparaître ultérieurement après avoir été pendant un certain temps sous forme de larve. Pour plus de détails, consulter [7].

Ce travail est organisé de la façon suivante :

Dans le premier chapitre, on commence par rappeler brièvement quelques notions générales sur les échelles de temps avec exemples. Ensuite nous présentons quelques résultats préliminaires qui nous seront utiles dans notre travail.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons quelques inégalités intégrales aux échelles de temps à deux variables indépendantes qui sont très utiles dans l'estimation des solutions des équations partielles dynamiques.

Enfin, on termine le chapitre par l'exposition de quelques applications de ces inégalités intégrales aux équations partielles dynamiques.

Chapitre 1

Notation et préliminaires

Dans ce chapitre, nous citons quelques définitions, exemples et théorèmes très utiles pour le deuxième chapitre. Nous signalons que les résultats suivants sont tirés des deux livres [1, 2] .

Définition 1.1 *Une échelle de temps* $\mathbb{T}$ *est un sous ensemble fermé non vide de* $\mathbb{R}$.

Exemple 1.1 *Les ensembles* $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, [0,1] \cup [2,3], [0,1] \cup \mathbb{N}$ *et l'ensemble de cantor sont des échelles de temps.*

Exemple 1.2 *Les ensembles* $\mathbb{Q}, \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}, \mathbb{C}, (0,1)$ *ne sont pas des échelles de temps.*

Remarque 1.1 *La topologie de* $\mathbb{T}$ *est induite par celle de* $\mathbb{R}$.

1.1 Operateur de saut

Définition 1.2 *Soit* $\mathbb{T}$ *une échelle de temps, pour* $t \in \mathbb{T}$, *on définit l'opérateur de saut avant* $\sigma : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$

$$\sigma(t) = \inf \{s \in \mathbb{T} : s > t\} . \tag{1.1}$$

Définition 1.3 *Soit $\mathbb{T}$ une échelle de temps, pour $t \in \mathbb{T}$, on définit l'opérateur de saut arrière $\rho : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$*

$$\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{T} : s < t\}. \tag{1.2}$$

Remarque 1.2 *Par convention, on supposera que $\sigma(t) = t$ si t est le maximum de $\mathbb{T}$, et que $\rho(t) = t$ si t est le minimum de $\mathbb{T}$.*

1.2 Classification des points

Soit $\mathbb{T}$ une échelle de temps, t un point de $\mathbb{T}$.

Définition 1.4 *On dit que t est un point dense à droite de $\mathbb{T}$, $t < \sup \mathbb{T}$ (resp. un point t dense à gauche de $\mathbb{T}$) si $\sigma(t) = t$ (resp. $\rho(t) = t$).*

Définition 1.5 *On dit que t est un point dense s'il est simultanément dense à droite et à gauche.*

Définition 1.6 *On dit que t est un point dispersé à droite de $\mathbb{T}$ (resp. un point dispersé à gauche de $\mathbb{T}$) si $\sigma(t) > t$ (resp. $\rho(t) < t$).*

Définition 1.7 *On dit que t est un point isolé s'il est simultanément dispersé à droite et à gauche.*

Définition 1.8 *Nous définissons les fonctions de granulation $\mu, \nu : \mathbb{T} \to [0, \infty[$ par :*

$$\mu(t) = \sigma(t) - t \text{ et } \nu(t) = t - \rho(t). \tag{1.3}$$

Maintenant, nous présentons quelques exemples concernant le calcul de l'opérateur de saut avant et arrière :

Exemple 1.3 *Soit $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$,*

on a

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\} = \inf(t, \infty) = t, \\ \rho(t) &= t, \end{aligned}$$

donc tous les points de $\mathbb{R}$ sont denses. Les fonctions de granulation μ, ν valles : $\mu(t) = 0$ et $\nu(t) = 0$.

Exemple 1.4 *Soit $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, pour tout $t \in \mathbb{Z}$, on a*

$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\} = \inf\{t+1, t+2, \ldots\ldots\} = t+1, \rho(t) = t-1,$

ainsi tous les points de $\mathbb{Z}$ sont isolés. Les fonctions de granulation μ, ν valles : $\mu(t) = 1$ et $\nu(t) = 1$.

Exemple 1.5 *Soit $\mathbb{T} = [0,1] \cup [2,3]$ on a :*

$$\sigma(t) = \begin{cases} t \text{ si } t \in [0,1[\cup [2,3] \\ 2 \text{ si } t = 1 \end{cases},$$

et

$$\rho(t) = \begin{cases} t \text{ si } t \in [0,1] \cup]2,3] \\ 1 \text{ si } t = 2 \end{cases}.$$

Ainsi

$$\mu(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \in [0,1[\cup [2,3] \\ 1 \text{ si } t = 1 \end{cases},$$

et

$$\nu(t) = \begin{cases} 0 \ si \ t \in [0,1] \cup]2,3] \\ 1 \ si \ t = 2 \end{cases}.$$

On définit maintenant l'ensemble $\mathbb{T}^{\mathbf{k}}$.

Définition 1.9 *Soit $\mathbb{T}$ une échelle de temps*

$$\mathbb{T}^k = \begin{cases} \mathbb{T} \diagup]\rho(\sup \mathbb{T}), \sup \mathbb{T}] & si \ \sup \mathbb{T} < \infty \\ \mathbb{T} & si \ \sup \mathbb{T} = \infty \end{cases}.$$

Remarque 1.3 *Si le maximum de $\mathbb{T}$ est dispersé à gauche, alors on pose $\mathbb{T}^k = \mathbb{T} \diagup \sup \mathbb{T}$. Sinon, par convention $\mathbb{T}^k = \mathbb{T}$.*

Définition 1.10 *Pour deux points $a, b \in \mathbb{T}$, l'intervalle d'échelle de temps est définie par :*

$$[a,b]_{\mathbb{T}} = \{t \in \mathbb{T} \ : a \leq t \leq b\}.$$

1.3 Δ–Dérivée

Définition 1.11 *Soit $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$, une fonction et $t \in \mathbb{T}^k$, f est dit $\Delta-$différentiable en t s'il existe un vecteur $f^{\Delta}(t) \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$,il existe un voisinage U de t tel que*

$$\left\|f(\sigma(t)) - f(s) - f^{\Delta}(t)(\sigma(t) - s)\right\| \leq \varepsilon \left|\sigma(t) - s\right|,$$

pour tout $s \in U$. On appelle $f^{\Delta}(t)$ la $\Delta-$dérivée de f en t. Si f est $\Delta-$différentiable en t pour tout $t \in \mathbb{T}$, alors $f^{\Delta} : \mathbb{T}^k \to \mathbb{R}^n$ est dite la $\Delta-$dérivée de f sur $\mathbb{T}^k$.

Théorème 1.1 *Soit $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ une fonction et $t \in \mathbb{T}$.*

(i)Si f est $\Delta-$différentiable en t, alors f est continue en t.

(ii)Si f est continue en t et si t est dispersé à droite, alors f est $\Delta-$différentiable en t, de plus on a :

alors

$$\begin{aligned} f^{\Delta}(t) &= \frac{\left(\frac{n_0+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{n_0}{2}\right)^2}{\frac{n_0+1}{2}+\frac{n_0}{2}} \\ &= \frac{n_0+1}{2}+\frac{n_0}{2} \\ &= \frac{2n_0}{2}+\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

D'où

$$f^{\Delta}(t) = 2t + \frac{1}{2}.$$

Exemple 1.7 *Considérons la fonction* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(t) = t^2$ *où* $\mathbb{T} = \{\sqrt{n}, n \in \mathbb{N}_0\}$.

Pour tout $t \in \mathbb{T}$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}_0 : t = \sqrt{n_0}$, *et donc*

$$\sigma(t) = \sqrt{n_0+1},$$

comme

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - t},$$

alors

$$\begin{aligned} f^{\Delta}(t) &= \frac{\left(\sqrt{n_0+1}\right)^2 - \left(\sqrt{n_0}\right)^2}{\sqrt{n_0+1}-\sqrt{n_0}}. \\ &= \sqrt{n_0+1}+\sqrt{n_0}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$f^{\Delta}(t) = \sqrt{t^2+1} + t.$$

Remarque 1.4 *Si* $\mathbb{T} = \mathbb{R}$,*alors d'après* (iii) *du théorème précédent la fonction* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est* $\Delta-$*différentiable en* $t \in \mathbb{R}$ *ssi :*

En effet pour $t = 1$, f est rd-continue car $\left(\lim_{t \to 1^-} f(t) = 1\right)$ *par contre elle n'est pas continue en $t = 1$ car* $(f(1) = 2)$.

Définition 1.13 *La fonction $F : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est dite primitive de $f : \mathbb{T}^k \to \mathbb{R}$ si elle vérifie $F^\Delta(t) = f(t)$ pour tout $t \in \mathbb{T}^k$.*

Théorème 1.4 *Toute fonction rd-continue $f : \mathbb{T}^k \to \mathbb{R}$ admet une primitive $F : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ et on note*

$$\int_s^r f(t)\,\Delta t = F(r) - F(s) \quad \textit{pour tout } r, s \in \mathbb{T},$$

de plus

$$\int_s^{\sigma(t)} f(\tau)\,\Delta\tau = \mu(t) f(t), t \in \mathbb{T}^k.$$

Preuve. On pose $F^\Delta(t) = f(t)$ alors

$$\int_s^{\sigma(t)} f(\tau)\,\Delta\tau = F(\sigma(t)) - F(t),$$

on a :

$$F^\Delta(t) = \frac{F(\sigma(t)) - F(t)}{\mu(t)},$$

d'où

$$F(\sigma(t)) - F(t) = F^\Delta(t)\mu(t) \Rightarrow \int_s^{\sigma(t)} f(\tau)\,\Delta\tau = f(t)\mu(t).$$

∎

Théorème 1.5 *Soient $a, b, c \in \mathbb{T}, \lambda \in \mathbb{R}$ et $f, g \in C_{rd}(\mathbb{T}^k)$ alors :*

$$
\begin{aligned}
\int_a^b [f(t)+g(t)]\,\Delta t &= \int_a^b f(t)\,\Delta t + \int_a^b g(t)\,\Delta t, \\
\int_a^b (\lambda f(t))\,\Delta t &= \lambda \int_a^b f(t)\,\Delta t, \\
\int_a^b f(t)\,\Delta t &= -\int_b^a f(t)\,\Delta t, \\
\int_a^b f(t)\,\Delta t &= \int_a^c f(t)\,\Delta t + \int_c^b f(t)\,\Delta t. \\
\int_a^a f(t)\,\Delta t &= 0.
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

Si

$$|f(t)| \leq g(t)$$

sur $[a,b]_{\mathbb{T}^k}$ *, alors*

$$\left|\int_a^b f(t)\,\Delta t\right| \leq \int_a^b g(t)\,\Delta t.$$

Proposition 1.1 *Pour* $\mathbb{T}=\mathbb{R}$ *on a*

$$\int_a^b f(t)\,\Delta t = \int_a^b f(t)\,dt.$$

Preuve. Evidente. ■

Proposition 1.2 *Pour* $\mathbb{T}=\mathbb{Z}$ *on a*

$$\int_a^b f(t)\,\Delta t = \begin{cases} \sum_{t=a}^{b-1} f(t) \;\; si \; a<b \\ 0 \; si \; a=b \\ -\sum_{t=b}^{a-1} f(t) \;\; si \; a>b \end{cases}.$$

Preuve. Comme $\mathbb{T}=\mathbb{Z}$, $a<b$ on a $\sigma(t)=t+1$.

Ainsi

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(t)\,\Delta t &= \int_a^{a+1} f(t)\,\Delta t + \int_{a+1}^{a+2} f(t)\,\Delta t + \ldots + \int_{b-1}^{b} f(t)\,\Delta t \\
&= \int_a^{\sigma(a)} f(t)\,\Delta t + \int_{a+1}^{\sigma(a+1)} f(t)\,\Delta t + \ldots + \int_{b-1}^{\sigma(b-1)} f(t)\,\Delta t \\
&= \mu(a)\,f(a) + \mu(a+1)\,f(a+1) + \cdots + \mu(b-1)\,f(b-1),
\end{aligned}
$$

comme $\mu(t) = 1$, on obtient

$$\int_a^b f(t)\,\Delta t = \sum_{t\in[a,b[} f(t).$$

De la même manière on montre le cas $a > b$.

Le cas $a = b$ est induit directement de la propriété (1.6) du théorème précédent on a :

$$\int_a^b f(t)\,\Delta t = \int_a^a f(t)\,\Delta t = 0.$$

■

Proposition 1.3 *Si $[a,b]$ contient des points isolés alors :*

$$\int_a^b f(t)\,\Delta t = \begin{cases} \sum_{t\in[a,b[} \mu(t)\,f(t) & si\ a < b \\ 0 & si\ a = b \\ \sum_{t\in[a,b[} \mu(t)\,f(t) & si\ a > b. \end{cases}$$

Preuve. On suppose que $[a,b]$ contient uniquement des points isolés, c'est-à-dire $[a,b] = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$. Autrement dit $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$.

D'après le théorème précédent on a :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\,\Delta t &= \sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_i+1} f(t)\,\Delta t = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{\sigma(t_i)} f(t)\,\Delta t \\ &= \sum_{i=0}^{n-1}\mu(t_i)\,f(t_i) = \sum_{t\in[a,b[}\mu(t)\,f(t)\,.\end{aligned}$$

Pour le cas $a = b$ on a :

$$\int_a^b f(t)\,\Delta t = 0,$$

par contre dans le cas $b < a$ on obtient

$$\int_a^b f(t)\,\Delta t = -\int_b^a f(t)\,\Delta t.$$

■

1.3.1 Δ–Intégration par partie

Proposition 1.4

$$\begin{aligned}\int_a^b f^\sigma(t)\,g^\Delta(t)\,\Delta t &= [(fg)(t)]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b f^\Delta(t)\,g(t)\,\Delta t, \\ \int_a^b f(t)\,g^\Delta(t)\,\Delta t &= [(fg)(t)]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b f^\Delta(t)\,g^\sigma(t)\,\Delta t.\end{aligned}$$

Preuve. D'après les propriétés de la dérivée on a

$$(fg)^\Delta(t) = f(\sigma(t))\,g^\Delta(t) + f^\Delta(t)\,g(t)\,,$$

d'où

$$f(\sigma(t))\,g^\Delta(t) = (fg)^\Delta(t) - f^\Delta(t)\,g(t)\,, \tag{1.7}$$

intégrons les deux membres de l'égalité (1.7) entre a et b, on obtient

$$\begin{aligned}\int_a^b f(\sigma(t))\, g^\Delta(t)\,\Delta t &= \int_a^b (fg)^\Delta(t)\,\Delta t - \int_a^b f^\Delta(t)\, g(t)\,\Delta t\\ &= [(fg)(t)]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b f^\Delta(t)\, g(t)\,\Delta t.\end{aligned}$$

■

Définition 1.14 *Les fonctions $g_k, h_k : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}$ sont définies par récurrence :*

$$\begin{aligned} g_0(t,s) &= h_0(t,s) = 1. \qquad s,t \in \mathbb{T},\\ g_{k+1}(t,s) &= \int_s^t g_k(\sigma(\tau), s)\,\Delta\tau,\, h_{k+1}(t,s) = \int_s^t h_k(\tau, s)\,\Delta\tau, \quad k \in \mathbb{N}_0, s,t \in \mathbb{T}.\end{aligned}$$

Sont appelées les polynômes d'échelle de temps.

Définition 1.15 *Soit $p : \mathbb{T}^k \to \mathbb{R}$, p est dit régressive si elle vérifie :*

$$1 + \mu(t)\, p(t) \neq 0.$$

Remarque 1.8 *Pour tout $t \in \mathbb{T}^k$, l'ensemble des fonctions régressives et rd-continues est noté par $\Re$.*

Définition 1.16 *L'ensemble de toutes les fonctions régressives positives est définie par :*

$$\Re^+ = \left\{p \in \Re : 1 + \mu(t)\, p(t) > 0,\ pour\ tout\ t \in \mathbb{T}^K\right\}. \tag{1.8}$$

Définition 1.17 *Pour $h > 0$, on définit la transformation cylindrique :*
$\xi_h : \mathbb{C}_h \to \mathbb{Z}_h$, par :

$$\xi_h(z) = \frac{1}{h}\log(1 + zh),$$

où log est le logarithme principale, $\mathbb{Z}_h = \left\{z \in \mathbb{C} \ : -\frac{\pi}{h} < \mathrm{Im}(z) \leq \frac{\pi}{h}\right\}$ et $\mathbb{C}_h = \left\{z \in \mathbb{C} \ : \ z \neq \frac{1}{h}\right\}$. Pour $h = 0$, on définit : $\xi_0(z) = z$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Théorème 1.6 *On suppose que $p \in \Re$ et $t_0 \in \mathbb{T}$ un point fixé, alors le problème à valeur initiale*

$$y^{\Delta}(t) = p(t)\, y(t), y(t_0) = 1, \tag{1.9}$$

admet une unique solution dans $\mathbb{T}$, donnée par

$$y(t) = e_p(t, t_0),$$

avec

$$e_p(t, t_0) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau\right).$$

Remarque 1.9 *Il est clair que*

$$e_p(\sigma(t), t_0) = (1 + \mu(t)\, p(t))\, e_p(t, t_0). \tag{1.10}$$

Remarque 1.10 *Pour $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, la fonction exponentielle est donnée par :*

$$e_p(t, t_0) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} p(\tau)\,\Delta\tau\right)$$

où $t, t_0 \in \mathbb{R}$ et $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.

Remarque 1.11 *Pour $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, la fonction exponentielle est donnée par :*

$$e_p(t, t_0) = \prod_{\tau = t_0}^{\tau = t} [1 + p(\tau)],$$

où $t, t_0 \in \mathbb{Z}$, $t_0 < t$ et, $p : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ est une suite vérifie

$$p(t) \neq -1 \text{ pour tout } t \in \mathbb{Z}.$$

Théorème 1.7 *Soit $a \in \mathbb{T}^k, b \in \mathbb{T}$ et $L : \mathbb{T} \times \mathbb{T}^k \to \mathbb{R}$ est continue en (t,t), pour $t \in \mathbb{T}^k$, $t > a$ et $L^{\Delta}(t,.)$ est rd-continue dans $[a, \sigma(t)]$, on suppose que pour tout $\varepsilon > 0, \exists U$, un voisinage de t indépendant de $\tau \in [a, \sigma(t)]$ tel que :*

$$\left|L(\sigma(t), \tau) - L(s, \tau) - L^{\Delta}(t, \tau)(\sigma(t) - s)\right| \leq \varepsilon \left|\sigma(t) - s\right|, \qquad \forall s \in U.$$

Où f^{Δ} dénote la dérivée de f par rapport à la $1^{\text{ière}}$ variable alors on a :

$$g(t) = \int_a^t L(t, \tau) \Delta\tau \Rightarrow g^{\Delta}(t) = \int_a^t L^{\Delta}(t, \tau) \Delta\tau + L(\sigma(t), \tau),$$

et

$$h(t) = \int_t^b L(t, \tau) \Delta\tau \Rightarrow h^{\Delta}(t) = \int_t^b L^{\Delta}(t, \tau) \Delta\tau - L(\sigma(t), \tau).$$

Preuve. On a

$$g(t) = \int_a^t L(t, \tau) \Delta\tau, \quad g^{\Delta}(t) = \frac{g(\sigma(t)) - g(t)}{\mu(t)},$$

ce qui donne

$$g^{\Delta}(t) = \frac{1}{\mu(t)} \int_a^{\sigma(t)} L(\sigma(t), \tau) \Delta\tau - \frac{1}{\mu(t)} \int_a^t L(t, \tau) \Delta\tau. \tag{1.11}$$

D'autre part on a :

$$L^{\Delta}(t, \tau) = \frac{L(\sigma(t), \tau) - L(t, \tau)}{\mu(t)},$$

d'où

$$L(\sigma(t), \tau) = L^{\Delta}(t, \tau) + L(t, \tau). \tag{1.12}$$

Remplaçons (1.12) dans l'équation (1.11), on obtient

$$\begin{aligned}
g^{\Delta}(t) &= \int_a^{\sigma(t)} \left(L(t,\tau) + \frac{L(t,\tau)}{\mu(t)} \right) \Delta\tau - \frac{1}{\mu(t)} \int_a^t L(t,\tau)\,\Delta\tau \\
&= \int_a^{\sigma(t)} L(t,\tau)\,\Delta\tau + \int_a^{\sigma(t)} \frac{L(t,\tau)}{\mu(t)} \Delta\tau + \int_t^a \frac{L(t,\tau)}{\mu(t)} \Delta\tau \\
&= \int_a^t L^{\Delta}(t,\tau)\,\Delta\tau + \int_a^{\sigma(t)} L^{\Delta}(t,\tau) + \frac{1}{\mu(t)} \int_t^{\sigma(t)} L(t,\tau)\,\Delta\tau,
\end{aligned}$$

et comme

$$\int_t^{\sigma(t)} L(\tau)\,\Delta\tau = \mu(t)\,L(t),$$

donc on a

$$g^{\Delta}(t) = \int_a^t L^{\Delta}(t,\tau)\,\Delta\tau + \mu(t)\,L^{\Delta}(t,t) + L(t,t),$$

ainsi

$$g^{\Delta}(t) = \int_a^t L^{\Delta}(t,\tau)\,\Delta\tau + L(\sigma(t),\tau). \tag{1.13}$$

■

Théorème 1.8 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et différentiable et $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ $\Delta-$différentiable dans $\mathbb{T}^k$, alors $f \circ g$ est $\Delta-$différentiable et on a :*

$$(f \circ g)^{\Delta}(t) = \left\{ \int_0^1 f'\left(g(t) + h\mu(t)\,g^{\Delta}(t)\right) dh \right\} .g^{\Delta}(t), \quad t \in \mathbb{T}^k.$$

Définition 1.18 *On définit le cercle minus de soustraction $\ominus$ sur $\Re$ par*

$$\begin{aligned} p \ominus q &= \frac{p-q}{1+\mu q}, \\ (\ominus p)(t) &= \frac{-p(t)}{1+\mu p(t)}, \\ \ominus(\ominus p) &= p. \end{aligned}$$

1.4 Quelques inégalités importantes

Dans cette section, nous présentons quelques inégalités utiles dans le chapitre 2.

Lemme 1.1 *On suppose que $p \geq 1$, $a \geq 0$. Alors*

$$a^{\frac{1}{p}} \leq \frac{1}{p} K^{\frac{1-p}{p}} a + \frac{p-1}{p} K^{\frac{1}{p}}. \tag{1.14}$$

Pour chaque $K > 0$.

Preuve. Voir [10]. ∎

Lemme 1.2 *On suppose que $a, b \geq 0$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ avec $p > 1$, alors*

$$a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}. \tag{1.15}$$

Un résultat considéré comme un outil de base dans l'étude des inégalités de type Gronwall est donné par le lemme suivant :

Lemme 1.3 *(Comparaison) :*

On suppose que $u, b \in C_{rd}$, $a \in \Re^{+}$. Si

$$u^{\Delta}(t) \leq a(t)\, u(t) + b(t), \;\; t \geq t_0, \;\; t \in \mathbb{T}^{k}. \tag{1.16}$$

Alors,

$$u(t) \leq u(t_0)\, e_a(t,t_0) + \int_{t_0}^{t} e_a(t,\sigma(s))\, b(s)\, \Delta s, t \geq t_0, \quad t \in \mathbb{T}^k. \tag{1.17}$$

Preuve. On utilise la propriété de la drivée du produit de deux fonctions :

$$\begin{aligned}
[ue_{\ominus}(.,t_0)]^{\Delta}(t) &= u^{\Delta}(t)\, e_{\ominus}(\sigma(t),t_0) + u(t)\left(e_{\ominus a}(t,t_0)\right)^{\Delta}, \\
&= u^{\Delta}(t)\, e_{\ominus}(\sigma(t),t_0) + u(t)(\ominus a)(t)\, e_{\ominus a}(t,t_0),
\end{aligned}$$

l'égalité (1.10), donne

$$[ue_{\ominus a}(.,t_0)]^{\Delta}(t) = u^{\Delta}(t)\, e_{\ominus}(\sigma(t),t_0) + u(t)(\ominus a)(t)\frac{e_{\ominus a}(\sigma(t),t_0)}{1+u(t)(\ominus a)(t)},$$

d'après la définition 1.19, on obtient

$$\begin{aligned}
[ue_{\ominus a}(.,t_0)]^{\Delta}(t_0) &= u^{\Delta}(t)\, e_{\ominus a}(\sigma(t),t_0) + u(t)\left(-\left(\ominus(\ominus a)\right)\right)(t)\, e_{\ominus a}(\sigma(t),t_0), \\
&= \left[u^{\Delta}(t) - \left(\ominus(\ominus a)\right)(t)\, u(t)\right] e_{\ominus a}(\sigma(t),t_0),
\end{aligned}$$

ainsi :

$$[ue_{\ominus a}(.,t_0)]^{\Delta}(t) = \left[u^{\Delta}(t) - a(t)\, u(t)\right] e_{\ominus a}(\sigma(t),t_0), \tag{1.18}$$

intégrant (1.18) et on tenant compte du fait que $e_{\ominus a} > 0$, on obtient

$$\begin{aligned}
u(t)\, e_{\ominus a}(t,t_0) - u(t_0) &= \int_{t_0}^{t} \left[u^{\Delta}(s) - a(s)\, u(s)\right] e_{\ominus a}(\sigma(s),t_0)\, \Delta s \\
&\leq \int_{t_0}^{t} b(s)\, e_{\ominus a}(\sigma(s),t_0)\, \Delta s,
\end{aligned}$$

d'où

$$u(t)\,e_{\ominus a}(t,t_0) \leq \int_{t_0}^{t} b(s)\,e_{\ominus a}(\sigma(s),t_0)\,\Delta s + u(t_0), \tag{1.19}$$

multipliant l'inégalité (1.19) par $e_a(t,t_0)$, on trouve

$$u(t) \leq \int_{t_0}^{t} b(s)\,e_{\ominus a}(t_0,\sigma(s))\,e_a(t,t_0)\,\Delta s + u(t_0)\,e_a(t,t_0),$$

ainsi

$$u(t) \leq \int_{t_0}^{t} b(s)\,e_a(t,\sigma(s))\,\Delta s + u(t_0)\,e_a(t,t_0).$$

■

Chapitre 2

Quelques inégalités intégrales à deux variables indépendantes

Dans ce chapitre, nous exposons quelques inégalités intégrales à deux variables indépendantes aux échelles de temps. Nous signalons que ces inégalités intégrales sont traitées dans [12] dont tous les résultats obtenus sont basés sur le lemme 1.2. Dans ce mémoire, nous faisons appel au lemme 1.1 pour traiter les mêmes théorèmes et corollaires de [12] et obtenir des estimations optimales. Nous signalons que ce mémoire est basé sur les idées figurées dans les travaux [3, 4, 5, 6, 12].

Théorème 2.1 *Soient $u(t,s), a(t,s), b(t,s), g(t,s), h(t,s)$ des fonctions non négatives continues en tout point dense à droite de Ω, et $p > 1$ est une constante réelle. Alors l'inégalité suivante*

$$u^p(t,s) \leq a(t,s) + b(t,s)\int_{t_0}^{t}\int_{s_0}^{s}\left[g(\tau,\eta)\,u^p(\tau,\eta) + h(\tau,\eta)\,u(\tau,\eta)\right]\Delta\eta\Delta\tau,\ (t,s)\in\Omega \tag{2.1}$$

implique

$$u(t,s) \leq \frac{1}{P}K^{\frac{1-p}{p}}\left[a(t,s) + b(t,s)\,P(t,t_0)\,e_Q(t,t_0)\right] + \frac{p-1}{p}K^{\frac{1}{p}},\ (t,s)\in\Omega, \tag{2.2}$$

où

$$\begin{aligned} P(t,s) &= \int_{t_0}^{t}\int_{s_0}^{s} g(\tau,\eta)\,a(\tau,\eta) + h(\tau,\eta)\left[\tfrac{1}{p}K^{\frac{1-p}{p}}a(\tau,\eta) + \frac{p-1}{p}K^{\frac{1}{p}}\right]\Delta\eta\Delta\tau, (t,s)\in\Omega. \\ Q(t,s) &= \int_{s_0}^{s}\left[g(t,\eta) + \frac{1}{p}K^{\frac{1-p}{p}}h(t,\eta)\right]b(t,\eta)\,\Delta\eta, (t,s)\in\Omega. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Preuve. Définissant la fonction $z(t,s)$ comme suit

$$z(t,s) = \int_{t_0}^{t}\int_{s_0}^{s}\left[g(\tau,\eta)\,u^p(\tau,\eta) + h(\tau,\eta)\,u(\tau,\eta)\right]\Delta\eta\Delta\tau, \quad (t,s)\in\Omega, \tag{2.4}$$

il est clair que

$$z(t_0,s) = z(t,s_0) = 0. \tag{2.5}$$

Remplaçant (2.4) dans (2.1) on obtient

$$u^p(t,s) \le a(t,s) + b(t,s)\,z(t,s), (t,s)\in\Omega, \tag{2.6}$$

l'inégalité (2.6) entraine

$$u(t,s) \le \left[a(t,s) + b(t,s)\,z(t,s)\right]^{\frac{1}{p}}. \tag{2.7}$$

Appliquant le lemme 1.1 à (2.7) on obtient

$$u(t,s) \le \frac{1}{p}K^{\frac{1-p}{p}}\left[a(t,s) + b(t,s)\,z(t,s)\right] + \frac{p-1}{p}K^{\frac{1}{p}}. \tag{2.8}$$

Remplaçant (2.7) dans (2.4) on trouve

$$z(t,s) \leq \int_{t_0}^{t}\int_{s_0}^{s} \left\{ \begin{array}{c} g(\tau,\eta)\left[a(\tau,\eta)+b(\tau,\eta)\,z(\tau,\eta)\right]+ \\ h(\tau,\eta)\left[\frac{1}{p}K^{\frac{1-p}{p}}\left[a(\tau,\eta)+b(\tau,\eta)\,z(\tau,\eta)\right]+\frac{p-1}{p}K^{\frac{1}{p}}\right] \end{array} \right\} \Delta\eta\Delta\tau, \tag{2.9}$$

cette dernière inégalité peut se mettre sous la forme

$$z(t,s) \leq P(t,s)+\int_{t_0}^{t}\int_{s_0}^{s}\left[g(\tau,\eta)+\frac{1}{p}K^{\frac{1-p}{p}}h(\tau,\eta)\right]b(\tau,\eta)\,z(\tau,\eta)\,\Delta\eta\Delta\tau,\ (t,s)\in\Omega, \tag{2.10}$$

où $P(t,s)$ est définie par l'inégalité (2.3).

Il est facile de voir que $P(t,s)$ est positif, non nul, non décroissante et continue en tout point dense à droite de Ω.

Soit $\varepsilon > 0$ donné, de l'inégalité (2.10), on a

$$\frac{z(t,s)}{P(t,s)+\varepsilon} \leq 1+\int_{t_0}^{t}\int_{s_0}^{s}\left[g(\tau,\eta)+\frac{1}{p}k^{\frac{1-p}{p}}h(\tau,\eta)\right]b(\tau,\eta)\,\frac{z(\tau,\eta)}{P(\tau,\eta)+\varepsilon}\Delta\eta\Delta\tau,\ (t,s)\in\Omega. \tag{2.11}$$

Définissant la fonction $v(t,s)$ par

$$v(t,s) = 1+\int_{t_0}^{t}\int_{s_0}^{s}\left[g(\tau,\eta)+\frac{1}{p}k^{\frac{1-p}{p}}h(\tau,\eta)\right]b(\tau,\eta)\,\frac{z(\tau,\eta)}{P(\tau,\eta)+\varepsilon}\Delta\eta\Delta\tau,\ (t,s)\in\Omega, \tag{2.12}$$

on a alors

$$v(t_0,s) = v(t,s_0) = 1. \tag{2.13}$$

De (2.11) et (2.12), on déduit que

$$z(t,s) \leq (P(t,s)+\varepsilon)\,v(t,s),\ (t,s)\in\Omega, \tag{2.14}$$

la dérivation de (2.12) par rapport à t au sens de Hilger donne

$$v^{\Delta_t}(t,s) = \int_{s_0}^{s} \left[g(t,\eta) + \frac{1}{p} k^{\frac{1-p}{p}} h(t,\eta) \right] b(t,\eta) \frac{z(t,\eta)}{P(t,\eta)+\varepsilon} \Delta\eta, \tag{2.15}$$

l'identité (2.15) donne

$$v^{\Delta_t}(t,s) \leq \int_{s_0}^{s} \left[g(t,\eta) + \frac{1}{p} K^{\frac{1-p}{p}} h(t,\eta) \right] b(t,\eta) v(t,\eta) \Delta\eta. \tag{2.16}$$

Comme $v(t,s)$ est une fonction croissante, l'inégalité suivante se dérive

$$v^{\Delta_t}(t,s) \leq Q(t,s) v(t,s), \tag{2.17}$$

où $Q(t,s)$ est définie par (2.3).

Appliquant le lemme 1.3 à (2.16) et tenant compte de (2.13), on obtient

$$v(t,s) \leq e_Q(t_0,t), (t,s) \in \Omega, \tag{2.18}$$

combinant (2.14) et (2.18) on trouve

$$z(t,s) \leq (P(t,s)+\varepsilon) e_Q(t_0,t), (t,s) \in \Omega, \tag{2.19}$$

dans (2.19), faisant tendre ε vers 0, on obtient

$$z(t,s) \leq P(t,s) e_Q(t_0,t), (t,s) \in \Omega. \tag{2.20}$$

Enfin de (2.20) et (2.8), on aboutit au résultat souhaité. ■

Théorème 2.2 *Soient $u(t,s), a(t,s), b(t,s), g(t,s), h(t,s)$, des fonctions non négatives continues en tout point dense à droite de Ω, et $p > 1$ une constante réelle.*

Si $a(t,s)$ est croissante pour tout $(t,s)\in\Omega$, alors

$$u^{p}(t,s)\leq a^{p}(t,s)+b(t,s)\int_{t_0}^{t}\int_{s_0}^{s}\left[g(\tau,\eta)\,u^{p}(\tau,\eta)+h(\tau,\eta)\,u(\tau,\eta)\right]\Delta\eta\Delta\tau,\,(t,s)\in\Omega \tag{2.21}$$

implique

$$u(t,s)\leq a(t,s)\left\{\frac{1}{p}K^{\frac{1-p}{p}}\left[1+b(t,s)\,\widetilde{P}(t,s)\,e_m(t,t_0)\right]+\frac{p-1}{p}K^{\frac{1}{p}}\right\},(t,s)\in\Omega \tag{2.22}$$

où

$$\begin{aligned}\widetilde{P}(t,s) &= \int_{t_0}^{t}\int_{s_0}^{s}g(\tau,\eta)+h(\tau,\eta)\,a^{1-p}(\tau,\eta)\left[\frac{1}{p}K^{\frac{1-p}{p}}+\frac{p-1}{p}K^{\frac{1}{p}}\right]\Delta\eta\Delta\tau,\,(t,s)\in\Omega.\\ \widetilde{Q}(t,s) &= \int_{s_0}^{s}\left[g(t,\eta)+\frac{1}{p}K^{\frac{1-p}{p}}h(t,\eta)\,a^{1-p}(\tau,\eta)\right]b(t,\eta)\,\Delta\eta,\,(t,s)\in\Omega.\end{aligned} \tag{2.23}$$

Preuve. Comme $a(t,s)$ est croissante et strictement positive, (2.21) implique

$$\left(\frac{u(t,s)}{a(t,s)}\right)^{p}\leq 1+b(t,s)\int_{t_0}^{t}\int_{s_0}^{s}\left[g(\tau,\eta)\left(\frac{u(\tau,\eta)}{a(\tau,\eta)}\right)^{p}+h(\tau,\eta)\,a^{1-p}(\tau,\eta)\left(\frac{u(\tau,\eta)}{a(\tau,\eta)}\right)\right]\Delta\eta\Delta\tau. \tag{2.24}$$

Définissant la fonction $w(t,s)$ comme suit

$$w(t,s)=\frac{u(t,s)}{a(t,s)}, \tag{2.25}$$

l'inégalité (2.24) devient

$$w^{p}(t,s)\leq 1+b(t,s)\int_{t_0}^{t}\int_{s_0}^{s}\left[g(\tau,\eta)\,w^{p}(\tau,\eta)+h(\tau,\eta)\,a^{1-p}(\tau,\eta)\,w(\tau,\eta)\right]\Delta\eta\Delta\tau,\,(t,s)\in\Omega, \tag{2.26}$$

dans (2.26), posons $H(t,s)=h(t,s)\,a^{1-p}(t,s)$ on obtient

$$w^{p}(t,s)\leq 1+b(t,s)\int_{t_0}^{t}\int_{s_0}^{s}\left[g(\tau,\eta)\,w^{p}(\tau,\eta)+H(\tau,\eta)w(\tau,\eta)\right]\Delta\eta\Delta\tau,\,(t,s)\in\Omega. \tag{2.27}$$

L'inégalité (2.27) est similaire à (2.1), d'après le théorème 2.1, on trouve

$$w(t,s) \leq \frac{1}{p} K^{\frac{1-p}{p}} \left[1 + b(t,s) \widetilde{P}(t,s) e_{\widetilde{Q}}(t,t_0) \right] + \frac{p-1}{p} K^{\frac{1}{p}}, (t,s) \in \Omega, \tag{2.28}$$

où $\widetilde{P}(t,s), \widetilde{Q}(t,s)$ sont définies par (2.23).

A présent on applique directement le théorème 2.1 pour $a(t,s) = 1$, on obtient l'inégalité (2.22). ∎

Deux autres résultats très importants sont présentés dans les deux théorèmes suivants :

Théorème 2.3 *Soient $u(t,s), a(t,s), b(t,s)$ des fonctions continues en tout point dense à droite de Ω, et $p > 1$ est une constante réelle.*

Si $f : \Omega \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est une fonction continue en tout point dense à droite de Ω et continue sur $\mathbb{R}_+$, vérifie

$$0 \leq f(t,s,x) - f(t,s,y) \leq \Phi(t,s,y)(x-y), \tag{2.29}$$

pour $(t,s) \in \Omega, x \geq y \geq 0,$ où $\Phi : \Omega \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est une fonction continue en tout point dense à droite de Ω et continue sur $\mathbb{R}^+$. Si l'inégalité

$$u^p(t,s) \leq a(t,s) + b(t,s) \int_{t_0}^{t} \int_{s_0}^{s} f(\tau,\eta,u(\tau,\eta)) \Delta\eta \Delta\tau, (t,s) \in \Omega, \tag{2.30}$$

est satisfaite, alors

$$u(t,s) \leq \frac{1}{p} K^{\frac{1-p}{p}} a(t,s) + \frac{p-1}{p} K^{\frac{1}{p}} + b(t,s) \widetilde{m}(t,s) e_{\widetilde{w}}(t,t_0), (t,s) \in \Omega, \tag{2.31}$$

où

$$\widetilde{m}(t,s) = \int_{t_0}^{t} \int_{s_0}^{s} f\left(\tau,\eta, \frac{1}{p} K^{\frac{1-p}{p}} a(t,s) + \frac{p-1}{p} K^{\frac{1}{p}}\right) \Delta\eta \Delta\tau, (t,s) \in \Omega. \tag{2.32}$$

$$\widetilde{w}(t,s) = \int_{s_0}^{s} \frac{1}{p} K^{\frac{1-p}{p}} b(t,\eta) \Phi\left(t,\eta, \frac{1}{p} k^{\frac{1-p}{p}} a(\tau,\eta) + \frac{p-1}{p} K^{\frac{1}{p}}\right) \Delta\eta, (t,s) \in \Omega.$$

Preuve. On pose

$$z(t,s)=\int_{t_0}^{t}\int_{s_0}^{s} f(\tau,\eta,u(\tau,\eta))\,\Delta\eta\Delta\tau,\ (t,s)\in\Omega, \tag{2.33}$$

on a donc

$$z(t,s_0)=z(t_0,s)=0. \tag{2.34}$$

Remplaçant (2.33) dans (2.30), on obtient

$$u^p(t,s)\leq a(t,s)+b(t,s)\,z(t,s)\,,(t,s)\in\Omega \tag{2.35}$$

(2.35) est similaire à (2.6) , il est clair que (2.7) et (2.8) sont satisfaites.

Combinant (2.8) et (2.33) on trouve

$$z(t,s)\leq\int_{t_0}^{t}\int_{s_0}^{s} f\left\{\tau,\eta,\frac{1}{p}K^{\frac{1-p}{p}}a(t,s)+\frac{1}{p}K^{\frac{1-p}{p}}b(\tau,\eta)\,z(\tau,\eta)+\tfrac{p-1}{p}K^{\frac{1}{p}}\right\}\Delta\eta\Delta\tau,\ (t,s)\in\Omega, \tag{2.36}$$

on peut écrire l'inégalité (2.37) sous la forme

$$z(t,s)\leq\int_{t_0}^{t}\int_{s_0}^{s}\left[\begin{array}{c} f\left(\tau,\eta,\frac{1}{p}K^{\frac{1-p}{p}}a(\tau,\eta)+\frac{1}{p}K^{\frac{1-p}{p}}b(\tau,\eta)\,z(\tau,\eta)+\frac{p-1}{p}K^{\frac{1}{p}}\right)\\ +f\left(\tau,\eta,\frac{1}{p}K^{\frac{1-p}{p}}a(\tau,\eta)+\frac{p-1}{p}K^{\frac{1}{p}}\right)-f\left(\tau,\eta,\frac{1}{p}K^{\frac{1-p}{p}}a(\tau,\eta)+\frac{p-1}{p}K^{\frac{1}{p}}\right)\end{array}\right]\Delta\eta\Delta\tau. \tag{2.37}$$

En utilisant l'inégalité (2.29), on obtient

$$z(t,s)\leq\widetilde{m}(t,s)+\int_{t_0}^{t}\int_{s_0}^{s}\Phi\left(\tau,\eta,\frac{1}{p}k^{\frac{1-p}{p}}a(\tau,\eta)+\tfrac{p-1}{p}K^{\frac{1}{p}}\right)\frac{1}{p}K^{\frac{1-p}{p}}b(\tau,\eta)\,z(\tau,\eta)\,\Delta\eta\Delta\tau,\ (t,s)\in\Omega \tag{2.38}$$

où $\widetilde{m}(t,s)$ est définie dans (2.32) .

L'inégalité précédente est similaire à (2.10). En suivant les mêmes étapes que celles du théorème 2.1, on obtient le résultat désiré. ■

Théorème 2.4 *Soient $u(t,s), a(t,s), b(t,s)$ des fonctions continues en tout point dense à droite de Ω ,et $p > 1$ est une constante réelle.*

Si $f : \Omega \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est une fonction continue en tout point dense à droite de Ω et continue sur $\mathbb{R}_+$ et $\Psi \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$,telle que :

$$0 \leq f(t,s,x) - f(t,s,y) \leq \Phi(t,s,y)\Psi^{-1}(x-y), \tag{2.39}$$

pour $(t,s) \in \Omega, x \geq y \geq 0$,où : $\Phi : \Omega \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue en tout point dense à droite de Ω et continue sur $\mathbb{R}_+$, Ψ est une fonction bijective d'inverse Ψ^{-1}vérifie

$$\Psi^{-1}(xy) \leq \Psi^{-1}(x)\Psi^{-1}(y), x, y \in \mathbb{R}^+. \tag{2.40}$$

Si l'inégalité

$$u^p(t,s) \leq a(t,s) + b(t,s)\Psi\left(\int_{t_0}^{t}\int_{s_0}^{s} f(\tau,\eta,u(\tau,\eta))\Delta\eta\Delta\tau\right), (t,s) \in \Omega, \tag{2.41}$$

est satisfaite, alors

$$u(t,s) \leq \left\{\frac{1}{p}K^{\frac{1-p}{p}}a(t,s) + \frac{p-1}{p}K^{\frac{1}{p}} + b(t,s)\widetilde{m}(t,s)\Psi\left(e_{\widetilde{w}}(t,t_0)\right)\right\}, (t,s) \in \Omega \tag{2.42}$$

où $\widetilde{m}(t,s)$ est définie par (2.32) et

$$\widetilde{w}(t,s) = \int_{s_0}^{s} \widetilde{\Phi}(t,\eta) \quad \Delta\eta, \tag{2.43}$$

où

$$\widetilde{\Phi}(t,s) = \Phi\left(t,s,\frac{1}{p}K^{\frac{1-p}{p}}a(t,s) + \frac{p-1}{p}K^{\frac{1}{p}}\right)\Psi^{-1}\left(\frac{1}{p}K^{\frac{1-p}{p}}b(t,s)\right). \tag{2.44}$$

Preuve. Définissant la fonction $z(t,s)$ comme dans (2.33). On a alors

$$u^p(t,s) \leq a(t,s) + b(t,s)\,\Psi(z(t,s)),\,(t,s) \in \Omega, \tag{2.45}$$

et

$$u(t,s) \leq \left\{\frac{1}{p}K^{\frac{1-p}{p}}\left[a(t,s) + b(t,s)\,\Psi(z(t,s))\right] + \frac{p-1}{p}K^{\frac{1}{p}}\right\},\,(t,s) \in \Omega, \tag{2.46}$$

en utilisant les propriétés de f et Ψ données par (2.39) et (2.40), on obtient

$$z(t,s) \leq \widetilde{m}(t,s) + \int_{t_0}^{t}\int_{s_0}^{s}\Phi\left(\tau,\eta,\frac{1}{p}K^{\frac{1-p}{p}}a(\tau,\eta) + \frac{p-1}{p}K^{\frac{1}{p}}\right)\Psi^{-1}\left(\frac{1}{p}K^{\frac{1-p}{p}}b(\tau,\eta)\right)\,z(\tau,\eta)\,\Delta\eta\Delta\tau, \tag{2.47}$$

où $\widetilde{m}(t,s)$ est définie par (2.32).

Cette dernière inégalité, implique

$$z(t,s) \leq \widetilde{m}(t,s) + \int_{t_0}^{t}\int_{s_0}^{s}\Phi\left(\tau,\eta,\frac{1}{p}K^{\frac{1-p}{p}}a(\tau,\eta) + \frac{p-1}{p}K^{\frac{1}{p}}\right)\Psi^{-1}\left(\frac{1}{p}K^{\frac{1-p}{p}}b(\tau,\eta)\right)\,z(\tau,\eta)\,\Delta\eta\Delta\tau. \tag{2.48}$$

En suivant les mêmes étapes que celles du théorème 2.3, on obtient le résultat souhaité. ■

2.1 Application

Dans la section suivante, nous présentons quelques applications liées aux théorèmes 2.1 et 2.2 où on va etablir l'estimation des solutions des équations dynamiques partielles aux échelles de temps.

Exemple 2.1 *Considérons l'équation dynamique partielle suivante*

$$(u^p(t,s))^{\Delta_t\Delta_s} = F(t,s,u(t,s)) + r(t,s),\,(t,s) \in \Omega = \mathbb{T}_1 \times \mathbb{T}_2, \tag{2.49}$$

définit sur une échelle de temps dont les conditions aux limites initiales

$$u(t,s_0)=\alpha(t)\,,u(t_0,s)=\beta(s)\,,u(t_0,s_0)=\gamma, \tag{2.50}$$

où $p>1$ est une constante réelle, $F:\mathbb{T}_1\times\mathbb{T}_2\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est une fonction continue en tout point dense à droite de Ω et continue sur $\mathbb{R}$, $r:\mathbb{T}_1\times\mathbb{T}_2\to\mathbb{R}$ est une fonction continue en tout point dense à droite de Ω, $\alpha:\mathbb{T}_1\to\mathbb{R}$ et $\beta:\mathbb{T}_2\to\mathbb{R}$ sont deux fonctions continues en tout point dense à droite respectivement de $\mathbb{T}_1$ et $\mathbb{T}_2$ et $\gamma\in\mathbb{R}$ est une constante.

Supposons que

$$|F(t,s,v)|\leq g(t,s)\,|v|^p+h(t,s)\,|v|, \tag{2.51}$$

où $g(t,s)$ et $h(t,s)$ sont deux fonctions non négatives, continues en tout point dense à droite de Ω,

Proposition 2.1 *La solution du problème au limite $(2.49)-(2.50)$ vérifie l'inégalité suivante :*

$$u(t,s)\leq\{a_0(t,s)+M(t,s)\,e_Y(t,t_0)\}^{\frac{1}{p}}, \tag{2.52}$$

où

$$\begin{aligned}
a_0(t,s) &= |\alpha^p(t)+\beta^p(s)-\gamma^p|+\int_{t_0}^{t}\int_{s_0}^{s}|r(\tau,\eta)|\,\Delta\eta\Delta\tau,(t,s)\in\Omega \qquad (2.53)\\
M(t,s) &= \int_{t_0}^{t}\int_{s_0}^{s}\left[g(\tau,\eta)\frac{1}{p}k^{\frac{1-p}{p}}h(\tau,\eta)\right]\Delta\eta\Delta\tau,(t,s)\in\Omega\\
Y(t,s) &= \int_{s_0}^{s}Q(t,\eta)\,\Delta\eta,(t,s)\in\Omega\\
Q(t,s) &= \int_{s_0}^{s}\left[g(t,\eta)+\frac{1}{p}K^{\frac{1-p}{p}}h(t,\eta)\right]\Delta\eta,(t,s)\in\Omega.
\end{aligned}$$

Preuve. La solution $u(t,s)$ de (2.49), (2.50) est donnée par

$$u^p(t,s) = \alpha^p(t)+\beta^p(s)-\gamma^p+\int_{t_0}^{t}\int_{s_0}^{s} F(\tau,\eta,u(\tau,\eta))\,\Delta\eta\Delta\tau+\int_{t_0}^{t}\int_{s_0}^{s} r(\tau,\eta)\,\Delta\eta\Delta\tau,\ (t,s)\in\Omega. \tag{2.54}$$

Par conséquent,

$$|u(t,s)|^p \leq |\alpha^p(t)+\beta^p(s)-\gamma^p| + \int_{t_0}^{t}\int_{s_0}^{s} |r(\tau,\eta)|\,\Delta\eta\Delta\tau + \int_{t_0}^{t}\int_{s_0}^{s} |F(\tau,\eta,u(\tau,\eta))|, \tag{2.55}$$

posons

$$a_0(t,s) = |\alpha^p(t)+\beta^p(s)-\gamma^p| + \int_{t_0}^{t}\int_{s_0}^{s} |r(\tau,\eta)|\,\Delta\eta\Delta\tau, \tag{2.56}$$

remplaçant (2.51) dans l'inégalité (2.55) , on aboutit à l'inégalité suivante

$$|u(t,s)|^p \leq a_0(t,s) + \int_{t_0}^{t}\int_{s_0}^{s} g(t,s)\,|u(\tau,\eta)|^p + h(t,s)\,|u(\tau,\eta)|\Delta\eta\Delta\tau,\ (t,s)\in\Omega. \tag{2.57}$$

En faisant appel au théorème 2.1, on obtient une estimation pour la solution $u(t)$ du problème au limite (2.49)- (2.50). ■

Exemple 2.2 *Considérons l'équation dynamique suivante*

$$u^p(t,s) = C + \int_{t_0}^{t}\int_{s_0}^{s} H(\tau,\eta,u(\tau,\eta))\,\Delta\eta\Delta\tau,\ (t,s)\in\Omega \tag{2.58}$$

où $C>0$, $p>1$ sont des constantes, $H:\mathbb{T}_1\times\mathbb{T}_2\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est une fonction continue en tout point dense à droite de Ω et continue sur $\mathbb{R}$.

Supposons que

$$|H(t,s,v)| \leq h(t,s)\,|v|\,,\ (t,s)\in\Omega \tag{2.59}$$

où $h(t,s)$ est une fonction continue en tout point dense à droite de Ω, et non négatives.

Proposition 2.2 *Si $u(t,s)$ est une solution de (2.58), alors, on a*

$$|u(t,s)| \le C^{\frac{1}{p}} \left\{ \frac{1}{p} K^{\frac{1-p}{p}} \left[1 + \widetilde{P}(t,s)\, e_{\widetilde{Q}}(t,t_0) \right] + \frac{p-1}{p} K^{\frac{1}{p}} \right\} (t,s) \in \Omega, \tag{2.60}$$

où

$$\begin{aligned} \widetilde{P}(t,s) &= C_1 \int_{t_0}^{t} \int_{s_0}^{s} h(\tau,\eta)\, \Delta\eta \Delta\tau, (t,s) \in \Omega. \\ \widetilde{Q}(t,s) &= C_2 \int_{s_0}^{s} h(t,\eta)\, \Delta\eta, (t,s) \in \Omega. \end{aligned} \tag{2.61}$$

Où

$$\begin{aligned} C_1 &= C^{\frac{1-p}{p}} \left(\frac{1}{p} K^{\frac{1-p}{p}} + \frac{p-1}{p} K^{\frac{1}{p}}\right), \\ C_2 &= \frac{1}{p} K^{\frac{1-p}{p}} C^{\frac{1-p}{p}}. \end{aligned}$$

Preuve. La solution de (2.58), vérifie l'inégalité suivante

$$|u(t,s)|^p \le C + \int_{t_0}^{t} \int_{s_0}^{s} H(\tau,\eta,u(\tau,\eta))\, \Delta\eta \Delta\tau, (t,s) \in \Omega. \tag{2.62}$$

Il résulte de (2.59) et (2.62) que

$$|u(t,s)|^p \le C + \int_{t_0}^{t} \int_{s_0}^{s} h(\tau,\eta)\, |u(\tau,\eta)|\, \Delta\eta \Delta\tau, (t,s) \in \Omega. \tag{2.63}$$

En faisant appel au théorème 2.2($a^p(t,s) = C, b(t,s) = 1, g(t,s) = 0$), on obtient l'inégalité souhaitée. ■

Conclusion 2.1 *Les inégalités traitées dans ce mémoire, nous permet d'étudier certaines classes d'équation différentielle non linéaire dont la solution ne peut être trouvé explicitement. Ces inégalités intégrales non linéaires à deux variables indépendantes, nous permettent d'établir les propriétés qualitatives les plus importantes des solutions des équations dynamiques partielles telle que l'estimation.*

Bibliographie

[1] Bohner,M., and &Peterson, A.,Dynamic Equations on Time Scales : An Introduction with Applications,Birkhäuser, Boston, Mass, USA, 2001.

[2] Bohner,M., and &Peterson, A. Eds., Advances in Dynamic Equations on Time Scales,Birkhäuser, Boston,Mass, USA, 2003.

[3] Boukerrioua, K., & Guezane-Lakoud, A. (2008). Some nonlinear integral inequalities arising in differential equations. Electronic Journal of Differential Equations, 2008.

[4] Boukerrioua, K. (2011). Note on Some Nonlinear Integral Inequalities and Applications to Differential Equations. International Journal of Differential Equations, 2011.

[5] Boukerrioua, K. (2012). Note on some nonlinear integral inequalities in two independent variables on time scales and applications. Int. J. Open Problems Comput. Math, 5(3).

[6] Boukerrioua, K. (2013). Note on some nonlinear integral inequalities on time scales and applications to dynamic equations. Journal of Advanced Research in Applied Mathematics, 5(2).

[7] Hugues Gilbert, Thèse de doctorat,Théorèmes d'existence pour des systèmes d'équations différentielles et d'équations aux échelles de temps,2009.

[8] Hilger,S.,Ein Ma β kettenkalk¨ ul mit Anwendung auf Zentrumsmannigfaltigkeiten, PhD thesis, Universität. Würzburg (1988).

[9] Hilger,S., Analysis on measure chains–a unified approach to continuous and discrete calculus,Results Math., 18 (1990), 18–56.

[10] Li W.N.,M.A .Han,F. W. Meng,some new delay integral inequalities and their applications.J. Comput. Appl. Math.180(2005)191-200.

[11] Pachpatte,B.G., Inequalities for Differential and integral equation, Academic Press, New York, 1998.

[12] Wei Nian Li,Nonlinear Integral Inequalities in Two Independent Variables on Time Scales,Advances in Difference Equations,Volume 2011, Article ID 283926, 11 pages.