République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et d'Informatique et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Master Académique en Mathématiques
Option : Equations aux Dérivées Partielles

Par :

MADI Marwa

Intitulé

Génération de semi-groupes fortement Continu par Le laplacien

Dirigé par :

Dr. BADRAOUI Salah

Devant les membres du jury :

Président :	S. BADRAOUI	Univ-Guelma
Examinateur :	N. BOUSSETILA	Univ-Guelma
Examinateur :	A. CHAOUI	Univ-Guelma

Session Juin 2013

Remerciement

Avant toute chose, je tiens à remercier **ALLAH** le tout puissant, pour m'avoir donnée la force et la patience.

Je remercie **Pr. BADRAOUI Salah** , qu'il trouve ici l'expression de mon profonde reconnaissances pour m'avoir accordé son confiance et guide dans mon travail, ses compétences, ses précieux conseils et sa disponibilité.

Je remercie également monsieur **Dr N.Boussetila** et monsieur **Dr.A.Chaoui** qui ont acceptè d'évaluer et juger mon travail malgré leurs nombreux autres obligatoires.

Table des matières

On note ce semi groupe par : $T(t) = e^{tA}$.

Définition 1.6. Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ un semi groupe fortement continu sur X, alors il existe deux constantes réelles $M \geq 1$ et $\omega \in \mathbb{R}$ telles que :

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$$

Ce semi-groupe est dit de type (M, ω).
Si $\omega = 0$, $\|T(t)\| \leq M$, $T(t)$ se nomme C_0semi-groupe uniformément bornée.

Si $\omega = 0$, $M = 1$, $\|T(t)\| \leq 1$, $T(t)$ se nomme C_0 semi-groupe de contraction.

Lemme 1.1. Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ un semi groupe fortement continu, et A sa générateur infinitésimal. Alors :

$$\forall u \in X, \frac{d}{dt} T(t) u = AT(t) u = T(t) Au \tag{1.8}$$

2.3 Conditions nécessaires et suffisantes pour la génération d'un C_0 Semi-groupe

Ce théorème donne la condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur linéaire soit le générateur infinitésimal d'un semi groupe fortement continu dans un espace de Banach.

Théorème de Hille-Yosida. Soit X un espace de Banach et $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ un opérateur linéaire.
A est le générateur d'un semi groupe fortement continu $T(t)$ de type $(1, \omega)$ si et seulement si
(HY1) A est fermé.
(HY2) $D(A)$ est dense dans X .
(HY3) $]\omega, +\infty[\subset \rho(A)$ et $\|R_\lambda(A)\| \leq \frac{1}{\lambda-\omega}$, pour tout $\lambda \in]\omega, +\infty[$.
où $R_\lambda(A) = (\lambda I - A)^{-1}$ est l'opérateur résolvant de A.

Chapitre 3

La génération de semi groupe fortement continu par le laplacien sur $\mathbb{R}^n$

Dans ce chapitre, on présente l'opérateur de Laplace dans $BUC(\mathbb{R}^n)$,et dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.

3.1 L'opérateur de Laplace sur $\mathbb{R}^n$

Soit l'équation de la chaleur suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = a\Delta u & x \in \mathbb{R}^n, t\rangle 0 \\ u(x,0) = u_0(x) & u_0 \in X \end{cases} \tag{2.1}$$

où $a > 0$ est une constante, Δu est le laplace définie par $\Delta u = \Sigma_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$, u_0 est une fonction donnée, $u = u(x,t)$ est l'inconnue.
Cherchons une solution formelle. Pour ce faire, prenons la transformation de Fourier de l'équation (2.1) par rapport à x

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right) = a\Sigma_{j=1}^n \mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(x,t)\right)$$

si on pose $\mathcal{F}(u(x,t)) = \widehat{u}(\xi,t)$ on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widehat{u}}{\partial t}(\xi,t) &= a\Sigma_{j=1}^n (i\xi_j)^2 \widehat{u}(\xi,t) \\ &= -a\Sigma_{j=1}^n |\xi_j|^2 \widehat{u}(\xi,t) \\ &= -a|\xi_j|^2 \widehat{u}(\xi,t) \end{aligned}$$

si on note $\mathcal{F}(u_0(x)) = u_0(\xi)$ on obtient un équation différentielle ordinaire linéaire du 1 er ordre par rapport à t

$$\begin{cases} \frac{\partial \widehat{u}}{\partial t} + a\,|\xi|^2\,\widehat{u}(\xi) = 0 \\ \widehat{u_0}(\xi, 0) = \widehat{u_0}(\xi) \end{cases} \tag{2.2}$$

la solution de (2.2) est

$$\widehat{u}(\xi, t) = \widehat{u_0}(\xi)\, e^{-at|\xi|^2} \tag{2.3}$$

de la relation $\mathcal{F}\left(e^{-a|x|^2}\right) = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{n/2} e^{\frac{-|\xi|^2}{4a}}$
et comme

$$e^{-at\,|\xi|^2} = e^{\frac{-1}{4\frac{1}{4at}}|\xi|^2}$$

on déduit :

$$e^{-at\,|\xi|^2} = \mathcal{F}\left[(4\pi at)^{\frac{-n}{2}}\, e^{\frac{-1}{4at}|x|^2}\right] \tag{2.4}$$

de (2.4) dans (2.3)

$$\widehat{u}(\xi, t) = \mathcal{F}(u_0)\, \mathcal{F}\left((4\pi at)^{\frac{-n}{2}}\, e^{\frac{-1}{4at}|x|^2}\right)$$

et d'après la proposition 1.1 (iii) on obtient :

$$u(x, t) = u_0(x) * (4\pi at)^{\frac{-n}{2}}\, e^{\frac{-1}{4at}|x|^2}$$

c'est à dire

$$u(x, t) = \frac{1}{(4\pi at)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{-1}{4at}|x-\xi|^2} u_0(\xi)\, d\xi \qquad t\rangle 0$$

solution plausible.
posons :

$$K_t(x) = \frac{1}{(4\pi at)^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{-1}{4at}|x-\xi|^2} \tag{2.5}$$

peut écrit comme suit :

$$u(x, t) = K_t * u_0 \tag{2.6}$$

Définition 2.1. On définit La famille d'opérateurs $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ définie sur X par :

$$\begin{cases} T(t)\, u(x) = \frac{1}{(4\pi at)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{-1}{4at}|x-\xi|^2} u_0(\xi)\, d\xi, \;\; t \geq 0, \\ T(0) = I \end{cases} \tag{2.7}$$

Remarque 2.1. La semi groupe définit par la formule (2.7) s'appelle semi groupe **Gaussienne.**
On définit le générateur infinitésimale du semi groupe Gaussienne par.

$$\begin{aligned} D(A) &= \left\{ u \in X : \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} \in X, \text{ pour tout } j = 1, \ldots, n \right\} \\ Au &= a\Delta u \end{aligned}$$

3.1.1 Cas où $X = BUC(\mathbb{R}^n)$

Définition 2.2. On définit l'espace

$$BUC(\mathbb{R}^n) = \left\{ \begin{array}{c} u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \text{ application tq } u \text{ est bornée} \\ \text{et est uniformément continue sur } \mathbb{R}^n \end{array} \right\}$$

On définit sur cet espace la famille d'opérateurs $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ définie par (2.7).
On démontre ce résultat pour dans l'espace $BUC(\mathbb{R})$.
(i) $T(t)$ est un opérateur linéaire borné sur X
En effet :

$$\begin{aligned} T(t)(u_1(\xi) + u_2(\xi)) &= \frac{1}{(4\pi at)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{-1}{4at}|x-\xi|^2} (u_1(\xi) + u_2(\xi))\, d\xi \\ &= \frac{1}{(4\pi at)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{-1}{4at}|x-\xi|^2} u_1(\xi)\, d\xi \\ &\quad + \frac{1}{(4\pi at)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{-1}{4at}|x-\xi|^2} u_2(\xi)\, d\xi \\ &= T(t)\, u_1(\xi) + T(t)\, u_2(\xi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(t)(\alpha u(\xi)) &= \frac{1}{(4\pi at)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{-1}{4at}|x-\xi|^2} (\alpha u(\xi))\, d\xi \\ &= \frac{\alpha}{(4\pi at)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{-1}{4at}|x-\xi|^2} u(\xi)\, d\xi \\ &= \alpha(T(t)\, u(\xi)). \end{aligned}$$

(ii) $T(0) = I$ (par hypothèse) et pour tout $t, s \geq 0$ on a :

$$T(t+s)\,u(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a(t+s)}} \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-(x-\xi)}{4a(t+s)}} u(\xi)\, d\xi$$

on a

$$K_t(\xi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a t}} e^{\frac{-\xi^2}{4at}}$$

alors

$$T(t)\,u(x) = K_t * u(x)$$

donc

$$T(t+s)\,u(x) = K_{t+s} * u(x)$$

on a alors

$$\begin{aligned}
T(t)\,T(s)\,u(x) &= T(t)\left[K_s * u(x)\right] = K_t * \left[K_s * u(x)\right] \\
&= (K_t * K_s) * u(x) \\
&\quad \text{(car le produit de convolution est associatif)} \\
&= K_{t+s} * u(x)
\end{aligned}$$

c'est à dire, pour montrer que $T(t+s) = T(t)\,T(s)$, il suffit de montrer que $K_{t+s} = K_t * K_s$, et ceci est équivalent à :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\sqrt{\pi a(t+s)}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a(t+s)}\right) \qquad (2.8) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi a t}} \frac{1}{2\sqrt{\pi a s}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{x^2}{4at}\right) \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4as}\right) d\xi
\end{aligned}$$

on a :

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{\xi^2(t+s) - 2tx\xi + x^2 t}{4ats}\right) d\xi \\
&= \exp\left(-\frac{x^2 t}{4as}\right) \int_{\mathbb{R}} \exp\left[-\frac{t+s}{4ats}\left(\xi^2 - \frac{2xt}{t+s}\xi\right)\right] d\xi \\
&= \exp\left(-\frac{x^2}{4a(t+s)}\right) \int_{\mathbb{R}} \exp\left[-\frac{t+s}{4ats} y^2\right] dy \;,\; \left(y = \xi - \frac{xt}{t+s}\right) \\
&= \exp\left(-\frac{x^2}{4a(t+s)}\right) \int_{\mathbb{R}} \exp\left[-\left(\sqrt{\frac{t+s}{4ats}}\, y\right)^2\right] dy
\end{aligned}$$

$$= \left\{\exp\left(-\frac{x^2}{4a(t+s)}\right)\right\}\sqrt{\frac{4ats}{t+s}}\int_{\mathbb{R}}\exp\left(-\eta^2\right)d\eta \quad \left(\text{ou } \eta = \sqrt{\frac{t+s}{4ats}}y\right)$$

$$= 2\exp\left[-\frac{x^2}{4a(t+s)}\right]\sqrt{\frac{a\pi ts}{t+s}}$$

Pour montrer (2.8) on a besoin seulement de vérifier :

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi a(t+s)}} = 2\sqrt{\frac{a\pi ts}{t+s}}\frac{1}{\sqrt{4\pi at}}\frac{1}{\sqrt{4\pi as}}$$

(iii) $\lim_{1\to 0}\|T(t)u-u\| = 0$.
On a :

$$\begin{aligned} T(t)u(x) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi at}}\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-(x-\xi)}{4at}}u(\xi)d\xi - u(x) \quad \left(y = \frac{\xi - x}{2\sqrt{at}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}}\exp\left(-y^2\right)u\left(x+2\sqrt{at}y\right)dy - u(x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}}\exp\left(-y^2\right)\left[u\left(x+2\sqrt{at}y\right)-u(x)\right]dy \end{aligned}$$

car $u(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}}\exp(y)^2 u(x)\,dy$.

Comme u est uniformément continu :

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 : |x' - x| < \delta \Longrightarrow |u(x') - u(x)| < \varepsilon$$

donc, pour un $\varepsilon > 0$ donne et $t > 0$ (fixé) $\left(x' = x + 2\sqrt{at}y\right)$,

$$|x' - x| = 2\sqrt{at}y < \delta$$

c'est à dire $|y| < \frac{\delta}{2\sqrt{at}} = \delta'$ donc :

$$\begin{aligned}
|T(t)u(x) - u(x)| &\leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{|y|\langle\delta'} e^{-y^2} \left| u\left(x + 2\sqrt{at}y\right) - u(x) \right| dy \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{|y|\geq\delta'} e^{-y^2} \left| u\left(x + 2\sqrt{at}y\right) - u(x) \right| dy \\
&\leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{|y|\langle\delta'} e^{-y^2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{|y|\geq\delta'} e^{-y^2} \left| u\left(x + 2\sqrt{at}y\right) - u(x) \right| dy \\
&\leq \varepsilon + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{|y|\geq\delta'} e^{-y^2} \left| u\left(x + 2\sqrt{at}y\right) - u(x) \right| dy \\
&\leq \varepsilon + \frac{2\|u\|}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{|y|\geq\delta'} e^{-y^2} dy \\
&\Longrightarrow \|T(t)u - u\| \leq \varepsilon + \frac{2\|u\|}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{|y|\geq\delta'} e^{-y^2} dy
\end{aligned}$$

ce qui implique que :

$$\|T(t)u - u\| \leq \varepsilon + \frac{2\|u\|}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{|y|\geq\delta'} e^{-y^2} dy$$

Pasons à la limite $(t \to 0^+)$:$\exists t_1 > 0$, $t < t_1$:

$$\frac{2\|u\|}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{|y|\geq\delta'} e^{-y^2} dy < \varepsilon$$

car :

$$\lim_{t\to 0} \int\limits_{|y|\geq\delta'} e^{-y^2} dy = 0$$

c'est à dire :

$$\forall\varepsilon > 0, \exists t_1 > 0 : t < t_1 \Longrightarrow \|T(t)u - u\| \leq 2\varepsilon$$

c'est à dire :

$$\lim_{1\to 0} \|T(t)u - u\| = 0$$

Remarques 2.2.
Remarque 1. Ce semi groupe s'appelle semi-groupe **Gaussienne.**

Remarque 2. La démonstration dans l'espace $BUC(\mathbb{R}^n)$ pour $n \geq 2$ se fait de la même façon.

3.1.2 Cas ou $X = L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$

Espace de Schwartz

Définition 2.3. Une application $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ est dite fonction à décroissance rapide si $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ et

$$\lim_{|x|\to\infty} |x|^m D^\alpha u(x) = 0, \text{ pour tout } m \in \mathbb{N} \text{ et tout } \alpha \in \mathbb{N}^n$$

L'espace

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \{u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) : u \text{ est à décroissabce rapide}\}$$

se nomme espace de **Schwartz.** La topologie de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est définie par la famille des semi-normes :

$$\|u\|_{m\alpha} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^m D^\alpha u(x)|$$

On a : $D(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ avec densité.
La transformation de Fourier applique $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans lui même, de plus la transformation de Fourier est un isomorphisme de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même (Bony p.168).

Semi-groupes générés par $a\Delta$ $(a > 0)$

Théorème 2.1. La famille d'opérateurs $(T(t))_{t\geq 0}$ donnée par :

$$\begin{cases} T(t)u = K_t * u, & t > 0 \\ T(0) = I \end{cases}$$

définit un semi-groupe fortement continu sur l'espace $X = L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$.

Démonstration. Comme $K_t \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, alors $T(t)u$ existe pour tout $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$, de plus, d'après l'inégalité de Young (Reed-Simon p.28) :

$$\|T(t)u\|_p \leq \|K_t\|_1 \|u\|_p \leq \|u\|_p$$

Ainsi chaque opérateur $T(t)$ $(t > 0)$ est une contraction sur $L^p(\mathbb{R}^n)$.
Comme $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ et est stable par $T(t)$, il suffit d'étudier la restriction $S(t) = T(t)\,|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)}$

Chapitre 4

La génération de semi groupe par le laplacien sur sur un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$

4.1 Introduction

Il existe une façon plus simple de vérifier les hypothèses du théorème de Hille-Yosida. Cette formulation, dîte théorème de Lumer-Phillips, est surtout particulièerement pratique pour des opérateurs anti-adjoint. On va l'énoncer dans le cadre général d'un espace de Banach X mais on fera les démonstrations dans le cadre d'un espace de Hilbert pour lequel le dual d'un point est trivial.

4.2 Opérateur dissipatif

Définition 3.1. Un opérateur linéaire $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ est dit ***dissipatif*** si :

$$\begin{aligned} &\text{pour tout } u \in X, \text{ il existe } u^* \in X^* \text{ tel que : } \langle u^*, u\rangle = \|u\|^2 = \|u^*\|^2 \\ &\text{et} \\ &\operatorname{Re}\langle u^*, Au\rangle \leq 0 \end{aligned}$$

Définition 3.2. Soit H un espace de Hilbert de dimension infinie et

$$A : H \to H$$

un opérateur linéaire A se nomme dissipatif si :

$$\operatorname{Re}\langle Au, u\rangle \leq 0, \forall u \in D(A)$$

Définition 3.3.
un opérateur $A : H \to H$ s'appelle m-dissipatif (m=maximal) si :

$$\begin{aligned} &A \text{ est dissipatif et} \\ &(I - A) \text{ est surjectif.} \end{aligned}$$

c'est à dire si :
(i) $\operatorname{Re}\langle Au, u\rangle \leq 0$.
(ii)$\forall v \in H$, $\exists u \in D(A) : u - Au = v$.

Lemme 3.1. Soit $A : H \to H$ un opérateur m-dissipatif, alors $1 \in \rho(A)$, c-à-d : $I - A$ est bijectif et $(I - A)^{-1}$ est borné avec $\|(I - A)^{-1}\| \leq 1$..

Démonstration.

■ Soit $u \in D(A)$ tel que $(I - A)\, u = 0$, ceci implique :

$$\langle u - Au, u - Au\rangle = 0 \Longrightarrow \|u\|^2 + \|Au\|^2 - 2\operatorname{Re}\langle Au, u\rangle = 0$$

et comme $\operatorname{Re}\langle Au, u\rangle \leq 0$ on trouve que

$$\|u\|^2 + \|Au\|^2 \leq \|u\|^2 + \|Au\|^2 - 2\operatorname{Re}\langle Au, u\rangle = 0$$

ce qui implique que $u = 0$. D'où l'injectivité.

Surjectif ?

■ Comme $I - A$ est bijectif, alors pour tout $v \in X$, il existe un seul élément $u \in D(A)$ tel que $u - Au = v$.
On a :

$$\begin{aligned} \|u\|^2 &= \langle u, u\rangle \\ &= \langle Au + v, u\rangle \\ &= \langle Au, u\rangle + \langle v, u\rangle \end{aligned}$$

On utilise l'inégalité de Cauchy Schwartz on obtient :

$$\|u\|^2 \leq \operatorname{Re}\langle v, u\rangle \leq |\langle v, u\rangle| \leq \|u\|\,\|v\|$$

Par conséquent :

$$\|u\| \leq \|v\|$$

Ainsi :

$$\left\|(I - A)^{-1}v\right\| \leq \|v\|$$

Par conséquent :

$$\left\|(I-A)^{-1}\right\| \leq 1.$$

Lemme 3.2. Soit $A : H \longrightarrow H$ un opérateur m-dissipatif, alors A est un opérateur fermé.

Démonstration.

Soit $(u_n) \subset D(A)$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u$ et $\lim\limits_{n\to\infty} Au_n = v$.
Montrons que :

$$u \in D(A) \quad \text{et} \quad v = Au.$$

On a :

$$u_n - Au_n = (I-A)\, u_n \longrightarrow u - v$$

comme $(I-A)^{-1}$ est continu alors :

$$\lim_{n\to\infty} (I-A)^{-1}(u_n - Au_n) = (I-A)^{-1}(u-v)$$

c'est à dire :

$$u = (I-A)^{-1}(u-v)$$

ceci montre que :

$$\begin{array}{rcl} u & \in & D(I-A) = D(A) \\ \text{et } (I-A)\, u & = & u - v \\ & \Longrightarrow & Au = v \end{array}$$

on conclut que A est fermé.

Lemme 3.3. Si A est un opérateur m-dissipatif, alors A est à domaine dense.

Démonstration.

On raisonne par l'absurde. On suppose que A n'est pas de domaine dense, alors il existe $u_0 \in D(A)^{\perp}$ tel que $u_0 \neq 0$ vérifiant :

$$\forall u \in D(A) : \langle u, u_0 \rangle = 0$$

Comme A est m-dissipatif, alors il existe $u_1 \in D(A)$ telle que :

$$u_1 - Au_1 = u_0$$

On prend le produit scalaire avec u_1 :

$$\langle u_1 - Au_1, u_1\rangle = 0$$

puis on prend la partie réelle :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\langle u_1 - Au_1, u_1\rangle &= 0 \\ \langle u_1, u_1\rangle - \operatorname{Re}\langle Au_1, u_1\rangle &= 0 \end{aligned}$$

comme :

$$\operatorname{Re}\langle Au_1, u_1\rangle \leq 0$$

Dans :

$$\langle u_1, u_1\rangle = 0$$

on déduit que :

$$u_1 = 0$$

on obtient : $u_0 = 0$, contradiction avec l'hypothèse. Donc A est à domaine dense.

Lemme 3.4. Soit A un opérateur m-dissipatif sur un espace de Hilbert H, alors $]0, \infty[\subset \rho(A)$ et $\|R_\lambda(A)\| \leq \frac{1}{\lambda}$ pour tout $\lambda > 0$.

Démonstration.

■ Montrons $R(\lambda I - A) = X$ pour tout $\lambda > 0$. Prenons $v \in X$, alors :

$$\begin{aligned} \lambda u - Au &= v \Longleftrightarrow u - Au = u - \lambda u + v \Longleftrightarrow u - Au = (1-\lambda)u + \frac{1}{\lambda}v \\ &\Longleftrightarrow (I - A)\,u = (I - \lambda)\,u + \frac{1}{\lambda}v \\ &\Longleftrightarrow u = (I - A)^{-1}\left[(1-\lambda)\,u + \frac{1}{\lambda}v\right] \end{aligned}$$

D'après le théorème de l'application contractante, la dernière équation possède une solution unique $u \in D(A)$ si $\left\|(I - A)^{-1}\right\| |1 - \lambda| < 1$.
Et comme $\left\|(I - A)^{-1}\right\| \leq 1$, il suffit de prendre $|1 - \lambda| < 1$ ce qui implique que $\lambda < 2$.
On répète le même procédé on montre que $R(\lambda I - A) = X$ pour tout $\lambda > 0$.

■ Montrons que si $R(\lambda I - A) = X$, alors $\lambda I - A$ est injectif :
Soit $u \in D(A)$ tel que $(I - A)\,u = 0$, ceci implique :

$$\langle \lambda u - Au, \lambda u - Au\rangle = 0 \Longrightarrow \lambda^2 \|u\|^2 + \|Au\|^2 - 2\lambda \operatorname{Re}\langle Au, u\rangle = 0$$

et comme $\operatorname{Re}\langle Au, u\rangle \leq 0$ on trouve que

$$\lambda^2 \|u\|^2 + \|Au\|^2 \leq \|u\|^2 + \|Au\|^2 - 2\lambda \operatorname{Re}\langle Au, u\rangle = 0$$

ce qui implique que $u = 0$. D'où l'injectivité.

■ Montrons que $\left\|(\lambda I - A)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{\lambda}$ pour tout $\lambda > 0$:
Comme $\lambda I - A$ est bijectif, alors pour tout $v \in X$, il existe un seul élément $u \in D(A)$ tel que $\lambda u - Au = v$.
On a :

$$\begin{aligned} \|u\|^2 &= \langle u, u\rangle \\ &= \left\langle \frac{1}{\lambda} Au + \frac{1}{\lambda} v, u \right\rangle \\ &= \frac{1}{\lambda}\langle Au, u\rangle + \frac{1}{\lambda}\langle v, u\rangle \end{aligned}$$

Comme $\langle Au, u\rangle \leq 0$, alors d'après l'inégalité de Cauchy Schwartz on obtient :

$$\|u\|^2 \leq \frac{1}{\lambda} \operatorname{Re}\langle v, u\rangle \leq \frac{1}{\lambda} |\langle v, u\rangle| \leq \frac{1}{\lambda}\|u\|\,\|v\|$$

Par conséquent :

$$\|u\| \leq \frac{1}{\lambda}\|v\|$$

Ainsi :

$$\left\|(\lambda I - A)^{-1} v\right\| \leq \frac{1}{\lambda}\|v\|$$

Par conséquent : $\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}$.

Par les lemmes précédents on ne conclut que le théorème suivant :

Théorème de Lumer Phillips.
Si A est un opérateur m-dissipatif sur un espace de Hilbert, alors A est le générateur infinitésimal d'un semi groupe fortement continu de contraction

4.3 Le Laplacien de Dirichlet

4.3.1 Le laplacien faible

Définition 3.4. Pour $f \in C^2(\Omega)$, On définit le Laplacien Δf par :

$$\Delta f = \sum_{j=1}^{n} D_j^2 f \ , \ D_j^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$$

Définition 3.5. On définit le Laplacien faible comme suit :
Soit $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, $g \in L^1_{loc}(\Omega)$, on dit que :

$$\begin{aligned} \Delta f &= g \text{ faiblement si} \\ \int_\Omega \Delta\varphi f dx &= \int_\Omega \varphi g dx, \text{ pour tout } \varphi \in D(\Omega) \end{aligned}$$

et dans ce cas, on écrit

$$\Delta f = g \text{ faiblement sur } \Omega \text{ ou dans } D'(\Omega)$$

Définition 3.6. On définit l'opérateur A sur $L^2(\Omega)$ par :

$$\begin{aligned} D(A) &= \{f \in H_0^1(\Omega), \exists g \in L^2(\Omega), \text{ tq } \Delta u = v \text{ faiblement}\} \quad (3.1) \\ Af &= \Delta f \end{aligned}$$

on note A par : Δ_Ω^D.
L'opérateur A s'appelle le Laplacien de **Dirichlet**.

Théorème 3.1. L'operateur A définit par (3.1) est un générateur infinitésimal d'un semi groupe fortement continu de contraction.
Démonstartion.

■ Montrons que A est dissipatif :
Soit $u \in D(A)$, comme $v \in H_0^1(\Omega)$, il s'ensuit que pour $v \in D(\Omega)$:

$$\langle Au, v\rangle = -\int_\Omega \nabla u \nabla v dx, \forall v \in D(A) \tag{3.2}$$

Soit $v \in H_0^1(\Omega)$ quelconque.
Comme :

$$H_0^1(\Omega) = \overline{D(\Omega)} \text{ dans } H^1(\Omega)$$

Alors :

$$\begin{aligned} \exists (v_n) &\subset D(\Omega) \text{ telle que :} \\ \lim_{n\to\infty} v_n &= v \text{ dans } H^1(\Omega) \end{aligned}$$

D'aprés (3.2) on a :

$$\langle Au, v_n\rangle = -\int_\Omega \nabla u \nabla v_n dx, \forall n \tag{3.3}$$

Passons à la limite quant $n \longrightarrow \infty$:

$$\lim_{n \to \infty} \langle Au, v_n \rangle = \lim_{n \to \infty} \left(- \int_\Omega \nabla u \nabla v_n dx \right) \tag{3.4}$$

On obtient :

$$\langle Au, v \rangle = - \int_\Omega \nabla u \nabla v dx, \ \forall v \in H^1(\Omega) \tag{3.5}$$

Prenons $v = u$ dans (3.5) on obtient :

$$\langle Au, u \rangle = - \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \leq 0 \tag{3.6}$$

Ce qui montre que A est dissipatif.

■ Montrons que A est m-dissipatif :
Soit $f \in L^2(\Omega)$. L'application :

$$\Phi(v) = \int_\Omega f v dx$$

définit une forme linéaire continu sur $H_0^1(\Omega)$ telle que :

$$\int_\Omega f v dx = \int_\Omega u v dx + \int_\Omega \nabla u \nabla v dx \tag{3.7}$$

Pour tout $v \in C_c^\infty(\Omega)$ et pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$ on a :

$$\int_\Omega f v dx = \int_\Omega u v dx - \int_\Omega \Delta u v dx \tag{3.8}$$

c'est à dire :

$$f = u - \Delta u \tag{3.9}$$

(3.9) montre que A est m-dissipatif.
Alors d'aprés le théorème de Lumer Phillips Le Laplacien de Dirichlet est un générateur infinitésimal d'un semi groupe fortement continu de contraction $T(t)$; et on a la notation suivante :

$$T(t) = e^{tA} \tag{3.10}$$

Théorème 3.2. Si $u_0 \in L^2(\Omega)$, alors l'équation :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = a\Delta u(t) \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{3.11}$$

admet une unique solution

$$u(t) = T(t)\, u_0$$

Démonstration.
Si on prend $\Delta = A$ et $X = L^2(\Omega)$; donc le probléme (3.11) prend la forme :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = Au(t) \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{3.12}$$

C-à-d :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} - Au(t) = 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{3.13}$$

Pour montrer que (3.13) admet une unique solution on a bosion du théorème suivant :

Théorème 3.3. Supposons que A est m-dissipatif dans un espace de Banach X , et $u_0 \in D(A)$; Alors le problème (3.13) admet une unique solution u.

Démonstration. Le théorème de Hille-Yosida et le lemme (1.1) montrent que :

$$u(t) = T(t)\, u_0$$

est une solution de (3.11)

Pour montrer l'unicité, on suppose par l'absurd qu'il y'a deux solutions u_1, u_2 alors, la fonction $u = u_1 - u_2$ satisfait :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} - Au(t) = 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

Pour tout $t > t_0$, soit :

$$\Phi(t) = T(t)\, u(t - t_0)$$

Daprés le lemme (1.1) ; on a :

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi(t)}{dt} &= T(t) \frac{du}{dt}(t - t_0) - T(t)\, Au(t - t_0) \\ &= T(t)\, Au(t - t_0) - T(t)\, Au(t - t_0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc :

$$\Phi(t) = c$$

où c est une constante, et par conséquent $\Phi(0) = u(t_0) = c$ et $u(t_0) = 0$.

Remaeque3.1. On obtient le même résultat pour l'opérateur $a\Delta$ avec $a > 0$ une constante.

4.4 Le Laplacien de Neumann

Définition 3.7. Soit $\varnothing \neq \Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert . On définit l'opérateur :

$$\begin{aligned} D(B) &= \left\{ \begin{array}{c} f \in H^1(\Omega), \exists g \in L^2(\Omega) \text{ tq :} \\ -\int_\Omega \nabla f \nabla \varphi dx = \int_\Omega g\varphi dx, \forall \varphi \in H^1(\Omega) \end{array} \right\} \\ Bf &= g \end{aligned} \tag{3.14}$$

On note B par : Δ_Ω^N : le laplacien de **Neumann.**

Théorème 3.4. L'opérateur B définit par (3.14) est un générateur infinitésimal d'un semi groupe fortement continu de contraction

Démonstration

.■ Montrons que B est dissipatif :

Pour tout $u \in D(B)$, et tout $v \in H^1(\Omega)$ on a :

$$\begin{aligned} \langle Bu, v\rangle &= \int_\Omega Buvdx \\ &= \int_\Omega \Delta uvdx \\ &= -\int_\Omega \nabla u \nabla vdx \end{aligned}$$

Pour $v = u$ on a :

$$\begin{aligned} \langle Bu, v\rangle &= -\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

Donc B est dissipatif.

Alors le Laplacien de Neumann est un générateur infinitésimal d'un semi groupe fortement continu de contraction $T(t)$; et on a la notation suivante :

$$T(t) = e^{tB}$$

Remaeque3.2. Si $u_0 \in L^2(\Omega)$, alors l'équation :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = Bu(t) \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{3.15}$$

admet une unique solution :

$$u(t) = T(t)\, u_0$$

Bibliographie

[1] J. M. Bony, Cours d'analyse Théorie des distributions et Analyse de Fourier, Ellipses, 2001.

[2] M. Reed & B. Simon, Methods of modern mathematics Vol. 2, Academic Press INC, 1975.

[3] W. Arendt, Heat kernels, 2006.