

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique

M/510.095

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques



Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Master Académique en Mathématiques
Option : ANALYSE.



Par :

Ziaya Louiza et Azzedine Salima.

Intitulé

Optimisation de la température d'un four

Dirigé par : Dr. BENRABAH Abderafik.

Devant le jury

PRESIDENT : Dr. BOUSSETILA Nadjib.
RAPPORTEUR : Dr. BENRABAH Abderafik.
EXAMINATEUR : Dr. BENARIOUA Khadir.

Univ-Guelma
Univ-Guelma
Univ-Guelma

Session Juin 2013



Remerciements

Au nom de Dieu, Clément et Miséricordieux

" Lis, au nom de ton Seigneur qui a créé tout, Qui a créé l'homme de sang coagulé ? Lis, car ton Seigneur est plus généreux, Il t'a appris l'usage de la plume,

Il apprit à l'homme, ce que l'homme ne savait pas. "

Le Coran, Sourate 106, (1-5)

On tient à exprimer

notre profonde reconnaissance à notre encadreur du mémoire le

*docteur : **BENRABAH Abderafik,***

qui grâce à sa disponibilité, son soutien, ses conseils et ses

encouragements nous a permis de

mener à bien ce travail.

On adresse l'expression de notre gratitude à notre enseignant le

*docteur : **BOUSSETILANadjib,***

qui nous fait l'honneur de présider ce jury et d'examiner notre

mémoire. Ainsi qu'au docteur :

***BENARIOUA Khadir,** qui a accepté d'examiner notre mémoire*

et faire partie de ce jury.



Dédicace

Je dédie ce fruit de fin d'étude à la science.

A mes très chères parents :

A toi maman, la fleur de ma vie et le symbole de tendresse.

A toi papa, qui nous a toujours encouragés et insistés a terminé

Mon étude.

A mes chères sœurs : Moufida, Radia, Nadia.

Je vous souhaite une belle vie plein d'amour et de santé.

A mon seul frère : Abdelhak .

A mon neveu : Youssef.

A mon merveilleux encadreur docteur : Benrabah Abderafik,

A tous les enseignements du mathématiques.

A mes charmantes amis : Hadjer, charaf, Bouchra,

Et surtout Amel (Batta).

A ma camarade dans cet travaille : Salima .

A toute ma famille grand et petit.

A tous ceux qui j'aime et qui m'aiment.

Louiza



Dédicace

Je dédie ce mémoire

À mes parents, mon cher père et ma douce mère ; vous êtes l'exemple de dévouement.

Rien au monde ne vaut les efforts fournis jour et nuit pour mon éducation et mon bien être.

À mon frère et mes deux petites sœurs : Vous vous êtes dépensés pour moi sans compter. Sans votre aide et vos encouragements ce travail n'aurait vu le jour.

À tous ceux qui portent le nom Azzedine et toute ma famille, qu'ils trouvent ici l'expression de mon affectueuse reconnaissance et mon indéfectible attachement.

Je tiens à faire parvenir aussi mes sincères reconnaissances à Dr. Mohaned.Akli.Ikherbene dont ses encouragements durant ce travail.

Sans oublier bien sûr mes cousines, mes amies et tous qui m'ont aidé et m'ont donné le soutien moral durant mes moments de faiblesse.

Salima...

Résumé

Ce travail est consacré à l'étude d'un exemple simple mais réaliste d'un problème d'optimisation. Il s'agit de déterminer la température dans un four destiné à la cuisson d'une pièce de résine thermo-formée. Les éléments chauffants sont des résistances électriques. A partir de la valeur connue de chacune des résistances, on cherche à calculer le champ de température à l'intérieur du four, et en particulier la température de l'objet à cuire. Sachant que la température idéale de cuisson conditionne la solidité du produit fini et que des essais expérimentaux sont longs et onéreux, cette simulation permet de vérifier à moindre coût la validité des réglages du four.

Cette première approche est appelée **problème direct** ; on calcule la température de l'objet en fonction de la valeur des résistances. Mais la démarche réelle consiste à déterminer la valeur des résistances, considérées comme inconnues, en fonction de la température idéale de cuisson de l'objet qui est alors la donnée du problème approché, appelé **problème inverse**, qui est un problème d'optimisation.

Table des matières

Table des matières	iii
1 Rappels	2
1.1 Les éléments finis	2
1.1.1 Propriétés de l'espace V_b	3
1.1.2 Importance de la méthode	4
1.1.3 Les coordonnées barycentriques	4
1.1.4 Formule de Green	5
1.2 Intégrale numérique	5
1.2.1 Principes généraux	5
1.2.2 Méthode de Simpson	6
1.2.3 Méthode des Trapèzes	6
1.3 Problèmes bien posés et problèmes mal posés	7
1.4 Isolation thermique	8
2 Problème direct	9
2.1 Introduction	9
2.2 Modélisation du problème	10
2.2.1 Le cas général	10
2.2.2 Formulation du problème : Cas d'un four	12
2.3 Formulation variationnelle	14
2.3.1 Cadre abstrait	14
2.3.2 Cadre pratique	17
2.4 Système linéaire du problème direct	17
2.4.1 Discrétisation par élément finis et triangulation	17
2.4.2 Mise en oeuvre	19
2.4.2.1 Calcul de la matrice	19

2.4.3	Calcul du second membre	20
2.4.4	Le système linéaire	21
2.4.5	Prise des conditions	21
2.4.6	Résolution numérique du problème direct	22
2.4.7	Programme :1	23
2.4.8	Programme : 2	25
2.4.9	Programme :3	26
2.4.10	Programme : 4	27
3	Problème inverse	30
3.1	Formulation du problème inverse	30
3.2	Résolution du problème inverse	31
3.3	Extensions possibles	35
3.4	Résolution numérique du problème inverse	37
3.4.1	Programme : 05	37
3.4.2	Programme : 06	39
	Bibliographie	41



Rappels

1.1 Les éléments finis

La méthode des éléments finis est une méthode de résolution approchée d'équations aux dérivées partielles. D'une manière plus humoristique il s'agit de remplacer un problème compliqué pour lequel a priori on ne connaît pas de solution, par un problème plus simple.

D'une manière pratique la méthode est en grande majorité des cas mise en oeuvre via des codes de calcul informatiques. Ces outils de calcul sont aujourd'hui largement utilisés industriellement. L'idée de base de la méthode des éléments finis est de remplacer l'espace de Hilbert V sur lequel est posée la formulation variationnelle par un sous espace V_h de dimension finie. Le problème "approché" posé sur V_h se ramène à la simple résolution d'un système linéaire ; dont la matrice est appelée matrice de rigidité.

Par ailleurs, on peut choisir le mode de construction de V_h de manière à ce que le sous espace V_h soit une bonne approximation de V et que la solution u_h dans V_h de la formulation variationnelle soit proche de la solution exacte u dans V .

Définition 1.1.1. On appelle maillage un ensemble de points du domaine de définition sur lequel on va appliquer la méthode des éléments finis. Pour une application définie sur segment de \mathbb{R} , on ajoutera en général les deux extrémités du segment, pour un maillage en dimension supérieure, on sera amené à choisir éventuellement des points du contours du domaine de définition.

Définition 1.1.2. On appelle le pas du maillage la distance entre deux points successifs du maillage voisin. En dimension 1, cela se simplifie en différence des abscisses. Ce pas n'est pas nécessairement constant, il peut être judicieux de ne pas le fixer comme tel le pas (global) de l'approximation peut être défini comme le plus grand pas du maillage.



Définition 1.1.3. La triangulation est une technique permettant de déterminer la position d'un point en mesurant les angles entre ce point et d'autres points de référence dont la position est connue, et ceci plutôt que mesurer directement la distance entre les points. Ce point peut être considéré comme étant le troisième sommet d'un triangle dont on connaît deux angles et la longueur d'un côté. La triangulation est aussi une façon de découper une forme géométrique (un plan, un polygone) en une collection de triangles, un exemple classique est la triangulation de (Delaunay) une des applications de cette démarche est le maillage d'une pièce permettant l'analyse par élément finis.

Définition 1.1.4. On parle de matrice creuse lorsque la matrice comporte une majorité des zéros ; ce qui est le cas de la raideur. L'idée est de ne stocker que les termes non nuls dans un premier vecteur, puis leur position dans la matrice ce qui nécessite par exemple un vecteur d'indices de lignes et un vecteur d'indices de colonnes supplémentaires.

Remarque 1.1.1. La place mémoire occupée par ces vecteurs supplémentaires est contre balancée par la très faible taille du premier vecteur par rapport à la matrice originale. Par ailleurs, un avantage supplémentaire de cette méthode est qu'elle ne nécessite pas d'optimiser la numérotation pour diminuer la largeur de bande, ce qui peut se révéler intéressant par exemple dans des cas particuliers de modélisation où la largeur de bande varie en cours de traitement. Comme par les autres méthodes de stockage, les algorithmes de résolution du système linéaire doivent être adaptés pour tenir compte du mode de repérage particulier utilisé.

1.1.1 Propriétés de l'espace V_b

- $\dim V_b = N_b$: le nombre d'inconnue ou degré de liberté i-e ; les composantes de la solution approchée dans une base de V_b . D'un point de vue théorique il est nécessaire que ce nombre de degré de liberté puisse être aussi grand que l'on veut de manière approchée. La solution exacte de façon la plus précise possible (i-e : $N_b \rightarrow \infty$ quand $h \rightarrow 0$).
- On dit que les espaces V_b tel que ($h > 0$) forment une approximation interne de V si :
 1. $\forall h > 0; V_b \subset V$.
 2. $\forall v \in V; \exists v_b \in V_b$ tel que : $\|v - v_b\|_V \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$.
- La construction de l'espace V_b doit satisfaire :
 1. $V_b \subset H^1(]a, b[)$, (i-e : $V_b \subset C^0[a, b]$).
 2. La matrice du système doit être creuse.



3. La base de V_b est facile à définir. Soit N un entier positif $h = \frac{b-a}{N}$. On désigne par $x_i = a + ih$, $i \in \{1, \dots, N+1\}$. Les $N+1$ points du maillage, h s'appelle le pas du maillage ($x_0 = a$ et $x_N = b$). On introduit l'espace de dimension finie V_b défini par :

$$V_b = \{v_b \in \tilde{V}_b; v_b(a) = 0\},$$

avec

$$\tilde{V}_b = \{v_b : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}; v_b \in C^0([a, b]); \forall i \in \{1, \dots, N+1\}, v_b|_{[x_i, x_{i+1}]} \in P_1\}.$$

Où P_1 est l'espace vectoriel des polynômes de degré ≤ 1 .

1.1.2 Importance de la méthode

De très nombreux problèmes physiques s'expriment sous forme d'équations aux dérivées partielles soumises à des conditions aux limites particulières.

- Mécanique des solides déformables.
- Mécanique des fluides.
- Conduction thermique.
- Electromagnétisme-électrostatisme.
- Chimie, génie atomique.

De manière industrielle, l'objectif est souvent la diminution des coûts, en cernant mieux la réalité physique. D'autre fois par exemple via la simulation, l'objectif est d'investiguer des domaines difficiles ou dangereux. Par exemple, que se passe-t-il lorsqu'un TGV prend feu à mi-chemin dans le tunnel sous la manche? Quel élément est-il préférable d'améliorer dans les structures? Bien qu'une expérimentation finale grandeur nature soit souvent le seul arbitre définitif, il est beaucoup plus aisé d'utiliser une simulation pour chercher à optimiser les paramètres.

Remarque 1.1.2. - Avantages : traitement possible de géométrie complexe, détermination plus naturelle des conditions aux limites, possibilité de démonstration mathématique de convergence et majoration de l'erreur.

- **Inconvénients :** complexité de mise en oeuvre et coût en temps de calcul et en mémoire.

1.1.3 Les coordonnées barycentriques

Soit (P_0, \dots, P_n) une base affine, encore appelée repère barycentrique d'un espace affine E . Alors tout point M de l'espace affine peut s'écrire comme un barycentre des points du repère c'est à



dire qu'il existe $(n + 1)$ scalaires $(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$ vérifiant :

$$\lambda_0 \vec{MP}_0 + \lambda_1 \vec{MP}_1 + \dots + \lambda_n \vec{MP}_n = \vec{0},$$

et de plus deux systèmes de scalaires vérifiant ceci sont multiples l'un de l'autre. On appelle alors coordonnées ou coefficients barycentriques du point M un tel système de points $(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$ et les coordonnées barycentriques de M ne sont pas uniques mais seulement uniques à un coefficient multiplicateur près. Elles peuvent être définies de manière unique en fixant la somme des coordonnées à 1, de telle coordonnées sont dites normalisées.

1.1.4 Formule de Green

Soit Ω un ouvert régulier de classe C^1 . Soit ψ une fonction de classe $C^1(\bar{\Omega})$ à support borné dans le fermé $\bar{\Omega}$, alors elle vérifie la formule de **Green** :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x) dx = \int_{\partial \Omega} \psi(x) \eta_i(x) dx, \quad (1.1.1)$$

où η_i est la $i^{\text{ème}}$ composante de la normale extérieure.

1.2 Intégrale numérique

L'intégrale numérique est une composante essentielle de toute méthode d'éléments finis, s'il est toujours préférable d'utiliser l'intégration exacte lorsque cela est possible, on doit toute fois recourir fréquemment à l'intégration numérique si on souhaite développer des méthodes des éléments finis relativement générales. Dans les méthodes d'intégrations ; l'intégrale d'une fonction continue sur $[a, b]$ borné est remplacée par une somme finie. Le choix de la subdivision de l'intervalle d'intégration et celui des coefficients qu'interviennent dans la somme approchant l'intégrale sont des critères essentiels pour minimiser l'erreur.

1.2.1 Principes généraux

Soit f une fonction continue de $[a, b]$ dans \mathbb{R} , on se propose d'évaluer l'intégrale $\int_a^b f(x) d\mu(x)$, en subdivisant l'intervalle d'intégration $a < x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ et en approchant f sur chaque intervalle par une somme finie de la forme :

$$\int_a^b f(x) d\mu(x) \simeq \sum_{i=0}^{n-1} a_i f(x_i). \quad (1.2.1)$$



Une méthode d'intégration est dite d'ordre k si l'erreur commise en approchant l'intégrale pour une somme discrète :

$$e(f) = \int_a^b f(x) d\mu(x) - \sum_{i=0}^{n-1} a_i f(x_i), \quad (1.2.2)$$

est nulle lorsque f est un polynôme de degré $\leq k$ et non nulle au moins pour un polynôme de degré $\geq (k+1)$.

1.2.2 Méthode de Simpson

Dans la méthode de **Thomas Simpson (1710-1761)** la fonction f est remplacée par un polynôme du second degré définissant avec un arc de parabole passant par les points d'ordonnées $f(x_i)$, $f(x_{i+1})$ et $f(x_{i+2})$. La méthode s'écrit :

$$\int_a^b f(x) dx \simeq \sum_{i=0}^{n-1} 1/6 [(x_{i+1}) - (x_i)] \left[f(x_{i+1}) + f(x_i) + 4f\left(\frac{x_{i+1} + x_i}{2}\right) \right]. \quad (1.2.3)$$

Lorsque la subdivision se réduit à sa plus simple expression $x_0 = a$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$, et $x_2 = b$; la formule précédente devient : $\int_a^b f(x) dx \simeq 1/3(b-a)f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)$.

La méthode de **Simpson** est une méthode d'ordre 4.

L'erreur dans la méthode de **Simpson** est donnée par :

$$\left| \int_a^b f(x) dx - S \right| \leq 1/4 \frac{(b-a)^5}{n^4} \sup_{x \in [a,b]} |f^{(5)}(x)|.$$

La somme S qui approche l'intégrale s'exprime par :

$$S = h/2 \sum_{i=0}^{n-1} [f(a+ih) + f(a+(i+1)h) + 4f(a+ih+h/2)].$$

1.2.3 Méthode des Trapèzes

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ une subdivision régulière l'intervalle $[a, b]$, on note le pas de cette subdivision. Dans la méthode des **Trapèzes** la fonction f est remplacée sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ par la droite joignant les points $(x_i, f(x_i))$ et $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$. Soit :

$$h(x) = \frac{(x-x_i)f(x_{i+1}) - (x-x_{i+1})f(x_i)}{x_{i+1} - x}, \quad \forall x \in [x_i, x_{i+1}].$$



La méthode s'écrit :

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \sum_{i=0}^{n-1} [(x_{i+1}) - (x_i)] \frac{f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2}.$$

Lorsque la subdivision se réduit à sa plus simple expression ; $x_0 = a, x_1 = b$; On a :

$$\int_a^b f(x)dx \simeq 1/2(b-a)[f(a) + f(b)].$$

La méthode des **Trapèzes** est une méthode d'ordre 1. L'erreur dans la méthode des **Trapèzes** est donnée par l'expression :

$$\left| \int_a^b f(x)dx - S \right| \leq 1/12 \frac{(b-a)^3}{n^2} \sup_{x \in [a,b]} |f^{(2)}(x)|.$$

La somme $S = h/2[f(a) + f(b) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)]$. Pour améliorer la précision ; on considère parfois la formule des **Trapèzes** corrigée suivante :

$$\int_a^b f(x)dx \simeq h/2[f(a) + f(b) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)].$$

1.3 Problèmes bien posés et problèmes mal posés

Dans un livre célèbre, **Hadamard** [ref] a introduit dès **1923** la notion de problème bien posé. Il s'agit d'un problème dont :

- La solution existe.
- Elle est unique.
- Elle dépend continûment des données.

Bien entendu, ces notions doivent être précisées par le choix des espaces (et des topologies) dans lesquels les données et la solution évoluent.

Définition 1.3.1. Soit $A : E \mapsto F$ un opérateur ; E, F deux espaces normés. On dit que l'équation (ou le problème) : $Au = f$ est bien posé si :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall g \in F, \exists f \in E \text{ solution du problème (surjectivité de } A). \\ \text{La solution } u \text{ est unique (injectivité de } A). \\ \forall \epsilon > 0; \exists \gamma > 0 \text{ tel que } \|g_2 - g_1\| < \gamma \implies \|f_2 - f_1\| < \epsilon \text{ tel que } g_2 = Af_2, g_1 = Af_1, \text{ (stabilité)}. \end{array} \right.$$

Un problème qui n'est pas bien posé au sens de la définition ci-dessus est dit « mal posé » (ill-posed en anglais).



1.4 Isolation thermique

L'isolation thermique d'une paroi consiste à apposer contre la structure porteuse un matériau isolant dont l'épaisseur et la conductibilité thermique dépendent pour les bâtiments neufs de la réglementation thermique en vigueur. Ceci permet de dimensionner au plus juste la puissance de chauffage, d'économiser l'énergie et de satisfaire un bon confort thermique. C'est aussi bénéfique pour l'environnement car la réduction des consommations d'énergie limite les rejets de gaz à effets de serre amène à distinguer plusieurs procédés d'isolation thermique. Il s'agit principalement des procédés d'isolation thermique intérieure, extérieure et répartie.

Définition 1.4.1. : Un four est un utile de production destiné à élaborer ou transformer des matériaux grâce aux transferts thermiques entre une source de chaleur et la matière à traiter. Les fours sont classés généralement suivant deux groupes :

- Les fours discontinus appelés aussi fours intermittents ou fours à charge.

- Les fours continus appelés fours tunnels ou fours à passage.

En général, un four de traitement thermique est constitué :

- D'une partie inférieure, la sole qui consiste en un plan horizontal ou parfois incliné.

- D'une partie supérieure, la voûte qui peut avoir des formes diverses : plate, cintrée, avec des rampants et suspendue. La voûte est en contact avec la flamme. Elle joue un rôle essentiel dans le transfert de chaleur en renvoyant, par rayonnement sur les produits l'énergie qu'elle reçoit de la flamme.

- De murs verticaux comportants en général plusieurs épaisseurs de nature différente et faisant la liaison entre la voûte et la sole.

- D'un système de chauffage (brûleurs ou résistances électriques) généralement accroché aux parois mais dans certains cas, à la voûte ou à la sole.



Problème direct

2.1 Introduction

En mathématiques et en physique théorique, l'équation de la chaleur est une équation aux dérivées partielles parabolique, introduite initialement en **1811** par **Fourier** pour décrire le phénomène physique de conduction thermique. Elle est aussi utilisée en mathématiques financières (équation de **Black-Scholes**). L'équation générale de la chaleur est une équation aux dérivées partielles du deuxième ordre en espace et du premier ordre en temps. Cela se traduit par une constante d'intégration dans chaque direction de l'espace. Elle admet en principe une infinité de solutions, pour que le problème ait une solution unique, il est nécessaire de connaître la répartition des températures en tout point de l'espace à un temps pris pour origine, ainsi que les lois de variation de la température (ou de ses dérivées) sur les frontières du domaine étudié (conditions aux limites).

Ce travail est consacré à l'étude d'un exemple simple mais réaliste d'un problème d'optimisation. Il s'agit de déterminer la température dans un four destiné à la cuisson d'une pièce de résine thermo-formée. Les éléments chauffants sont des résistances électriques. A partir de la valeur connue de chacune des résistances, on cherche à calculer le champ de température à l'intérieur du four, et en particulier la température de l'objet à cuire. Sachant que la température idéale de cuisson conditionne la solidité du produit fini et que des essais expérimentaux sont longs et onéreux, cette simulation permet de vérifier à moindre coût la validité des réglages du four.

Cette première approche est appelée **problème direct** : on calcule la température de l'objet en fonction de la valeur des résistances. Mais la démarche réelle consiste à déterminer la valeur des



résistances, considérés comme inconnues, en fonction de la température idéale de cuisson de l'objet qui est alors la donnée du problème approché, appelé **problème inverse**, qui est un problème d'optimisation qui est traité en fin de chapitre.

2.2 Modélisation du problème

2.2.1 Le cas général

La modélisation mathématique est la science de représenter et interpréter une réalité physique en des modèles abstraits accessibles à l'analyse et au calcul. Le modèle que nous allons décrire est connu sous le nom **d'équation de la chaleur**, ou équation de diffusion. Considérons un domaine Ω de l'espace à N dimensions que l'on suppose occupé par un matériau homogène, isotrope et conducteur de la chaleur. On note x la variable d'espace, c'est à dire un point de Ω et t la variable de temps. Dans Ω les sources de chaleur (éventuellement non uniformes en espace et variables de temps) sont représentées par une fonction donnée $f(x, t)$, tandis que la température est une fonction inconnue $T(x, t)$. La quantité de chaleur est proportionnelle à la température T et vaut c_T où c est une constante physique (qui dépend du type de matériau) appelée chaleur spécifique. Pour déterminer la température T , nous écrivons la **loi de conservation de l'énergie** ou de la quantité de chaleur. Dans un volume élémentaire V inclus dans Ω , la variation en temps de la quantité de chaleur est le bilan de ce qui est produit par les sources et de ce qui sort ou rentre à travers les parois. Autrement dit :

$$\frac{d}{dt} \int_V c_T dx = \int_V f dx - \int_{\partial V} q \eta ds. \quad (2.2.1)$$

Où $\partial\Omega$ est le bord de Ω (d'élément de surface ds), η est la normale extérieure unité de V et q est le vecteur flux de chaleur. Si on applique le théorème de **Gauss**, on obtient

$$\int_{\partial V} q \eta ds = \int_V \operatorname{div} q dx.$$

Regroupant les différents termes de (2.2.1) et utilisant le fait que le volume élémentaire V est quelconque, indépendant du temps, on en déduit l'équation de conservation de l'énergie :

$$c \frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div} q = f, \quad (2.2.2)$$



qui a lieu en tout point $x \in \Omega$ et à tout temps t . Rappelons que l'opérateur divergence est défini par :

$$\operatorname{div} q = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial q_i}{\partial x_i}, \text{ avec } q = (q_1, q_2)^t.$$

Il faut maintenant relier le flux de chaleur à la température, et on fait appel à ce qu'on appelle une **loi constitutive**. Dans le cas présent, il s'agit de la loi de **Fourier** qui relie le flux de chaleur de manière proportionnelle au gradient de température

$$q = -k \nabla T. \quad (2.2.3)$$

Où k est une constante positive (qui dépend du type de matériau) appelée conductivité thermique. Rappelons que l'opérateur gradient est défini par :

$$\nabla T = \left(\frac{\partial T}{\partial x_1}, \frac{\partial T}{\partial x_2} \right)^t.$$

En combinant la loi de conservation 2.2.2 et la loi constitutive 2.2.3, on obtient une équation pour la température T .

$$c \frac{\partial T}{\partial t} - k \Delta T = f.$$

Où $\Delta = \operatorname{div} \nabla$ est l'opérateur **Laplacien** donné par :

$$\Delta T = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2}.$$

Il faut ajouter à cette équation qui est valable dans tout le domaine Ω une relation appelée **condition aux limites**, qui indique ce qui se passe à la frontière ou au bord $\partial \Omega$ du domaine, et une autre relation qui indique quel est l'état initial de la température. Par convention, on choisit l'instant $t = 0$ pour être le temps initial, et on impose une condition initiale

$$T(t = 0, x) = T_0(x),$$

où T_0 est la fonction de distribution initiale de température dans le domaine Ω . En ce qui concerne la condition aux limites, cela dépend du contexte physique. Si le domaine est supposé baigner dans un thermostat à température vérifie la condition aux limites de **Dirichlet**

$$T(t, x) = 0 \text{ pour tout } x \in \partial \Omega \text{ et } t > 0. \quad (2.2.4)$$



Si le domaine est supposé adiabatique ou thermiquement isolé de l'extérieur, alors le flux de chaleur sortant au bord est nul et la température vérifie la condition aux limites de **Neumann**

$$\frac{\partial T}{\partial \eta}(t, x) \equiv \eta(x) \cdot \nabla T(t, x) = 0 \quad \text{pour tout } x \in \partial\Omega \quad \text{et } t > 0. \quad (2.2.5)$$

Où η est la normale extérieure unité de Ω une situation intermédiaire peut aussi avoir lieu : le flux de chaleur sortant au bord est proportionnel au saut de température entre l'extérieur et l'intérieur, et la température vérifie la condition aux limites de **Fourier**

$$\frac{\partial T}{\partial \eta}(t, x) + \alpha T(t, x) = 0 \quad \text{pour tout } x \in \partial\Omega, \quad \text{et } t > 0. \quad (2.2.6)$$

Où α est une constante positive. Puisqu'il faut choisir (c'est une des étapes de la modélisation), nous allons sélectionner la condition aux limites de **Dirichlet**(2.2.4). Rassemblant enfin l'équation, la condition initiale, et la condition aux limites satisfaites par la température, on obtient l'équation de la chaleur :

$$\begin{cases} c \frac{\partial T}{\partial t} - k \Delta T = f & \text{pour } (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_*^+ \\ T(t, x) = 0 & \text{pour } (x, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_*^+ \\ T(t=0, x) = T_0(x) & \text{pour } x \in \Omega. \end{cases} \quad (2.2.7)$$

Le problème (2.2.7) est donc constitué d'une équation aux dérivées partielles munie de conditions aux limites et d'une condition initiale. A cause de la présence de conditions aux limites, on dit que (2.2.7) est un problème aux limites, mais on dit que c'est un problème de **Cauchy** à cause de la donnée initiale en temps.

Remarque 2.2.1. Dans ce modèle de propagation de la chaleur, il nous faut préciser les unités ou dimensions physiques : la température T s'exprime en Kelvin (**K**), la chaleur spécifique c en Joule par Kilogramme par Kelvin (**J/(kg.K)**), la conductivité thermique (par unité de masse) k en Joule mètre carré par kilogramme par Kelvin par seconde (**J.m²/(kg.K.s)**). D'un point de vue mathématique, nous allons très souvent oublier ces unités, et même ces constantes.

2.2.2 Formulation du problème : Cas d'un four

Dans notre travail on considère un four de forme rectangulaire comportent des résistances. Ce four est représenté par un domaine Ω de frontière $\partial\Omega$. Soit $\partial\Omega_D$ une partie de $\partial\Omega$ de mesure non nulle, on note $\partial\Omega_N$ et $\partial\Omega_F$ deux parties de la frontière telles que,

$$\partial\Omega = \partial\Omega_N \cup \partial\Omega_D \cup \partial\Omega_N \cup \partial\Omega_F,$$



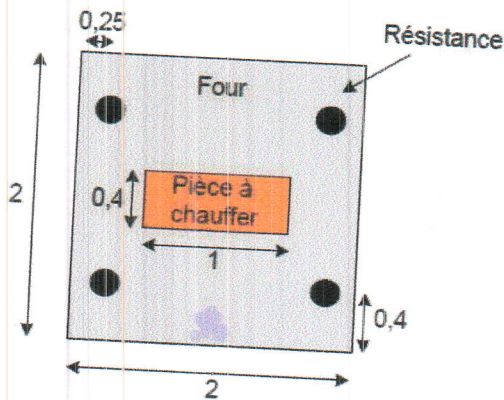


FIGURE 2.1 – L'objet dans le four

et

$$\partial\Omega_D \cap \partial\Omega_N = \partial\Omega_D \cap \partial\Omega_F = \partial\Omega_F \cap \partial\Omega_N = \emptyset.$$

On écrit alors l'équation de diffusion de la chaleur sous la forme :

$$\begin{cases} \text{Trouver } T \in V \text{ tel que} \\ -\operatorname{div}(\mathbb{K} \operatorname{grad} T) = F \text{ dans } \Omega. \end{cases} \quad (2.2.8)$$

La température du four est imposée sur une partie du bord : $T = T_D$ sur $\partial\Omega_D$. Ce type de condition est appelée condition aux limites de **Dirichlet**. Une condition sur $\partial\Omega_N$ régule les échanges thermiques avec l'extérieur, ce type de condition est appelée condition aux limites de **Neumann**. Enfin une condition de **Fourier** sur $\partial\Omega_F$ indique que les échanges thermiques entre le four et l'extérieur sont proportionnelles à la différence de température $T - T_F$.

Ces hypothèses physiques se traduisent par des conditions mathématiques associées au problème. On les appelle conditions aux limites :

$$\begin{cases} T = T_D \text{ sur } \partial\Omega_D \\ \sum_{i,j} \mathbb{K}_{i,j} \frac{\partial T}{\partial x_j} v_i = f \text{ sur } \partial\Omega_N \\ \sum_{i,j} \mathbb{K}_{i,j} \frac{\partial T}{\partial x_j} v_i = g(T - T_F) \text{ sur } \partial\Omega_F. \end{cases} \quad (2.2.9)$$

Dans cette formulation on a trouvé :

1. La température T dans le domaine Ω .
2. L'ensemble V des températures admissibles.
3. Le tenseur de conductivité thermique $\mathbb{K} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Dans un milieu homogène et isotrope $\mathbb{K} = cI_2$ avec c coefficient de conductivité.
4. Les sources de chaleur volumiques F et les sources de chaleur surfaciques f .
5. La température T_D fixée à la frontière $\partial\Omega_D$.
6. La température T_F température extérieure à la frontière $\partial\Omega_F$.
7. Le coefficient d'échange thermique g à la frontière $\partial\Omega_F$.
8. Le vecteur $\vec{v} = (v_1, v_2)^T$, normale extérieure à $\partial\Omega_F$.

2.3 Formulation variationnelle

2.3.1 Cadre abstrait

Etant donné un espace de **Hilbert** V , une forme bilinéaire continue et coercive $a(u, v)$ et une forme linéaire continue $L(v)$, on considère la formulation variationnelle :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que} \\ a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in V, \end{cases} \quad (2.3.1)$$

dont on sait qu'elle admet une unique solution par le Théorème de **Lax-Milgram**. L'approximation interne de (2.3.1) consiste à remplacer l'espace de **Hilbert** V par un sous-espace de dimension finie V_b , c'est-à-dire à chercher la solution de :

$$\begin{cases} \text{trouver } u_b \in V_b \text{ tel que} \\ a(u_b, v_b) = L(v_b), \quad \forall v_b \in V_b. \end{cases} \quad (2.3.2)$$

La résolution de l'approximation interne 2.3.2 est facile comme le montre le lemme suivant :

Lemme 2.3.1. *Soit V un espace de **Hilbert** réel et V_b un sous-espace de dimension finie. Soit $a(u, v)$ une forme bilinéaire continue et coercive sur V et $L(v)$ une forme linéaire continue sur V . Alors l'approximation interne (2.3.2) admet une unique solution. Par ailleurs cette solution peut s'obtenir en résolvant un système linéaire de matrice définie positive (et symétrique si $a(u, v)$ est symétrique).*



Démonstration. L'existence et l'unicité de $u_b \in V_b$ solution de (2.3.2) découle du Théorème de **Lax-Milgram** appliqué à V_b .

Pour mettre le problème sous une forme plus simple, on introduit une base $(\phi_j)_{1 \leq j \leq N_b}$ de V_b .

Si $u_b = \sum_{j=1}^{N_b} u_j \phi_j$, on pose $u_b = (u_1, \dots, u_{N_b})$ le vecteur dans \mathbb{R}_b^N des coordonnées de u_b .

Le problème (2.3.2) est équivalent à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_b \in \mathbb{R}_b^N \text{ tel que} \\ a \left(\sum_{j=1}^{N_b} u_j \phi_j, \phi_i \right) = L(\phi_i) \quad \forall 1 \leq i \leq N_b. \end{array} \right. \quad (2.3.3)$$

Ce qui s'écrit sous la forme d'un système linéaire :

$$x_b u_b = b_b \quad (2.3.4)$$

avec pour $1 \leq i, j \leq N_b$:

$$x_{b,i,j} = a(\phi_j, \phi_i)$$

et

$$(b_b)_i = L(\phi_i)$$

La coercivité de la forme bilinéaire $a(u, v)$ entraîne le caractère défini positif de la matrice x_b et donc son inversibilité.

En effet, pour tout vecteur $u_b \in \mathbb{R}_b^N$ on a

$$x_b u_b \cdot u_b \geq \nu \left(\left\| \sum_{j=1}^{N_b} u_j \phi_j \right\| \right)^2 \geq C \|u_b\|^2, \text{ avec } C > 0,$$

car toutes les normes sont équivalentes en dimension finie ($\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne dans \mathbb{R}_b^N). De même la symétrie de $a(u, v)$ implique celle de x_b est appelée matrice de rigidité. \square

Nous allons maintenant comparer l'erreur commise en remplaçant l'espace V par son sous-espace V_b , plus précisément nous allons majorer la différence $\|u - u_b\|$ où u est la solution dans V de (2.3.1) et u_b celle dans V_b de (2.3.2). Précisons auparavant quelques notations : on note $\nu > 0$ la constante de coercivité et $M > 0$ la constante de continuité de la forme bilinéaire $a(u, v)$ qui vérifient :

$$a(u, u) \geq \nu \|u\|^2 \quad \forall u \in V.$$



$$a(u, v) \leq M \|u\| \|v\| \quad \forall u, v \in V.$$

Le lemme suivant dû à **Jean Céa** montre que la distance entre la solution exacte u et la solution approchée u_b est majorée uniformément par rapport au sous-espace V_b par la distance entre u et V_b .

Lemme 2.3.2. (de Céa) : on se place sous les hypothèses du lemme précédent. Soit u la solution de (2.3.1) et u_b celle de (2.3.2). On a :

$$\|u - u_b\| \leq \frac{M}{\nu} \inf_{v \in V_b} \|u - v\|. \quad (2.3.5)$$

Démonstration. Puisque $V_b \subset V$, on déduit par soustraction des formulations variationnelles (2.3.1) et (2.3.2) que :

$$a(u - u_b, w_b) = 0 \quad \forall w_b \in V_b.$$

En choisissant $w_b = u_b - v_b$ on obtient :

$$\nu \|u - u_b\|^2 \leq a(u - u_b, u - u_b) = a(u - u_b, u - v_b) \leq M \|u - u_b\| \|u - v_b\|,$$

d'où l'on déduit (2.3.5). □

Lemme 2.3.3. On se place sous les hypothèses du lemme de Céa . On suppose qu'il existe un sous-espace $\mathcal{V} \subset V$ dense dans V et une application r_b de \mathcal{V} dans V_b (appelée opérateur d'interpolation) tels que :

$$\lim_{b \rightarrow 0} \|v - r_b(v)\| = 0 \quad \forall v \in \mathcal{V}. \quad (2.3.6)$$

Alors la méthode d'approximation variationnelle interne converge, c'est à dire que :

$$\lim_{b \rightarrow 0} \|u - u_b\| = 0. \quad (2.3.7)$$

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. Par densité de \mathcal{V} il existe $v \in \mathcal{V}$, tel que $\|u - v\| \leq \epsilon$. Par ailleurs, il existe un $h_0 > 0$ (dépendant de ϵ) tel que ; pour cet élément $v \in \mathcal{V}$, on a :

$$\|v - r_b(v)\| \leq \epsilon \quad \forall b \leq h_0.$$

En vertu du lemme, on a :

$$\|u - u_b\| \leq C \|u - r_b(v)\| \leq C (\|u - v\| + \|v - r_b(v)\|) \leq 2C \epsilon,$$

d'où l'on déduit le résultat. □



La stratégie indiquée par les lemmes ci-dessus est maintenant claire. Pour obtenir une approximation numérique de la solution exacte du problème variationnel (2.3.1), il faut introduire un espace V_b de dimension finie puis résoudre un simple système linéaire associé à l'approximation variationnelle interne (2.3.2). Néanmoins, le choix de V_b n'est pas évident. Il faut qu'il respecte deux critères :

1. On doit pouvoir construire un opérateur d'interpolation r_b de V satisfaisant (2.3.6) (où typiquement V est un espace de fonctions régulières).
2. Il faut que la résolution du système linéaire $x_b u_b = b_b$ soit économique (en pratique ces systèmes linéaires sont de très grandes tailles).

La méthode des éléments finis consiste précisément à fournir de tels "bons" espaces V_b .

2.3.2 Cadre pratique

Pour simplifier le problème, on traitera le cas d'une **isolation thermique parfaite**, qui se traduit par la condition $f = 0$ sur $\partial\Omega_N$ et $g = 0$ sur $\partial\Omega_F$.

Le problème physique est maintenant entièrement déterminé. Pour obtenir le problème mathématique correspondant on utilise la formule de **Green** : $\forall T, T' \in V$

$$-\int_{\Omega} \text{div} \left[\overrightarrow{\mathbb{K} \text{grad} T} \right] T' dx = \sum_{i,j} \int_{\Omega} \mathbb{K}_{i,j} \frac{\partial T}{\partial x_j} \frac{\partial T'}{\partial x_i} dx - \sum_{i,j} \int_{\partial\Omega} \mathbb{K}_{i,j} \frac{\partial T}{\partial x_j} T' v_i ds.$$

On introduit alors le sous-espace $V^0 \subset V$ par $V^0 = \{T' \in V, T' |_{\partial\Omega_D} = 0\}$, et on écrit la formulation variationnelle du problème de thermique

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } T \in V^0 + T_D, \text{ tel que} \\ \forall T' \in V^0, \sum_{K \in \mathcal{T}_b} \int_K \overrightarrow{\text{grad} T'} \overrightarrow{\mathbb{K} \text{grad} T} dx = \sum_{K \in \mathcal{T}_b} \int_K T' F dx. \end{array} \right. \quad (2.3.8)$$

On peut démontrer que le problème (2.3.8) est équivalent au problème physique (2.2.8)+(2.2.9) et qu'il admet la même solution unique T .

2.4 Système linéaire du problème direct

2.4.1 Discrétisation par élément finis et triangulation

La forme du domaine Ω , l'expression des données physiques du problème (souvent mesurées expérimentalement) ne permettent pas dans le cas général de trouver une solution du problème



(2.2.8) et (2.2.9) sous la forme explicite $T(x, y)$. Cette solution ne peut être obtenue que par valeurs approchées, à l'aide par exemple de la méthode des éléments finis. Cette méthode consiste à découper le domaine Ω en éléments triangulaires et à représenter la solution T dans chaque triangle par un polynôme dont on doit calculer les coefficients. On appelle triangulation \mathcal{T}_b du domaine Ω un ensemble des triangles répondant aux conditions suivantes :

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_b},$$

et

$$\forall K, K' \in \mathcal{T}_b, \quad K \cap K' = \begin{cases} \emptyset, \text{ ou} \\ \text{un sommet commun à } K \text{ et } K', \text{ ou} \\ \text{un côté commun à } K \text{ et } K'. \end{cases}$$

A l'aide de la triangulation \mathcal{T}_b ; on construit V_b sous-espace vectoriel de dimension finie de V . Pour cette construction, le choix le plus simple correspond aux éléments finis de **Lagrange** de degré 1. Dans un triangle quelconque K de \mathcal{T}_b de sommets A_1, A_2 et A_3 un élément T'_b de V_b s'écrit :

$$T'_b(x, y) = T'_b(A_1)\lambda_1 + T'_b(A_2)\lambda_2 + T'_b(A_3)\lambda_3. \quad (2.4.1)$$

Où λ_i est la $i^{\text{ème}}$ coordonnée barycentrique du point M de coordonnée (x, y) dans le triangle K , de sommets A_1, A_2 et A_3 sont les trois réels λ_1, λ_2 et λ_3 (uniques si A_1, A_2 et A_3 ne sont pas alignés) vérifiant :

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1,$$

et

$$\overrightarrow{OM} = \lambda_1 \overrightarrow{OA_1} + \lambda_2 \overrightarrow{OA_2} + \lambda_3 \overrightarrow{OA_3}.$$

Les coordonnées cartésiennes (x, y) d'un point M sont liées à ses coordonnées barycentriques $(\lambda_1, \lambda_2 \text{ et } \lambda_3)$ dans le triangle de sommets A_1, A_2 et A_3 par les relations :

$$\begin{cases} x(M) = x(A_3) + [x(A_1) - x(A_3)] \lambda_1 + [x(A_2) - x(A_3)] \lambda_2. \\ y(M) = y(A_3) + [y(A_1) - y(A_3)] \lambda_1 + [y(A_2) - y(A_3)] \lambda_2. \end{cases} \quad (2.4.2)$$

Avec ces notations, la relation (2.4.1) s'écrit encore :

$$T'_b(x, y) = T'_b(A_3) + [T'_b(A_1) - T'_b(A_3)] \lambda_1 + [T'_b(A_2) - T'_b(A_3)] \lambda_2.$$



On définit alors le sous-espace $V_b^0 \subset V_b$,

$$V_b^0 = \{T' \in V_b, T'|_{\partial\Omega_D} = 0\}.$$

Soit T_D un élément de V_b défini par ses valeurs $T_D(A_1)$ aux sommets de la frontière $\partial\Omega_D$ - elles sont données par les conditions (2.2.9) - et qui est nul aux autres sommets de \mathcal{T}_b .

La formulation variationnelle approchée du problème (2.3.8) s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } T_b \in V_b^0 + T_D, \text{ tel que} \\ \forall T' \in V_b^0, \sum_{K \in \mathcal{T}_b} \int_K \overrightarrow{\text{grad}}^t T'_b \mathbb{K} \overrightarrow{\text{grad}} T_b dx = \sum_{K \in \mathcal{T}_b} \int_K T'_b F dx. \end{array} \right. \quad (2.4.3)$$

2.4.2 Mise en oeuvre

La formulation variationnelle (2.4.3) fait intervenir des intégrales définies sur les triangles de \mathcal{T}_b . A fin de détailler les calculs à réaliser, examinons ces termes pour un élément quelconque K . Il faut évaluer

$$\int_K \overrightarrow{\text{grad}}^t T'_b \mathbb{K} \overrightarrow{\text{grad}} T_b dx,$$

et

$$\int_K T'_b F dx.$$

2.4.2.1 Calcul de la matrice

Pour tout élément T'_b de V_b il faut calculer $\overrightarrow{\text{grad}}^t T'_b$.

Toute fonction $T'_b \in V_b$ vérifie :

$$\frac{\partial T'_b}{\partial \lambda_i} = \frac{\partial T'_b}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \lambda_i} + \frac{\partial T'_b}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \lambda_i}, \quad \text{pour } i = 1, 2. \quad (2.4.4)$$

Mais d'après les relations (2.4.1) et (2.4.2)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T'_b}{\partial \lambda_1} = T'_b(A_1) - T'_b(A_3), \quad \frac{\partial x}{\partial \lambda_1} = x(A_1) - x(A_3), \quad \frac{\partial y}{\partial \lambda_1} = y(A_1) - y(A_3). \\ \frac{\partial T'_b}{\partial \lambda_2} = T'_b(A_2) - T'_b(A_3), \quad \frac{\partial x}{\partial \lambda_2} = x(A_2) - x(A_3), \quad \frac{\partial y}{\partial \lambda_2} = y(A_2) - y(A_3). \end{array} \right.$$

On en déduit une nouvelle formulation de (2.4.4)

$$\begin{pmatrix} T'_b(A_1) - T'_b(A_3) \\ T'_b(A_2) - T'_b(A_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(A_1) - x(A_3) & y(A_1) - y(A_3) \\ x(A_2) - x(A_3) & y(A_2) - y(A_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial T'_b}{\partial x} \\ \frac{\partial T'_b}{\partial y} \end{pmatrix}. \quad (2.4.5)$$

Le déterminant de la matrice de (2.4.5) est :

$$\Delta = [x(A_1) - x(A_3)][y(A_2) - y(A_3)] - [x(A_2) - x(A_3)][y(A_1) - y(A_3)].$$

Sa valeur absolue est égale à deux fois la surface du triangle K .

La matrice de (2.4.5) est donc inversible, on pose alors :

$$[dlT'_b]_K = \begin{pmatrix} T'_b(A_1) \\ T'_b(A_2) \\ T'_b(A_3) \end{pmatrix},$$

et

$$B = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} y(A_2) - y(A_3) & y(A_3) - y(A_1) & y(A_1) - y(A_2) \\ x(A_3) - x(A_2) & x(A_1) - x(A_3) & x(A_2) - x(A_1) \end{pmatrix}.$$

On obtient la relation

$$\int_K [\overrightarrow{grad} T'_b]^T \mathbb{K} \overrightarrow{grad} T_b dx = [dlT'_b]_K^T [A_K] [dlT_b]_K,$$

dans laquelle la matrice "élémentaire" $[A_K]$ vérifie

$$[A_K] = \frac{1}{2} c(K) \Delta B^T B.$$

Le coefficient de conductivité dans le triangle K , noté $c(K)$ est distinct pour l'air et la résine.

2.4.3 Calcul du second membre

Supposons pour simplifier que la source de chaleur F est constante par élément. On prend donc $F = 1$ si le triangle K contient une résistance, 0 sinon. En utilisant les mêmes notations on écrit

$$\int_K T'_b F dx = [dlT'_b]_K^T [b_K],$$

avec

$$[b_K] = \frac{1}{6} F(K) \Delta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



- N_s **Coorneu**[N_s , 1], **Coorneu**[N_s , 2], **Refneu**[N_s] : numero du sommet, ses coordonnées et sa référence (numero de frontière)(un entier, deux réels, un entier)
- La liste des triangles : pour $N_t=1$, **Nbtri**
- N_t **Numtri**[N_t , 1 :3], **Reftri**[N] : numero du triangle, numeros de ses sommets et sa référence (numero du milieu)(cinq entiers)

Notre problème consiste à :

1. Créer un maillage (ou relire un des fichiers) et vérifier le contenu des tableaux **Coorneu**, et **Numtri**.
2. Calculer les tableaux élémentaires dans chaque triangle.
3. Ecrire une procédure qui assemble le système linéaire à partir des tableaux élémentaires.
4. Modifier le système linéaire pour prendre en compte les conditions aux limites.
5. Résoudre le système linéaire résultant.
6. Visualiser les résultats sous forme de courbes isothermes.

La procédure du fichier **four.m** réalise l'expérimentation numérique proposée. Elle fixe les valeurs des paramètres physiques (localisation des résistances, conductivité des matériaux, valeur de la température au bord du four). Elle appelle la procédure du fichier **four.m** qui calcul les champs de température associés à ces données.

2.4.7 Programme :1

Résolution du système linéaire (problème direct)

$[T_0, Tres, Numtri, Coorneu] = \text{four}(Refdir, Valdir, Conduc, Pres);$

Données : **RefDir** : numéros de frontière où la température est imposée

ValDir : valeur de la température imposée

Conduc : coefficients de conductivité

Pres : positions des résistances thermiques

Résultats : **T0** : champ de température associé au problème sans résistance

Tres : champs de température associé aux résistances



Numtri : liste des sommets des triangles

Coorneu : coordonnées des sommets des triangles

Lecture du maillage

```
[Nbpt,Nbtri,Coorneu,Refneu,Numtri,Reftri] = liremail;
```

Tracé du maillage

```
dessinemaillage(Coorneu,Numtri,Reftri,Nbtri);
```

Assemblage du système linéaire

```
[Atotal] = assa(Nbpt,Nbtri,Coorneu,Refneu,Numtri,Reftri,Conduc);
```

```
btotal = zeros(Nbpt,1);
```

Les conditions aux limites

```
[Aelim,belim] = elim(Atotal,btotal,Refneu,Refdir,Valdir);
```

Visualisation de la matrice A

```
nf = 25; figure(nf); fs = 18;
```

```
spy(Aelim);
```

```
title('Matrice A (maillage fin)', 'FontSize', fs);
```

Résolution du problème sans source de chaleur

```
T0 = Aelim \ belim;
```

```
fprintf('\ n Calcul de la temperature homogène')
```

Résolutions des problèmes avec source de chaleur

```
for i = 1 : size(Pres,1)
```

```
    Pos = Pres(i,:);
```

```
    b = source(Pos,Numtri,Coorneu);
```

```
    Tres(:,i) = Aelim \ b;
```

```
    fprintf('\ n Calcul de la température associée à la résistance i',i);
```

```
end
```

Remarque 2.4.1. La procédure **assa.m** construit le système linéaire associé à l'équation de la chaleur



2.4.8 Programme : 2

Assemblage de la matrice du système linéaire (problème direct)

```
fonction [Atotal] = assa(Nbpt, Nbtri, Coorneu, Refneu, Numtri, Reftri, Conduc);
```

Données : Nbpt : nombre de points du maillage
 Nbtri : nombre de triangles du maillage
 Coorneu : coordonnées des sommets des triangles
 Refneu : numéros de frontière des sommets des triangles
 Numtri : liste des sommets des triangles
 Reftri : numéros de milieu des triangles
 Conduc : coefficients de conductivité

Résultats : Atotal : matrice assemblée pour le problème direct

```
Atotal = sparse(Nbpt, Nbpt);
```

Boucle sur les éléments

```
for k = 1 : Nbtri
```

Les coordonnées des sommets

```
M = [Coorneu(Numtri(k,1),:); Coorneu(Numtri(k,2),:);  
Coorneu(Numtri(k,3),:)]';
```

Le déterminant

```
Delta = abs(det([M; 111]));
```

La matrice du gradient

```
Dp = [M(2,2)-M(2,3) M(2,3)-M(2,1) M(2,1)-M(2,2); M(1,3)-M(1,2) M(1,1)-M(1,3) M(1,2)-  
M(1,1)];
```

```
Dp = Dp/Delta;
```

Assemblage de la matrice globale

```
for i = 1 : 3
```

```
for j = 1 : 3
```

```
Atotal(Numtri(k,i), Numtri(k,j)) = Atotal(Numtri(k,i), Numtri(k,j)) + Conduc(Reftri(k)) *  
Delta * (Dp(:,i)' * Dp(:,j)) / 2;
```




```

    end
  end
end

```

Remarque 2.4.2. – On note que le second membre est nul en dehors des éléments qui contiennent une résistance thermique

– la procédure `elim.m` assure la prise en compte de `s` conditions aux limites.

2.4.9 Programme :3

Assemblage de la matrice du système linéaire (problème direct) et Prise en compte des conditions aux limites de Dirichlet

```

function[Aelim,belim] = elim(Atotal,btotal,Refneu,Refdir,Valdir);

```

Données : `Atotal` : matrice assemblée pour le problème direct

`Refneu` : numéros de frontière des sommets des triangles

`RefDir` : numéros de frontière où la température est imposée

`ValDir` : valeur de la température imposée

Résultats : `Aelim`, `belim` : matrice et second membre modifiés

Modification du second membre

```

Nbpt = size(Atotal,1);

```

```

Ndir = size(Refdir,1);

```

```

TD = zeros(Nbpt,1);

```

```

    for k = 1:Ndir

```

```

        for i = 1:Nbpt

```

```

            if Refneu(i) == Refdir(k)

```

```

                TD(i) = Valdir(k);

```

```

            end

```

```

        end

```

```

    end

```



```

belim = bttotal - Atotal * TD;
Elimination dans la matrice
Aelim = Atotal;
  for k = 1:Ndir
    for i = 1:Nbpt
      if Refneu(i) == Refdir(k)
        for j = 1:Nbpt
          Aelim(i,j) = 0;
          Aelim(j,i) = 0;
        end
        Aelim(i,i) = Atotal(i,i);
        belim(i) = TD(i)*Atotal(i,i);
      end
    end
  end
end

```

2.4.10 Programme : 4

Résolution du problème direct : Calcul des champs de température en fonction des sources de chaleur

```

clear all; close all;
Les coordonnées des résistances
Pres = [-.80.80; .80.80; -.85 - .85; .85 - .85]; (4 résistances, ou)
Pres = [-.75.75; 0..75; .75.75; -.75 - .75; 0. - .75; .75 - .75]; 6 résistances
La conductivité
Conduc = [10.1.];
Les conditions aux limites
Refdir = [1;2]; Valdir = [100;50];
Calcul des champs de température
[T0, Tres, Numtri, Coorneu] = four(Refdir, Valdir, Conduc, Pres);
Tracé des résultats
nf = 1; figure(nf);

```



```

trisurf(Numtri,Coorneu(:,1),Coorn(:,2),Tres(:,k));
nf = size(Pres,1);
  for k = 1:nf
    nft = k + 1;figure(nft);
    trisurf(Numtri,Coorneu(:,1),Coorneu(:,2),Tres(:,k))
  end
fid = fopen('temp.fin','w');
save fid T0 Tres

```

Un champ de température est présenté sur la figure (2.2). On y voit les variations de la température dans le domaine Ω pour une température imposée de $T_D = 50$ degrés sur le bord supérieur du four ($y = 1$) et $T_D = 100$ degrés sur le bord inférieur ($y = -1$), sans résistance chauffante.

Un autre champ de température est présentée sur la figure (2.3) : il s'agit des variations de la température avec les conditions aux limites précédentes plus quatres résistances chauffantes (chacune de valeur 25000).

- On constate que la température obtenue dans l'objet est très éloignée de la température idéale de cuisson, qui vaut dans notre exemple 250 degrés. Pour corriger ce défaut il faut bien augmenter la valeur des résistances ; **mais de combien ?**
- Pour réaliser ce calcul, nous sommes partis de valeurs connues des résistances pour calculer la température de l'objet. C'est ce qu'on appelle un problème direct : les valeurs des résistances sont les données du problème, la température de l'objet en est l'inconnue.

Remarque 2.4.3. Dans la réalité les ingénieurs ne procèdent pas de cette manière. Puisque la qualité du produit fini dépend de la température idéale de cuisson, il faut déterminer les valeurs des résistances qui permettent de chauffer l'objet à cette température.

Il s'agit alors d'un problème inverse : la température de l'objet est une donnée du problème, les valeurs des résistances sont les inconnues.

C'est l'objectif du chapitre suivant.



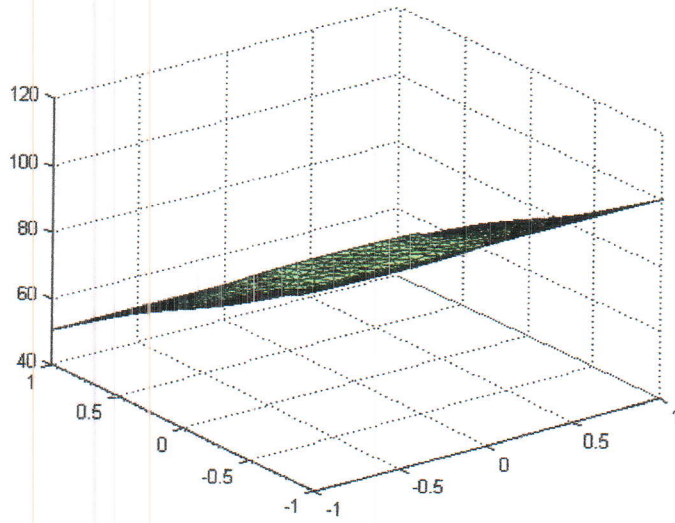


FIGURE 2.2 – La température sans résistance

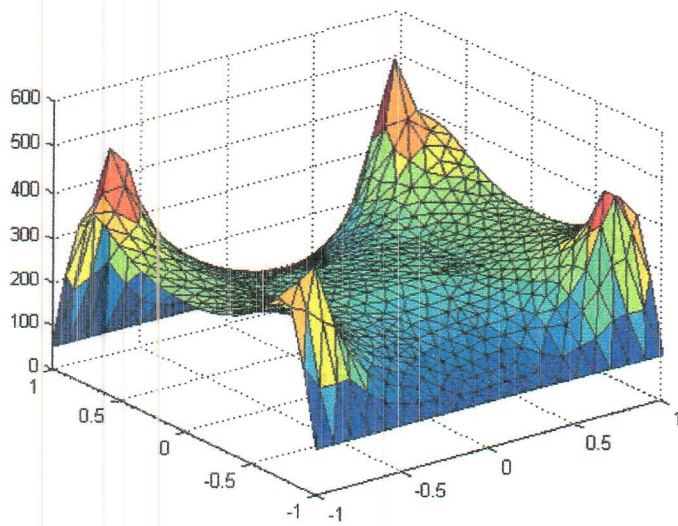


FIGURE 2.3 – La température avec 4 résistances

Problème inverse

3.1 Formulation du problème inverse

Dans la réalité les ingénieurs procèdent de la manière suivante :

Puisque la qualité du produit fini dépend de la température idéale de cuisson, il faut déterminer les valeurs des résistances qui permettent de chauffer l'objet à cette température.

Il s'agit alors d'un **problème inverse** : la température de l'objet est une donnée du problème, les valeurs des résistances sont les inconnues.

Le problème (2.2.8)- (2.2.9) a une propriété importante, il est dit linéaire au sens suivant : si T' est la solution du problème correspondant aux données F' , T'_D , f' et T'' la solution du problème correspondant aux données F'' , T''_D , f'' , alors $T' + T''$ est la solution du problème aux données $F' + F''$, $T'_D + T''_D$, $f' + f''$. Pour déterminer les valeurs des résistances qui permettent de chauffer l'objet à la température idéale de cuisson, on va utiliser cette propriété.

La température T du four pour une température aux bords T_D et un flux de chaleur f imposés à la frontière et avec nr résistances s'écrit :

$$T = T_0 + \sum_{k=1}^{nr} \alpha_k T_k, \quad (3.1.1)$$

où α_k est la valeur de la résistance k et T_k le champ de la température associé quand la résistance k est seule à chauffer le four.

Pour obtenir la température idéale T_{opt} , dans l'objet à cuire S , il faut donc déterminer les valeurs α_k des résistances. On les obtient par minimisation de la fonctionnelle

$$J(\alpha) = \int_S \left[T_{opt}(x) - T_0(x) - \sum_{k=1}^{nr} \alpha_k T_k(x) \right]^2 dx, \quad (3.1.2)$$

la fonctionnelle J est strictement convexe en α .

Elle atteint son unique minimum pour la valeur de α qui annule son gradient. Pour $k = 1, 2, \dots, nr$ la composante k du vecteur gradient est

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha_k} = 2 \int_S [T_{opt}(x) - T_0(x) - \sum_{k'=1}^{nr} \alpha_{k'} T_{k'}(x)] T_k(x) dx. \quad (3.1.3)$$

Définissons alors la matrice $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{nr \times nr}$ et le vecteur $\tilde{b} \in \mathbb{R}^{nr}$ par :

$$\tilde{A}_{k,k'} = \int_S T_k(x) T_{k'}(x) dx, \quad (3.1.4)$$

et

$$\tilde{b}_k = \int_S T_k(x) (T_{opt}(x) - T_0(x)) dx. \quad (3.1.5)$$

La valeur optimale des résistances est obtenue comme solution du système linéaire

$$\tilde{A}\alpha = \tilde{b}. \quad (3.1.6)$$

3.2 Résolution du problème inverse

1. Construire et résoudre le système linéaire associé au problème d'optimisation de la température de cuisson.
2. Calculer le champ de température défini par les valeurs calculées des résistances. Discuter les résultats.

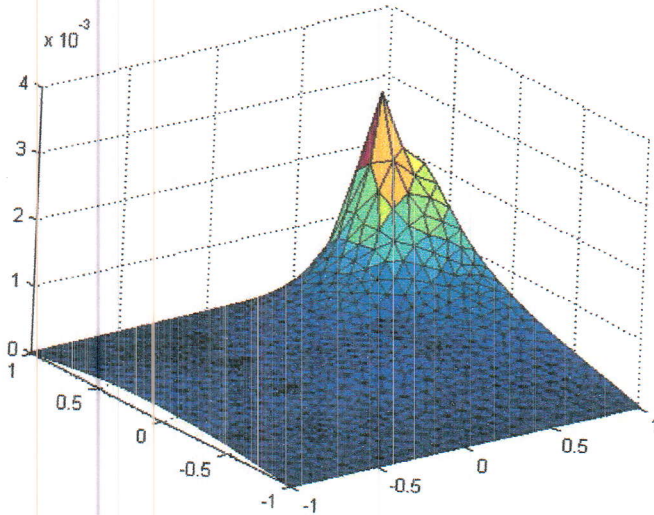
Dans un premier temps il faut résoudre les $nr + 1$ problèmes directs qui permettent de calculer les champs de températures T_0 et T_k ($k = 1, 2, \dots, nr$). On utilisera pour cela $nr + 1$ fois la procédure mise au point pour résoudre le problème direct, en modifiant les données T_D , f et F pour chaque calcul (il faut de plus choisir la position de chacune des résistances dans le four). Les champs de température ainsi obtenus seront stockés dans $n + 1$ tableaux distincts.

Plus précisément, on résout d'abord un problème (2.2.8- 2.2.9) avec un terme source nul ($F = 0$), mais avec une température $T_D \neq 0$ et flux de chaleur $f = 0$ imposés à la frontière. La solution de ce premier problème, notée T_0 , et représentée sur la figure (2.2).

Remarque 3.2.1. On constate que les conditions aux limites sont bien respectées :

- Température imposée $T = 100$ en $y = -1$ et $T = 50$ en $y = 1$.
- La conductivité thermique est $c = 1$ dans l'air et $c = 10$ dans l'objet.



FIGURE 3.1 – la température T_2

- La condition de flux nul sur les deux autres côtés se traduit par des lignes isothermes perpendiculaires aux plans $x = -1$ et $x = 1$.

Ensuite on résout successivement autant de problèmes (2.2.8- 2.2.9) qu'il y a de sources de chaleur (un problème par résistance). Chaque cas consiste à calculer la température du four quand une seule résistance fonctionne, ce qui revient à faire $F = 0$ dans chaque triangle \mathcal{T}_b , sauf dans l'unique triangle qui contient la résistance, dans lequel on prend $F = 1$. Les conditions aux limites associées sont :

- Température $T_D = 0$ sur $\partial\Omega_D$ et le flux de chaleur $f = 0$ sur $\partial\Omega_N$.
- La température associée à la résistance k est notée T_k .

Sur la figure (3.1) on voit une représentation d'un champ de température associé à une seule résistance. Noter la faible valeur du maximum ! On constate à nouveau que les conditions aux limites sont respectées :

- La température est nulle en $y = -1$, et $y = 1$.
- La condition de flux nul se traduit par des lignes isothermes perpendiculaires aux plans verticaux $x = -1$ et $x = 1$.

Pour résoudre le problème inverse, il faut maintenant construire le système linéaire (3.1.6). Pour



cela il faut calculer des intégrales du type

$$\int_S T_k(x) T_{k'}(x) dx, \quad (3.2.1)$$

dans lesquelles les champs de température T_k et $T_{k'}$ sont connus.

Pour effectuer ce calcul on utilise la même technique que pour le problème direct :

- On écrit tout d'abord que l'intégrale sur l'objet est la somme des intégrales sur chacun des triangles contenus dans l'objet

$$\int_S T_k(x) T_{k'}(x) dx = \sum_{KCS} \int_K T_k(x) T_{k'}(x) dx. \quad (3.2.2)$$

- On évalue ensuite chacune des intégrales sur K , en reprenant l'expression particulière de $T_k(x)$ et $T_{k'}(x)$ dans le triangle

$$T_k(x) = T_k(A_3) + [T_k(A_1) - T_k(A_3)] \lambda_1 + [T_k(A_2) - T_k(A_3)] \lambda_2. \quad (3.2.3)$$

Dans cette formule λ_i est la $i^{i\text{me}}$ coordonnée barycentrique du point M de coordonnées x dans le triangle K de sommets A_i .

- On voit donc que l'on peut écrire

$$\int_K T_k(x) T_{k'}(x) dx = [dl T_{k,K}]^T [M_K] [dl T_{k',K}]. \quad (3.2.4)$$

Ce qui introduit

- $[M_K]$, la matrice de masse de l'élément K .
- La surface de l'élément K notée $mes K$.

La matrice de masse du triangle de lagrange de degré 1 est

$$[M_K] = \frac{1}{6} mes K \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Le coefficient $\tilde{A}_{k,k'}$ de la matrice du système linéaire (3.1.6) est obtenu par sommation sur tous les triangles internes à l'objet à cuire des quantités

$$[dl T_{k,K}]^T [M_K] [dl T_{k',K}]$$

qui sont calculables puisque l'on connaît les valeurs $T_{k,K}$ du champ de température $T_{k,K}$ aux trois sommets du triangle K . On procède de même pour calculer le second membre b . Un exemple

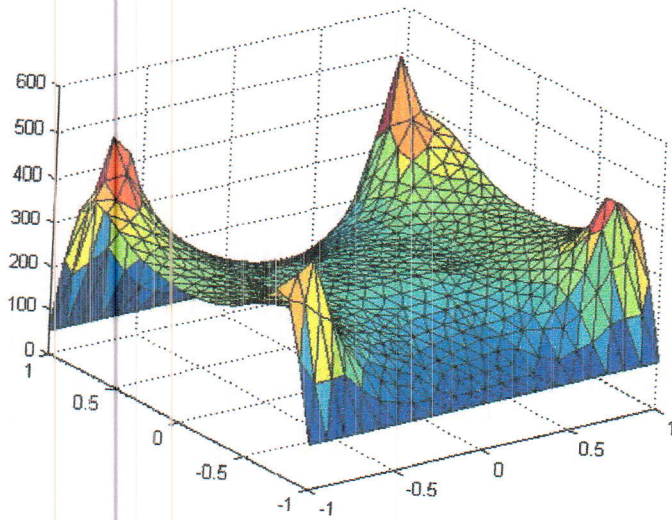


FIGURE 3.2 – La température optimisée pour 4 résistances

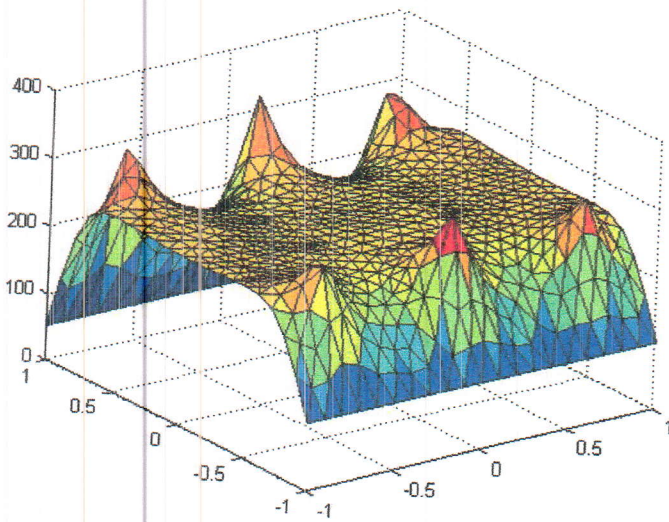


FIGURE 3.3 – La température optimisée pour 6 résistances

de calcul pour un système chauffant de 4 résistances est présenté sur la figure (3.2).

On y voit le champ de température optimisé obtenu après calcul des coefficients α_k . La figure (3.3) montre la solution obtenue pour un système chauffant de 6 résistances.

On constate que la température sur l'objet S , contenu dans le rectangle $[-0,5;0,5] \times [-0,2;0,2]$ est proche de la température idéale de cuisson fixée à 250 degrés.

Remarque 3.2.2. La valeur optimale des coefficients α_k dépend du nombre et de l'emplacement des résistances par rapport à l'objet.

3.3 Extensions possibles

Un prolongement intéressant de cette étude est d'optimiser la distribution géométrique des résistances dans le four. Le but pratique de cette recherche peut être d'optimiser la puissance thermique dissipée par les résistances pour obtenir la température idéale de cuisson (on veut plus économiser l'énergie de chauffage).

On peut modéliser cette puissance thermique par un terme supplémentaire dans la fonctionnelle que l'on minimise

$$J(\alpha) = \int_S [T_{opt}(x) - T_0(x) - \sum_{k=1}^{nr} \alpha_k T_k(x)]^2 dx + C \|\alpha\|_2^2.$$

Remarque 3.3.1. Suivant le cas, on peut obtenir des valeurs α_k très petites ou même négatives. Ceci montre que les résistances correspondantes sont placées trop près de l'objet et doivent refroidir la pièce plutôt que la chauffer.

Sur la figure (3.4) on voit que le dispositif avec 6 résistances permet d'avoir une zone à température constante plus étendue, ce qui facilite la régulation thermique. Ces premiers calculs, effectués sur un maillage comprenant 173 sommets pour 304 triangles, donnent des résultats satisfaisants, ils permettent de valider la démarche de modélisation ainsi que les procédures. Néanmoins, pour une proche plus réaliste et plus précise, il est nécessaire de résoudre le problème sur un maillage avec plus de points. Un second calcul est donc effectué sur un maillage comprenant 732 sommets pour 1392 triangles et 6 résistances. Le résultat final est présenté sur la figure (3.5). On voit une nette amélioration de la représentation de la température au voisinage de l'objet et des résistances, due à une meilleure précision des calculs.

Cette amélioration, cohérente avec la théorie de la méthode des éléments finis, se paie par une augmentation sensible du temps calcul.



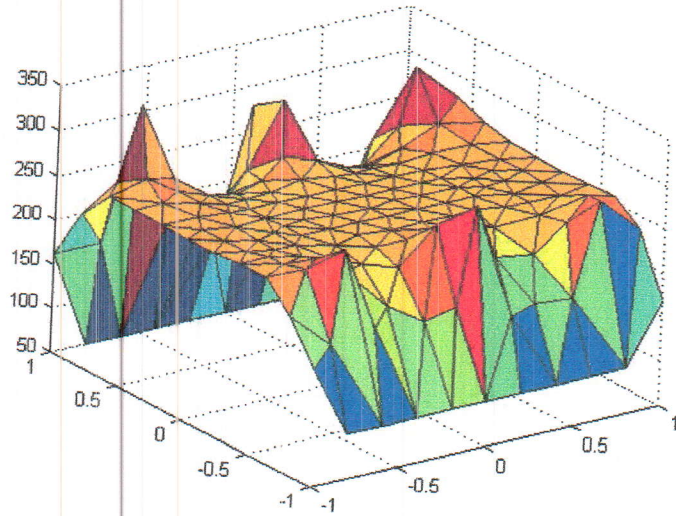


FIGURE 3.4 – température optimisée sur le maillage grossier

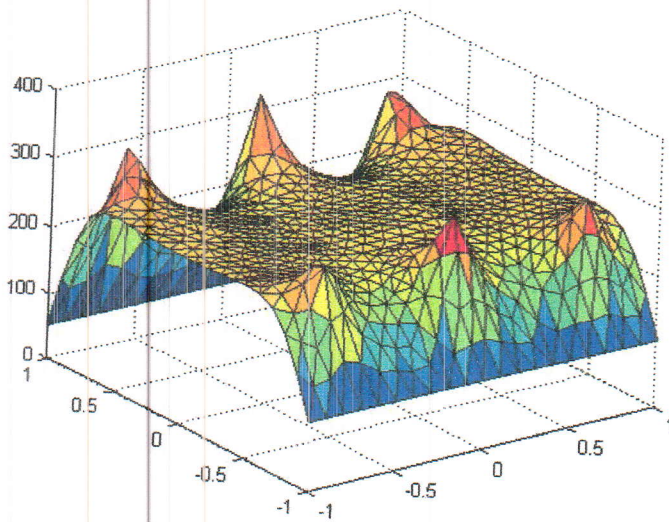


FIGURE 3.5 – température optimisée sur le maillage fin

3.4 Résolution numérique du problème inverse

La procédure du fichier `fourex02.m` réalise le calcul des valeurs des résistances pour obtenir la température optimale de cuisson. Elle appelle la procédure du fichier `asst.m` qui calcul la matrice et le second membre du système linéaire associé au problème d'optimisation.

3.4.1 Programme : 05

Assemblage de la matrice du système linéaire (Problème inverse)

```
function[Aopt,bopt] = asst(Nbpt,Nbtri,Coorneu,Refneu,Numtri,Reftri,T0,Tres,Tcui);
```

Données : Nbpt : nombre de points du maillage
 Nbtri : nombre de triangles du maillage
 Coorneu : coordonnées des sommets des triangles
 Refneu : numéros de frontière des sommets des triangles
 Numtri : liste des sommets des triangles
 Reftri : numéros de milieu des triangles
 T0 : champ de température sans résistance
 Tres : champs de température des résistances
 Tcui : température idéale de cuisson

Résultats : Aopt, bopt : matrice et second membre du problème inverse

```
Nopt = size(Tres,2);
Aopt = zeros(Nopt,Nopt);
bopt = zeros(Nopt,1);
Refcui = 1;
for i = 1:3
    for j = 1:3
        AK(i,j) = 1/12.;
    end
    AK(i,i) = 1/6.;
```



```

end
Boucle sur les éléments
for k = 1:Nbtri
Test sur le triangle
  if Reftri(k) == Refcui
Les coordonnées des sommets
  M = [Coorneu(Numtri(k,1),:); Coorneu(Numtri(k,2),:);
  Coorneu(Numtri(k,3),:)]';
Le déterminant
  Delta = abs(det([M;111]));
Assemblage de la matrice
  for i = 1:Nopt
    for j = 1:Nopt
      for ii = 1:3
        for jj = 1:3
          Aopt(i,j) = Aopt(i,j) + AK(ii,jj)*Delta*Tres(Numtri(k,ii),i)*Tres(Numtri(k,jj),j);
        end
      end
    end
  end
Assemblage du second membre
  for i = 1:Nopt
    for ii = 1:3
      for jj = 1:3
        bopt(i) = bopt(i) + AK(ii,jj)*Delta*Tres(Numtri(k,ii),i)*(Tcui -
        T0(Numtri(k,jj)));
      end
    end
  end
end
end

```

3.4.2 Programme : 06

Calcul du second membre associé à la source localisée en Pt et Lecture du maillage

```
function [b] = source(Pt, Numtri, Coorneu);
```

Données : Pt : coordonnées du point à localiser

Numtri : liste des sommets des triangles

Coorneu : coordonnées des sommets des triangles

Résultats : b : second membre

```
Nbpt = size(Coorneu, 1);
```

```
Nbtri = size(Numtri, 1);
```

```
b = zeros(Nbpt, 1);
```

source de chaleur :

```
f(x, y) = F0/2.*exp(-D2) avec D2 = [(x - xb)**2 + (y - yb)**2]/2.*R**2
```

```
R = 5.d - 02; R2 = 2.*R*R; F0 = 1.; F = F0/2.;
```

```
for k = 1:Nbtri
```

géométrie de l'élément

```
M = [Coorneu(Numtri(k, 1), :); Coorneu(Numtri(k, 2), :);
```

```
Coorneu(Numtri(k, 3), :)]';
```

```
Delta = abs(det([M; 111])); D6 = Delta/6.;
```

second membre élémentaire

```
th = zeros(3, 1);
```

```
for i = 1:3
```

```
dx = Coorneu(Numtri(k, i), 1) - Pt(1); dx2 = dx * dx;
```

```
dy = Coorneu(Numtri(k, i), 2) - Pt(2); dy2 = dy * dy;
```

```
dz = (dx2 + dy2)/R2;
```

```
th(i) = F * exp(-dz);
```

```
end
```

contribution élémentaire

```
for i = 1:3
```



```
     $b(\text{Numtri}(k,i)) = b(\text{Numtri}(k,i)) + th(i) * D6;$   
  end  
end  
end
```

Bibliographie

- [1] G. Allaire, *Cours d'analyse fonctionnelle* Polytechnique, INRIA. Paris, 2005.
- [2] P.G Ciarlet. *The finite element method for elliptic problems*, North-Holland. Amesterdam, 1978.
- [3] P.G Ciarlet. *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*, Masson, Paris, 1982.
- [4] Danaila.I, Joly. P, Kaber. S. D et Postel. M, *Introduction au calcul scientifique par la pratique ; 12 projets résolus avec MATLAB*, Dunod, Paris, 2005.
- [5] P. Joly, *Analyse numérique matricielle*, Cassini. Paris, 2004.
- [6] A. Quarteroni, R. Sacco et F. Saleri. *Méthodes Numériques (Algorithmes, analyse et applications)*, Springer, fevrier 2007.
- [7] B. Mohammadi et J. H. Saiac, *Pratique de la simulation numérique*, Erylles. Paris, 2003.

