République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de
la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et d'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Master Académique en Mathématiques
Option : Equations aux Dérivées Partielles

Par :
DERABLA Zeyneb

Intitulé

Equation de la chaleur sur R^n et sur des domaines bornés

Dirigé par :

Dr. BADRAOUI Salah

Devant les membres du jury :

Président :	S. BADRAOUI	Univ-Guelma
Examinateur :	K.BOUKERIOUA	Univ-Guelma
Examinateur :	K .FERNANE	Univ-Guelma

Session Juin 2013

Remerciement

Avant toute chose, je tiens à remercier **ALLAH** le tout puissant, pour m'avoir donnée la force et la patience.

Je remercie **Pr. BADRAOUI Salah** , qu'il trouve ici l'expression de mon profonde reconnaissances pour m'avoir accordé son confiance et guide dans mon travail, ses compétences, ses précieux conseils et sa disponibilité.

Je remercie également monsieur **Dr K.Boukerioua** et monsieur **Dr.K.Ferenane** qui ont acceptè d'évaluer et juger mon travail malgré leurs nombreux autres obligatoires.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

L'équation de la chaleur linéaire est constitue le modèle type de la classe des équations aux dérivées partielles paraboliques qui décrivent,en général, un phénomène de diffusion.Son analyse mathématique et la compréhension des propriétés qualitatives de ses solutions ont conduit à développer des outils dont l'extension permet de mieux aborder les modèles non linéaires plus complexes à appréhender.Cette équation s'écrit

$$\frac{\partial u\left(x,t\right)}{\partial t} = a\Delta u\left(x,t\right) + f\left(x,t\right) \tag{1}$$

où $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \partial x_i^2$ est l'opérateur laplacien, et le couple (x,t) est dans $\Omega \times [0,\infty[$, où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. La fonction f est une donnée du problème. Cette équation est de plus assortie d'une condition initiale
$u\left(x,0\right) = u_0\left(x\right)$ pour $x \in \Omega$, où $u_0\left(x\right)$ est une fonction donnée.
Une des interprétations possibles de l'équation (1) est la modélisation d'un flux de chaleur dans un corps. Voici l'interprétation de chaque terme de l'équation :
-le terme $\partial_t u$ permet de dècrire l'évolution de la distribution de chaleur au cours du termps. Notamment,on s'attend à pouvoire définir la valeur d'une solution a un temps $t > 0$ quelconque en connaissant la distribution à l'instant 0 .
-le terme Δu correspond à une variation de u par rapport à sa moyenne locale. Un point x où $\Delta u\left(x\right) > 0$ est un point plus froid que son entourage direct (et dont la température va augmenter),et inversement. Ce terme correspond donc à un phénomènes de moyenne, et va avoire tendance à rendre régulières les solutions de l'équation .
-le terme u_0 correspond à la distribution de chaleur à l'instant initial.

1.1 Notations

Toutes les notations particulières à cet mémoire sont définies dans le texte lors de leur emploi, et ont généralement une valeur locale, limitée au paragraphe où elles sont employées. Les quelques notations ayant une valeur globale.

$\mathbb{R}$ Le corps des nombres réels.
$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
$\mathbb{R}_+ = [0, \infty[$. $\mathbb{R}_+^* =]0, \infty[$.
$\Omega =$ est un ouvert dans $\mathbb{R}^n$
$\Gamma =$ Fr Ω =la frontière de Ω.
$x.\xi = \sum_{k=1}^{n} x_k \xi_k$ pour $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$
$|x|^2 = \|x\|^2 = \sum_{j=1}^{n} x_j^2$.
$\Delta u(x, t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_j^2}$
$\mathbb{R}_+^{n+1} = \mathbb{R}^n \times [0, \infty[$
$C_b(\mathbb{R}_+^{n+1})$: l'epace des fonctions continues et bornées sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^*$
$D_{ii} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, $D_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $\nabla : \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \ldots\ldots\ldots \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$

2.1 Transformation de fourier dans L^1

La transformation de fourier est constamment utilisée dans tout les domaines de la physique.Elle est étroitement liée au groupe des translations dans $\mathbb{R}$ (et plus généralement dans $\mathbb{R}^n$).

Définition 2.1.1. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ appartenant à $L^1(\mathbb{R}^n)$. On appelle transformée de fourier de f la fonction $\xi \to \widehat{f}(\xi)$, notée $\widehat{f}$ ou $F(f)$
définie par

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix.\xi} f(x)\, dx \, .$$

l'hypothèse $f \in L^1$ entraine que l'intégrale qui définit $\widehat{f}(\xi)$ a un sens pour toute valeur réelle $\xi \in \mathbb{R}^n$. $\widehat{f}$ est donc une fonction continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.

Proposition 2.1.1. Si $f(x) = f_1(x_1) . f_2(x_2) .... f_n(x_n)$ avec $f_j \in L^1(\mathbb{R})$
pour tout $j = 1, ..., n$, alors $\widehat{f}(\xi) = \widehat{f_1}(\xi_1) . \widehat{f_2}(\xi_2) .... \widehat{f_n}(\xi_n)$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\Sigma_{j=1}^n x_j.\xi_j} \left(\Pi_{j=1}^n f_j(x_j)\right) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} [e^{-ix_1\xi_1} f_1(x_1) .... e^{-ix_n\xi_n} f_n(x_n)] dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix_1\xi_1} f_1(x_1)\, dx_1 \int_{\mathbb{R}^n} ... \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix_n\xi_n} f_n(x_n)\, dx_n \\
&= \widehat{f_1}(\xi_1) ... \widehat{f_n}(\xi_n)
\end{aligned}$$

2.1.1 Transformées des fonctions gaussiennes

Nous présentont ci-dessous,sous forme d'un suite pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $a > 0$ est une constante.

$$F\left(e^{-ax^2}\right) = \sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^n} e^{-\frac{\xi^2}{4a}} \tag{2.1.1}$$

Démonstration. Soit $f(x) = e^{-ax^2}, a > 0$

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x}e^{-ax^2}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(ax^2+i\xi x\right)}dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a[x^2+\frac{i\xi}{a}-\frac{\xi^2}{4a}]}e^{-\frac{\xi^2}{4a}}dx \\ &= e^{-\frac{\xi^2}{4a}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\left[x+\frac{i\xi}{2a}\right]^2}dx\end{aligned}$$

Soit à calculer

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\left(x+i\frac{\xi}{2a}\right)^2}dx$$

Introduisons la variable complexe $z = x + i\frac{\xi}{2a}$. On pose $\lambda = \frac{\xi}{2a}$ telle que (ξ fixé)
La fonction e^{-az^2} est holomorphe entiére,ce qui nous permettre de changer le chemin d'integration
$g(z) = e^{-az^2}(z = x + iy)$

$$\begin{aligned}\int_{-\delta+i\lambda}^{+\delta+i\lambda} g(z)\,dz &= \int_{-\delta+i\lambda}^{-\delta} g(z)\,dz + \int_{-\delta}^{\delta} g(z)\,dz + \int_{\delta}^{\delta+i\lambda} g(z)\,dz \\ &= I_1 + I_2 + I_3 \qquad \text{(a)}\end{aligned}$$

$\lim_{\delta\to\infty} I_1 = 0$ en effet

$$\begin{aligned}\left|\int_{-\delta}^{-\delta+i\lambda} e^{-az^2}dz\right| &= \left|\int_0^{\lambda} e^{-a(-\delta+i(\lambda-t))^2}(-idt)\right| \\ &= \left|\int_0^{\lambda} e^{-a\left[\delta^2-(\lambda-t)^2\right]-2\delta i(\lambda-t)}dt\right| \\ &\leq |\lambda| \max_{0\leq t\leq|\lambda|}\left\{e^{-a\left[\delta^2-(\lambda-t)^2\right]}\left|e^{-2\delta i(\lambda-t)}\right|\right\} \\ &= |\lambda|\, e^{-a\left[\delta^2-\lambda^2\right]} \to 0_{\lambda\to\infty}\end{aligned}$$

De la méme façon

$$\lim_{\delta\to\infty} I_3 = 0.$$

passons à la limite lorsque $\delta \to 0$ dans (a)

$$\lim_{\delta\to\infty}\int_{-\delta+i\lambda}^{\delta+i\lambda} g(z)\,dz = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

càd

$$I=\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

Par conséquent $\widehat{f}(\xi)=\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\xi^2}{4a}}.$
c'est -à-dire

$$F\left(e^{-ax^2}\right)=\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$$

Corollaire 2.1.1. Soit $f(x)=e^{-a|x|^2}$, alors

$$\begin{aligned}
F\left(e^{-a|x|^2}\right) &= F\left(e^{-ax_1^2}\right)\ldots\ldots\ldots F\left(e^{-ax_n^2}\right)\\
&= F\left(e^{-ax_1^2}\ldots\ldots\ldots e^{-ax_n^2}\right)=\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-a\frac{\xi_1^2}{4a}}\ldots\ldots\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-a\frac{\xi_n^2}{4a}}\\
&= \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{n}{2}}e^{-\frac{|\xi|^2}{4a}}
\end{aligned}$$

Corollaire 2.1.2. Si f et g sont deux fonctions appartenant à $L^1(\mathbb{R}^n)$ et si leurs transformée de fourier $\widehat{f}$ et $\widehat{g}$ sont égales, alors f et g sont égales presque partout.

2.1.2 Transformée de fourier inverse

Soit $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$ telle que $\widehat{f}\in L^1(\mathbb{R}^n)$ .On a alors

$$f=(2\pi)^{-n}\overline{F}\left(\widehat{f}\right)$$

où $\overline{F}(f)(x)=\int_{\mathbb{R}^n}e^{ix.\xi}d\xi$
On note alors

$$\begin{aligned}
F^{-1}(f)(x) &= (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}e^{ix\xi}d\xi\\
&= (2\pi)^{-n}\overline{F}\left(\widehat{f}\right)
\end{aligned}$$

Propriétés 2.1.2.

(P1) F est une application linéaire.

(P2) $F\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = i\xi_j \widehat{f}(\xi)$ $\left(\text{si } f, \frac{\partial f}{\partial x_j} \in L^1\right)$

(P3) Si $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$,alors $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\, g(y)\, dy$ est dans $L^1(\mathbb{R}^n)$,de plus le produit de convolution

$$F(f * g) = F(f) . F(g) \Longrightarrow f * g = F^{-1}\left(\widehat{f}.\widehat{g}\right)$$

la transformation de fourier convertit un produit de convolution en produit simple.

(P3) Si la fonction $x \longrightarrow x^k f(x)$ appartient à L^1,$\widehat{f}$ est de classe C^k et on a

$$\widehat{f}^{(k)}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} (2\pi i x)^k f(x)\, e^{2\pi i \xi . x} dx$$

avec la majoration

$$\left|\widehat{f}^{(k)}(\xi)\right| \leqslant \left\|(2\pi x)^k f(x)\right\|_1$$

(P4) Si la fonction $x \longrightarrow f(x)$ est de classe C^k et si toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre k appartiennent à L^1,on a :

$$\widehat{f^{(k)}}(\xi) = (i\xi)^k \widehat{f}(x)$$

Chapitre 3

Modélisation du transfert de la chaleur dans une tige

3.1 Introduction

le transfert de chaleur, l'ecoulement d'un fluide en milieu poreux ou encore la diffusion moléculaire dans un solide sont tous gouvernés par la même équation aux dérivées partielles.
Examinons une portion cylindrique d'une tige isolée thermiquement.Nous allons voir comment la température de cylindre ci-dessous varie quand il reçoit(ou perd) de la chaleur provenant du reste de la tige.

3.2 Modélisation

On suppose que la tige est composée d'un matérieau homogène .La tige est placée le long de l'axe des x et on va mesurer toutes les quantités (i.e. flux , température,...) en chaque point $x \in \mathbb{R}$,comme une valeur moyenne le long d'une couche qui est transversale à l'axe des x .L'isolant entoure la tige sauf aux extrémités en $x = 0$ et $x = 1$ où des conditions frontières seront imposées.
Le transfert de chaleur dans un matériau homogène est semblable à la diffusion des atomes dans un gaz.
Pour simplifier ,nous examinerons une situation unidimensionnelle où l'on considère des quantités uniquement dans les directions parallèles à x.Soit un tube métallique et $q_1$et q_2 sont les flux de chaleur (quantité de chaleur par unité de temps qui traverse la surface dans la direction x) :
Loi de Fourier :
Flux de chaleur : énergie par unité de temps traversant une surface unitaire

$$\begin{aligned} \left|\overrightarrow{J}\right| &= \frac{\Delta Q}{\Delta T}\left[w/m^2\right] \\ \overrightarrow{J} &= -k\overrightarrow{\nabla}T \end{aligned}$$

Loi de fourier.

Le flux de chaleur satisfait la loi de fourier

$$q = -k\frac{\partial T}{\partial x}$$

où k est la conductivité thermique et T la température.Cette loi met en exergue que la conduction thermique spontané d'une région de température élevée vers une région de température plus basse.Ainsi le flux de chaleur est proportionnel à la dérivée de la température par rapport à sa position suivant l'axe x.
D'après la première loi de la thermodynamique, la quantitè de chaleur ΔQ qui est emmagasinée dans un matériau de densité ρ ,de longueur Δx ,durant une augmentation de température ΔT est :

$$\Delta Q = \varsigma_v \rho \Delta x \Delta T \tag{1}$$

La quantitè de chaleur qui entre dans le cylindre pendant un intervalle de temps Δt est donc :

$$\begin{aligned} \Delta Q &= -\left(q_2 - q_1\right)\Delta t && \text{Définition de flux} \\ &\simeq -\left(\Delta x\frac{\partial q}{\partial x}\right)\Delta T && \text{Théoréme de la moyenne} \\ &= -\Delta x\frac{\partial}{\partial x}\left(-k\frac{\partial T}{\partial x}\right)\Delta t && \text{Loi de fourier} \\ &= \Delta x\Delta t.k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \end{aligned}$$

l'équation (1) implique

$$\varsigma_v \rho \Delta x \Delta T = \Delta x \Delta t.k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

si on divise par Δx Δt et que $\Delta t \to 0$, alors on obtient

$$\varsigma_v \rho \frac{\partial T}{\partial t} = k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

l'équation de la chaleur normalisée est :

$$\frac{\partial T}{\partial t} - D\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

où $D = \frac{k}{\varsigma_v \rho}$ est une constante qu'on appelle la diffusivité thermique.
Elle est mathématiquement identique à l'équation de diffusion.

3.3 Conclusion

Nous avons vu que le phénomène de transfert de chaleur dans une tige satisfait l'équation de la chaleur.
Aprés résolution, cette équation permet donc de mieux comprendre le concept de diffusion de chaleur dans les matériaux.

Chapitre 4

Résolution de l'équation de la chaleur sur $\mathbb{R}^n$

4.1 Solution plausible

Une solution classique du problème de la chaleur est fonction de classe C^∞ en espace ,C^1 en temps et vérifie les équations ponctuellement. En réalité, les situations les plus fréquentes correspondent à des conditions initiales peu réguliéres ;d'où le besoin d'introduire une notion plus large que celle des solutions classiques.

4.1.1 Equation homogène(proplème de cauchy)

A'résoudre le système suivante

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = a\Delta u(x,t) & x \in \mathbb{R}^n \ , \ t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{4.1.1}$$

où $a > 0$ est une constante et $\Delta u(x,t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2}$.

Théorème 4.1.1. Soit $u_0 \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$

la solution de (4.1.1) est :

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(4\pi at)^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{-|x-\xi|^2}{4at}} u_0(\xi)\, d\xi, \ \ x, \xi \in \mathbb{R}^n, \ t > 0.$$

Alors $u \in C(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^*)$.

Démonstration.
Nous résolvons (4.1.1) pour $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$, avec la condition initiale $u(x,0) = u_0(x)$; nous procéderons d'abord formellement en utilisant les transformées de fourier de fonction donnée u_0 et de la fonction inconnue $x \to u(x,t)$, $t > 0$, sans soucier de leur intégrabilité.
D'aprés les propriétés on trouve :

$$\begin{aligned} \widehat{\frac{\partial u}{\partial t}}(x,t) &= \frac{\partial}{\partial t}\widehat{u}(\xi,t) \quad , \qquad \widehat{u}(x,0) = \widehat{u}_0(\xi) \ , \\ \widehat{a\Delta u}(x,t) &= a\sum_{i=1}^{n} \widehat{\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}}(x,t) = -a\left|\xi_i\right|^2 \widehat{u}(\xi,t) \end{aligned}$$

On obtient une équation differentielle linéaire de première ordre par rapport à t :

$$\begin{cases} \frac{\partial \widehat{u}}{\partial t}(\xi,t) = -a\left|\xi_i\right|^2 \widehat{u}(\xi,t) & x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ \widehat{u_0}(\xi,0) = \widehat{u}_0(\xi) & x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{4.1.2}$$

pour tout $t > 0$ et ξ fixe.
La solution de (4.1.2) est :

$$\widehat{u}(\xi,t) = \widehat{u}_0(\xi)\,.e^{-at|\xi|^2} \tag{4.1.3}$$

de la relation (2.1.1) :

$$F\left(e^{-a|x|^2}\right) = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{n}{2}} e^{\frac{-|\xi|^2}{4a}}$$

et comme :

$$e^{-at|\xi|^2} = e^{\frac{-1}{4\left(\frac{1}{4at}\right)}|\xi|^2}$$

on déduit :

$$e^{-at|\xi|^2} = F\left[(4\pi at)^{\frac{-n}{2}}\,.e^{-\frac{1}{4at}|x|^2}\right] \tag{4.1.4}$$

de (4.1.4) dans (4.1.3) :

$$\widehat{u}\ (\xi,t) \ = F(u_0)\,.F\left[(4\pi at)^{\frac{-n}{2}}\,.e^{\frac{-1}{4at}|\xi|^2}\right]$$

Si on pose :

$$K_t(x) = \frac{1}{(4\pi at)^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{-|x|^2}{4at}}$$

Alors :

$$\widehat{u}\ (\xi,t)\ = F(u_0).F(K_t)$$

En passant à la transformation inverse de fourier,
on trouve :

$$u(x,t) = F^{-1}\left(\widehat{u}_0 \times \widehat{K}_t\right) = u_0 \times K_t$$

c-à-d. :

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi at)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{4at}|x-\xi|^2} u_0(\xi)\, d\xi \tag{4.1.5}$$

4.1.2 Equation Inhomogène

Soit à résoudre l'équation sde la chaleur suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = a\Delta u + f(x,t) \\ u_0(x,0) = 0 \end{cases} \quad , \quad x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0 \tag{4.1.6}$$

Théorème 4.1.2. Soit $f \in C^{1,2}\left(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^*\right)$. Soit :

$$u(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} K(t-s, x-\xi)\, f(s,y)\, d\xi ds$$

Alors $u \in C^{1,2}\left(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^*\right)$ et vérifiée (4.1.6).

Proposition 4.1.1. En combinant les deux théorèmes :

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x-\xi,t)\, u_0(\xi)\, d\xi + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} K(x-\xi, t-s)\, f(\xi,s)\, ds d\xi$$

est la solution de (4.1.6).

Démonstration. Si on passe à la transformation de fourier de fonction donnée $x \to f(x,t)\,,\ t > 0$
en notant $\quad \widehat{f}(\xi,t) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} f(x,t)\, dx.$

On obtient une équation differentielle linéaire de première ordre en ξ :

$$\begin{cases} \widehat{\frac{\partial u}{\partial t}}(\xi,t) = -a\left|\xi\right|^2 \widehat{u}(\xi,t) + \widehat{f}(\xi,t) & \xi \in \mathbb{R}^n \ t>0 \\ \widehat{u}(\xi,0) = \widehat{u}_0(\xi) & \xi \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

la solution de cette équation est :

$$\widehat{u}(\xi,t) = \widehat{u}_0(\xi)\, e^{-at|\xi|^2} + \int_0^t e^{-a|\xi|^2(t-s)}\widehat{f}(\xi,s)\, ds$$

En utilisant la formule de convolution

$$\begin{aligned} u(x,t) &= F^{-1}(\widehat{u}_0) \times F^{-1}\left(e^{-at|\xi|^2}\right) + \int_0^t F^{-1}\left(\widehat{f}\right) \times e^{-a|\xi|^2(t-s)} ds \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(4\pi a t)^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{-1}{4at}|x-\xi|^2} u_0(\xi)\, d\xi \\ &\quad + \int_0^t \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(4\pi a (t-s))^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{-1}{4a(t-s)}|x-\xi|^2} f(\xi,(t-s))\, d\xi \right\} ds \end{aligned}$$

Si on pose :

$$K_t(x) = \frac{1}{(4\pi a t)^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{-|x|^2}{4at}}$$

On peut ecrire :

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} K_t(\xi)\, u_0(x-\xi)\, d\xi + \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_0^t K_{t-s}(x-\xi)\, f(\xi,s)\, ds \right] d\xi$$

où bien

$$u(x,t) = (K_t \times u_0)(x) + \int_0^t (K_{t-s} \times f_s)(x) \qquad (4.1.7)$$

On peut démontrer que l'expression (4.1.7) est bien une solution du problème sous des hypothèses sur u_0 et f.

Définition 4.1.1. On définit le noyau de la chaleur par la fonction

$$K(x,t) = \frac{1}{(4\pi a t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4at}}\ ,\ x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0 \qquad (*)$$

où $a > 0$ est une constante.

Le noyau de la chaleur est la solution fondamentale de l'opérateur differentiel $(\partial_t - a\Delta)$ c.à.d l'opérateur de l'équation de la chaleur homogène.Le noyau de la chaleur permet de résoudre explicitement l'équation de la chaleur dans le cas où $\Omega = \mathbb{R}^n$.

Lemme 4.1.1. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n, t > 0$. Alors $\int_{\mathbb{R}^n} K(x,t)\,dx = 1$.
Démonstration. Il est connu que $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$(intégrale de Poisson).
Alors :

$$\int_{\mathbb{R}^n} K(x,t)\,dx = \frac{1}{(4\pi at)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x|^2}{4at}}dx$$

Par le changement de variable, on pose : $y = \frac{x}{\sqrt{4at}}$
On obtient :

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt[n]{\pi}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-y^2}dy \\
&= \frac{1}{\sqrt[n]{\pi}} \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} e^{-y_1^2} \cdots\cdots e^{-y_n^2} dy_1 \cdots\cdots\cdots dy_n \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt[n]{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2}dy \right)^n = 1
\end{aligned}$$

Proposition 4.1.2.

Soit $u_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue bornée

alors (avec K_t défini par (*))

$$u(x,t) = K_t * u_0 \tag{4.1.8}$$

définit une solution de l'équation homogène :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = a\Delta u(x,t) & x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

la fonction u définit par (4.1.8) est de classe C^∞ dans $\mathbb{R}^n \times]0,\infty[$ avec

$$\inf_{x\in\mathbb{R}^n} u_0(x) \leqslant u(x,t) \leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}^n} u_0(x) \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n, t > 0. \tag{4.1.9}$$

Démonstration.
On a :

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi at)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4at}} u_0(\xi)\,d\xi \tag{4.1.10}$$

posons :

$$y=\frac{\xi-x}{\sqrt{2at}}$$

on obtient :

$$u(x,t)=\int_{\mathbb{R}^n} g(y)\,u_0\left(x+y\sqrt{2at}\right)dy \tag{4.1.11}$$

où

$$g(y)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{|y|^2}{2}}$$

Il est clair que

$$g\geqslant 0 \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}^n} g(y)\,dy=1$$

Comme l'expression :

$$K(x-\xi,t)=\frac{1}{(4\pi at)^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4at}}$$

qui apparait dans l'intégrale (4.1.10) est de classe C^∞ dans les variable $t,x_{1,}....x_n$; de plus , u_0 est bornée, on vérifie que $D^\alpha K(x-\xi,t)\,u_0(\xi)$ est intégrable dans $\mathbb{R}^n$ pour tout multi-indice
$\alpha=(\alpha_0,\alpha_1,.......\alpha_n)$ par rapport aux variable $(t,x_{1,}.....x_n)$, ce qui permet de justifier l'échange de la dérivation D^α avec l'intégrale $\int_{\mathbb{R}^n}$dans (4.1.10).
(a) Montrons que u vérifie l'equation homogène
en effet

$$\ln K(x,t)=\frac{-|x|^2}{4at}-\frac{n}{2}\ln t-\frac{n}{2}\ln(4\pi a)$$

d'où, avec $D_j=\frac{\partial}{\partial x_j}$ et $D_t=\frac{\partial}{\partial t}$,on a pour tout $t>0$ et tout $x=(x_{1,}.....x_n)$:

$$\begin{aligned} D_jK(x,t) &= \frac{-x_i}{2at}K(x,t)\,, D_{jj}=\{\frac{x_i^2}{4a^2t^2}-\frac{1}{2at}\}K(x,t)\,, D_tK(x,t) \\ &= \left\{\frac{|x|^2}{4at^2}-\frac{n}{2t}\right\}K(x,t) \end{aligned}$$

ce qui montre que :

$$D_tK(x,t)=a\Delta K(x,t)$$

par consequent

$$u_t=a\Delta u \quad \text{pour tout} \quad x\in\mathbb{R}^n,\ t>0$$

Comme u_0 est continue, on a, pour tout $y\in\mathbb{R}^n$,et tout $x_0\in\mathbb{R}^n$:

$$\lim_{t\to 0, x\to x_0} u_0\left(x+y\sqrt{2at}\right)=u_0(x_0)$$

En utilisant ceci et le théorème de la convergence dominée de lebesgue on obtient de (4.1.5) sachant que :
u_0 est bornée et g est intégrable et $\int_{\mathbb{R}^n} g(y)\,dy=1$:

$$\lim_{t\to 0, x\to x_0} u(x,t)=u_0(x_0)\,,\ \ x\in\mathbb{R}^n$$

c-à-d. u vérifie la condition initiale de la relation (4.1.5) et comme u_0 est bornée,
on a :

$$\begin{aligned}\left(\inf_{x\in\mathbb{R}^n} u_0\left(x+y\sqrt{2at}\right)\right) &= \inf_{x\in\mathbb{R}^n, t>o} u(x)\leqslant u_0(x)\\ &\leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}^n} u(x)=\sup_{x\in\mathbb{R}^n} u_0\left(x+y\sqrt{2at}\right)\end{aligned}$$

donc :

$$(\inf u_0)\int_{\mathbb{R}^n} g(y)\,dy\leqslant\int_{\mathbb{R}^n} g(y)\,u_0\left(x+y\sqrt{2at}\right)dy\leqslant(\sup u_0)\int_{\mathbb{R}^n} g(y)\,dy$$

c-à-d.

$$\inf u_0\leqslant u\leqslant\sup u_0$$

Proposition 4.1.3.
Soit $f:\mathbb{R}^n\times]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ une fonction continue bornée de classe C^2 dans $\mathbb{R}^n\times]0,+\infty[$, ayant ses dérivées partielles d'ordre 1 et d'ordre 2 bornées dans $\mathbb{R}^n\times]0,+\infty[$,
alors la fonction :

$$v(x,t)=\int_0^t (K_{t-s}*f_s)(x)\,ds$$

définit une solution de l'equation non homogène :

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a\Delta u+f(x,t)$$

pour $x\in\mathbb{R}^n$ et $t>0$ vérifiant la condition initiale $v(x,0)=0,\ x\in\mathbb{R}^n$.

Démonstration.
Posons :

$$w(x,s,t)=\int_{\mathbb{R}^n} K(x-\xi,t)\,f(\xi,s)\,d\xi \qquad (4.1.12)$$

pour $x \geqslant 0$, $s \geqslant 0$, $t > 0$, alors :

$$v(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} w(x,s,t-s)\,ds \tag{4.1.13}$$

Après changement de variable :

$$\frac{\xi - x}{\sqrt{2at}} = y$$

on obtient :

$$w(x,t,s) = \int_{\mathbb{R}^n} g(y)\, f\left(x + y\sqrt{2at}, s\right) dy \tag{4.1.14}$$

où :

$$g(y) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{-n}{2}}} e^{\frac{-|x|^2}{2}}$$

On voit que :

$$D_t w(x,s,t) = \left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{2}} t^{\frac{-1}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} g(y)\, \nabla f\left(x + y\sqrt{2at}, s\right) dy \tag{4.1.15}$$

et

$$D_{jj} w(x,s,t) = \int_{\mathbb{R}^n} g(y)\, D_{jj} f\left(x + y\sqrt{2at}, s\right) dy \tag{4.1.16}$$

de (4.1.15) et (4.1.16) on aura :

$$\Delta v(x,t) = \int_0^t \Delta w(x,s,t-s)\,ds \tag{4.1.17}$$

l'échange de $\Delta = \sum_{j=1}^{n} D_{jj}$ et $\int_0^t ds$ (4.1.13) est facile à justifier.
De (4.1.14) on deduit que pour $s \geqslant 0, x \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{t \to 0, x \to x_0} w(x,s,t) = f(x,s)$$

ce qui nous permet de poser

$$w(x,s,0) = f(x,s)\,, x \in \mathbb{R}^n$$

pour obtenir une fonction donnée par $w(x,s,t)$ qui est continue pour $x \in \mathbb{R}^n$, $s \geq 0, t \geq 0$.

On peut dérivér $v(x,t)$ par rapport à t dans (4.1.13) pour avoir :

$$D_t v(x,t) = \int_0^t D_t w(x,s,t-s)\,ds + f(x,t)\,. \tag{4.1.18}$$

Où on a utilisé la formule de lebiniz
de (4.1.9) on saut que

$$D_t w(x,s,t) = a\Delta w(x,s,t)$$

car $K(x-\xi,t)$ vérifie la même équation, et on peut échanger les dérivations et l'intégrale dans (4.1.5).

On en conclut en utilisant (4.1.10) que (4.1.9)

$$D_t v = a\Delta v + f(x,t) \qquad t>0, x\in\mathbb{R}^n$$

le fait

$$\lim_{t\to 0, x\to x_0} v(x,t) = 0$$

s'obtient du fait que $|w| \le M = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ t\geqslant 0}} |f(x,t)|$ grâce à (4.1.12)
Il ne reste qu'à justifier (4.1.18). Pour ce faire,posons,pour $x\in\mathbb{R}^n$ fixe,

$$h(s,t) = w(x,s,t-s) \qquad\qquad 0\leqslant s\leqslant t$$

avec $h(t,t) = w(x,0,t) = f(x,t)\,, t\geqslant 0$.
De (4.1.16) on voit que

$$(s,t)\to h(s,t)$$

est continue pour $0\leqslant s\leqslant t$, $t\geqslant 0$, et que

$$D_t h(s,t) = D_t w(x,s,t-s)$$

est tel que

$$(s,t)\to D_t h(s,t)$$

est continue pour $0\leqslant s\leqslant t$ avec

$$|D_t h(s,t)| \leqslant C(t-s)^{\frac{-1}{2}} \qquad\qquad 0<s<t$$

$C>0$ étant

$$\int_0^t |D_t h(s,t)|\,ds \leqslant C\int_0^t (t-s)^{\frac{-1}{2}}\,ds < \infty$$

posons

$$H(t) = \int_0^t h(s,t)\,ds \qquad\qquad t\geqslant 0$$

avec $H(0) = 0$ notons que $H(t) = v(x,t)$

$$H'(t) = \int_0^t D_t h(s,t)\,ds + h(x,t), \qquad t > 0$$

ce qui est En effet si $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\varepsilon}\{H(t+\varepsilon) - H(t)\} &= \int_0^t \frac{1}{\varepsilon}\{h(s,t+\varepsilon) - h(s,t)\}\,ds \\
&\quad + \frac{1}{\varepsilon}\int_t^{t+\varepsilon} h(s,t+\varepsilon)\,ds \\
&= \int_0^t D_t h\left(s, t+\varepsilon'\right) ds \\
&\quad + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{t+\varepsilon} \{h(s,t+\varepsilon) - h(t,t)\}\,ds + h(t,t)
\end{aligned}$$

où $0 < \varepsilon' \leqslant \varepsilon$; lorsque $\varepsilon \to 0$, la première intégrale tend vers

$$\int_0^t D_t h(s,t)\,ds$$

4.2 Existence de solution

4.2.1 Equation homogène

On considére le proplème suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a\Delta u & t > 0, x \in \mathbb{R}^n \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{4.2.1}$$

où $u_0(x)$ est une fonction donnée appartenant à l'espace $C_b(\mathbb{R}^n)$ des fonctions bornées et continues sur $\mathbb{R}^n$.

Pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $t > 0$

On pose

$$K_t(x) = (4\pi a t)^{\frac{-n}{2}} e^{\frac{-|x|^2}{4at}}$$

Théorème 4.2.1 :

Pour tout $u_0 \in C_b(\mathbb{R}^n)$ la fonction

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= (K_t * u_0)(x) \\
&= (4\pi a t)^{\frac{-n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4at}} u_0(\xi)\,d\xi
\end{aligned}$$

appartient à l'espace $C^\infty\left(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^*\right) \cap C_b\left(\mathbb{R}_+^{n+1}\right)$ et vérifie les équations .
Démonstration :
Comme K est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^n \times]0, \infty[$, Il est facile d'appliquer le théorème de dérivation 2 sous le signe intégral pour montrer que $u \in C^\infty\left(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^*\right)$ .De plus,pour $x \in \mathbb{R}^n, t > 0$. On a

$$\begin{aligned}
\partial_t K_t(x) &= (4\pi a t)^{\frac{-n}{2}} e^{\frac{-|x|^2}{4at}} \left[\frac{|x|^2}{4at^2} - \frac{n}{2t}\right] \\
\partial_j K_t(x) &= -(4\pi a t)^{\frac{-n}{2}} e^{\frac{-|x|^2}{4at}} . \frac{x_j}{2at} \\
\partial_j^2 K_t(x) &= (4\pi a t)^{\frac{-n}{2}} e^{\frac{-|x|^2}{4at}} \left[\left(\frac{x_j}{2at}\right)^2 - \frac{1}{2at}\right]
\end{aligned}$$

D'où on conclut que u vérifie l'équation (4.2.1).
(a) Montrons que $u \in C^\infty\left(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+\right)$ .En effet si $|u_0| \leqslant C$ alors :

$$\begin{aligned}
|u(x,t)| &\leq (4\pi a t)^{\frac{-n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{-|x-\xi|^2}{4at}} |u_0(\xi)| \, d\xi \\
&\leq \|u_0\|_\infty (4\pi a t)^{\frac{-n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x|^2}{4at}} d\xi \\
&\leq \|u_0\|_\infty (4\pi a t)^{\frac{-n}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\left(\frac{x_j^2}{2\sqrt{at}}\right)} dx_j\right)^n \\
&= \|u_0\|_\infty (4\pi a t)^{\frac{-n}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-y_j^2} \left(2\sqrt{at}\right) dy_j\right)^n \\
&= \|u_0\|_\infty (4\pi a t)^{\frac{-n}{2}} \left(2\sqrt{at}\right)^n \left(\sqrt{\pi}\right)^n \\
&= \|u_0\|_\infty (4\pi a t)^{\frac{-n}{2}} (4\pi a t)^{\frac{-n}{2}} \\
&= \|u_0\|_\infty
\end{aligned}$$

(b) Montrons enfin que $u(x,t)$ vérifie la condition initiale au sens que , pour tout $R > 0$ on a

$$\lim_{t \to 0} u(x,t) = u_0$$

uniformément sur $[-R, R]$.
Soit $\varepsilon > 0$.En faisant le changement de variable

$$\xi = x - 2\sqrt{at}y$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
|u(x,t)-u_0(x)| &\leq (4\pi at)^{\frac{-n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{-|x-\xi|^2}{4at}} |u_0(\xi)-u_0(x)|\, d\xi & (4.1)\\
&\leq (4\pi at)^{\frac{-n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|y|^2} \left|u_0(x-2\sqrt{at}y)-u_0(x)\right| . (4at)^{\frac{n}{2}}\, dy \\
&= (\pi)^{\frac{-n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|y|^2} \left|(u_0 x-2\sqrt{at}y)-u_0(x)\right| dy & (4.2.2)
\end{aligned}$$

Comme

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(O,N)} e^{-|y|^2} dy = 0,$$

alors il existe $N > 0$ telle que :

$$(\pi)^{\frac{-n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|y|^2} dy \leq \varepsilon \tag{4.2.3}$$

Comme u_0 est continue, alors

$$\lim_{t\to 0} u_0\left(x-\sqrt{2at}y\right) = u_0(x) \tag{4.2.4}$$

Càd $\exists \delta > 0$ telle que si

$$0 \leq t \leq \delta \Longrightarrow \left|u_0\left(x-\sqrt{2at}y\right)-u_0(x)\right| < \varepsilon \quad \forall |x| \leq R, \forall |y| \leq N$$

par conséquent, de (4.2.3)-(4.2.4) dans (4.2.2)

$$\begin{aligned}
|u(x,t)-u_0(x)| &\leq \pi^{\frac{-n}{2}} \left[\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,N)} e^{-|y|^2} |u_0(x)|\, dy + \int_{B(0,N)} e^{-|y|^2} dy\right] \\
&\leq \pi^{\frac{-n}{2}} 2. |u_0| .\varepsilon + \pi^{\frac{-n}{2}} .\varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|y|^2} dy = \pi^{\frac{-n}{2}} 2 |u_0| \varepsilon + \varepsilon
\end{aligned}$$

4.2.2 Equation Inhomogène

On considére le proplème suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a\Delta u + f(x,t) & t > 0, x \in \mathbb{R}^n \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

où f est une fonction donnée. On note $C^{1,2}\left(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^*\right)$ l'espace des fonctions $u(x,t)$ telles que $u, \partial_t u, \partial_k u, \partial_k \partial_l u \in C\left(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^*\right)$ pour tous $k, l = 1, ..., n$.Les espaces $C^{1,2}\left(\mathbb{R}_+^{n+1}\right)$ et $C_b^{1,2}\left(\mathbb{R}_+^{n+1}\right)$ sont définis d'une manière analogue.

Théorème 4.2.2. Pour tout $f \in C_b^1\left(\mathbb{R}_+^{n+1}\right)$ la fonction

$$u(x,t) = \int_0^t \left(K_{t-s} * f(s,.)\right)(x)\, ds$$

appartient à l'espace $C^{1,2}\left(\mathbb{R}_+^{n+1}\right)$ et vérifie les équation avec $u_0 = 0$.
Démonstration. La fonction u peut étre représentée sous la forme

$$u(x,t) = \int_0^t (4\pi s)^{\frac{-d}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{-|y|^2}{4s}} f(x-y, t-s)\, dyds$$

Cette formule implique que $u \in C_b^1\left(\mathbb{R}_+^{n+1}\right)$ et

$$\begin{aligned}
\partial_t u(x,t) &= \left(K_t * f(0,)\right)(x) + \int_0^t \left(K_s * (\partial_t f)(.,t-s)\right)(x)\, ds \\
\partial_k u(x,t) &= \int_0^t \left(K_s * (\partial_k f)(.,t-s)\right)(x)\, ds \\
&= \int_0^t (4\pi s)^{\frac{-d}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{2s}} (\partial_k f)(\xi, t-s)\, d\xi ds
\end{aligned}$$

où $k = 1, \ldots, n$. En dérivant la relation par rapport à x_l et faisant le changement de variable $y = x - \sqrt{2sz}$,on obtient

$$\partial_k \partial_l u(x,t) = -(2\pi)^{\frac{-d}{2}} \int_0^t \int_{\mathbb{R}}^d z_l (2s)^{\frac{-1}{2}} e^{\frac{-|z|}{2}} (\partial_k f)\left(x - \sqrt{2sz}, t-s\right) dzds$$

Nous avons montré que $u \in C_b^{1,2}\left(\mathbb{R}_+^{n+1}\right)$ .Vérifions les équations .En faisant le changement de variable $y = x - \sqrt{2sz}$ dans
On obtient

$$u(x,t) = \int_0^t -(2\pi)^{\frac{-d}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{-|z|^2}{zs}} f\left(x - \sqrt{2sz}, t-s\right) dzds$$

Si $|f| \leqslant C$, alors

$$|u(x,t)| \leqslant C(2\pi)^{\frac{-d}{2}} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{-|z|^2}{zs}} dzds = Ct \to 0 \quad \text{quand} \quad t \to 0^+$$

.
De plus , les relations impliquent que

$$(\partial_t - a\Delta) u(x,t) \to f(x,0) \quad \text{quand } t \to 0^+$$

En combinant cette observation avec la relation

$$u(x,t+\tau) = \left(K_\tau * u(.,t)\right)(x) + \int_0^\tau \left(K_{\tau-s} * f(.,t+\tau)\right)(x)\, ds$$

On démontre que l'équation est vérifiée pour $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$

4.3 Unicité de solution

4.3.1 Principe du maximum

Théorème 4.3.1. Soit $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+) \cap C_b(\mathbb{R}_+^{n+1})$ une fonction vérifiant l'inégalité.

$$\partial_t u - a\Delta u \leqslant 0 \qquad \text{pour } x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0.$$

Alors

$$\sup_{(x,t)\in\mathbb{R}_+^{n+1}} u(x,t) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} u(x,0)$$

et

$$\inf_{(x,t)\in\mathbb{R}_+^{n+1}} u(x,t) = \inf_{x\in\mathbb{R}^n} u(x,0)$$

Démonstration.
Il suffit de montrer que pour tout $T > 0$ on a

$$\sup_{(x,t)\in D_T} u(x,t) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} u(x,0)$$

où $D_T = \{(x,t) : 0 \leqslant t \leqslant T, x \in \mathbb{R}^n\}$. Pour $\varepsilon > 0$ introduisons la fonction

$$u_\varepsilon(x,t) = u(x,t) - \varepsilon\left(4dt + |x|^2\right).$$

Alors $u_\varepsilon \in C^2(]0,T[\times\mathbb{R}^n) \cap C_b([0,T]\times\mathbb{R}^n)$ et

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T} u_\varepsilon(x,t) \to -\infty \qquad \text{quand } |x| \to \infty$$

Donc,il existe $(x_0,t_0) \in D_T$ telle que

$$\sup_{(x,t)\in D_T} u_\varepsilon(x,t) = u_\varepsilon(x_0,t_0)$$

Montrons que $t_0 = 0$. En effet ,si $t_0 > 0$, alors

$$\partial_t u_\varepsilon(x_0,t_0) \geqslant 0, \quad \partial_k^2 u_\varepsilon(x_0,t_0) \leqslant 0, k = 1........n$$

Il s'ensuit que

$$\partial_t u_\varepsilon(x_0,t_0) - a\Delta u_\varepsilon(x_0,t_0) \geqslant 0$$

D'autre part,

$$(\partial_t - a\Delta)\, u_\varepsilon = (\partial_t - a\Delta)\, u - \varepsilon(\partial_t - a\Delta)\left(4dt + |x|^2\right) \leqslant -2d\varepsilon < 0.$$

La contradiction obtenue prouve que $t_0 = 0$.Nous avons établi l'inégalité

$$u_\varepsilon(x,t) \leqslant u_\varepsilon(x_0,0) \leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left(u(x,0) - \varepsilon|x|^2\right) \leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}^n} u(x,0).$$

En passant à la limite quand $\varepsilon \to 0^+$,on obtient le résultat cherché.

Chapitre 5

Résolution de l'équation de la chaleur sur un domaine borné

5.1 Description du propléme

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontiére $\Gamma = \partial\Omega$ et pour tout $t \geqslant 0$.
On cherche une fonction $u(x,t)$ sur $\Omega \times]0,\infty[$ solution de :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - a\Delta u &= f\ (x,t) && \text{sur } \Omega \times]0,\infty[&& (5.1.1)\\ u(x,0) &= u_0(x) && \text{sur } \Omega && (5.1.2)\\ u(x,t) &= 0 && \text{sur } \Gamma \times]0,\infty[&& (5.1.3) \end{aligned}$$

où $f : \Omega \times]0,\infty[\to \mathbb{R}^n$ est la source de la chaleur et $u_0 : \Omega \to \mathbb{R}^n$ la distrubtion de la chaleur à l'instant initial. Sont deux fonctions données.La condition de Dirichlet signifie qu'an cours du temps la température reste nulle à la frontiére. c'est la condition à la limite.
Bien entendu, il est possible d'imposer d'autres types de conditions aux limites.

5.2 Décomposition du Laplacien dans $L^2(\Omega)$

Définition. On appelle base Hilbertienne d'un espace de Hilbert H une suite $(\varphi_k)_{k\geqslant 0}$ d'elements de H telle que :
(i) $\|\varphi_k\| = 1$, $\forall k \geqslant 1$.
(ii) $\langle \varphi_k, \varphi_j \rangle = 0$, pour tout $k \neq j$.
(iii) L'espace vectoriel engendré par les $(\varphi_k)_{k\geqslant 0}$ est dense dans H.

Théorème [3,p.192]. Soit $\varnothing \neq \Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné.
Il existe une base Hilbertienne $(\varphi_k)_{k\geqslant 0}$ de $L^2(\Omega)$ et il existe une suite $(\varphi_k)_{k\geqslant 0}$ des nombres réels avec $\lambda_k > 0$
et $\lambda_k \to 0$ telle que

$$\begin{aligned} \varphi_k &\in H_0^1(\Omega) \cap C^\infty(\Omega) \quad \text{et} \\ -\Delta\varphi_k &= \lambda_k \varphi_k \quad \text{sur } \Omega. \end{aligned}$$

On dit que les (λ_k) sont les valeurs propres de $-\Delta$ (avec condition de Dirichlet) et que les (φ_k) sont les fonctions propres associées.
En particulier, pour tout $f \in L^2(\Omega)$ on a :

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k \quad \text{dans le sens de } L^2(\Omega)$$

5.3 Solutions Formelles dans L^2

Commme $(\varphi_k)_{k\geqslant 0}$ est une base Hilbertienne dans $L^2(\Omega)$ (d'aprés la définition précédent).
On suppose que pour pour chaque $t > 0$, $x \to u(x,t)$, $x \to f(x,t)$ sont dans $L^2(\Omega)$ ainsi que u_0. les séries étant prises au sens de la convergence dans $L^2(\Omega)$.
Alors, on peut écrire :

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{k\geqslant 0} c_k(t)\varphi_k(x) \\ f(x,t) &= \sum_{k\geqslant 0} b_k(t)\varphi_k(x) \\ u_0(x) &= \sum_{k\geq 0} a_k\varphi_k(x) \end{aligned}$$

.
Ici, les $a_k(t)$, $b_k(t)$ sont connus et les $c_k(t)$ sont à déterminer. Pour que u vérifie (5.1.1), on doit avoir, formellement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \sum_n c_n'(t)\varphi_n(x) = a\Delta u + f(x,t) \\ &= a\sum_k c_n(t)\Delta\varphi_k(x) + \sum_k b_k(t)\varphi_k(x) \\ &= \sum_k \{-a\lambda_n c_n(t) + b_k(t)\}\varphi_n(x) \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\sum_n c_n'(t)\,\varphi_n(x) = \sum_k \{-a\lambda_n c_n(t) + b_k(t)\}\,\varphi_n(x)$$

de sorte que :

$$c_k'(t) = -a\lambda_k c_k(t) + b_k(t)$$

avec $c_k(0) = b_k$ car :

$$u(x,0) = \sum_k c_k(0)\,\varphi_k(x) = u_0(x) = \sum_k a_k\varphi_k(x)$$

On conclut que :

$$c_k(t) = a_k e^{-a\lambda_k t} + \int_0^t b_k(s)\, e^{\{-a\lambda_k(t-s)\}} ds$$

et

$$u(x,t) = \sum_k a_k e^{-a\lambda_k t}\varphi_k(x) + \sum_k \left\{\int_0^t b_k(s)\, e^{-a\lambda_k(t-s)} ds\right\}\varphi_k(x) \qquad (5.2.1)$$

En se servent des formules

$$\begin{aligned} a_k &= \langle u_0, \varphi_k\rangle = \int_\Omega u_0(y)\,\varphi_k(y)\,dy, \\ b_k &= \langle f(.,s), \varphi_k\rangle = \int_\Omega f(y,s)\,\varphi_k(y)\,dy \end{aligned}$$

on obtient de (5.2.1) :

$$u(x,t) = \int_\Omega K(x,y,s)\,u_0(y)\,dy + \int_0^t ds \int_\Omega K(x,y,t-s)\,f(y,s)\,dy \qquad (5.2.2)$$

où

$$K(x,y,s) = \sum_k e^{-a\lambda_k t}\varphi_k(x)\,\varphi_k(y) \qquad (5.2.3)$$

La fonction donnée par $K(x,y,t)$, $0 < t < \infty$, x, $y \in \Omega$, s'appelle ***la fonction de Green*** associée à l'équation (5.1.1).
Elle se nomme aussi ***le noyau de la chaleur*** , ou bien **la** ***fonction résolvante*** de l'équation (5.1.1).

Proposition (théorème de l'unicité)
Soient $0 < T < \infty$, Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^n$, u, v deux fonctions continues réelles définies dans $\overline{\Omega} \times [0, T]$ ayant leurs dérivées $D_t u, D_{ii} u, D_{ii} v$, $1 \leqslant i \leq n$, dans $\Omega \times]0, T[$ avec

$$\begin{aligned} D_t u &= a\Delta u + f(x,t), \\ D_t v &= a\Delta v + f(x,t) \end{aligned}$$

pour tout $(x,t) \in \Omega \times]0, T[$ où $a > 0$ est une constante.
Si $u(x, 0) = v(x, 0), x \in \overline{\Omega}$ et $u(x,t) = v(x,t), x \in \Gamma\ (\Gamma = \partial\Omega), 0 \leqslant t \leqslant T$.
Alors :

$$u(x,t) = v(x,t), \quad (x,t) \in \overline{\Omega} \times [0, T]$$

Démonstration.
Posons :

$$w(x,t) = u(x,t) - v(x,t)$$

alors $w : \overline{\Omega} \times [0, T] \times \to \mathbb{R}$ est continue avec

$$D_t w = a\Delta w \quad \text{dans} \quad \Omega \times]0, T[$$

$$w(x,t) = 0, \quad (x,t) \in F = \left(\overline{\Omega} \times \{0\}\right) \cup (\Gamma \times [0, T])$$

De la proposition (4.3.1), on conclut que :

$$w(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \overline{\Omega} \times [0, T]$$

L'affirmation pour $T = \infty$ s'obtient du cas $T < \infty$ directement en considérant le cas $\overline{\Omega} \times [0, T]$ pour $T = 1, 2, \ldots$

Remarque. Notons que pour le théorème d'unicité, aucune condition de régularité n'est nécessaire, ni sur f , ni sur Ω , ni même sur les conditions initiales et au bord.

Bibliographie

[1] M. Bony, Théorie des distributions et Analyse de Fourier.

[2] N. Boccara, Analyse fonctionnelle.Copyright 1989.

[3] H. Brezis, Analyse fonctionnelle, Théorie et applications, Dunod 1999