République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques



# Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

**Master Académique en Mathématiques**

Option : **Equations aux Dérivées Partielles**

Par :

**Melle. SERIDI Fatima Zahra**

## Intitulé

# Théorèmes du point fixe de Brouwer et de Schauder et quelques applications aux équations différentielles

**Dirigé par :** Dr. ELLAGGOUNE Fateh

**Devant le jury**

| | | |
|---|---|---|
| **PRESIDENT** | **Mme. A. FRIOUI** | **Univ-Guelma** |
| **RAPPORTEUR** | **Mr. F. ELLAGGOUNE** | **Univ-Guelma** |
| **EXAMINATEUR** | **Mr. A. DEBBOUCHE** | **Univ-Guelma** |

**Session Juin 2013**

# Théorème du point fixe de Brouwer et de Schauder et quelques applications aux équations différentielles.

SERIDI Fatima Zahra
Mémoire de master en mathématiques
**Université de Guelma**

27 mai 2013

# Remerciements

En premier lieu et avant je tiens à exprimer mes remerciements au bon « Dieu » qui nous a entouré de sa bienveuillance et nous a renforcé avec le courage et la force pour avoir enfin mené à bien ce travail.

Ensuite, je tiens à exprimer ma profonde gratitude à notre encadreur Dr. Ellaggoune Fateh pour avoir accepté de nous suivre, et nos plus vifs remerciements pour son soutien, sa patience, ses conseils judicieux, pertinents, et sa sympathie dont il nous a fait preuve tout au long de l'élaboration de ce travail.

J'adresse également notre remerciement, à tous nos enseignants, qui nous ont donnée les bases de la science, nous remercions très sincèrement, les membres de jury pour nous avoir fait l'honneur d'évaluer notre travail

Je pensées se tournent maintenant vers mes parents qui nous ont entourés par la tendresse et l'amour dévoué depuis notre enfance. Merci de votre soutien de tous les jours et j'espère que vous soyez aussi fiers de nous que nous le sommes de vous.

Et finalement à tous ceux qui m'ont aidé de prés ou de loin à accomplir ce travail je leur dis Merci.

Fatima Zahra

# Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

A mes très chers parents qui ont toujours été là pour moi, et qui m'ont donné un magnifique modèle de labeur et de persévérance. A ceux qui n'ont jamais cessé de m'apporter l'affection, l'amour, le courage et le bon sens. J'espère qu'ils trouveront dans ce travail toute ma reconnaissance et tout mon amour.

A ma chère mère

En témoignage de ma prof onde gratitude et de mon incontestable reconnaissance, pour tous les sacrifices qu'elle me contente, toute la confiance qu'elle m'accorde et tout l'amour dont elle m'entoure. La plus belle mère du monde.

A Mon Cher père

Qui est le meilleur père dans ce monde, grâce à So encouragement, sa confiance et son soutien moral et matériel et pour son amour infini en exprimant mes gratitudes, mon profond amour et ma passion. Et pour la personne chère à mon cœur Mehdi

A toute ma famille et en particulier à ma tante Doula, Rafika et son mari Yazid et ses enfants, Souhiab, Chouaib ma petite belle Zina, Karima, Nabila, Zika, Saliha, houta, Sara, et aussi Badiaa et ses enfants Meriem et Asma....

A tous mes amis surtout : Hanane, Mona, Selma, Khadidja, Imen, Bessma, Fatma, et les amis(es) de facebook. Et la section maths 2013 « master 2 » et tous ceux qui me sont chers .Que Dieu vous garde.

Fatima Zahra

# Table des matières

# Introduction

Dans ce mémoire, on étudie quelques théorèmes du point fixe de Banach, Brouwer, Schauder, et quelques unes de leurs applications. Etant donnés un ensemble E et une application $f : E \to E$, ces théorèmes donnent certaines conditions sous lesquelles $f$ admet un point fixe dans E. Ces résultats théoriques nous permettent de résoudre certains problèmes mathématiques, par exemple démontré que certaines équations différentielles admettent des solutions sans les déterminer explicitement.

Le théorème de l'application contractante de Banach (1922) qui énoncent qu'une contraction d'un espace métrique complet dans lui-même admet un point fixe unique. Mais le fait de montrer que la fonction est contractante peut entraîner de laborieux calculs, ainsi que, les conditions sur la fonction et l'espace étudiés restreignent le nombre de cas auxquels on peut appliquer le théorème.

Le théorème du point fixe de Brouwer (1912) est un résultat de topologie algébrique, sous sa forme la plus simple, ce théorème exige uniquement la continuité de l'application d'un intervalle fermé borné dans lui-même. Et de façon plus générale, l'application continue doit être définie dans un convexe compact d'un espace euclidien dans lui-même.

Le théorème du point fixe de Schauder (1930), est une généralisation du théorème du point fixe de Brouwer et affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe, qui n'est pas nécessairement unique. Il n'est donc pas nécessaire d'établir des estimées sur la fonction, mais simplement sa continuité. Ceci nous donne la possibilité de traiter plus de cas qu'avec le théorème de Banach (par exemple, l'identité).

Dans ce mémoire, nous allons appliqués la théorie du point fixe à quelques équations intégrales (étude de l'existence et l'unicité des solutions de ces équations).

Notre travail est reparti en quatre chapitres.

Dans le premier chapitre, nous rappelons le théorème du point fixe d'une fonction, en effet, étant donné une application $f$ d'un ensemble E dans lui-même, on appelle point fixe de $f$ tout élément $x$ de E tel que $f(x) = x$.

Dans le deuxième chapitre, on présente une généralisation du théorème de la contraction de Banach. Nous choisissons le problème de l'existence et l'unicité des solutions de certains problèmes afin de démontrer les résultats en détaille. On rappelle ensuite le théorème de point fixe de Picard pour une contraction stricte.

Dans le troisième chapitre, on commence par présenter le théorème de Brouwer sur la boule unité de $\mathbb{R}^n$ ainsi que son extension au cas d'un convexe compact quelconque. Ensuite on énonce le théorème de non-rétraction de la boule sur la sphère, on verra un peu plus loin dans un cas particulier qu'il est équivalent au théorème de Brouwer. Enfin, on présente le théorème de

Schauder qui prolonge le théorème de Brouwer pour montrer l'existence d'un point fixe pour une fonction continue sur un convexe compact dans un espace de Banach.

Le quatrième et dernier chapitre est consacré aux applications des théorèmes du points fixe, on commence par l'étude de l'existence et l'unicité de la solution de l'équation intégrale linéaire et non- linéaire de Volterra, comme on présente la résolution approchée de l'équation intégrale non-linéaire exactement par la méthode des approximations successives. Enfin on démontre L'existence des solutions dans l'espace $L^p([a,b])$ des équations intégrales non-linéaires de types Hammerstein, et l'existence et l'unicité de la solution continue des équations intégrales non-linéaire de Hammerstein-Volterra en utilisant des théorèmes du point fixe.

# Chapitre 1

# Point fixe

**Définition 1.1 :** On dit que l'intervalle I est stable par la fonction $f$ lorsque $f(I) \subset I$.

**Définition 1.2 :** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I. On dit que $x$ est un point fixe de $f$ lorsque $f(x) = x$.

En d'autres termes, les points fixes de $f$ sont les solutions, lorsqu'elles existent de l'équation $f(x) = x$.

**Théorème 1.1 :** Soit $f$ une fonction continue sur l'intervalle [a, b] telle que [a, b] soit stable par $f$. Alors la fonction $f$ admet au moins un point fixe dans l'intervalle [a, b].

**Démonstration :** En effet considérons la fonction $g$ définie sur [a, b], par $g(x) = x - f(x)$. $g$ est alors continue sur [a, b].
On a par ailleurs :

$$g(a) = a - f(a) \leq 0,$$

$$g(b) = b - f(b) \geq 0,$$

car $f(a)$ et $f(b)$, par hypothèse, appartiennent à [a, b]. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on est sur que l'équation $g(x) = 0$ possède au moins une solution sur [a, b]. Il en est de même de l'équation $f(x) = x$ et on peut affirmer que $f$ possède au moins un point fixe. ■

Remarquons que la stabilité de l'intervalle I ne garantit pas l'existence d'un point fixe, hormis le cas que nous venons d'étudier d'un intervalle fermé borné. Par exemple la fonction exponentielle est une fonction de $I = \mathbb{R}$ dans $I = \mathbb{R}$ , mais on sait bien que l'équation $e^x = x$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

**Théorème 1.2 :** Soient I un intervalle fermé non vide et $f : I \longrightarrow I$ une application contractante sur I. Alors :

1. $f$ admet un unique point fixe $\ell$ dans I.
2. $\forall u_0 \in I$, la suite $u_n : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$. Définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in I, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n), \end{cases} \tag{1.1}$$

converge vers $\ell$ .

**Remarque 1.1 :** On peut remplacé l'hypothèse $f : I \longrightarrow I$ contractante par $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ contractante et tell que $f(I) \subset I$.

On rappelle que $f$ contractante sur I signifie :

$$\exists k \in [0, 1[, \ \forall (x, y) \in I^2, \mid f(y) - f(x) \mid \leq k \mid y - x \mid .$$

**Démonstration :** Remarquons au préalable que, $u_0$ étant dans I et I étant stable par $f$, la suite $(u_n)$ est bien définie et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$.

**Existence d'un point fixe :** Montrons, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ , la propriété :

$$P(n) \ : \mid u_{n+1} - u_n \mid \leq k^n \mid u_1 - u_0 \mid .$$

On a évidemment $P(0)$.

Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$. $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$ :

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $P(n)$. Alors :

$$|u_{n+2}-u_{n+1}| = |f(u_{n+1}) - f(u_n)| \underset{f(I)\subset I}{\overset{f \text{ contractante}}{\leq}} k\,|u_{n+1} - u_n| \overset{P(n)}{\leq} k^{n+1} \mid u_1-u_0 \mid,$$

d'où $P(n+1)$.

Du principe de raisonnement par récurrence, on déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(n) :\mid u_{n+1} - u_n \mid\leq k^n \mid u_1 - u_0 \mid .$$

Déduisons-en que $(u_n)$ est de Cauchy :

soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ avec $q > p \geq 0$.

Notons $r = q - p$.

On a :

$$\mid u_q-u_p \mid=\mid u_{p+r}-u_p \mid= \left|\sum_{i=p}^{p+r-1} u_{i+1}-u_i\right| \leq \sum_{i=p}^{p+r-1} \mid u_{i+1}-u_i \mid\leq \sum_{i=p}^{p+r-1} k^i \mid u_1-u_0 \mid,$$

or :

$$\sum_{i=p}^{p+r-1} k^i \mid u_1 - u_0 \mid= k^p \mid u_1 - u_0 \mid \sum_{i=0}^{r-1} k^i,$$

et comme $k \in [0,1[$, la série géométrique de terme général $k^i$ converge et est majorée par $\dfrac{1}{1-k}$ .

D'où :

$$\mid u_q - u_p \mid\leq \frac{k^p}{1-k} \mid u_1 - u_0 \mid .$$

Et enfin,

$$k \in [0,1[ : \frac{k^p}{1-k} \to 0, \, quand \; p \to \infty.$$

En conséquence :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, (p \geq \mathbb{N} \Rightarrow \frac{k^p}{1-k} \mid u_1 - u_0 \mid\leq \varepsilon \Rightarrow\mid u_q - u_p \mid\leq \varepsilon).$$

Ce qui prouve que la suite $(u_n)$ est de Cauchy, et comme $\mathbb{R}$ est complet, $(u_n)$ converge.

Notons $\ell$ sa limite. Comme I est fermé, on a $\ell \in I$.

Or, $f$ est continue en $\ell$ (puisque contractante sur I) donc :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} f(u_n) &= f(\lim_{n\to\infty} u_n),\\ \lim_{n\to\infty} u_{n+1} &= f(\ell),\\ \ell &= f(\ell).\end{aligned}$$

On a donc démontré que $f$ admet un point fixe $\ell$ dans I et que $(u_n)$ converge vers $\ell$.

* **Unicité du point fixe :** Supposons : $\exists\, \ell, \ell' \in I,\ f(\ell) = \ell$ et $f(\ell') = \ell'$

Comme $f$ est contractante sur I :

$$\begin{aligned}\mid f(\ell) - f(\ell') \mid &\leq k \mid \ell - \ell' \mid,\\ \mid \ell - \ell' \mid &\leq k \mid \ell - \ell' \mid,\\ (1-k) \mid \ell - \ell' \mid &\leq 0.\end{aligned}$$

Or $k \in [0, 1[$ , donc :

$$\begin{aligned}\mid \ell - \ell' \mid &\leq 0,\\ \ell &= \ell'.\end{aligned}$$

Le théorème est démontré. ■

**Remarques 1.2 :**

1. L'hypothèse I fermé n'est là que pour assurer $\ell \in I$. Si on sait déjà, par ailleurs, que $\ell \in I$ (en pratique, on a parfois déjà calculé $\ell$ en résolvant l'équation $f(\ell) = \ell$ ), cette hypothèse devient inutile.

2. Le théorème du point fixe ne s'applique pas si l'on remplace l'hypothèse $f$ contractante sur I par l'hypothèse $f$ 1-lipschitzienne sur I.

**Contre-exemple 1 :**

$$\begin{aligned} f: I &\rightarrow I \\ x &\mapsto x+\frac{1}{x} \end{aligned}$$

Soient $x$ et $y$ dans $I=[1,+\infty[$ avec $x<y$.

Comme $f$ est croissante sur $[1,+\infty[$, on a :

$$|f(y)-f(x)| \leq f(y)-f(x) \leq y-x+\frac{x-y}{xy} \leq y-x \leq |y-x|.$$

Ce qui prouve que $f$ est 1-lipschitzienne sur I.

Cependant $f$ n'a pas de point fixe sur I. (L'équation $f(x)=x$ n'a pas de solution).

**Exemple 1 :** Étudier la convergence de la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in [-1,+\infty[ \\ u_{n+1}=\sqrt{1+u_n} \end{cases}$$

On introduit l'application $f$ définie sur $[-1,+\infty[$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x)=\sqrt{1+x}$$

Point fixe de $f$ :

$$f(x)=x \Leftrightarrow \sqrt{1+x}=x \Leftrightarrow x \geq 0 \; et \; x^2-x-1=0 \Leftrightarrow x=\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

On montre facilement que $f$ est dérivable sur $]-1,+\infty[$, croissante sur $[-1,+\infty[$, puis que : $f([-1,+\infty[)=[0,+\infty[\subset[-1,+\infty[$

L'intervalle $I=[-1,+\infty[$ est donc stable et la suite $(u_n)$ est bien définie.

De plus : $\forall x \in \mathbb{R}_+, |f'(x)| = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \leq \frac{1}{2}$.

D'après l'inégalité des accroissements finis :

$\forall (a,b) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, |f(b) - f(a)| \leq \frac{1}{2}|b-a|$. Donc $f$ est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne sur I, donc contractante sur I.

En outre : $f(\mathbb{R}_+) = [1, +\infty[ \subset \mathbb{R}_+$ Donc $\mathbb{R}_+$ est stable par $f$.

D'après le théorème du point fixe, la suite $(u_n)$ définie par $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}_+ \\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} \end{cases}$ converge donc vers $\phi$.

Enfin, si $u_0 \in [-1, 0]$ alors $u_1 \in \mathbb{R}_+$ et d'après ce qui précède, $(u_n)$ converge encore vers $\phi$.

# Chapitre 2

# Théorème du point fixe de Banach et de Picard

Dans ce chapitre, nous présentons quelques résultats de la théorie du point fixe. À savoir le théorème du point fixe de Banach, celui de Picard.

## 2.1 Le théorème du point fixe de Banach

Ce théorème est dit principe de l'application contractante, il est la base de la théorie du point fixe. Ce principe garantit l'existence d'un unique point fixe pour toute application contractante d'un espace métrique complet dans lui-même.

**Définition 2.1 :** Soient $(E, d_E)$ et $(F, d_F)$ des espaces métriques, $T : E \to F$ une application et $k$ un réel positif.
On dit que T est lipschitzienne si :

$$\forall\,(x, y) \in E^2,\ d_F\,(T(x), T(y)) \leq k\ d_E(x, y). \tag{2.1}$$

**Définition 2.2 :** Une application contractante est une application lipschitzienne avec $0 \leq k < 1$.

**Théorème 2.1 : (Banach)** Soient $(E, \mathrm{d})$ un espace métrique complet et T une application contractante de E dans E. Alors T admet un unique point fixe $x \in E$.

De plus toute suite d'éléments de E vérifiant la récurrence $x_{n+1} = T(x_n)$ converge vers $x$.

**Démonstration :**

<u>**L'existence :**</u> Soit $y \in E$ un point arbitraire dans E. Considérons la suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ donnée par :

$$\begin{cases} x_0 = y \quad , \\ x_n = T(x_{n-1}), \quad n \geq 1. \end{cases}$$

On doit prouver que $(x_n)$ est une suite de Cauchy dans E. Pour $m < n$, on utilise l'inégalité triangulaire :

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + \ldots + d(x_{n-1}, x_n).$$

Puisque T est une contraction, on a :

$$d(x_p, x_{p+1}) = d(Tx_{p-1}, Tx_p) \leq kd(x_{p-1}, x_p), \; pour \; p \geq 1.$$

En répétant cette inégalité, on obtient :

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq (k^m + k^{m+1} + \ldots + k^{n-1})d(x_0, x_1), \\ &\leq k^m(1 + k + \ldots + k^{n-m-1})d(x_0, x_1), \\ &\leq k^m(1-k)^{-1}d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

On déduit que $(x_n)_n$ est de Cauchy dans E qui est complet, donc $(x_n)_n$ converge vers $x$ dans E.

Par ailleurs puisque T est continu, on a :

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} T(x_{n-1}) = T(\lim_{n\to\infty} x_{n-1}) = Tx.$$

Donc $x$ est un point fixe de T (i.e. $Tx = x$ ).

**L'unicité :** supposons $x = Tx$ et $y = Ty$ alors :

$$d(x,y) = d(Tx,Ty) \leq kd(x,y),$$

ce qui implique que $d(x,y) = 0$ i.e. $x = y$ (puisque $k < 1$ ). ∎

**Remarques 2.1 :**

1. Si T est une application Lipschitzienne (pas nécessairement une contraction) mais l'une de ces itérées $T^p$ est une contraction, alors T a encore un point fixe et un seul.

   Ceci résulte de l'unicité.

   En effet, soit $x$ l'unique point fixe de $T^p$ on a $T^p(T(x)) = T(T^p(x)) = T(x)$ ce qui convient à dire que $T(x)$ est aussi un point fixe de $T^p$ et grâce a l'unicité $T(x) = x$. Donc ce résultat est valable pour tous les types de contraction qui assurent l'unicité du point fixe.

2. Il se peut que T ne soit pas une contraction sur tout l'espace E mais juste dans le voisinage d'un point donné. Dans ce cas on a le résultat suivant :

   Soit $(E, \mathrm{d})$ un espace métrique complet et $T : B \to E$ telle que :

   $$d(T(x),T(y)) \leq kd(x,y)\ \forall x,y \in B\, et\, k < 1,\ avec\, B = \{x \in E, d(x,z) < \varepsilon\}$$

   $z \in E$ et $\varepsilon > 0$,

   En plus on suppose que $d(z,T(z)) < \varepsilon(1-k)$. Alors T possède un unique point fixe $x \in B$.

## 2.2 Le théorème du point fixe de Picard

Ce théorème du Point Fixe Métrique (Picard) donne l'existence et l'unicité d'un point fixe pour une contraction sur un espace métrique complet.

**Théorème 2.2 : (Picard)** Soient (E, d) un espace métrique complet et $T : E \to E$ une application contractante, i.e. Lipschitzienne de rapport $k < 1$. Alors, T admet un unique point fixe $x \in E$. De plus, pour tout point initial $x_0 \in E$, la suite itérée $\{x_{n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}$, avec $x_0 \in E$ quelconque et $x_n := T(x_n)$ converge vers $x$.

**Démonstration :** On montre d'abord l'unicité d'un point fixe, puis son existence.

<u>**Unicité :**</u> Supposons qu'il existe $x, y \in E$, $x \neq y$ , tels qu'on ait $T(x) = x$ et $T(y) = y$. Alors on a $d(T(x), T(y)) = d(x, y)$ et donc $\frac{d(T(x),T(y))}{d(x,y)} = 1 > k$ ce qui contredit le fait que T soit $k$-Lipschitzienne.

<u>**Existence :**</u> Soit $x_0$ un point initial quelconque et $(x_n)$ la suite itérée associée. On a $d(x_n, x_{n+1}) = d(T(x_{n-1}), T(x_n)) \leq kd(x_{n-1}, x_n)$. On va montrer par récurrence sur $n$ que

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq k^n d(x_0, x_1). \tag{2.2}$$

1. <u>Initialisation :</u> Evident pour p = 0,
2. <u>Généralisation :</u> supposons que pour un certain entier $n$ quelconque

mais fixé on ait la propriété (2.2). Alors

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_{n+2}) &= d(T(x_n), T(x_{n+1})), \\ &\leq kd(x_n, x_{n+1}), \\ &\leq k.k^n d(x_0, x_1), \\ &\leq k^{n+1} d(x_0, x_1), \end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence. On a alors $\forall n > m$ :

$$d(x_n, x_m) \leq \sum_{i=n}^{m-1} d(x_i, x_{i-1}) \leq \left(\sum_{i=n}^{m-1} k^i\right) d(x_0, x_1).$$

De plus, pour tout $n > m$, $\displaystyle\sum_{i=n}^{m-1} k^i \leq \sum_{i=n}^{\infty} k^i = \frac{k^n}{1-k}$ .

D'où $d(x_n, x_m) \leq \dfrac{k^n}{1-k}\, d(x_0, x_1)$. On en déduit alors que $(x_n)$ est une suite de Cauchy.

Comme (E, d) est complet, la suite $(x_n)$ converge vers un point limite $x \in E$. De plus on a $T(x_n) \to T(x)$ quand $n \to +\infty$ car T est continue et $T(x_n) = x_{n+1}$. Or $x_{n+1} \to x$ quand $n \to +\infty$, d'où par unicité de la limite on a $T(x) = x$. ■

**Contre-exemple 2 :** Les exemples suivant montrent que chacune des hypothèses du théorème est réellement nécessaire.

1. X n'est pas stable par $f$ : $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ sur X $= [0, 1]$.

   Or X est fermé dans $\mathbb{R}$, et complet car $\mathbb{R}$ est complet. De plus, $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} < 1 \Rightarrow \sup\limits_{x\in X} |f'(x)| < 1 \Rightarrow f$ est contractante.
   Mais $f$ n'a pas de point fixe car $f([0,1]) = [1, \sqrt{2}]$, i.e. X n'est pas stable par $f$.

2. $f$ n'est pas contractante : $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ sur $X = [0, +\infty[$.

   Or $f : X \to X$, et X est un fermé de $\mathbb{R}$. $\mathbb{R}$ est complet donc X est complet. Mais $\sup\limits_{x\in X} |f'(x)| = 1$ donc $f$ n'est pas contractante.

3. X n'est pas complet : $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{2}$ sur $X = ]0, \frac{\pi}{4}]$.

   Or $f(]0, \frac{\pi}{4}]) = ]0, \frac{\sqrt{2}}{4}] \subset ]0, \frac{\pi}{4}]$, et $\sup\limits_{x\in X} |f'(x)| = \dfrac{1}{2} < 1$, donc, $f$ est contractante. Mais X n'est pas fermée dans $\mathbb{R}$ donc pas complet.

# Chapitre 3

# Théorème du point fixe de Brouwer et de Schauder

## 3.1 Théorème du point fixe de Brouwer

Le théorème du point fixe de Brouwer (topologique) donne l'existence d'un point fixe, mais pas nécessairement l'unicité, pour une fonction continue sur une boule fermée dans un espace de dimension finie.

**Théorème 3.1 :** Soit K une partie non vide, compacte et convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : K \to K$ une fonction continue. Alors il existe $x \in K$ tel que $f(x) = x$.

**Remarque 3.1 :** Les parties convexes et compactes de $\mathbb{R}$ sont les segments. Le Théorème de Brouwer prend donc le cas $n = 1$ la forme particulière suivante :

**Théorème 3.2 :** Si $f : [a, b] \to [a, b]$ est fonction continue, alors il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = x$.

**Démonstration :** Si $f$ est continue de [a, b] dans lui-même, la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$ est continue, prend en $a$ la valeur $f(a) - a \geq 0$ et en $b$

la valeur $f(b) - b \leq 0$. Alors par le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction $g$ s'annule en un point $x_0$, qui est un point fixe de $f$. ■

Afin de démontrer le théorème 3.1, on va d'abord le réduire dans le cas où $K = B_f(0,1)$.

### 3.1.1 Rétractions

**Définition 3.1 :** On appelle rétraction de l'espace topologique E sur un fermé F de E toute fonction continue de E dans F qui est l'identité sur F. (i.e. $r : E \to F$ une application continue et $E \subset F$ telle que $r|_F = id_F$ c'est à dire que $r(x) = x, \forall x \in E$).

**Théorème 3.3 :** Soit K un compact convexe dans un espace de Hilbert E. Alors, il existe une rétraction 1-Lipschitzienne $\pi_K : E \to K$.

**Démonstration :** Soit $x \in E$ Par compacité de K, il existe $a \in K$ tel que

$$\| x - a \| = \inf_{k \in K} \| x - k \| .$$

Si $b \in K$ est tel que $\| x - b \| = \inf_{k \in K} \| x - k \| = \| x - a \|$, alors $\left\langle a - b, x - \frac{a+b}{2} \right\rangle = 0$ et donc $\|x - a\|^2 - \left\| x - \frac{a+b}{2} \right\|^2 = \left\| \frac{a-b}{2} \right\|^2$.
Or $\frac{a-b}{2} \in K$ par convexité de K et donc

$$\left\| \frac{a-b}{2} \right\|^2 \leq \| x - a \|^2 - \left\| x - \frac{a+b}{2} \right\|^2 \leq 0.$$

Donc, $a = b$. Comme pour tout $x \in E$, il existe un unique $a_x \in K$ tel que $\| x - a_x \| = \inf_{k \in K} \| x - k \|$, alors $\pi_K(x) = a_x$ définit une application $\pi_K : E \to K$ qui est l'identité sur K.

Pour montrer que $\pi_K$ est continue, remarquons d'abord que pour tout $k \in K$ et tout $t \in [0,1]$, on a $(1-t)\pi_K(x) + tk \in K$ et donc

$$\| x - \pi_K(x) \|^2 - 2t\Big\langle x - \pi_K(x), k - \pi_K(x)\Big\rangle + t^2 \| k - \pi_K(x) \|^2 =$$
$$= \| x - \pi_K(x) - t(k - \pi_K(x)) \|^2 \geq \| \pi_K(x) - x \|^2.$$

Donc $\Big\langle x - \pi_K(x), -k + \pi_K(x)\Big\rangle \geq 0$, pour tout $k \in K$. Donc $\forall (x_1, x_2) \in E^2$, on a :

$$\begin{aligned}
\| x_1 - x_2 \|^2 &= \| (x_1 - \pi_K(x_1)) + (\pi_K(x_1) - \pi_K(x_2)) + (\pi_K(x_2) - x_2) \|^2 \\
&= \| \pi_K(x_1) - \pi_K(x_2) \|^2 + \| x_1 - \pi_K(x_1) + \pi_K(x_2) - x_2 \|^2 + \\
&+ 2\Big\langle \pi_K(x_1) - \pi_K(x_2), x_1 - \pi_K(x_1) + \pi_K(x_2) - x_2 \Big\rangle \\
&\geq \| \pi_K(x_1) - \pi_K(x_2) \|^2.
\end{aligned}$$

Le théorème est démontré. ■

Soit K un compact convexe de $\mathbb{R}^n$. Quitte à remplacer K par $\lambda K$ et $f$ par $x \in \lambda K \mapsto \lambda f(\frac{x}{\lambda}) \in \lambda K$ on peut supposer que $K \subset B_f(0,1)$. Donc, $\pi_K$ est une rétraction de $B_f(0,1)$ sur K. Soit $F : K \to K$ une fonction continue. Alors $\overline{F} := F \circ \pi_K : B_f(0,1) \to B_f(0,1)$ est continue.

Si le théorème de Brouwer (voir ci-dessous) est démontré pour $B_f(0,1)$, alors il existe $x \in B_f(0,1)$ tel que $x = \overline{F}(x) = F(\pi_K(x))$. Comme F est à valeurs dans K, on a $x \in K$ et donc $\pi_K(x) = x$, ce qui implique que $x$ est un point fixe de F sur K.

On peut donc se ramener au cas où $K = B_f(0,1)$. Dans ce cas le théorème de Brouwer est équivalent au théorème suivant :

**Théorème 3.4 :** Il n'existe pas de rétraction $B_f(0,1)$ sur $S(0,1)$.

**Remarque 3.2 :** Le théorème 3.4 est dit aussi Lemme de non rétraction.

**Démonstration :**

$(\Longrightarrow)$ Si une telle rétraction F existe alors $-F : B_f(0,1) \to B_f(0,1)$ n'a pas de point fixe. En effet, s'il existe $x \in B_f(0,1)$ tel que $F(x) = -x$, alors

$x \in S(0,1)$ et donc $x = -F(x) = -x$, ce qui est impossible.

($\Longleftarrow$) Si $f : B_f(0,1) \to B_f(0,1)$ est continue et n'a pas de point fixe, alors

$$\begin{aligned} F : B_f(0,1) &\to S(0,1), \\ x &\mapsto x + t_x(x - f(x)). \end{aligned}$$

Où $t_x > 0$ tel que

$$\begin{aligned} \| x + t_x(x - f(x)) \|^2 &= 1, \\ &= \| x \|^2 + 2t_x\Big\langle x, x - f(x)\Big\rangle + {t_x}^2 \| x - f(x) \|^2. \end{aligned}$$

On trouve $t_x = \dfrac{-\Big\langle x, x - f(x)\Big\rangle + \sqrt{\Big\langle x, x - f(x)\Big\rangle^2 + \| x - f(x) \|^2 (1 - \| x \|^2)}}{\| x - f(x) \|^2}$,
donc F est continu.

De plus, si $x \in S(0,1)$, alors $\| x \| = 1$, donc

$$t_x = \frac{-\Big\langle x, x - f(x)\Big\rangle + \Big|\Big\langle x, x - f(x)\Big\rangle\Big|}{\| x - f(x) \|^2}.$$

Or $\Big\langle x, x - f(x)\Big\rangle = \| x \|^2 - \Big\langle x, f(x)\Big\rangle \geq 1 - \| x \| . \| f(x) \| \geq 0$,
d'où $t_x = 0$ et $\forall x \in S(0,1)$, $F(x) = x$. ∎

### 3.1.2 Le cas $K = B_f(0,1)$

On dit qu'un espace topologique a la propriété du point fixe si toute fonction continue $f : E \to E$ possède un point fixe. Nous allons prouver que la boule $B_f(0,1)$ a la propriété du point fixe en toute dimension $n \in \mathbb{N}^*$. On note ici $B_n$ (resp. $S_n$) la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$ (resp. la sphère unité de $\mathbb{R}^n$). Notre preuve est basée sur l'études des champs de vecteurs sur $S_n$ :

**Définition 3.2 :** On appelle champ de vecteurs sur la sphère $S_{n-1}$ toute fonction continue $V : S_{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que, pour tout $x$, $V(x)$ soit tangent en $x$ à $S_{n-1}$, c'est-à-dire orthogonal à $x$.

**Lemme 3.1 :** S'il existe une rétraction de $B_{2n}$ sur $S_{2n-1}$, il existe un champ de vecteurs partout non nul sur $S_{2n}$.

**Démonstration :** On suppose que $\rho$ est la rétraction de $B_{2n}$ sur $S_{2n-1}$ et on note

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{R}^{2n+1} &\rightarrow \mathbb{R}^{2n}, \\ (x_1, x_2, ..., x_{2n+1}) &\mapsto (x_1, x_2, ..., x_{2n}), \end{aligned}$$

qui envoie $S_{2n}$ sur $B_{2n}$. Il existe un champ de vecteurs $V : S_{2n-1} \rightarrow S_{2n-1}$ (partout non nul). En effet, si on pose :

$$V(x_1, x_2, ..., x_{2n}) = (x_2, -x_1, x_4, -x_3, ..., x_{2n}, -x_{2n-1}),$$

on a que V est continue, $\| V(x) \|^2 = \| x \|^2 = 1$ et $\left\langle V(x), x \right\rangle = 0$.
La fonction $f : y \mapsto V \circ \rho \circ \pi(y)$ est alors continue sur $S_{2n}$ à valeurs dans $S_{2n-1} \subset S_{2n}$. Si pour un $y \in S_{2n}$, $f(y) = \pm y$, alors $y \in S_{2n-1}$ donc $\pi(y) = y$, et $\rho \circ \pi(y) = \rho(y) = y$, d'où $f(y) = V(y) = \pm y$, ce qui contredit le fait que $\left\langle V(y), y \right\rangle = 0$, et on en déduit alors que $\forall y \in S_{2n}$, $f(y) \notin \{y, -y\}$. $f$ étant une fonction continue de $S_{2n}$ dans $S_{2n}$, la fonction $V'$ définie par

$$V'(y) = f(y) - \left\langle f(y), y \right\rangle .y,$$

est continue et vérifie, $\forall y \in S_{2n}$,

$$\left\langle V'(y), y \right\rangle = \left\langle f(y), y \right\rangle - \left\langle f(y), y \right\rangle \| y \|^2 = 0.$$

Donc $V'$ est bien un champ de vecteurs sur $S_{2n}$. Et il est partout non nul car si on avait $V'(x) = 0$, $f(x)$ serait colinéaire à $x$ et appartiendrait à $S_{2n}$, (i.e. $f(x) = \pm x$), ce qui est impossible. ■

Le théorème suivant, achève la preuve du théorème de Brouwer en dimension paire d'après les théorèmes 2.2 (Picard) et le théorème 3.4.

**Théorème 3.5 :** Sur la sphère $S_{2n}$ tout champ de vecteurs s'annule en au moins un point.

**Démonstration :** Supposons qu'il existe un champ de vecteurs V partout non nul sur $S_{2n}$. On va d'abord se ramener au cas où V est la restriction à $S_{2n}$ d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un voisinage de $S_{2n}$ vérifiant

$$\| V(x) \| = 1, \ \forall x \in S_{2n}.$$

La fonction continue strictement positive $x \mapsto \| V(x) \|$ atteint, sur le compact $S_{2n}$, son minimum $\delta > 0$. Le compact

$$K = \left\{ x \in \mathbb{R}^{2n+1} \ : \ \frac{1}{2} \leq \| x \| \leq \frac{3}{2} \right\},$$

est un voisinage de $S_{2n}$ dans $\mathbb{R}^{2n+1}$. Toute fonction réelle continue de K peut être approchée uniformément sur K, à $\frac{\delta}{2n}$ près, par une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intérieur de K. En particulier, si $(V_1, V_2, ..., V_{2n+1})$ sont les fonctions coordonnées de V, alors les fonctions $x \mapsto V_i\left(\frac{x}{\| x \|}\right)$, continues sur K, peuvent être approchées uniformément sur K, à $\frac{\delta}{2n}$ près, par des fonctions $W_i$ qui sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\dot{K}$. Alors la fonction $W : x \mapsto \Big(W_1(x), W_2(x), ..., W_{2n+1}(x)\Big)$ est de classe $\mathcal{C}^1$, et vérifie

$$\Big\| W(x) - V(x) \Big\|^2 = \sum_{j=1}^{2n+1} \Big( W_j(x) - V_j(x) \Big)^2 \leq \frac{2n+1}{4n^2} \delta^2 < \delta^2,$$

ce qui montre que, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\Big\langle W(x)+\lambda x, V(x)\Big\rangle &= \Big\langle W(x), V(x)\Big\rangle,\\ &= \| V(x) \|^2 - \Big\langle V(x)-W(x), V(x)\Big\rangle,\\ &\geq \delta^2 - \| W(x)-V(x) \| . \| V(x) \| > 0.\end{aligned}$$

D'où $W(x)+\lambda x \neq 0$, donc $W^*(x) = W(x) - \Big\langle W(x), x\Big\rangle .x \neq 0$. Alors $x \mapsto \frac{W^*(x)}{\|W^*(x)\|}$ est un champ de vecteurs à valeurs dans $S_{2n}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\dot{\mathrm{K}}$. On suppose maintenant que V est un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de $S_{2n}$, à valeurs dans $S_{2n}$, et on considère, pour $t \in \mathbb{R}$, les applications $\phi$ et $\Phi_t$, définies sur $\dot{\mathrm{K}}$ par

$$\phi(x) = \| x \| .V\Big(\frac{x}{\| x \|}\Big),$$

$$\Phi_t(x) = x + t\phi(x),$$

qui sont de classe $\mathcal{C}^1$. Puisque $V'$ est continue sur le compact $S_{2n}$, elle y est bornée, et le calcul de $\phi'(x)$ montre que $\phi'$ est bornée par un nombre M sur $\dot{\mathrm{K}}$ Alors, si $M \| t \| < 1$, on a pour un $x \in \dot{\mathrm{K}}$,

$$\| I - \Phi'_t(x) \| = | t | . \| \phi'(x) \| \leq M | t | < 1,$$

donc $\Phi'_t(x)$ est inversible (d'après le théorème de Accroisement fini) et $\Phi_t$ est ouverte. Donc $U = \Phi_t(\dot{\mathrm{K}})$ est un ouvert dans $\mathbb{R}^{2n+1}$. De plus,

$$\Big\langle V(x), x\Big\rangle = 0 \Rightarrow \| \Phi_t{}^2(x) \| = \| x \|^2 + t^2 \| x \|^2 \Big\| V\Big(\frac{x}{\| x \|}\Big)\Big\|^2 = (1+t^2) \| x \|^2.$$

On en conclut que, si $\frac{1}{2} < r < \frac{3}{2}$ , l'image par $\Phi_t$ de la sphère $S(r)$ de rayon $r$ est une partie compacte, donc fermée de la sphère $S(r\sqrt{1+t^2})$ de rayon $r\sqrt{1+t^2}$. Mais c'est aussi la trace sur $S(r\sqrt{1+t^2})$ de U, donc une partie

ouverte de $S(r\sqrt{1+t^2})$. Par connexité de $S(r\sqrt{1+t^2})$ on a alors
$\Phi_t(S(r)) = S(r\sqrt{1+t^2})$, donc $\Phi_t$ est surjective de K sur
$U := \left\{x \in \mathbb{R}^{2n+1} : \frac{1}{2}\sqrt{1+t^2} <\| x \|< \frac{3}{2}\sqrt{1+t^2}\right\}$.
Si on a $\Phi_t(x) = \Phi_t(y)$, alors

$$\sqrt{1+t^2}. \| x \| = \| \Phi_t(x) \| = \| \Phi_t(y) \| = \sqrt{1+t^2}. \| y \|,$$

donc $\| x \| = \| y \|$, et

$$0 = \| x+t\phi(x)-y-t\phi(y) \| \geq \| x-y \| - \| t \| . \| x \| . \left\| V\left(\frac{x}{\| x \|}\right) - V\left(\frac{y}{\| x \|}\right) \right\|.$$

Puisque (d'après le lemme 3.2 ) on a $\left\| V\left(\frac{x}{\|x\|}\right) - V\left(\frac{y}{\|x\|}\right) \right\| \leq \frac{\pi}{2} M \frac{\|x-y\|}{\|x\|}$, on obtient $1 - \frac{\pi}{2} M \mid t \mid = \| x - y \| \leq 0$, ce qui entraine $x = y$ si $\frac{\pi}{2} M \mid t \mid < 1$.
Pour $\mid t \mid$ assez petit, la fonction $\Phi_t$ est donc injective et est un $C^1$-difféomorphisme de $\dot{\text{K}}$ sur U.

Par homothétie, le volume de U est alors le produit du volume de $\dot{\text{K}}$ par $(1+t^2)^{\frac{2n+1}{2}}$. C'est aussi l'intégrale sur $\dot{\text{K}}$ du déterminant jacobien $D_t$ de $\Phi_t$, et puisque la matrice jacobienne de $\Phi_t$ en $x$ est $I + tJ_{\phi}(x)$, $D_t(x)$ est alors un polynôme de degré au plus $2n+1$ en $t$ : $D_t(x) = \sum_{j=0}^{2n+1} t^j \alpha_j(x)$.

On en conclut que
$vol(U) = (1+t^2)^{\frac{2n+1}{2}} vol(\dot{\text{K}}) = \int D_t(c)\, dx = \sum_{j=0}^{2n+1} t^j \int \alpha_j(x) dx,$

donc, au voisinage de 0 , $(1+t^2)^{\frac{2n+1}{2}}$ est égal à un polynôme $P(t)$ de degré au plus $2n+1$. Puisque $(1+t^2)^{\frac{2n+1}{2}}$ est pair, on devrait avoir $P(t)$ pair donc de degré au plus $2n$. $P(t)^2$ serait alors un polynôme de degré au plus $4n$, égal à $(1+t2)^{2n+1}$.

C'est une contradiction donc le champ de vecteurs V s'annule en au moins un point. ■

**Lemme 3.2 : (Accroissements finis)** Soit $m > 1$. Si $\phi$ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur un voisinage de $S_m$ dans $\mathbb{R}^{m+1}$, à valeurs dans un espace de Banach E, et si $\| \phi'(x) \| \leq M$, $\forall x \in S_{2m}$, alors la fonction $\phi$ est $\frac{\pi}{2}$ -Lipschitzienne sur $S_m$.

**Démonstration :** Soient $x$ et $y$ deux points distincts de $S_m$. On peut trouver $z \in S_m$ qui forme avec $x$ une base orthonormée d'un plan contenant $y$ et tel que

$\left\langle y, z \right\rangle \geq 0$. Il existe alors un $v \in [0, \pi]$ tel que $y = x\cos(v) + z\sin(v)$. Et la fonction $\gamma : s \mapsto x\cos(s) + z\sin(s)$ prend ses valeurs dans $S_m$ . La fonction $\phi \circ \gamma$ est de classe $\mathcal{C}^1$, et on a

$$\| (\phi \circ \gamma)'(s) \|^2 \leq \| \phi'(\gamma(s)) \|^2 . \| \gamma'(s) \|^2 \leq M^2 \| -x\sin(s) + z\cos(s) \|^2 = M^2.$$

On a donc

$$\| \phi(x) - \phi(y) \| = \| \phi \circ \gamma(v) - \phi \circ \gamma(0) \| \leq v \sup \| (\phi \circ \gamma)'(s) \| \leq Mv,$$

et puisque $\| x - y \|^2 = (1 - \cos(v))^2 + \sin^2(v) = 2 - 2\cos(v) = 4\sin^2(\frac{v}{2})$ , on a $\| x - y \| = 2\sin(\frac{v}{2}) \geq 2.\frac{2}{\pi}.\frac{v}{2} = \frac{2}{\pi}v$.

On en conclut que $\| \phi(x) - \phi(y) \| \leq \frac{\pi}{2} \| x - y \|$. ■

**Théorème 3.6 : (Brouwer)** Toute application continue de la boule $B_n$ euclidienne fermée unité sur elle-même admet un point fixe pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ce point fixe n'est pas forcément unique.

**Démonstration :** Comme ce théorème est déjà démontré pour $n$ pair, il ne reste plus qu'à montrer que si $B_{n+1}$ a la propriété du point fixe, alors $B_n$ l'a aussi.

Soient la fonction $f : B_n \to B_n$ continue et $\pi$ la projection définie par : $\pi : (x_1, x_2, ..., x_{n+1}) \mapsto (x_1, x_2, ..., x_n)$. On a alors $\pi(B_{n+1}) = B_n$, et de plus $f \circ \pi$ est continue de $B_{n+1}$ dans $B_n \subset B_{n+1}$.
Donc, il existe $y \in B_{n+1}$ tel que $(f \circ \pi)(y) = y$. Alors $y \in B_n$ donc $\pi(y) = y$. On en déduit que $y$ est un point fixe de $f$ sur $B_n$. ■

## 3.2 Théorème du point fixe de Schauder

Ce théorème prolonge le résultat du théorème de Brouwer pour montrer l'existence d'un point fixe pour une fonction continue sur un convexe compact dans un espace de Banach.

**Théorème 3.7 :** Soit K un sous-ensemble de E fermé et convexe et $f : K \to K$ une application continue telle que $f(K)$ est relativement compact. Alors $f$ possède un point fixe.

**Démonstration :** On note C l'adhérence de $f(K)$ qui est, par hypothèse, un compact. $C \subset K$ car K est fermé (si K est compact alors $C = f(K)$ car $f(K)$ est compact). Pour chaque $n$ soit $F_n$ un $\frac{1}{n}$-réseau de C et soit $P_n : C \mapsto conv(F_n)$ une projection de Schauder, (d'apres le théorème 3.8) Comme K est convexe et $F_n$ est une partie de K alors $conv(F_n) \subset K$ est un sous-ensemble compact et convexe. On définit
$f_n : conv(F_n) \mapsto conv(F_n)$ par $f_n := P_n \circ f_{|conv(F_n)}$. Par le théorème de Brouwer $f_n$ possède au moins un point fixe $x_n$. Or $f(x_n) \in C$ qui est compact et donc la suite $f(x_n)$ possède una sous-suite convergente que nous noterons de la même manière. On posse $x = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \in K$. Montrons que $f(x) = x$. En effet,

$$\| f_n(x_n) - f(x_n) \| = \| P_n(f(x_n)) - f(x_n) \| < \frac{1}{n},$$

d'où $x = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n$ et par conséquent $f(x) = x$. ■

**Plus généralement**

**Théorème 3.8 :** Soient E un espace de Banach et $K \subset E$ convexe et compact. Alors toute application continue $f : K \to K$ possède un point fixe.

**Démonstration :** Soit $f : K \to K$ une application continue. Comme K est compact, $f$ est uniformément continue, donc, si on fixe $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x, y \in K$, on ait $\| f(x) - f(y) \| \leq \varepsilon$, dès que $\| x - y \| \leq \delta$. De plus, il existe un ensemble fini des points $\{x_1, ..., x_p\} \subset K$ tel que les boules ouvertes de rayon $\delta$ centrées aux $x_i$ recouvrent K, (i.e. $K \subset \bigcup_{1\leq j\leq p} B(x_j, \delta)$). Si on désigne $L := Vect(f(x_j))_{1\leq j\leq p}$, alors L est de dimension finie, et $K^* := K \cap L$ est compact convexe de dimension finie. Pour $1 \leq j \leq p$, on définit la fonction continue $\psi_j : E \to \mathbb{R}$ par

$$\psi_j(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \| x - x_j \| \geq \delta \\ 1 - \frac{\|x-x_j\|}{\delta} & \text{sinon} \end{cases}$$

et on voit que $\psi_j$ est strictement positive sur $B(x_j, \delta)$ et nulle dehors.

On a donc, pour tout $x \in K$, $\sum_{j=1}^{p} \psi_j(x) > 0$, et donc on peut définir sur K les fonctions continues positives $\varphi_j$ par

$$\varphi_j(x) = \frac{\psi_j(x)}{\sum_{k=1}^{p} \psi_k(x)},$$

pour lesquelles on a $\sum_{j=1}^{p} \varphi_j(x) = 1$, pour tout $x \in K$.

On pose alors, pour $x \in K$, $g(x) := \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(x) f(x_j)$. $g$ est continue (car elle est la somme des fonctions continues), et prend ses valeurs dans $K^*$ (car $g(x)$

est un barycentre des $f(x_j)$). Donc, si on prend la restriction $g_{|K^*} : K^* \to K^*$, par le théorème de Brouwer 3.6, $g$ possède un point fixe $y \in K^*$. De plus,

$$\begin{aligned} f(y) - y &= f(y) - g(y), \\ &= \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(y) f(y) - \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(y) f(x_j), \\ &= \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(y)(f(y) - f(x_j)). \end{aligned}$$

Or si $\varphi_j(y) \neq 0$ alors $\| y - x_j \| < \delta$, et donc $\| f(y) - f(x_j) \| < \varepsilon$. Donc, on a, pour tout $j$, $\| \varphi_j(y)(f(y) - f(x_j)) \| < \varepsilon \varphi_j(y)$, et donc

$$\| f(y) - y \| \leq \sum_{j=1}^{p} \| \varphi_j(y)(f(y) - f(x_j)) \| \leq \sum_{j=1}^{p} \varepsilon \varphi_j(y) = \varepsilon.$$

Donc, pour tout entier $m$, on peut trouver un point $y_m \in K$ tel que $\| f(y_m) - y_m \| < 2^{-m}$ . Et puisque K est compact, de la suite $\{y_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$ on peut extraire une sous-suite $(y_{m_k}$ qui converge vers un point $y^* \in K$. Alors $f$ étant continue, la suite $(f(y_{m_k}))$ converge vers $f(y^*)$, et on conclut que $f(y^*) = y^*$, (i.e. $y^*$ est un point fixe de $f$ sur K). ■

**Théorème 3.9 : (Schaeffer)** [6] Soit X un espace de Banach et $T : X \to X$ est un opérateur complètement continu. On a alors l'alternative suivante :

i) Ou bien, l'équation opérateur $x = \lambda T x$ admet une solution pour $\lambda = 1$.

ii) Ou bien, l'ensemble $S = \{x \in X : x = \lambda T x,\ \lambda \in ]0, 1[\}$ est non borné.

# Chapitre 4

# Applications

On considèrera ici le théorème du point fixe de Banach comme source d'existence et d'unicité des théorèmes sur les équations intégrales.

**Définition 4.1** : Une équation intégrale de la forme

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)\,dt = f(x), \tag{4.1}$$

est une équation linéaire de Fredholm de 2ème espèce.

Dans les équations de cette forme, [a, b] est un intervalle donné, $\varphi$ une fonction inconnue sur [a, b] et $\lambda$ un paramètre. Le noyau $K$ de l'équation est une fonction donnée sur le carré $G = [a,b] \times [a,b]$ et $f$ est une fonction donnée sur [a, b].

Ici, on conserverai les équations de Fredholm sur $C[a,b]$, l'espace de toutes les fonctions continues sur l'intervalle $J = [a,b]$, muni de la métrique $d$ donnée par

$$d(\varphi,\psi) = \max_{x\in J} |\varphi(x) - \psi(x)|. \tag{4.2}$$

Pour appliquer le théorème du point fixe de Banach, il est important de relever que $C[a,b]$ est un espace complet. Admettons que $f \in C[a,b]$ et que

$K$ soit continue sur G. Alors $K$ est une fonction bornée sur G :

$$|K(x,t)| \leq c \ \ \forall (x,t) \in G. \tag{4.3}$$

Evidemment, (4.1) peut s'écrire $\varphi = T\varphi$ où

$$T\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)\,dt, \tag{4.4}$$

$K$ et $f$ sont continues, (4.4) définit alors un opérateur $T : [a,b] \to [a,b]$.

On impose ensuite une restriction sur $\lambda$ de sorte que T soit une contraction.

Des équations (4.2) à (4.4) on obtient :

$$\begin{aligned}
d(T\varphi, T\psi) &= \max_{x\in J} |T\varphi(x) - T\psi(x)|, \\
&= |\lambda| \max_{x\in J} \left| \int_a^b K(x,t)\Big[\varphi(x) - \psi(x)\Big]\,dt \right|, \\
&\leq |\lambda| \max_{x\in J} \int_a^b |K(x,t)||\varphi(x) - \psi(x)|\,dt, \\
&\leq |\lambda|\, c \max_{\alpha\in J} |\varphi(\alpha) - \psi(\alpha)| \int_a^b dt, \\
&= |\lambda|\, c\, d(\varphi,\psi)(b-a).
\end{aligned}$$

Cette inégalité peut s'écrire $d(T\varphi, T\psi) \leq \beta d(\varphi,\psi)$où $\beta = |\lambda|\, c\,(b-a)$.

T est donc une contraction ($\beta < 1$) lorsque

$$|\lambda| < \frac{1}{c(b-a)}. \tag{4.5}$$

Le théorème du point fixe nous donne alors :

**Théorème 4.1 : (Equation intégrale linéaire de Fredholm)** Supposons $K$ et $f$ continues dans (4.1) sur $J \times J$ et $J$ respectivement, et admettons que $\lambda$ satisfasse (4.5) avec $c$ définit en (4.3).

Alors (4.1) a une solution unique $\varphi$ sur $J$. Cette fonction $\varphi$ est la limite de la séquence itérative $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, ...)$ ou $x_0$ est une fonction continue sur $J$ et pour $n = 0, 1, ...$

$$\varphi_{n+1}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi_n(t)\,dt. \tag{4.6}$$

Le théorème du point fixe de Banach s'applique également aux équations intégrales linéaires de Volterra.

**Définition 4.2 :** Une équation de la forme :

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x K(x,t)\varphi(t)\,dt = f(x). \tag{4.7}$$

est appelée équation intégrale linéaire de Volterra.

La différence entre (4.1) et (4.7) est que dans (4.1), la limite supérieure b de l'intégrale est constante alors que dans (4.7) elle est variable. C'est une différence essentielle.

Sans restriction sur $\lambda$, on obtient donc le théorème suivant :

**Théorème 4.2 : (Equation intégrale linéaire de Volterra)** Supposons que $f$dans (4.7) soit continue sur [a,b] et que le noyau $K$ soit continu sur la surface triangulaire $\mathbb{R}$ dans le $xt$-plan définit par $a \leq t \leq x$, $a \leq t \leq b$. Alors (4.7) a une unique solution $\varphi$ sur [a, b] pour tout $\lambda$.

## 4.1 Existence et unicité de la solution de l'équation intégrale linéaire de Volterra

On considère l'équation intégrale de Volterra de seconde espèce

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)\varphi(t)\,dt. \tag{4.8}$$

Où $K(x,t)$ est une fonction continue pour $0 \leq x \leq a$, $0 \leq t \leq x$, et $f(x)$ est continue lorsque $0 \leq x \leq a$.

**Définition 4.3 : (Résolvante d'une équation intégrale)** On appelle résolvante de l'équation intégrale, toute fonction $R(x,t;\lambda)$ donnée par

$$R(x,t;\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n K_{n+1}(x,t).$$

Où les $K_n$ sont les noyaux itérés définis par la relation de récurrence suivante :

$$K_1(x,t) = K(x,t),\ K_n(x,t) = \int_t^x K(x,s)K_{n-1}(s,t)\,ds.$$

**Lemme 4.1 :** La résolvante $R(x,t;\lambda)$ vérifie l'équation suivante :

$$R(x,t;\lambda) = K(x,t) + \lambda \int_t^x K(x,s)R(s,t;\lambda)\,ds$$

**Théorème 4.3 :** (voir [11]) Soit $K(x,t)$ est une fonction continue pour $0 \le x \le a$, $0 \le t \le x$, et $f(x)$ est continue lorsque $0 \le x \le a$.
L'équation (4.8) admet une solution unique et continue donnée par la formule

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x R(x,t;\lambda)f(t)\,dt.$$

**Remarque 4.1 :** Le théorème 4.3 reste vrai pour les équations intégrale de Fredholm linéaire de seconde espèce.

**Théorème 4.4 :** Soit l'équation intégrale de Volterra de première espèce

$$\int_a^x K(x,t)\varphi(t)\,dt = f(x), \tag{4.9}$$

telles que $f$, K des fonctions continues, dérivables sur $[a,b]$

$$K(x,x) \neq 0,\ \int_a^b \int_a^b |K(x,t)|^2\,dxdt < \infty.$$

Alors, il existe une solution unique et continue de l'équation (4.9).

**Démonstration :** On remarque d'abord qu'on

$$f(a) = \int_a^a K(x,t)\varphi(t)\,dt = 0.$$

L'équation (4.9) peut être transformée en une équation de Volterra de deuxième espèce en utilisant la règle de Leibniz

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_a^x K(x,t)\varphi(t)\,dt = K(x,x)\varphi(x) + \int_a^x \frac{\partial}{\partial x}K(x,t)\varphi(t)\,dt = f'(x),$$

comme $K(x,x) \neq 0$, alors

$$\varphi(x) = \frac{f'(x)}{K(x,x)} - \int_a^x \frac{K'_x(x,t)}{K(x,x)}\varphi(t)\,dt,$$

qui est une équation de Volterra de deuxième espèce, et par le théorème 4.4 on obtient l'existence et l'unicité de la solution $\varphi$. ■

## 4.2 Existence et unicité de la solution de l'équation intégrale non linéaire de Volterra

**Théorème 4.5 :** Soit l'équation intégrale non linéaire de Volterra suivante :

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x K(x,t,\varphi(t))\,dt, \ 0 \leq x < +\infty. \tag{4.10}$$

Supposons que les conditions suivantes sont vérifiées :

1. $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ est continue.
2. $K : [0,+\infty[\times[0,+\infty[\to \mathbb{R}$, est une fonction continue satisfait la condition Lipschitz suivante :

$$|K(x,t,u) - K(x,t,v)| \leq L|u-v|, \textit{ tel que } x,\ t \in [0,+\infty[ \textit{ et } u,v \in \mathbb{R}.$$

Alors, l'équation (4.10) admet une solution unique $\varphi \in C([0,+\infty[,\mathbb{R})$.

**Démonstration :** On choisit la norme suivante

$$|g| = \sup_x \Big\{|g(x)|\exp(-Lx)\Big\}.$$

On définit l'opérateur T comme suit : $T\varphi(x) = f(x) + \displaystyle\int_0^x K(x,t,\varphi(t))\,dt.$
A fin de prouver que l'équation (4.10) admet une solution, il faut montrer que l'opérateur T admet un point fixe.
D'abord, on montre que T est contractant.

$$\begin{aligned}
|T\varphi(x) - T\psi(x)| &\leq \sup_x \Big\{ \exp(-Lx) \int_0^x |K(x,t,\varphi(t)) - K(x,t,\psi(t))|\,dt \Big\},\\
&\leq L \sup_x \Big\{ \exp(-Lx) \int_0^x |\varphi(t) - \psi(t)|\,dt \Big\},\\
&\leq L \sup_x \Big\{ \exp(-Lx) \int_0^x \exp(-Lt)\exp(Lt)|\varphi(t) - \psi(t)|\,dt \Big\},\\
&\leq L|\varphi - \psi| \sup_x \Big\{ \exp(-Lx) \int_0^x \exp(Lt)\,dt \Big\},\\
&\leq L|\varphi - \psi| \sup_x \Big\{ \exp(-Lx) \frac{\exp(Lx) - 1}{L} \Big\},\\
&\leq \Big(1 - \exp(-Lx)\Big)|\varphi - \psi|.
\end{aligned}$$

Puisque $\Big(1 - \exp(-Lx)\Big) < 1$ alors, T est contractante, d'après le principe de Banach l'opérateur T admet un point fixe unique $\varphi \in C([0, +\infty[)$, qui est une solution unique de l'équation intégrale (4.10). ■

## 4.3 Méthodes de résolution approchée des équations intégrales non linéaires (Méthode des approximations successives)

La méthode des approximations successives peut, a priori, être appliquée tous les problèmes non linéaires.
On considère l'équation intégrale non linéaire de Volterra

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x F(x,t,\varphi(t))\,dt, \tag{4.11}$$

nous cherchons la solution de (4.11) sous forme de limite de la suite $\{\varphi_n(x)\}$, où par exemple $\varphi_0(x) = f(x)$ et les termes suivants $\varphi_k(x)$ se calculent de proche en proche d'après la formule

$$\varphi_k(x) = f(x) + \int_0^x F(x, t, \varphi_{k-1}(t))\, dt,\ k = 1, 2, ..., n. \tag{4.12}$$

Si $f(x)$ et $F(x, t, z)$ sont de carré sommable et satisfont aux conditions

$$|F(x, t, z_2) - F(x, t, z_1)| \leq a(x, t)|z_2 - z_1|, \left| \int_0^x F(x, t, \varphi(t))\, dt \right| \leq \eta(x), \tag{4.13}$$

avec $a(x, t)$ et $\eta(x)$ tels qu'on ait dans le domaine fondamental $(0 \leq t \leq x \leq a)$ :

$$\int_0^a \eta^2(x)\, dx \leq N^2, \int_0^a dx \int_0^x a^2(x, t)\, dt \leq A^2.$$

Alors, l'équation intégrale non linéaire de Volterra de seconde espèce (4.11) possède une solution et une seule, à savoir $\varphi(x) \in L_2(0, a)$, définie comme la limite de $\varphi_n(x)$ lorsque $n \to \infty$ :

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x).$$

les fonctions $\varphi_n(x)$ étant calculées par les formules de récurrence (4.12).
On peut prendre pour $\varphi_0(x)$ n'importe quelle fonction de $L_2(0, a)$ (en particulier, une fonction continue) qui remplit la condition (4.13).
Notons qu'un bon choix de l'approximation initiale est susceptible de faciliter la résolution de l'équation.

**Exemple 2 :** On utilise la technique des approximations successives pour résoudre l'équation intégrale

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{1 + \varphi^2(t)}{1 + t^2}\, dt,$$

en prenant pour approximation initiale $\varphi_0(x) = x$. On a alors

$$\varphi_1(x) = \int_0^x \frac{1+t^2}{1+t^2}\, dt = x.$$

On trouve de même $\varphi_n(x) = x, (n = 2, 3, ...)$.

La suite $\{\varphi_n(x)\}$ est donc une suite stationnaire $\{x\}$ tendant vers $\varphi(x) = x$.

On obtient de suite la solution $\varphi(x) = x$ de l'équation intégrale donnée.

## 4.4 L'existence des solutions d'équations intégrale de Hammerstein et Hammerstein-Volterra

### 4.4.1 Position du problème

Dans ce section nous étudions l'existence des solutions d'équation intégrale non linéaire de type Hammerstein dans $L^p([a, b])$,

$$\varphi(t) = g(t) + \int_a^b K(t, s) f(s, \varphi(s))\, ds, \quad -\infty < a \le t \le b < +\infty. \tag{4.14}$$

Un intérêt particulier est consacré au cas où le noyau $K(.,.)$ satisfait à la condition

$$K(t, s) = 0, \; \textit{pour } a \le t \le s \le b,$$

dans ce cas, l'équation (4.14) est réduit à l'équation de Hammerstein-Volterra suivante

$$\varphi(t) = g(t) + \int_a^t K(t, s) f(s, \varphi(s))\, ds, \quad -\infty < a \le t \le b < +\infty. \tag{4.15}$$

Nous avons étudié quelques résultats d'existence et l'unicité de la solution de (4.15) dans $C([a, b])$.

On considère l'opérateur T défini par :

$$T\varphi(t) = g(t) + \int_a^b K(t, s) f(s, \varphi(s))\, ds, \quad \forall t \in [a, b]. \tag{4.16}$$

On applique la théorie du point fixe sur l'opérateur T sous des conditions données sur l'opérateur et sur domaine, afin d'assurer l'existence du point fixe.

A fin de prouver que l'équation admet une solution, il faut montrer que l'opérateur T admet un point fixe.

### 4.4.2 Résultats de compacité

Dans le cas particulier où $X = C([a, b])$, le théorème d'Arzela-Ascoli est généralement utilisé pour prouve la compacité de T.
En utilisant certaines conditions sur les fonctions $g(.)$ et $f(.,.)$ en combinant le théorème d'Arzela-Ascoli avec un résultat densité $L^p$, nous prouvons la compacité de l'opérateur T dans $L^p([a, b])$, $p \geq 1$.

**Théorème 4.6 :** Soit G un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, et $f : G \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonction satisfaisante les conditions de Carathéodory.
Supposons que $f$ vérifie la condition suivante

$$|f(x, u)| \leq |a(x)| + c|u|^{\frac{p}{q}}, \; \forall u \in \mathbb{R} \, et \, p.p. \, x \in G, \tag{4.17}$$

où $a \in L^q(G, \mathbb{R})$, et $c \in \mathbb{R}^+$. Alors, l'opérateur défini par $(Fu)(x) = f(x, u(x))$, $u \in L^p(G, \mathbb{R})$ $et \, p.p. \, x \in G$ est borné et continu de l'espace $L^p(G)$ dans $L^q(G)$.

**Démonstration :** On déduit de l'hypothèse (4.17) la majoration suivante

$$|f(x, u(x))|^q \leq \left(|a(x)| + c|u|^{\frac{p}{q}}\right)^q,$$

et donc $\| Fu \|_q = \Big( \int_G |f(x,u(x))|)^q \, dx \Big)^{\frac{1}{q}} \leq \Big( \int_G \Big( |a(x)| + c|u|^{\frac{p}{q}} \Big)^q \, dx \Big)^{\frac{1}{q}}$.
Par l'inégalité de Minkowski, il vient

$$\begin{aligned}
\| Fu \|_q &\leq \Big( \int_G |a(x)|^q \, dx \Big)^{\frac{1}{q}} + \Big( \int_G c^q |u|^p \, dx \Big)^{\frac{1}{q}}, \\
&\leq \| a \|_q + c\Big( \int_G |u|^p \, dx \Big)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

On obtient $\| Fu \|_q \leq \| a \|_q + c\Big( \| u \|_p \Big)^{\frac{p}{q}} < \infty$.
Donc, l'opérateur F est borné.

Pour montrer la continuité de F, on considère une suite $(u_n)$ convergente vers $u$ dans $L^p(G)$, elle admet une sous-suite $(u_{n_k})$ convergente p.p. dans G vers $u$, et il existe $\overline{u} \in L^p(G)$ telle que $|u_{n_k}(x)| \leq |\overline{u}(x)|$ $p.p.\, x \in G$. La fonction $f$ étant continue en la seconde variable, $f(x, u_{n_k}(x))$ converge, quand $k \to \infty$, vers $f(x,u(x))$ p.p. $x \in G$.

De plus, grâce à l'inégalité dans l'inégalité utile, on obtient les estimations suivantes

$$\begin{aligned}
\| Fu_{n_k} - Fu \|_q^q &= \int_G |f(x, u_{n_k}(x)) - f(x,u(x))|^q \, dx, \\
&\leq \int_G \Big( |f(x, u_{n_k}(x))| + |f(x,u(x))| \Big)^q \, dx, \\
&\leq 2^{q-1} \int_G \Big( |f(x, u_{n_k}(x))|^q + |f(x,u(x))|^q \Big) \, dx, \\
&\leq 2^{q-1} \int_G \Big\{ \Big( |a(x)| + c|u_{n_k}|^{\frac{p}{q}} \Big)^q + \Big( |a(x)| + c|u|^{\frac{p}{q}} \Big)^q \Big\} \, dx, \\
&\leq 2^{q-1} \Big\{ 2 \int_G |a(x)|^q \, dx + c^q \Big( \int_G |u|^p \, dx + \int_G |u_{n_k}|^p \, dx \Big) \Big\}, \\
&\leq C\Big( \| a \|_q^q + \| u \|_p^p + \| u_{n_k} \|_p^p \Big), \\
&\leq C'.
\end{aligned}$$

Où $C$ et $C'$ sont deux constantes indépendantes de $n$.
De plus, $\| Fu_{n_k} \|_q \leq \| Fu \|_q + \| Fu_{n_k} - Fu \|_q$ .
La suite $(Fu_{n_k})$ est donc bornée indépendamment de $n$ dans $L^q(G)$.
En vertu du théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on obtient finalement de convergence dans $L^q(G)$ de la suite $(Fu_{n_k})$ vers $Fu$. ■

**Lemme 4.2 :** Sous les conditions ci-dessus, soit $p \geq 1$ un nombre réel et soit $q \in [1, +\infty]$ le conjugué de $p$. Supposons que l'opérateur F satisfait la condition suivante, $\forall u \in L^p([a,b])$, $Fu \in L^q([a,b])$. Alors, F est un opérateur continu de $L^p([a,b])$ dans $L^q([a,b])$. En outre, il existe une constante $C > 0$ et $h \in L^q([a,b])$ telle que

$$|f(x,u)| \leq C|u|^{p-1} + |h(x)|, \ \forall x \in [a,b], \ \forall u \in \mathbb{R}.$$

**Théorème 4.7 :** On considère l'opérateur T donné par (4.16), et soit $p \geq 1$ et $q$ le conjugué de $p$. Supposons que $g \in L^p([a,b])$, et qu'il existe une constante positive C et fonction $h \in L^q([a,b])$, telle que

$$|f(x,u)| \leq C|u|^{p-1} + |h(x)|, \forall x \in [a,b], \forall u \in \mathbb{R}. \tag{4.18}$$

Supposons que le noyau $K(.,.) \in L^p([a,b]^2)$. Alors, $\forall u \in L^p([a,b])$ , $Tu \in L^p([a,b])$, et T est un opérateur compact.

**Démonstration :** Nous avons écrit l'opérateur T de la forme : $T = T_1 + T_K$, tel que :

$$T_1(u)(t) = g(t), \ T_K(u)(t) = \int_a^b K(t,s) f(s,u(s))\, ds, \ t \in [a,b].$$

Il est clair que $T_1$ est un opérateur compact sur $L^p([a,b])$. Ainsi, pour prouver que T est compact, il suffit de prouver que $T_K : L^p([a,b]) \to L^p([a,b])$ est compact.

Notez qu'à partir de (4.18), on conclut que si $u \in L^p([a,b])$, alors la fonction $s \to f(s,u(s))$ appartient à $L^q([a,b])$.

Soit $u \in L^p([a,b])$, puis en utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned}
\| T_K(u) \|_p^p &= \int_a^b \left| \int_a^b K(t,s) f(s,u(s))\, ds \right|^p dt, \\
&\leq \int_a^b \int_a^b |K(t,s)|^p\, ds \left[ \int_a^b |f(s,u(s))|^p\, ds \right]^{\frac{p}{q}} dt, \\
&\leq \| K \|_p^p \Big( \| C|u(s)|^{p-1} + h(s) \|_q \Big)^p, \\
&\leq \| K \|_p^p \Big( C \Big( \| u \|_p \Big)^{p-1} + \| h \|_q \Big)^p.
\end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient

$$\| T_K(u) \|_p \leq \| K \|_p \Big( C \Big( \| u \|_p \Big)^{p-1} + \| h \|_q \Big) \leq +\infty.$$

Alors, $\forall u \in L^p([a,b])$, on obtient $T_K u \in L^p([a,b])$.

La preuve de la compacité de T, est effectué par les deux étapes suivantes :

**Première étape**

Dans cette étape, nous supposons que $K(t,s) \in C([a,b]^2)$ et nous montrons que $T_K : L^p([a,b]) \to C([a,b])$ est compact.

Nous montrons d'abord que $T_K(L^p([a,b])) \subset C([a,b])$.

Soit $u \in L^p([a,b])$ et $t, t_0 \in [a,b]$, il est clair que

$$\begin{aligned}
|T_K u(t) - T_K u(t_0)| &\leq \int_a^b |K(t,s) - K(t_0,s)| \Big( C|u(s)|^{p-1} + |h(s)| \Big)\, ds, \\
&\leq \sup_{s\in[a,b]} |K(t,s) - K(t_0,s)| \int_a^b \Big( C|u(s)|^{p-1} + |h(s)| \Big)\, ds, \\
&\leq \sup_{s\in[a,b]} |K(t,s) - K(t_0,s)| (b-a)^{\frac{1}{p}} \Big( C \Big( \| u \|_p \Big)^{p-1} + \| h \|_q \Big).
\end{aligned}$$

Comme $K(.,.)$ est uniformément continu sur $[a,b]^2$, alors l'inégalité précédente implique que $T_K u \in C([a,b])$.

Ensuite, soit $S = \{(u_n)_n, n \in \mathbb{N}\}$ un ensemble borné de $L^p([a,b])$, nous vérifions que $T_K(S)$ est uniformément borné et équicontinu.

On a $\forall n \in N$, $\| u_n \|_p \leq M$, $M$ est une constante positive, on peut facilement vérifier que

$$|T_K u_n(t)| \leq \| K \|_\infty (b-a)^{\frac{1}{p}} \Big( C M^{p-1} + \| h \|_q \Big), \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \forall t \in [a,b].$$

Donc, $T_K(S)$ est uniformément borné dans $C([a,b])$.

En outre, il est facile de vérifier que si $t, t_0 \in [a,b]$, puis $\forall n \in \mathbb{N}$, on obtient

$$|T_K u_n(t) - T_K u_n(t_0)| \leq \sup_{s \in [a,b]} |K(t,s) - K(t_0,s)| (b-a)^{\frac{1}{p}} \Big( C \Big( \| u \|_p \Big)^{p-1} + \| h \|_q \Big).$$

Cela montre que $T_K(S)$ est équicontinu.

En utilisant le théorème d'Arzela-Ascoli, on obtient $T_K(S)$ est compact dans $C([a,b])$, pour la topologie de $L^p([a,b])$ est plus faible que la topologie de $C([a,b])$, alors $T_K(S)$ est compact dans $L^p([a,b])$.

**Deuxième étape**

Nous montrons que $T_K$ est compact dans le cas général où $K \in L^p([a,b]^2)$.

Notez que dans ce cas, il existe une suite de noyau $(K_n(t,s))_n \in C([a,b]^2)$, telle que $\| K_n - K \|_p \to 0$ que $n \to +\infty$.

Soit S un ensemble défini précédent et borné de $L^p([a,b])$, comme $K_1(.,.) \in C([a,b]^2)$, en utilisant la première étape, on conclut que $T_{K_1}$ est compact. Ainsi, il existe $(u_n^{(1)})_n$ une suite de $(u_n)_n$ tel que $\Big(T_{K_1}(u_n^{(1)})_n\Big)_n$ est convergente. De même, il existe $(u_n^{(2)})_n$ une suite de $(u_n^{(1)})_n$ tel que $\Big(T_{K_2}(u_n^{(2)})_n\Big)_n$ est convergente, plus généralement, $\forall m \in \mathbb{N}$, il existe une suite $(u_n^{(m)})_n$ de $(u_n^{(m-1)})_n$tel que$\Big(T_{K_m}(u_n^{(m)})_n\Big)_n$ est convergente.

Ensuite, on envisage la suite diagonale $(u_n^{(n)})_n$, nous prouvons que $\Big(T_K(u_n^{(n)})_n\Big)_n$

est une suite de Cauchy dans $L^p([a,b])$, nous notons d'abord que $\forall k, l, n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}\left\|T_K(u_k^{(k)}) - T_K(u_l^{(l)})\right\|_p &\leq \left\|T_K(u_k^{(k)}) - T_{K_n}(u_k^{(k)})\right\|_p + \left\|T_{K_n}(u_k^{(k)}) - T_{K_n}(u_l^{(l)})\right\|_p + \\ &+ \left\|T_{K_n}(u_l^{(l)}) - T_K(u_l^{(l)})\right\|_p. \end{aligned} \tag{4.19}$$

On a $\left(T_{K_n}(u_l^{(l)})\right)_l$ convergente, alors $\forall \varepsilon > 0$, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ telle que

$$\left\|T_K(u_k^{(k)}) - T_K(u_l^{(l)})\right\|_p \leq \frac{\varepsilon}{3}, \forall l, k \geq N_\varepsilon. \tag{4.20}$$

D'autre part, on obtient

$$\begin{aligned}\left\|T_K(u_k^{(k)}) - T_{K_n}(u_k^{(k)})\right\|_p^p &\leq \int_a^b \left[\int_a^b |K_n(t,s) - K(t,s)| \left|f(s, u_k^{(k)}(s))\right| ds\right]^p dt, \\ &\leq \| K - K_n \|_p^p C\left(\left\|u_k^{(k)}\right\|_p^{p-1} + \| h \|_q\right)^p. \end{aligned}$$

Comme$\forall k \in \mathbb{N}$, $u_k^{(k)} \in S$, alors l'inégalité précédente implique,

$$\left\|T_K(u_k^{(k)}) - T_{K_n}(u_k^{(k)})\right\|_p \leq \| K - K_n \|_p \left(CM^{p-1} + \| h \|_q\right). \tag{4.21}$$

On a $\| K - K_n \|_p \to 0$, que $n \to +\infty$, puis en utilisant l'inégalité précédente, on conclut qu'il existe $M_\varepsilon \in \mathbb{N}$, telle que

$$\left\|T_K(u_k^{(k)}) - T_{K_n}(u_k^{(k)})\right\|_p \leq \frac{\varepsilon}{3}, \forall n \geq M_\varepsilon, \forall k \in \mathbb{N}.$$

En combinant (4.20)-(4.21), on conclut que $\left(T_K(u_n^{(n)})_n\right)_n$ est une suite de Cauchy dans l'espace de Banach $L^p([a,b])$. Par conséquent, toute suite bornée de $T_K(S)$ est une suite convergente, alors $T_K(S)$ est compact, pour tout S un sous-ensemble borné de $L^p([a,b])$.

Cela montre que $T_K$ est un opérateur compact sur $L^p([a,b])$. ■

### 4.4.3 Résultats d'existence des solutions des équations de Hammerstein

Notre résultat d'existence du premier problème (4.14) est donné par le théorème suivant.

**Théorème 4.8 :** On considère l'équation intégrale non linéaire (4.14), et soit $1 \leq p \leq 2$ un nombre réel et $q \in [1, +\infty]$ le conjugué de $p$.
Supposons que $K(.,.) \in L^p([a,b]^2)$ et $g(.) \in L^p([a,b])$. En outre, supposons que la fonction $f(.,.)$ satisfait aux conditions du Lemme 4.2. Ensuite, les résultats suivants détiennent
$(R_1)$ Si $1 \leq p < 2$, alors (4.14) admet une solution $\varphi \in L^p([a,b])$.
$(R_2)$ Si $p = 2$, et le noyau K satisfait à l'une des deux conditions suivantes :
$(c_1)$ $C\| K \|_2 < 1$, où C constante est donnée par le Lemme 4.2.
$(c_2)$ $K(t,s) = 0$, $\forall s \geq t$ et $|K(t,s)| \leq |K_1(t)||K_2(s)|$, où $K_1(.)$ est borné et mesurable sur [a, b] et $K_2(.) \in L^p([a,b])$.
Alors, l'équation (4.14) admet une solution $\varphi \in L^p([a,b])$.

**Démonstration :** Notons d'abord que la fonction $f(.,.)$ satisfait aux conditions de Lemme 4.2, il vérifie l'inégalité (4.18) pour une constante $C > 0$ et $h(.) \in L^p([a,b])$. Ainsi, d'après le théorème 4.7, on conclut que l'opérateur T défini par (4.16) est un opérateur compact de $L^p([a,b])$ dans $L^p([a,b])$.
La continuité de T dans $L^p([a,b])$ est une simple conséquence de la continuité de l'opérateur F sur $L^p([a,b])$. Plus précisément, soit $\varphi \in L^p([a,b])$ et soit $(\varphi_n)_n$ une suite de $L^p([a,b])$ qui converge vers $\varphi$. Puis, en utilisant les

propriétés de F ainsi que l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned} \| T\varphi_n(.) - T\varphi(.) \|_p^p &\leq \int_a^b \Big[ \int_a^b |K(t,s)||F(\varphi_n)(s) - F(\varphi)(s)|\, ds \Big]^p dt, \\ &\leq \int_a^b \Big[ \int_a^b |K(t,s)|^p \Big] \Big[ \int_a^b |F(\varphi_n)(s) - F(\varphi)(s)|^q \Big]^{\frac{p}{q}} dt, \\ &\leq \| F(\varphi_n) - F(\varphi) \|_q^p \| K \|_p^p. \end{aligned}$$

Comme $F : L^p([a,b]) \to L^q([a,b])$ est continu, alors l'inégalité précédente implique la continuité de T. Puisque T est compact, alors T est complètement continu.

Si $\varphi \in L^p([a,b])$, en utilisant l'inégalité (4.18) avec l'inégalité de Hölder, on peut facilement vérifier que

$$\| T\varphi \|_p \leq \| g \|_p + \| K \|_p \Big( C \Big( \| \varphi \|_p \Big)^{p-1} + \| h \|_q \Big). \tag{4.22}$$

Pour prouver le résultat d'existence $(R_1)$, on utilise le théorème du point fixe de Schaeffer 3.9, et démontre que pour $1 \leq p < 2$, l'ensemble
$S = \{\varphi \in L^p([a,b]),\ \varphi = \lambda T\varphi,\ \lambda \in ]0,1[\}$ , est borné.
En utilisant (4.22), il est facile de voir que $\forall \varphi \in S$, on obtient

$$\| \varphi \|_p \leq \| T\varphi \|_p \leq C \| K \|_p \Big( \| \varphi \|_p \Big)^{p-1} + \| g \|_p + \| K \|_p \| h \|_q.$$

Ou bien

$$\Big( \| \varphi \|_p \Big)^{p-1} \Big[ \Big( \| \varphi \|_p \Big)^{2-p} - C \| K \|_p \Big] \leq \| g \|_p + \| K \|_p \| h \|_q.$$

Comme $1 \leq p < 2$, alors l'inégalité précédente implique qu'il existe une constante $M > 0$ telle que $\| \varphi \|_p \leq M$. Ainsi, S est uniformément borné par $M$.

Par conséquent, en utilisant le théorème de Schaeffer 3.9, on conclut que l'équation (4.14) admet une solution $\varphi \in L^p([a,b])$.

Ensuite, nous prouvons $(R_2)$, on examine d'abord le cas particulier $(c_1)$.

Comme $\varphi \in S$, puis de (4.22), on obtient

$$\| \varphi \|_2 \leq \| T\varphi \|_2 \leq \| g \|_2 + \| K \|_2 (C \| \varphi \|_2 + \| h \|_2).$$

Si $C\| K \|_2 < 1$, alors l'inégalité précédente implique que $\forall \varphi \in S$, on déduit

$$\| \varphi \|_2 \leq \frac{\| g \|_2 + \| K \|_2 \| h \|_2}{1 - C\| K \|_2} = M.$$

Ainsi, S est borné. Par conséquent, si $C\| K \|_2 < 1$, alors l'équation (4.14) vérifie le théorème du point fixe de Schaeffer 3.9 d'où elle admet une solution $\varphi \in L^p([a,b])$.

Enfin, sous la condition $(c_2)$, toute solution de $\varphi = \lambda T\varphi$ pour $\lambda \in [0,1]$ satisfait les inégalités suivantes

$$\begin{aligned}
|\varphi(t)| &\leq \| g \|_\infty + |K_1(t)| \int_a^t |K_2(s)||h(s)|\, ds + C|K_1(t)| \int_a^t |K_2(s)||\varphi(s)|\, ds,\ t \in [a,b], \\
&\leq \| g \|_\infty + \| K_1 \|_\infty \| K_2 \|_2 \| h \|_2 + C\| K_1 \|_\infty \int_a^t |K_2(s)||\varphi(s)|\, ds, \\
&\leq A + \leq \int_a^t \phi(s)|\varphi(s)|\, ds,
\end{aligned}$$

où $A = \| g \|_\infty + \| K_1 \|_\infty \| K_2 \|_2 \| h \|_2$ et $\phi(s) = C\| K_1 \|_\infty |K_2(s)| \in L^2([a,b]) \subset L^1([a,b])$.

Ainsi, en utilisant l'inégalité de Gronwall, on conclut que $\varphi$ satisfait la relation suivante

$$\| \varphi \|_2 \leq A\sqrt{b-a}\exp(\| \phi \|_1).$$

Par conséquent, l'équation (4.14) admet une solution dans $L^2([a,b])$ par le théorème du point fixe de Schaeffer 3.9. ∎

Notons que le résultat du théorème ci-dessus n'est valable que dans le cas où $1 \leq p \leq 2$. En outre, si $p = 2$, alors la condition $(c_1)$ est une sérieuse limitation du théorème 4.7. Pour sur montrer ces problèmes, on peut utiliser une pratique pondérée $L^p$-norme et le théorème du point fixe de Schauder 3.9. C'est l'objet du théorème suivant :

**Théorème 4.9** : Considérons l'équation (4.10) où les fonctions $g(t)$, $f(s,x)$ sont aussi proposées par le théorème précédent, et soit $p \geq 1$ un nombre réel et $q$ le conjugué de $p$.
Supposons également qu'il existe une constante $C_1 > 0$ et $h \in L^p([a,b])$ telle que

$$|f(s,x)| \leq C_1|x| + |h(s)|, \; p.p. \; s \in [a,b], \; \forall x \in \mathbb{R}. \tag{4.23}$$

En outre, supposons qu'il existe fonction $\mu$, continue, bornée, non nulle, positive sur [a, b], et telle que la fonction

$$\Psi(t) = \begin{cases} \left[\displaystyle\int_a^b |K(t,s)|^q (\mu(s))^{-\frac{q}{p}}\right]^{\frac{1}{q}}, & \text{si } p > 1, q < +\infty, \\ \sup_{s\in[a,b]} \dfrac{|K(t,s)|}{\mu(s)}, & \text{si } p = 1, q = +\infty. \end{cases}$$

appartient à $L^p([a,b], d\mu)$. Si $C_1 \| \Psi \|_{p,\mu} < 1$, alors l'équation (4.14) admet une solution $\varphi \in L^p([a,b])$.

**Démonstration** : Nous définissions d'abord l'espace $X = L^p([a,b], d\mu)$, par

$$L^p([a,b], d\mu) = \Big\{ f \in L^p([a,b]), \| f \|_{p,\mu} < +\infty \Big\}.$$

Telle que, $\| \cdot \|_{p,\mu}$ est une fonction réelle positive définie sur $L^p([a,b])$ par

$$\forall f \in L^p([a,b]), \| f \|_{p,\mu} = \left( \int_a^b |f(t)|^p \mu(t) \, dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

En utilisant les propriétés de la fonction $\mu$, il est clair que $\| \cdot \|_{p,\mu}$ est une norme et que $X = L^p([a,b], d\mu)$ est un espace de Banach. Déplus les deux normes $\| \cdot \|_p$ et $\| \cdot \|_{p,\mu}$ sont équivalentes. Ainsi, tout ensemble borné dans X est un ensemble borné dans $L^p([a,b])$.

Ensuite, soit $R$ un nombre réel positif qui sera fixe, supposons $B_R$ est un sous-ensemble borné, fermé, convexe d'un espace X, défini par

$$B_R = \Big\{ f \in X, \| f \|_{p,\mu} \leq R \Big\}.$$

Comme l'opérateur intégral T donné par (4.16) est compact sur $L^p([a,b])$ et $B_R$ est un ensemble borné de $L^p([a,b])$, alors $T(B_R)$ est relativement compact dans $L^p([a,b]) \subseteq X$. Ensuite, nous montrons que si $C_1 \| \Psi \|_{p,\mu} < 1$, alors il existe $R_0 > 0$ tel que $\forall R \geq R_0$, on obtient $T(B_R) \subseteq B_R$. Cela se fait comme suit. Soit $\varphi \in B_R$, en utilisant l'inégalité de Hölder, (4.23) et le théorème de Fubini, on obtient les inégalités suivantes.

$$\begin{aligned}
\| T_K\varphi \|_{p,\mu}^p &\leq \int_a^b \mu(t) \Big[ \int_a^b \frac{|K(t,s)|}{\big(\mu(s)\big)^{\frac{1}{p}}} (\mu(s))^{\frac{1}{p}} \Big( C_1|\varphi(s)| + |h(s)| \Big) \, ds \Big]^p \, dt, \\
&\leq \int_a^b \mu(t) \Big( \int_a^b |K(t,s)|^q (\mu(s))^{\frac{-q}{p}} \, ds \Big)^{\frac{p}{q}} \Big( \int_a^b \mu(s) \Big( C_1|\varphi(s)| + |h(s)| \Big)^p ds \Big) \, dt, \\
&\leq \| C_1\varphi + h \|_{p,\mu}^p \int_a^b \mu(t) \Big( \int_a^b |K(t,s)|^q (\mu(s))^{\frac{-q}{p}} \, ds \Big)^{\frac{p}{q}} \, dt, \\
&\leq \Big( C_1 \| \varphi \|_{p,\mu} + \| h \|_{p,\mu} \Big)^p \| \Psi \|_{p,\mu}^p.
\end{aligned}$$

Comme $T\varphi = g + T_K\varphi$, et $\| \varphi \|_{p,\mu} \leq R$ , alors l'inégalité

$$\| T\varphi \|_{p,\mu} \leq \| g \|_{p,\mu} + \| \Psi \|_{p,\mu} \| h \|_{p,\mu} + C_1 \| \varphi \|_{p,\mu} \| \Psi \|_{p,\mu}.$$

Par conséquent, $T(B_R) \subseteq B_R$, pour tout

$$R \geq \frac{\| g \|_{p,\mu} + \| \Psi \|_{p,\mu} \| h \|_{p,\mu}}{1 - C_1 \| \Psi \|_{p,\mu}} = R_0.$$

Enfin, en utilisant le théorème du point fixe de Schauder 3.7, on conclut que (4.14) admet une solution $\varphi \in L^p([a,b])$. ■

Nous allons donner un exemple.

**Exemple 3 :** On considère l'équation intégrale non linéaire suivante

$$\varphi(t) = g(t) + \lambda \int_0^1 \frac{\exp(5(s-t))}{5\sqrt{t+s}}[\varphi(s) + \ln(1+\varphi^2(s))]\, ds, \ t \in [0,1], \quad (4.24)$$

où $g \in L^2([0,1])$ et $\lambda > 0$ est un paramètre réel.

Le noyau $K(.,.)$ appartient à $L^2([0,1]^2)$,

$$K(t,s) = \lambda \frac{\exp(5(s-t))}{5\sqrt{t+s}} \in L^2([0,1]^2).$$

En outre, le calcul numérique nous donne $\| K \|_2 \approx 3.0030\lambda$.

D'autre part, la fonction $f(s,x) = x + \ln(1+x^2)$ satisfait clairement la condition de $L^2-$Carathéodory.

Comme

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(s,x)}{x} = 1, \ \forall s \in [0,1],$$

alors, $\forall \varepsilon > 0$, il existe $1 < C_{1,\varepsilon} < 1 + \varepsilon$, $C_{2,\varepsilon} > 0$ telle que

$$|f(s,x)| \leq C_{1,\varepsilon}|x| + C_{2,\varepsilon}, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ s \in [0,1].$$

Notons que la $|f(s,x)| > x$, $\forall x > 0$. Par conséquent, il est nécessaire que $C_{1,\varepsilon} > 1$.

En utilisant l'inégalité précédente et le théorème 4.8, on conclut que (4.24) admet une solution dans $L^2([0,1])$, pour tout $0 \leq \lambda < \lambda_0 \approx 0.3330$.

Si $\lambda > \lambda_0$, le théorème 4.8, n'est plus applicable, nous utilisons le théorème 4.9 pour prouver le résultat d'existence pour les grandes valeurs de $\lambda$, pour

$p = q = 2$ on considère une mesure pondérée de Lebsgue sur $[0,\ 1]$, $d\mu(t) = \mu(t)\,dt$, où $\mu(t) = \exp(10t)$.

En vertu du théorème 4.9 la fonction $\Psi(t)$ est donnée par la formule suivante,

$$\Psi(t) = \left(\int_0^1 \frac{|K(t,s)|^2}{\mu(s)}\,ds\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\lambda}{5}e^{-5t}\sqrt{\ln\left(\frac{t+1}{t}\right)}.$$

Notez que $\Psi \in L^2([0,1], d\mu)$ et $\| \Psi \|_{2,\mu} = \frac{\lambda}{5}\sqrt{2\ln 2}$.

Puisque la constante $C_{1,\varepsilon}$ satisfait $1 < C_{1,\varepsilon} < 1+\varepsilon$, $\forall\varepsilon > 0$, en utilisant le théorème 4.9 , on conclut que l'équation (4.24) admet une solution dans $L^2([0,1])$, pour tout

$$0 \leq \lambda < \lambda_1 = \frac{5}{\sqrt{2\ln 2}} \approx 4.2466.$$

Il s'agit d'une amélioration significative du résultat donné par le théorème 4.8.

### 4.4.4 Existence et unicité de la solution continue de l'équation de Hammerstein-Volterra

Dans cette partie, nous donnons un résultat d'existence et unicité pour une solution continue de l'équation intégrale non linéaire de Hammerstein-Volterra.

#### 1) Théorème d'existence

Notre résultat d'existence est donné par le théorème suivant.

**Théorème 4.10 :** Considérons l'équation intégrale non linéaire de Hammerstein-Volterra suivante

$$\varphi(t) = T\varphi = g(t) + \int_a^t K(t,s)f(s,\varphi(s))\,ds,\ t \in [a,b]. \tag{4.25}$$

Supposons que $g \in C([a,b])$, et le noyau K satisfait les conditions suivantes,
(i) $K(t,s) \geq 0$, $\forall t, s \in [a,b]$ , $K(t,s) \geq K(t_0,s)$, $\forall t \leq t_0$.
(ii) La fonction $t \to \int_a^t K(t,s)\,ds$, est continue sur [a, b].
(iii) $\forall t_0 \in [a,b]$, $s \to K(t_0,s) \in L^1([a,b])$.
On suppose que la fonction $f(.,.)$ est continue sur $[a,b] \times \mathbb{R}$ et satisfait la condition suivante,

$$|f(s,x)| \leq c_1|x| + c_2, \forall x \in \mathbb{R}. \tag{4.26}$$

où $c_1$, $c_2$ sont deux constantes positives. En outre, supposons que le noyau K satisfait la condition suivante,

$$\sup_{t\in[a,b]} \int_a^t K(t,s)\,ds < \frac{1}{c_1}. \tag{4.27}$$

Alors, l'équation (4.25) admet au moins une solution $\varphi \in C([a,b])$.

**Démonstration :** Nous allons prouver que l'opérateur T est complètement continu de $C([a,b])$ dans $C([a,b])$. Pour prouver que $T(C([a,b])) \subset C([a,b])$, nous procédons comme suit.
Soit $\varphi \in C([a,b])$ et $t$, $t_0 \in [a,b]$, on peut supposer que $t < t_0$. Puis, utilisons (i), on obtient

$$|T\varphi(t)-T\varphi(t_0)| \leq |g(t)-g(t_0)|+\int_a^t (K(t,s)-K(t_0,s))|f(s,\varphi(s))|\,ds+\int_t^{t_0} K(t_0,s)|f(s,\varphi(s))|\,ds. \tag{4.28}$$

$$0 \leq \int_a^t (K(t,s)-K(t_0,s))\,ds \leq \left|\int_a^t K(t,s)\,ds-\int_a^{t_0} K(t_0,s)\,ds\right|+\int_t^{t_0} K(t_0,s)\,ds, \tag{4.29}$$

de (ii), (iii) et (4.29), on conclut que

$$\lim_{t\to t_0} \int_t^{t_0} K(t_0,s)\,ds = \lim_{t\to t_0} \int_a^t (K(t,s) - K(t_0,s))\,ds = 0. \tag{4.30}$$

Puisque $\varphi$ est bornée sur [a, b], et $f(.,.)$ satisfait (4.26), alors il existe une constante $M > 0$ telle que

$$|f(s, \varphi(s))| \leq M, \forall s \in [a, b]. \tag{4.31}$$

En combinant (4.28), (4.30) et (4.31), on conclut que $T\varphi \in C([a, b])$.
Note également que la continuité de T sur $C([a, b])$ est une conséquence directe de **(ii)** et la continuité de $f(.,.)$ sur $[a, b] \times \mathbb{R}$.
Ensuite, pour prouver la compacité de T, il suffit de vérifier que T satisfait la condition de théorème d'Ascoli-Arzela.
Soit $S = \left\{\varphi_n, n \in N\right\}$ un ensemble borné de $C([a, b])$ avec une constante $C_S$. Alors, $\forall n \in N$, on obtient

$$\| T\varphi_n \|_\infty \leq \| g \|_\infty + (c_1 C_S + c_2) \sup_{t\in[a,b]} \int_a^t K(t, s)\, ds = M_S.$$

D'où $T(S)$ est uniformément borné.
Remplaçons $\varphi$ par $\varphi_n$ dans (4.28), en utilisant (4.30) et (4.31), on montre que $T(S)$ est équicontinu. Ainsi, que le théorème d'Arzela-Ascoli, on conclut que $T : C([a, b]) \to C([a, b])$ est complètement continu.
Ensuite, soit $R > 0$ un nombre réel positif, on considère $B_R$ est une boule convexe et fermée de $C([a, b])$, notée par $B_R = \left\{\varphi \in C([a, b]), \| \varphi \|_\infty \leq R\right\}$.
En utilisant (4.26), on obtient l'inégalité suivante

$$\| T\varphi \|_\infty \leq \| g \|_\infty + (c_1 R + c_2) \sup_{t\in[a,b]} \int_a^t K(t, s)\, ds.$$

Par conséquent, si $\sup_{t\in[a,b]} \int_a^t K(t, s)\, ds < \frac{1}{c_1}$, d'où $T(B_R) \subseteq B_R$, telle que

$$R \geq \frac{\| g \|_\infty + c_2 \sup_{t\in[a,b]} \int_a^t K(t, s)\, ds}{1 - c_1 \sup_{t\in[a,b]} \int_a^t K(t, s)\, ds} = R_0.$$

En utilisant le théorème du point fixe de Schauder 3.7, on conclut que l'équation (4.25) admet une solution continue sur [a, b]. ■

**Remarque 4.2 :** Supposons que dans le théorème précédent, la fonction $f(.,.)$ satisfait l'inégalité suivante

$$|f(s,x)| \leq c_1|x|^\eta + c_2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall s \in [a,b], \tag{4.32}$$

où $0 \leq \eta < 1$ et $c_1, c_2 > 0$. Alors, il existe $c_1', c_2' > 0$ telle que

$$|f(s,x)| \leq c_1'|x| + c_2',\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall s \in [a,b],$$

et telle que $\sup\limits_{t\in[a,b]} \int_a^t K(t,s)\,ds < \frac{1}{c_1'}$. Ainsi, par le théorème précédent, on conclut que si et seulement si $f(.,.)$ satisfait (4.32), puis l'équation (4.25) admet une solution $\varphi \in C([a,b])$.

**Remarque 4.3 :** Comme La fonction $t \to \int_a^t K(t,s)\,ds$ est continue, alors la condition (4.27) est satisfaite pour $b-a$ assez petit. Par conséquent, le théorème précédent assure toujours l'existence d'une solution de (4.25) dans un voisinage de $a$.

**Exemple 4 : (équation intégrale non linéaire d'Abel)**

On considère l'équation intégrale non linéaire d'Abel de seconde espèce

$$\varphi(t) = g(t) + \int_0^t \frac{1}{(t-s)^\alpha}(\varphi(s))^\eta\,ds,\ t \in [0,T]\ et\ T < +\infty. \tag{4.33}$$

Où $0 \leq \alpha < 1$, $0 \leq \eta \leq 1$ et $g \in C([0,T])$.

Il est clair que le noyau

$$K(t,s) = \frac{1}{(t-s)^\alpha}\chi_{[0,t[}(s),$$

vérifié les conditions **(i)** et **(iii)** du théorème 4.10.

La fonction $H(t)$ telle que

$$H(t) = \int_0^t K(t,s)\,ds = \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha},$$

est continue sur [0, T] .

Si $\eta < 1$, en utilisant le théorème précédent et la remarque 4.2, on conclut que l'équation (4.33) admet une solution continue sur [0, T], pour tout nombre réel $T > 0$.

Enfin, si $\eta = 1$, alors le théorème précédent assure l'existence d'une solution continue de (4.33) sur [0, T] pour tout nombre réel positif $T < (1-\alpha)^{\frac{1}{1-\alpha}}$.

## 2) L'unicité de la solution

L'unicité de la solution de (4.25) est donnée par la proposition suivante

**Proposition 4.1 :** Supposons que la fonction $f(.,.)$ proposée par le théorème précèdent satisfait la condition suivante,

$$|f(s,x) - f(s,y)| \leq L|x-y|^r, \, \forall x, y \in \mathbb{R},$$

pour des constantes $L > 0$ et $0 < r \leq 1$. Alors, dans les conditions du théorème précédent, l'équation (4.25) admet une solution unique et continue sur [a, b].

**Démonstration :** Soit $M_K$ une constante positive donnée par

$$M_K = \sup_{t\in[a,b]} \int_a^t K(t,s)\, ds.$$

Par contradiction, supposons que l'équation (4.25) admet deux solutions différentes $\varphi, \psi \in C([a,b])$, alors il existe $0 \leq \varepsilon < 1$ telle que $\| \varphi - \psi \|_\infty \geq \varepsilon$, il est clair que $\forall t \in [a,b]$, on obtient

$$|T\varphi(t) - T\psi(t)| \leq L \int_a^t K(t,s)|\varphi(s) - \psi(s)|^r \, ds \leq \Big(\| \varphi - \psi \|_\infty\Big)^r L M_K (t-a).$$

En utilisant l'inégalité précédente, on obtient

$$\begin{aligned}
|T^2\varphi(t) - T^2\psi(t)| &\leq L\int_a^t K(t,s)|T\varphi(s) - T\psi(s)|^r\, ds,\\
&\leq \Big(\| \varphi - \psi \|_\infty\Big)^{r^2} (LM_K)^{r+1}\int_a^t (s-a)^r\, ds,\\
&\leq \Big(\| \varphi - \psi \|_\infty\Big)^{r^2} (LM_K)^{r+1}\frac{(t-a)^{r+1}}{r+1}.
\end{aligned}$$

De même, on obtient

$$|T^3\varphi(t) - T^3\psi(t)| \leq \Big(\| \varphi - \psi \|_\infty\Big)^{r^3} (LM_K)^{r^2+r+1}\frac{(t-a)^{r^2+r+1}}{(r+1)(r^2+r+1)}.$$

Plus généralement, pour tout $n$ entier positif, on obtient

$$|T^n\varphi(t) - T^n\psi(t)| \leq \Big(\| \varphi - \psi \|_\infty\Big)^{r^n} (LM_K)^{r^{n-1}+\ldots+r+1}\frac{(t-a)^{r^{n-1}+\ldots+r+1}}{(r+1)(r^2+r+1)(r^{n-1}+\ldots+r+1)}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\| T^n\varphi - T^n\psi \|_\infty &\leq \Big(\| \varphi - \psi \|_\infty\Big)^{r^n} \frac{\Big(LM_K(b-a)\Big)^{r^{n-1}+\ldots+r+1}}{(r+1)(r^2+r+1)(r^{n-1}+\ldots+r+1)},\\
&\leq \| \varphi - \psi \|_\infty \frac{\| \varphi - \psi \|_\infty^{r^n-1}\Big(LM_K(b-a)\Big)^{r^{n-1}+\ldots+r+1}}{(r+1)(r^2+r+1)(r^{n-1}+\ldots+r+1)}.
\end{aligned}$$

Puisque $0 < r \leq 1$ et que $\| \varphi - \psi \|_\infty \geq \varepsilon$, pour certain $0 < \varepsilon < 1$, alors l'inégalité précédente implique

$$\| T^n\varphi - T^n\psi \|_\infty \leq \| \varphi - \psi \|_\infty \frac{\max\Big(1, \Big(LM_K(b-a)\Big)^{\frac{1}{1-r}}\Big)}{\varepsilon(r+1)(r^2+r+1)(r^{n-1}+\ldots+r+1)}.$$

Comme $\varepsilon\prod_{j=1}^{n-1}(r^j+\ldots+r+1) \to +\infty$, alors il existe $N_0 \in N$, tel que

$$\frac{\max\Big(1, \Big(LM_K(b-a)\Big)^{\frac{1}{1-r}}\Big)}{\varepsilon(r+1)(r^2+r+1)(r^{n-1}+\ldots+r+1)} < 1,\ \forall n \geq N_0,$$

alors, on conclut que

$$\| T^n\varphi - T^n\psi \|_\infty < \| \varphi - \psi \|_\infty, \forall n \geq N_0, \tag{4.34}$$

D'autre part, puisque $\varphi, \psi$ sont deux solutions de (4.25) et des points fixes de T alors, ils sont des points fixes de $T^n$, $\forall n \in N$. Par conséquent, $\varphi, \psi$ satisfont l'égalité suivante,

$$\| T^n\varphi - T^n\psi \|_\infty = \| \varphi - \psi \|_\infty.$$

Ce qui contredit (4.34), on conclut que (4.25) admet une solution unique. ∎

# Conclusion

La théorie du point fixe est d'une importance capitale dans l'étude de l'existence de solution pour les équations d'opérateurs non linéaires.

Des nombreux théorèmes d'existence sont obtenus à partir des théorèmes de Banach et Schauder, en transformant le problème d'existence en un problème de point fixe. Mais celui de Brouwer est particulièrement célèbre.

Le théorème de Banach ne s'appuie pas sur les propriétés topologiques du domaine de définition mais sur le fait que la fonction étudiée soit contractante.

Le résultat de Brouwer est l'un des théorèmes-clef caractérisant la topologie d'un espace euclidien. Il intervient pour établir des résultats fins sur les équations différentielles, il est présent dans la géométrie différentielle.
Il apparait dans diverses branches, comme la théorie des jeux.

Ce théorème est généralisé en 1930 aux espaces de Banach. Cette généralisation est due à Schauder. Ce théorème affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe, qui n'est pas nécessairement unique, mais qui nous permet de résoudre plusieurs problèmes.

De cette théorie découlent plusieurs applications qui constituent un domaine très actif de la recherche.

# Bibliographie


[1] R.P. Agarwal, M. Meehan and D. O'Regan, *Fixed point theory and applications. Cambridge tracts in mathematics, 2001.*

[2] H. Boccara, *Analyse fonctionnelle, Editions Marketing, Paris, 1984.*

[3] G. Bratu, *Sur les équations intégrales non linéaires, Bulletin de la S. M. F., tomme 42(1914)113-142..*

[4] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle, Théorie et application, Masson, Paris, 1992.*

[5] A. Constantin, *Nonlinear alternative : application to an integral equation, Journal of applied analysis Vol. 5, No. 1(1999), pp. 119-123.*

[6] M. Cuesta*Analyse Fonctionnelle Non Linéaire et applications en équations différentielles, Master 2 Maths Pures. Cours 2009-2010. Semestre 4.*

[7] H.T. Davis, *Intoduction to nonlinear differential and integral equation, New York, 1962.*

[8] M. Guesba, *Sur quelques équations intégrales non linéaires, Mémoire de magister université Kasdi Merbah Ouargla.*

[9] A. Karoui, A. Jawahdou, *Existence and approximate Lp and continous solutions of non- linear integral equation of the Hammerstein and Volterra types, Appl 216(2010)2077- 2091.*

[10] S. Kolmogrov, A. Fomine , *Elements de la théorie des fonctions et de l.analyse fonction- nelle, Mir. 1977.*

[11] G. Krasnov, M. Kissélev A, Makarenko *Equations intégales, problèmes et exercices, Editions Mir, Moscou, 1977.*

[12] P. Lissy, *Théorèmes du point fixe. Exemples et applications.206, May 29, 2010*

[13] C. MINAZZO. K. RIDER, *Théorèmes du Point Fixe et Applications aux Equations Différentielles*

[14] A. Mostefai, *Cours de topologie, O.P.U. 1989.*