

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche  
Scientifique

M1510.093

Université 8 Mai 1945 Guelma  
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique  
et des Sciences de la Matière  
Département de Mathématiques



## Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de  
Master Académique en Mathématiques

Option : Analyse (EDP)

Par :

Ghoul wissem



Intitulé

*La théorie de Bifurcation*

Dirigé par : Dr. Badi sabrina

Devant le jury

PRESIDENT :  
RAPPORTEUR :

H. Guebbai  
N. sellami

Univ-Guelma  
Univ-Guelma

Session Juin 2013

## *Remerciements*

Je remercie, vivement, Madame Dr Sabrina Badi pour avoir dirigé ce travail, pour leur disponibilité et pour leur qualité humaine et scientifique.

Je remercie, également, Messieurs les membres du Jury :

Monsieur le Président, H. Guebbai

Monsieur N. Sellami

qui ont accepté de juger mon travail.

Enfin, je veux remercier mes parents et toute ma famille qui m'a toujours encouragé.

## Table des matières

<b>ABSTRACT</b> . . . . .	<b>2</b>
<b>ABSTRACT</b> . . . . .	<b>3</b>
<b>I NOTIONS PRÉLIMINAIRES ET GÉNÉRALITÉS</b> . . . . .	<b>6</b>
1.1 Systèmes linéaires . . . . .	6
1.1.1 Systèmes linéaires autonomes . . . . .	6
1.1.2 Systèmes linéaires non autonomes . . . . .	15
1.2 Systèmes non linéaires . . . . .	16
1.2.1 Système non linéaire autonomes . . . . .	16
1.2.2 Systèmes non linéaires non autonomes . . . . .	17
1.2.3 Classification des points critiques . . . . .	19
<b>II LA THÉORIE DE BIFURCATION</b> . . . . .	<b>23</b>
2.1 Notion de bifurcation, points et diagrammes de bifurcation . . . . .	23
2.2 Classification des bifurcations des points d'équilibre . . . . .	24
2.2.1 Bifurcation Selle-Noeud : . . . . .	24
2.2.2 Bifurcation transcritique . . . . .	27
2.2.3 Bifurcation fourche . . . . .	29
2.2.4 Bifurcation de Hopf . . . . .	33

## ABSTRACT

Le comportement des systèmes non linéaires dépend cruciallement de leurs paramètres de contrôles. Ces systèmes présentent des changements de comportement, on dit alors qu'une bifurcation se produit à chaque changement.

Dans ce travail on étudie les systèmes différentiels paramétrés de la forme :

$$\dot{x} = f(x, \mu), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \mu \text{ paramètre réel.}$$

On explicite les différents types de Bifurcation locale, que peuvent apparaître lors de la variation du paramètre  $\mu$ .

## ABSTRACT

In this work, we study parametric differential systems of the form

$$\dot{x} = f(x, \mu), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \mu \text{ réel paramètre.}$$

We introduce the different types of local bifurcations, which can arise when we vary the parameter  $\mu$ .

## Introduction

Un grand nombre de modèles issus de la mécanique ; physique ou ... autre s'écrivent sous la forme d'un système d'équations différentielles ordinaires, le temps étant la variable décrivant l'évolution du système.

Une première approche pour l'étude des systèmes différentiels non linéaires consiste à rechercher les équilibres, c'est -à-dire les solutions stationnaires ne présentant pas d'évolution temporelle. On dit qu'un équilibre est stable si une petite perturbation de cet équilibre évolue dans le temps en restant petite et en convergeant vers zéro. Le système revient alors dans sa position d'équilibre. Ces équilibres ont donc de grandes chances d'être observés sur le système physique étudié ou sur la simulation numérique du modèle proposé.

L'étape suivante consiste à faire varier un ensemble de paramètre qui contrôlent le système, on regarde alors ce que deviennent les équilibres du modèle, en particulier ceux qui étaient stable avant de modifier les paramètres de contrôle. Lorsqu'en variant les valeurs des paramètres de contrôle, un équilibre stable devient instable ou disparaît, On dit que l'on est en présence d'une "bifurcation".

Le terme de Bifurcation a été introduit par Poincaré pour décrire les transformations (en nombre et en genre) des points d'équilibres d'une famille de système, obtenue en faisant varier un paramètre.

Une bifurcation survient quand une variation infinitésimale d'un paramètre du système introduit une transformation qualitative du portrait de phase de ce système. Un ouvrage de référence sur les bifurcations des systèmes plan est le livre de Andronov, Leontovich, Jordon & Mailer.

Dans ce travail, nous nous intéressons qu'aux bifurcations les plus courantes pouvant affecter un équilibre lorsque l'on varie des paramètres de contrôle.

Ce mémoire est constitué de 2 chapitres.

Dans le premier chapitre, on donne un rappel succinct de certaines notions fondamentales sur les systèmes différentiels. On étudie les systèmes différentiels linéaires et non linéaires .On

examinera les notions : point d'équilibre, stabilité d'une solution d'un système différentiel, on rappelle aussi une classification des trajectoires au voisinage d'un point d'équilibre pour un système différentiel linéaire plan.

Dans le second chapitre, nous discutons les bifurcations : selle noeud, fourche, transcritique, et celle de hopf sur des exemples les plus simples. On termine par une conclusion et des perspectives.

# Chapitre I

## NOTIONS PRÉLIMINAIRES ET GÉNÉRALITÉS

### 1.1 Systèmes linéaires

#### 1.1.1 Systèmes linéaires autonomes

**Définition 1.1** On appelle système linéaire autonome le système :

$$\dot{x} = Ax + B \quad (1.1)$$

telle que  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une matrice constante et  $B$  un vecteur constant.

- Si  $B \neq 0$ , alors le système (1.1) est dit linéaire autonome non homogène.
- Si  $B = 0$  alors le système (1.1) est dit linéaire autonome homogène.

**Définition 1.2** Une matrice fondamentale pour le système homogène

$$\dot{x} = Ax$$

la matrice  $\phi(t)$  dont le déterminant est non nul ( $\det(\phi(t)) \neq 0$ ) vérifiant  $\dot{\phi}(t) = A\phi(t)$ .

#### Résolution d'un système homogène

Soit  $\phi(t) = e^{At}$  la matrice fondamentale du système homogène

$$\dot{x} = Ax \quad (1.2)$$

vérifiant  $\phi(0) = I$  où

$$e^{At} = \sum_{n \geq 0} \frac{A^n t^n}{n!}.$$

On a les résultats suivants :

**Lemme 1.3** Soient  $M$  et  $N$  deux matrices ( $p \times p$ ). Si  $M$  et  $N$  commutent ( $MN = NM$ ), alors

$$e^{(M+N)} = e^{(N)} e^{(M)}$$

**Lemme 1.4** Soient  $M$  et  $N$  deux matrices semblables i.e  $\exists \phi$  inversible telle que  $N = \phi M \phi^{-1}$ , alors

$$e^N = \phi e^M \phi^{-1}$$

**Lemme 1.5** Si  $M$  est une matrice diagonale  $M = \begin{bmatrix} M_1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & M_n \end{bmatrix}$

où  $M_i$  sont des matrices carrées et  $i = \overline{1; n}$ , alors :

$$e^M = \begin{bmatrix} e^{M_1} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & e^{M_n} \end{bmatrix}$$

**Théorème 1.6** Le système (1.2) admet une solution (non identiquement nulle)

$$x(t) = e^{\lambda t} v$$

si et seulement si  $\lambda$  est une valeur propre de  $A$  et  $v$  le vecteur propre correspondant.

**1<sup>ère</sup> cas : Les valeurs propres de  $A$  sont réelles et distinctes**

Soient  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  les valeurs propres de  $A$  réelles et distinctes et  $v_1, v_2, \dots, v_n$  les vecteurs propres correspondants, alors la matrice fondamentale du système (1.2) est donnée par

$$\phi(t) = (e^{\lambda_1 t} v_1, \dots, e^{\lambda_n t} v_n)$$

et la solution générale de (1.2) est :

$$x(t) = \phi(t) C$$

tel que  $C$  un vecteur constant. Si on rajoute la condition initiale  $x(0) = x_0$ , alors  $C = \phi^{-1}(t_0) x_0$ , on obtient l'unique solution

$$x(t) = \phi(t) \phi^{-1}(t_0) x_0.$$

**Exemple 1.7** Résoudre le système

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} x(t)$$

telle que  $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ .

**Solution :** Les valeurs propres de la matrice  $A$  sont  $\lambda_1 = 1$  et  $\lambda_2 = 5$ . Les vecteurs propres correspondants sont :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}; v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

D'où

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{5t} \\ e^{-t} & e^{3t} \end{pmatrix}$$

donc la solution générale est

$$x(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{5t} \\ e^{-t} & e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

**2<sup>ème</sup> cas : Les valeurs propres de  $A$  sont réelles multiples**

Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $A(n \times n)$  de multiplicité  $\kappa \leq n$ , alors pour chaque  $\kappa = \overline{1; n}$  chaque solution non nulle  $v$  de  $(A - I\lambda)^\kappa = 0$  s'appelle vecteur propre généralisé de  $A$ .

Soit  $A$  une matrice réelle qui possède  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  valeurs propres réelles répétées, alors il existe une base de vecteurs propres généralisés  $v_1, v_2, \dots, v_n$  (base de  $\mathbb{R}^n$ ) et une matrice inversible  $P = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  sachant que

$$A = S + N$$

où

$$P^{-1}SP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

et  $N = A + S$  une matrice nilpotente d'ordre  $\kappa \leq n$  avec

$$NS = SN.$$

Alors, la solution de système (1.2) est

$$x(t) = P \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} P^{-1} \left[ I + Nt + \dots + \frac{N^{\kappa-1}}{(\kappa-1)!} t^{\kappa-1} \right] x.$$

tel que

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} (\text{com } P)^t$$

**Exemple 1.8** Résoudre le système :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} x(t)$$

**Solution :** Les valeurs propres de la matrice  $A$  sont :  $\lambda_1 = 1$ ;  $\lambda_{2,3} = -2$  (double).

Les vecteurs propres de  $A$  sont :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; V_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

D'où

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on a

$$S = A; N = 0 \text{ et } P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La solution générale est :

$$x(t) = P \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} P^{-1}C, \quad \text{tel que } C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

### 3<sup>ème</sup> cas : les valeurs propres de $A$ sont complexes distinctes

Si la matrice  $A(2n \times 2n)$  possède  $2n$  valeurs propres complexes distinctes  $\lambda_j = a_j + ib_j$ ,  $\bar{\lambda}_j = a_j - ib_j$ ; telle que  $j = \overline{1; n}$  dont le vecteur propre  $w_j = u_j + iv_j$  et  $\bar{w}_j = u_j - iv_j$  alors :

$\{u_1v_1, u_2v_2, \dots, u_nv_n\}$  base de  $\mathbb{R}^{2n}$  et  $P = [u_1v_1, u_2v_2, \dots, u_nv_n]$  est inversible vérifiant :

$$P^{-1}AP = \text{diag} \begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix}; \quad j = \overline{1; n}.$$

La solution générale du système (1.2) est

$$x(t) = P \text{diag} \left[ e^{a_j t} \begin{pmatrix} \cos b_j t & -\sin b_j t \\ \sin b_j t & \cos b_j t \end{pmatrix} \right] P^{-1}C; \quad j = \overline{1; n}.$$

**Exemple 1.9** Résoudre le système

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} x(t)$$

**Solution :** Les valeurs propres de la matrice  $A$  sont :  $\lambda_1 = 1 - i$ ;  $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$ ;  $\lambda_3 = 2 - i$ ;  $\lambda_4 = \bar{\lambda}_3$ . Les vecteurs propres correspondants sont :

$$W_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{u_1} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{v_2},$$

et

$$W_{\lambda_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{u_2} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}_{v_2}$$

$$\Rightarrow P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc la solution générale du système est :

$$x(t) = P \begin{bmatrix} e^t \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & e^t \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} & \\ & & \end{bmatrix} P^{-1} C.$$

#### 4<sup>ème</sup> cas : les valeurs propres de $A$ sont complexes multiples

Soit  $A$  une matrice  $(2n \times 2n)$  avec  $\lambda_j = a_j + ib_j$ ,  $\bar{\lambda}_j = a_j - ib_j$ , il existe une base de vecteurs propres  $w_j = u_j + iv_j$  et  $\bar{w}_j = u_j - iv_j$  avec  $j = \overline{1; n}$ .  $P = [u_1 v_1, u_2 v_2, \dots, u_n v_n]$  est inversible et vérifiant

$$A = S + N$$

telle que :

$$P^{-1} S P = \text{diag} \begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix}; j = \overline{1; n}$$

et  $N$  est une matrice nilpotente d'ordre  $\kappa \leq 2n$  tel que  $S$  et  $N$  se commutent. Donc la solution générale du problème précédent est

$$x(t) = P \text{diag} \left[ e^{a_j t} \begin{pmatrix} \cos b_j t & -\sin b_j t \\ \sin b_j t & \cos b_j t \end{pmatrix} \right] P^{-1} \left[ I + N t + \dots + \frac{N^{\kappa-1}}{(\kappa^n)} t^{\kappa-1} \right] x_0.$$

**Exemple 1.10** Résoudre le système :  $\dot{x}(t) = Ax(t)$  avec  $x(0) = x_0$ , où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Solution :** Les valeurs propres de  $A$  sont :  $\lambda_1 = i$  (double);  $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$  (double). Les vecteurs propres correspondants :

$$W = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{v_1} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}_{v_1}, \quad (\text{telle que : } (A - \lambda_1 I)w = 0)$$

$$(A - \lambda_1 I)^2 w = 0$$

$$\Rightarrow w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{v_2} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}_{v_2}$$

$$\Rightarrow P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P} (\text{com}P)^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$





Donc la solution générale est :

$$x(t) = P \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \end{pmatrix} P^{-1}C.$$

**Remarque 1.12** La solution générale du système

$$\dot{x} = Ax + B$$

est

$$x(t) = x_{GH}(t) + x_p(t)$$

où :

- $x_{GH}(t)$  la solution générale de  $\dot{x} = Ax$
- $x_p(t)$  une solution particulière de  $\dot{x} = Ax + B$  (on l'obtient par la méthode de Lagrange c'est à dire par variation de constante).

### 1.1.2 Systèmes linéaires non autonomes

**Définition 1.13** On appelle système linéaire non autonome le système :

$$\dot{x} = A(t)x + B(t) \tag{1.3}$$

(telle que  $A(t) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $B(t) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  où  $t$  appartient à l'intervalle  $I$  de l'axe réel).

- Si  $B(t) \neq 0$ , alors le système (1.3) est dit linéaire non autonome non homogène.
- Si  $B(t) = 0$ , alors le système (1.3) est dit linéaire non autonome homogène.

**Solution générale du système**

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)$$

Considérons le système (1.3) avec  $A(t)$  et  $B(t)$  sont continues sur  $I$  de  $\mathbb{R}$ . La solution générale de (1.3) est :

$$x(t) = \phi(t)C + \phi(t) \int_{t_0}^t \phi(s)b(s)ds,$$

où :  $\phi(t)$  est la matrice fondamentale du système :  $\dot{x} = A(t)x$  ( c'est à dire vérifiant  $\dot{\phi}(t) = A(t)\phi(t)$  ). Si on considère de plus la condition initiale  $x(t_0) = x_0$ , l'unique solution de (1.3) est :

$$x(t) = \phi(t)\phi^{-1}(t_0)x_0 + \phi(t) \int_{t_0}^t \phi(s)B(s)ds.$$

### Existence et unicité de la solution

Considérons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + B(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (P)$$

où  $A(t)$  et  $B(t)$  sont continues sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ .

**Remarque 1.14** Pour tout  $t_0 \in I$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  le problème de cauchy (P) admet une unique solution  $x(t)$  dans  $I$ .

### Solution générale du système $\dot{x} = A(t)x$

**Théorème 1.15** Soit  $\phi(t)$  une matrice fondamentale du système linéaire homogène

$$\dot{x} = A(t)x \quad (1.4)$$

La solution générale de (1.4) est

$$x(t) = \phi(t)C$$

où  $C$  est un vecteur constant.

Si on considère de plus la condition initiale  $x(t_0) = x_0$ , l'unique solution de (1.4) vérifiant  $x(t_0) = x_0$  est

$$x(t) = \phi(t)\phi^{-1}(t_0)x_0.$$

## 1.2 Systèmes non linéaires

### 1.2.1 Système non linéaire autonomes

**Définition 1.16** On appelle système différentiel non linéaire et autonome le système

$$\dot{x} = f(x); \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (1.5)$$

c'est à dire que la variable indépendante  $t$  n'intervient pas explicitement dans l'expression de  $f$ .

### 1.2.2 Systèmes non linéaires non autonomes

**Définition 1.17** On appelle système différentiel non linéaire et non autonome le système de la forme

$$\dot{x} = f(t, x); \text{ avec } t \in \mathbb{R}^* \text{ et } x \in \mathbb{R}^n \quad (1.6)$$

où la variable indépendante  $t$  apparait explicitement dans l'expression de  $f$ .

Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  et  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application continue. On considère l'équation différentielle (1.6), telle que  $(t, x) \in U$  une solution de (1.6) sur  $I \subset \mathbb{R}$  est une fonction dérivable  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  telle que :

- i)  $(\forall t \in \mathbb{R}); (t, x(t)) \in U$ ,
- ii)  $(\forall t \in \mathbb{R}); \dot{x}(t) = f(t, x(t))$ .

On sait que :

$$(1.6) \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) = f_n(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{cases}$$

#### Problème de Cauchy

Etant donnée un point  $(t_0, x_0) \in U$ , le problème de Cauchy consiste à trouver une solution  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  de (1.6) telle que  $t_0 \in I$  et  $x(t_0) = x_0$ . On dit que  $(t_0, x_0)$  sont les données initiales du problème de Cauchy

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

on pose  $x(t) = x$  telle que  $(t, x) \in U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  on obtient

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

## Etude qualitative des systèmes différentiels

Soit le système non linéaire et non autonome

$$\dot{x} = f(t, x), \text{ avec } x \in \mathbb{R}^n; t \in \mathbb{R}. \quad (1.7)$$

On suppose que  $f$  satisfait les conditions du théorème d'existence et d'unicité.

**Définition 1.18 (Notion de stabilité)** Une solution  $\phi(t)$  du système (1.7) vérifiant la condition initiale  $\phi(t_0) = \phi_0$  est dite stable si :

$\forall \epsilon > 0; \exists \delta > 0$  telle que pour toute solution de (1.7) vérifiant  $x(t_0) = x_0$ , on a :

$$\|x_0(t) - \phi_0(t)\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - \phi(t)\| < \epsilon$$

- Si  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - \phi(t)\| = 0$  la solution  $\phi(t)$  est dite asymptotiquement stable.
- La solution  $\phi(t)$  est instable si pour  $\delta > 0$  aussi petit que l'on veut l'inégalité n'est pas vérifiée pour au moins une solution  $x(t)$ .

**Théorème 1.19** Soit  $\dot{x} = Ax$  où  $A$  une matrice inversible et soient  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  les valeurs propres de  $A$

i) S'il existe deux constantes positives  $\zeta$  et  $\mu$  telle que

$$\|x(t)\| < \zeta \cdot e^{-\mu t},$$

et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$ , alors  $x(t) = 0$  est asym-stable.

ii) S'il  $\text{Re}(\lambda_\kappa) \leq 0$ ;  $\kappa = \overline{1, n}$  avec les valeurs propres dont  $\text{Re}(\lambda_\kappa) = 0$  sont distinctes alors  $x(t)$  est bornées pour  $t \geq t_0$ ; et  $\|x(t)\| < \zeta \cdot \|x_0\|$  positive et  $x(t) = 0$  est stable.

iii) S'il existe  $\lambda$  une valeur propre de  $A$ ; avec  $\text{Re}(\lambda) > 0$  alors dans chaque voisinage de  $x = 0$ , il ya des valeurs initiales telle que pour les solutions correspondantes on a :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x(t)\| = +\infty$  et  $x(t) = 0$  est instable.

**Définition 1.20 (Points critiques)** Le point  $a \in \mathbb{R}^n$  telle que

$$f(a) = 0$$

s'appelle point critique du système non linéaire autonome

$$\dot{x} = f(x)$$

## Notion de portrait de phase

On considère le système plan :

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases}$$

où  $P$  et  $Q$  sont des polynômes en  $x$  et  $y$ .

Les solutions du système  $\dot{x} = f(x)$  se représentent dans le plan  $(x, y)$  par des courbes appelées orbites, les points critiques de ce système sont des solutions constantes représentés par des points dans le plan  $(x, y)$ .

La figure complète des orbites du système  $\dot{x} = f(x)$  ainsi que les points critiques représentés dans le plan  $(x, y)$  s'appelle portrait de phase et le plan  $(x, y)$  s'appelle plan de phase.

### 1.2.3 Classification des points critiques

On donne ici les portraits de phases des systèmes linéaires à coefficients constants en dimension 2

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases}$$

où  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ . On introduit le polynôme caractéristique de  $A$

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I_2) \\ &= \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) \\ &= \lambda^2 - \text{Tr}(A)\lambda + \det(A). \end{aligned}$$

où  $\lambda$  est une valeur propre de la matrice  $A$ . Soit le discriminant

$$\begin{aligned} \Delta &= \text{Tr}(A)^2 - 4 \det(A) \\ &= (a + d)^2 - 4(ad - bc) \\ &= (a - d)^2 + 4bc, \end{aligned}$$

alors les solutions sont

$$x_1 = \frac{\text{Tr}(A) - \sqrt{\Delta}}{2}, \quad x_2 = \frac{\text{Tr}(A) + \sqrt{\Delta}}{2}$$

on pose :

$$\alpha = \frac{\text{Tr}(A)}{2} \text{ et } \beta = \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$$

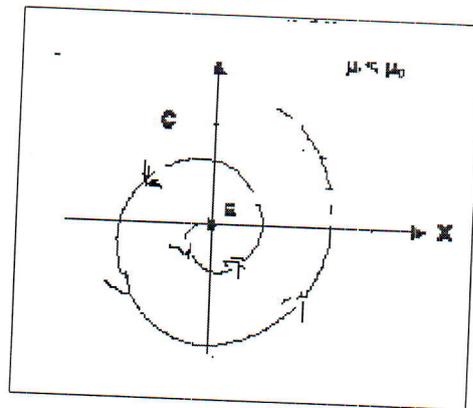
**Premier cas :**  $\Delta < 0 \Rightarrow$  Il y a deux valeurs propres complexes conjuguées  $\alpha \pm i\beta$

Dans ce cas  $A$  est semblable à  $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ . On se ramène donc au cas où  $A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ , en passant aux coordonnées polaires, on obtient les équations :

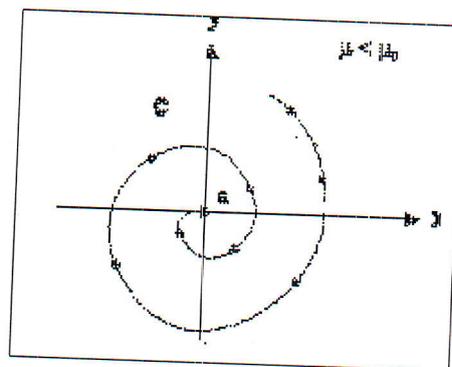
$$\dot{r} = \alpha, \dot{\theta} = \beta,$$

on résulte trois cas pour la nature de l'origine ( le point critique)

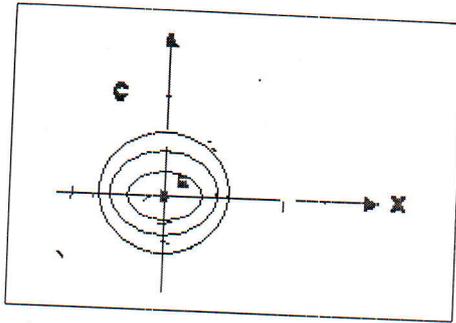
1.  $\text{Tr}(A) > 0$  : il est appelé "foyer instable"



2.  $\text{Tr}(A) < 0$  : il est dit "foyer stable"



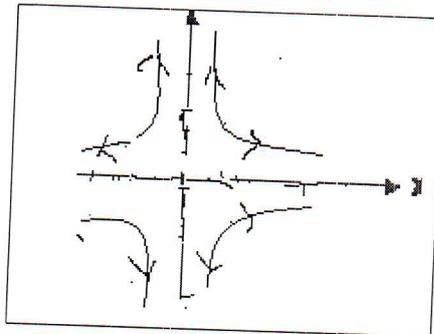
3.  $\text{Tr}(A) = 0$  : c'est un "centre"



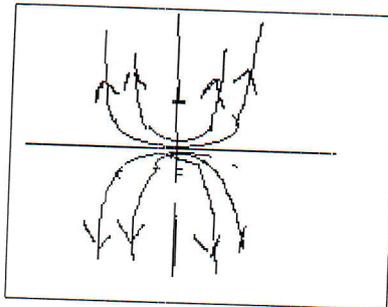
Deuxième cas :  $\Delta > 0 \Rightarrow \Pi$  y a deux valeurs propres distinctes  $\lambda, \mu$

Dans ce cas la matrice  $A$  est diagonalisable et on se ramène au cas où  $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ ,  
on résulte trois cas (on remarque que  $Tr(A) = \lambda + \mu$  et  $det(A) = \lambda \cdot \mu$ ).

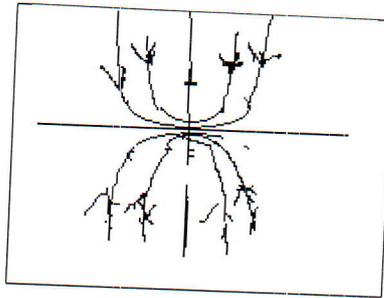
1.  $det(A) < 0$  : les valeurs propres sont de signe différents d'où l'origine est un "point selle"



2.  $det(A) > 0$  : et  $Tr(A) > 0$  : les valeurs propres sont positives, il est dit "noeud instable"



3.  $det(A) > 0$  : et  $Tr(A) < 0$  les valeurs propres sont négatives, il est dit "noeud stable"



### 1.2.3.1 Linéarisation

Soit le système non linéaire autonome

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.8}$$

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$  et soit  $x_0$  un point critique de (1.8).

**Définition 1.21** Le système

$$\dot{x} = Ax$$

où

$$A = \left[ \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) \right] = Df(x_0); \quad i, j = \overline{1, n}$$

est appelé linéarisation du système (1.8) en  $x_0$  ou le système linéarisé de (1.8) en  $x_0$ .

## Chapitre II

### LA THÉORIE DE BIFURCATION

#### 2.1 Notion de bifurcation, points et diagrammes de bifurcation

**Définition 2.1** *Considérons le système*

$$\dot{x} = f(x, \mu), \quad \text{où } x \in \mathbb{R}^n, \mu \in \mathbb{R}^m \quad (2.1)$$

*et son point d'équilibre  $E$  dont la coordonnée  $x_E$  va dépendre de la valeur de  $\mu$ .*

Si la nature du point d'équilibre subit un changement soudain lorsque  $\mu$  varie légèrement autour d'une valeur  $\mu_0$ . On dit que le système subit une bifurcation.

**Définition 2.2** *On définit les valeurs de bifurcation du système (2.1) comme étant les valeurs de  $\mu$  telle que la jacobienne  $D_x f(x, \mu)$  calculée au point d'équilibre  $E$  a une valeur propre nulle.*

**Définition 2.3** *L'équation*

$$f(x, \mu) = 0$$

*permet de trouver les coordonnées des points d'équilibres, définit une équation dans le plan  $(x, \mu)$  appelée diagramme de bifurcation.*

**Exemple 2.4** *Considérons le système*

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{dx}{dt} = y = f_1(x, y, \mu) \\ \dot{y} = \frac{dy}{dt} = -rx = f_2(x, y, \mu) \end{cases}$$

*ce système est linéaire, il est équivalent à*

$$\dot{X} = AX, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -r & 0 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

le seul point critique est l'origine  $(0, 0)$ .

$$\det |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ r & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + r = 0$$

- Si  $r > 0 \Rightarrow$  les valeurs propres de  $A$  sont  $\lambda = \pm i\sqrt{r}$  d'où l'origine est un "centre".
- Si  $r < 0 \Rightarrow$  les valeurs propres de  $A$  sont  $\lambda = \pm\sqrt{r}$  d'où l'origine est un point "selle".

On conclut que le point  $r = 0$  est un "point bifurcation".

## 2.2 Classification des bifurcations des points d'équilibre

### 2.2.1 Bifurcation Selle-Noeud :

Son nom vient du fait que lors de cette bifurcation pour un système plan, un point du type selle et un point de type noeud se rejoignent et disparaissent.

**Exemple 2.5** On considère le système suivant avec le paramètre  $\mu \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x, y, \mu) = y \\ \dot{y} = f_2(x, y, \mu) = x^2 - y - \mu \end{cases}$$

les points critiques de ce système et qui dépendent de la valeur de  $\mu$  vérifient :

$$\begin{cases} f_1(x, y, \mu) = y = 0 \\ f_2(x, y, \mu) = x^2 - y - \mu = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \mu \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = +\sqrt{\mu} \\ x = -\sqrt{\mu} \\ y = 0 \end{cases}$$

Donc les points critiques sont

$$x_{01} = (+\sqrt{\mu}, 0), \quad x_{02} = (-\sqrt{\mu}, 0)$$

On a

$$Df_{(x,y,\mu)} = A = J(x, y, \mu) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2x & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Tr}(A) = -1, \quad \det(A) = -2x$$

Pour le premier point critique  $x_{01} = (+\sqrt{\mu}, 0)$ , nous avons

$$D_{(+\sqrt{\mu}, 0)} f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2\sqrt{\mu} & -1 \end{pmatrix}$$

les valeurs propres vérifient :

$$\begin{aligned} \det |A - \lambda I| &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 2\sqrt{\mu} & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \\ \Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda - 2\sqrt{\mu} &= 0 \end{aligned}$$

$$\Delta = 1 + 8\sqrt{\mu}$$

Pour  $\mu > 0 \Rightarrow \Delta > 0$ . Dans ce cas l'équation caractéristique possède deux solutions (valeurs propres) réelles

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{\text{Tr}(A) + \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{1 + 8\sqrt{\mu}}}{2} \\ \lambda_2 = \frac{\text{Tr}(A) - \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-1 - \sqrt{1 + 8\sqrt{\mu}}}{2} \end{cases}$$

Or

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = -1 < 0 \\ \lambda_1 \times \lambda_2 = -2\sqrt{\mu} \end{cases}$$

on conclut qu'elles sont de signe différent, d'où  $x_{01} = (+\sqrt{\mu}, 0)$  est du type selle qui est instable. Pour le deuxième point critique  $x_{02} = (-\sqrt{\mu}, 0)$ , nous avons

$$D_{(-\sqrt{\mu}, 0)} f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2\sqrt{\mu} & -1 \end{pmatrix}$$

les valeurs propres vérifient :

$$\begin{aligned} \det |A - \lambda I| &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2\sqrt{\mu} & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \\ \Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda + 2\sqrt{\mu} &= 0 \end{aligned}$$

$$\Delta = 1 - 8\sqrt{\mu}$$

On discute trois cas selon le signe du discriminant  $\Delta$ .

1.  $\Delta > 0 \Leftrightarrow 1 - 8\sqrt{\mu} > 0 \Leftrightarrow \mu < \frac{1}{64}$ , l'équation caractéristique admet deux solutions réelles

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{\text{Tr}(A) + \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{1 - 8\sqrt{\mu}}}{2} \\ \lambda_2 = \frac{\text{Tr}(A) - \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-1 - \sqrt{1 - 8\sqrt{\mu}}}{2} \end{cases}$$

or

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = -1 < 0 \\ \lambda_1 \times \lambda_2 = 2\sqrt{\mu} \end{cases}$$

donc ces deux valeurs propres sont de même signe négatif, d'où le point  $x_{02}$  est un point noeud stable pour  $0 < \mu < \frac{1}{64}$ .

2.  $\Delta = 0 \Leftrightarrow 1 - 8\sqrt{\mu} = 0 \Leftrightarrow \mu = \frac{1}{64}$ ,  $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{1}{2} < 0$ , donc  $x_{02}$  est un "noeud stable".

3.  $\Delta < 0 \Leftrightarrow 1 - 8\sqrt{\mu} < 0 \Leftrightarrow \mu > \frac{1}{64}$ ,

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{-1 + i\sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-1 + i\sqrt{1 - 8\sqrt{\mu}}}{2} \\ \lambda_2 = \frac{-1 - i\sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-1 - i\sqrt{1 - 8\sqrt{\mu}}}{2} \end{cases}$$

avec

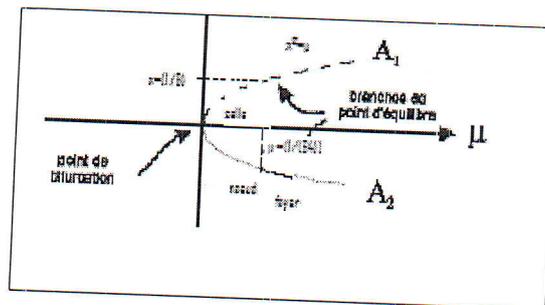
$$\text{Re}(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{-1}{2} < 0$$

donc  $x_{02}$  est un "foyer stable" pour  $\mu > \frac{1}{64}$ .

Le diagramme de cette bifurcation est donné par l'équation

$$\begin{aligned} f(x, y, \mu) = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x, y, \mu) = y = 0 \\ f_2(x, y, \mu) = x^2 - y - \mu = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x^2 = \mu \end{aligned}$$

dans le plan  $(x, \mu)$ , représenté dans la figure :



### 2.2.2 Bifurcation transcritique

Considérons le système suivant avec le paramètre  $\mu \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x, y, \mu) = y \\ \dot{y} = f_2(x, y, \mu) = \mu x - x^2 - y \end{cases}$$

les points critiques sont

$$x_{01} = (0, 0), x_{02} = (\mu, 0)$$

On a

$$Df_{(x,y,\mu)} = A = J(x, y, \mu) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \mu - 2x & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Tr}(A) = -1, \det(A) = -\mu + 2x.$$

Pour le première point critique  $x_{01} = (0, 0)$

$$D_{(0,0)}f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \mu & -1 \end{pmatrix}$$

les valeurs propres vérifient :

$$\begin{aligned} \det |A - \lambda I| &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ \mu & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \\ \Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda - \mu &= 0 \end{aligned}$$

$$\Delta = 1 + 4\mu$$

donc il y a trois cas d'après le signe de discriminant

1.  $\Delta > 0 \Leftrightarrow 1 + 4\mu > 0 \Leftrightarrow \mu > -\frac{1}{4}$ , on obtient deux valeurs propres réelles

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{\text{Tr}(A) + \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\mu}}{2} \\ \lambda_2 = \frac{\text{Tr}(A) - \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-1 - \sqrt{1 + 4\mu}}{2} \end{cases}$$

de plus

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = -1 < 0 \\ \lambda_1 \times \lambda_2 = -\mu \end{cases}$$

aussi il y a deux cas.

- Si  $\lambda_1 \times \lambda_2 = -\mu > 0 \Leftrightarrow \mu < 0$ , donc  $\lambda_1 < 0$  et  $\lambda_2 < 0$ , d'où  $x_{01} = (0, 0)$  est un "noeud stable"
- Si  $\lambda_1 \times \lambda_2 = -\mu < 0 \Leftrightarrow \mu > 0$ ,  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont de signe différent, d'où  $x_{01} = (0, 0)$  est un point "selle point" qui est toujours instable.
- 2.  $\Delta = 0 \Leftrightarrow 1 + 4\mu = 0 \Leftrightarrow \mu = -\frac{1}{4}$ ,  $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{1}{2} < 0$ , donc  $x_{01} = (0, 0)$  est un "noeud stable".
- 3.  $\Delta < 0 \Leftrightarrow 1 + 4\mu < 0 \Leftrightarrow \mu < -\frac{1}{4}$ ,  $\lambda_1 = \frac{-1+i\sqrt{1+4\mu}}{2}$  et  $\lambda_2 = \frac{-1-i\sqrt{1+4\mu}}{2}$  avec  $\text{Re}(\lambda_1, \lambda_2) < 0$ ,  $x_{01} = (0, 0)$  est donc un "foyer stable".

Pour le deuxième point critique  $x_{02} = (\mu, 0)$  :

$$D_{(\mu,0)}f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\mu & -1 \end{pmatrix}$$

les valeurs propres vérifient :

$$\det |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\mu & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda + \mu = 0$$

$$\Delta = 1 - 4\mu$$

donc il y a trois cas selon le signe du discriminant

1.  $\Delta > 0 \Leftrightarrow 1 - 4\mu > 0 \Leftrightarrow \mu < \frac{1}{4}$ , on a

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{\text{Tr}(A) + \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{1-4\mu}}{2} \\ \lambda_2 = \frac{\text{Tr}(A) - \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-1 - \sqrt{1-4\mu}}{2} \end{cases}$$

de plus

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = -1 < 0 \\ \lambda_1 \times \lambda_2 = \mu \end{cases}$$

aussi il y a deux cas,

- Si  $\lambda_1 \times \lambda_2 = \mu > 0 \Rightarrow 0 < \mu < \frac{1}{4} \Rightarrow \lambda_1 < 0$  et  $\lambda_2 < 0$ , on a un "noeud stable"

- Si  $\lambda_1 \times \lambda_2 = \mu < 0 \Rightarrow \lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont de signe différent, on a donc un "point selle" instable.

2.  $\Delta = 0 \Leftrightarrow 1 - 4\mu = 0 \Leftrightarrow \mu = \frac{1}{4}$ ,  $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{1}{2} < 0$ , donc on a un "noeud stable".

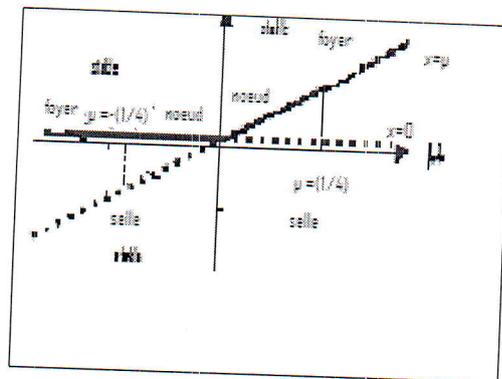
3.  $\Delta < 0 \Leftrightarrow 1 - 4\mu < 0 \Leftrightarrow \mu > \frac{1}{4}$ ,  $\lambda_1 = \frac{-1+i\sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-1+i\sqrt{1-4\mu}}{2}$  et  $\lambda_2 = \frac{-1-i\sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-1-i\sqrt{1-4\mu}}{2}$  avec  $\text{Re}(\lambda_1, \lambda_2) < 0$ , on a un "foyer stable".

Le diagramme de cette bifurcation est donnée par l'équation

$$f(x, y, \mu) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \mu x - x^2 - y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x(x - \mu) = 0$$

Ceci est présenté dans la figure :



### 2.2.3 Bifurcation fourche

Considérons le système suivant avec le paramètre  $\mu \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x, y, \mu) = y \\ \dot{y} = f_2(x, y, \mu) = \mu x - x^3 - y \end{cases}$$

les points critiques vérifient

$$\begin{cases} \dot{x} = y = 0 \\ \dot{y} = \mu x - x^3 - y = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt{\mu} \\ x = -\sqrt{\mu} \\ y = 0 \end{cases}$$

Donc les points critiques sont

$$x_{01} = (0, 0), x_{02} = (\sqrt{\mu}, 0), x_{03} = (-\sqrt{\mu}, 0)$$

On a

$$Df_{(x,y,\mu)} = A = J(x, y, \mu) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \mu - 3x^2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Tr}(A) = -1, \det(A) = -\mu + 3x^2.$$

Pour le première point critique  $x_{01} = (0, 0)$

$$D_{(0,0)}f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \mu & -1 \end{pmatrix}$$

les valeurs propres vérifient :

$$\det |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ \mu & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \\ \Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda - \mu = 0$$

$$\Delta = 1 + 4\mu$$

Donc il y a trois cas selon le signe du discriminant

1.  $\Delta > 0 \Leftrightarrow 1 + 4\mu > 0 \Leftrightarrow \mu > -\frac{1}{4}$ , on a

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{\text{Tr}(A) + \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\mu}}{2} \\ \lambda_2 = \frac{\text{Tr}(A) - \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-1 - \sqrt{1 + 4\mu}}{2} \end{cases}$$

de plus

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = -1 < 0 \\ \lambda_1 \times \lambda_2 = -\mu \end{cases}$$

aussi il y a deux cas,

- Si  $\lambda_1 \times \lambda_2 = -\mu > 0 \Leftrightarrow \mu < 0$ , donc  $\lambda_1 < 0$  et  $\lambda_2 < 0$ ,  $x_{01} = (0, 0)$  est un "noeud stable".
  - Si  $\lambda_1 \times \lambda_2 = -\mu < 0 \Leftrightarrow \mu > 0$ ,  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont de signe différent, dans ce  $x_{01} = (0, 0)$  est un point selle point instable.
2.  $\Delta = 0 \Leftrightarrow 1 + 4\mu = 0 \Leftrightarrow \mu = -\frac{1}{4}$ ,  $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{1}{2} < 0$ , donc  $x_{01} = (0, 0)$  est un "noeud stable".
  3.  $\Delta < 0 \Leftrightarrow 1 + 4\mu < 0 \Leftrightarrow \mu < -\frac{1}{4}$ ,  $\lambda_1 = \frac{-1+i\sqrt{1+4\mu}}{2}$  et  $\lambda_2 = \frac{-1-i\sqrt{1+4\mu}}{2}$  avec  $\text{Re}(\lambda_1, \lambda_2) < 0$ ,  $x_{01} = (0, 0)$  est un "foyer stable".

Pour le deuxième point critique  $x_{02} = (\sqrt{\mu}, 0)$

$$D_{(\sqrt{\mu}, 0)} f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2\mu & -1 \end{pmatrix}$$

les valeurs propres vérifient :

$$\begin{aligned} \det |A - \lambda I| &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2\mu & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda + 2\mu = 0 \end{aligned}$$

$$\Delta = 1 - 8\mu$$

donc il y a trois cas selon le signe du discriminant

1.  $\Delta > 0 \Leftrightarrow 1 - 8\mu > 0 \Leftrightarrow \mu < \frac{1}{8}$ , on a

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{\text{Tr}(A) + \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{1 - 8\mu}}{2} \\ \lambda_2 = \frac{\text{Tr}(A) - \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-1 - \sqrt{1 - 8\mu}}{2} \end{cases}$$

de plus, on a

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = -1 < 0 \\ \lambda_1 \times \lambda_2 = 2\mu \end{cases}$$

il y a un seul cas,

- Si  $\lambda_1 \times \lambda_2 = 2\mu > 0 \Rightarrow \lambda_1 < 0$  et  $\lambda_2 < 0$ ,  $x_{02} = (\sqrt{\mu}, 0)$  est un "noeud stable"

2.  $\Delta = 0 \Leftrightarrow 1 - 8\mu = 0 \Leftrightarrow \mu = \frac{1}{8}$ ,  $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{1}{2} < 0$ , donc on a "noeud stable"

3.  $\Delta < 0 \Leftrightarrow 1 - 8\mu < 0 \Leftrightarrow \mu > \frac{1}{8}$ ,  $\lambda_1 = \frac{-1+i\sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-1+i\sqrt{1-8\mu}}{2}$  et  $\lambda_2 = \frac{-1-i\sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-1-i\sqrt{1-8\mu}}{2}$  avec  $\text{Re}(\lambda_1, \lambda_2) < 0$ ,  $x_{02} = (\sqrt{\mu}, 0)$  est un "foyer stable".

Pour le troisième point critique  $x_{03} = (-\sqrt{\mu}, 0)$

$$D_{(-\sqrt{\mu}, 0)} f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2\mu & -1 \end{pmatrix}$$

les valeurs propres vérifient :

$$\det |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2\mu & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

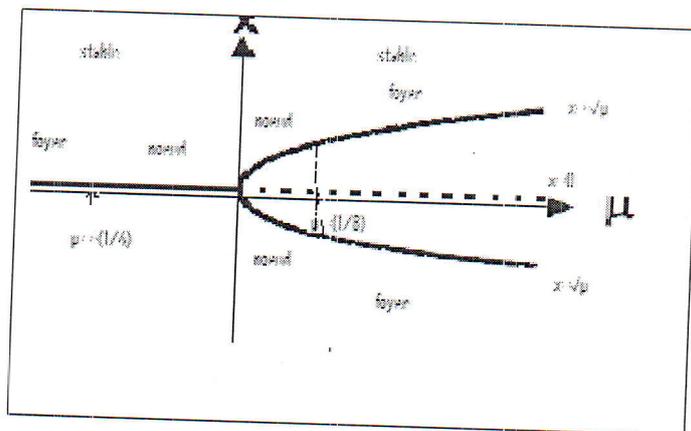
$$\Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda + 2\mu = 0$$

$$\Delta = 1 - 8\mu$$

Cette étude est similaire à celle du point critique  $x_{02}$ , donc le point  $x_{03}$  est symétrique à  $x_{02}$ . Le diagramme de cette bifurcation est donnée par l'équation

$$x(\mu - x^2) = 0$$

qui figure ce dessous :



### 2.2.4 Bifurcation de Hopf

On considère le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x, y, \mu) = \mu x + y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = f_2(x, y, \mu) = -x + \mu y - y(x^2 + y^2) \end{cases}$$

où  $\mu$  le paramètre de contrôle et  $(0, 0)$  c'est le point d'équilibre de système. La jacobienne du système précédent est :

$$Df_{(x,y,\mu)} = A = J(x, y, \mu) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu - 3x^2 - y^2 & 1 - 2xy \\ -1 - 2xy & \mu - x^2 + 3y^2 \end{bmatrix}$$

Pour le point critique  $(0, 0)$

$$D_{(0,0)}f = \begin{pmatrix} \mu & 1 \\ -1 & \mu \end{pmatrix},$$

les valeurs propres vérifient :

$$\begin{aligned} \det |A - \lambda I| &= \begin{vmatrix} \mu - \lambda & 1 \\ -1 & \mu - \lambda \end{vmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow (\mu - \lambda)^2 + 1 = 0 \\ &\begin{cases} \lambda_1(\mu) = \mu + i \\ \lambda_2(\mu) = \mu - i \end{cases} \end{aligned}$$

Transformons le système en coordonnées polaires, pour cela posons dans le système

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

d'où

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial x}{\partial r} \dot{r} + \frac{\partial x}{\partial \theta} \dot{\theta} \\ \dot{y} = \frac{\partial y}{\partial r} \dot{r} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \dot{\theta} \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = \dot{r} \\ \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \end{cases}$$

$$\dot{x} = \cos \theta \dot{r} - r \sin \theta \dot{\theta} = \mu(r \cos \theta) + r \sin \theta - r \cos \theta (r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta) \quad (3.1)$$

$$\dot{y} = \sin \theta \dot{r} + r \cos \theta \dot{\theta} = -r \cos \theta + \mu(r \sin \theta) - r \sin \theta (r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta) \quad (3.2)$$

On multiplie (3.1) par  $\cos \theta$  et (3.2) par  $\sin \theta$ , on trouve

$$\begin{cases} \dot{x} = \cos^2 \theta \dot{r} - r \cos \theta \sin \theta \dot{\theta} = \mu(r \cos^2 \theta) + r \cos \theta \sin \theta - r \cos^2 \theta (r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta) \\ \dot{y} = \sin^2 \theta \dot{r} + r \sin \theta \cos \theta \dot{\theta} = -r \sin \theta \cos \theta + \mu(r \sin^2 \theta) - r \sin^2 \theta (r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta) \end{cases}$$

On fait la somme de  $\dot{x}$  avec  $\dot{y}$ , on trouve

$$\dot{r} = \mu r - r^3 = r(\mu - r^2)$$

Et on multiplie (3.1) par  $\sin \theta$  et (3.2) par  $\cos \theta$ , on trouve

$$\begin{cases} \dot{x} = \sin \theta \cos \theta \dot{r} - r \sin^2 \theta \dot{\theta} = \mu(r \sin \theta \cos \theta) + r \sin^2 \theta - r \sin \theta \cos \theta (r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta) \\ \dot{y} = \cos \theta \sin \theta \dot{r} + r \cos^2 \theta \dot{\theta} = -r \cos^2 \theta + \mu(r \cos \theta \sin \theta) - r \sin \theta \cos \theta (r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta) \end{cases}$$

On fait la soustraction entre  $\dot{x}$  et  $\dot{y}$  on trouve

$$\dot{\theta} = -1$$

Donc notre système est équivalent au système suivant

$$\begin{cases} \dot{r} = r(\mu - r^2) \\ \dot{\theta} = -1 \end{cases}$$

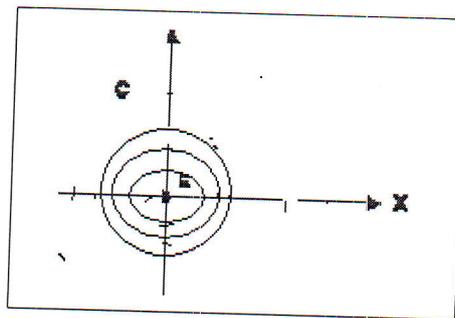
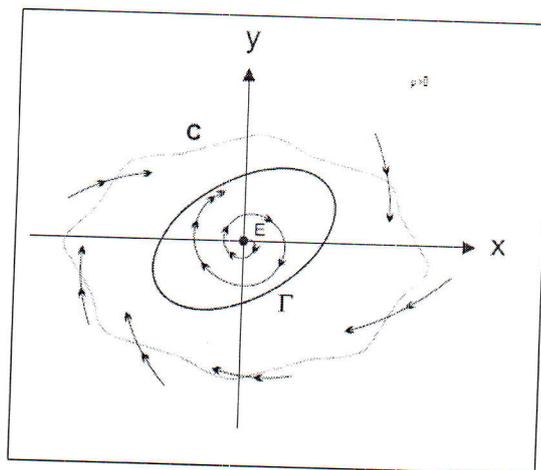
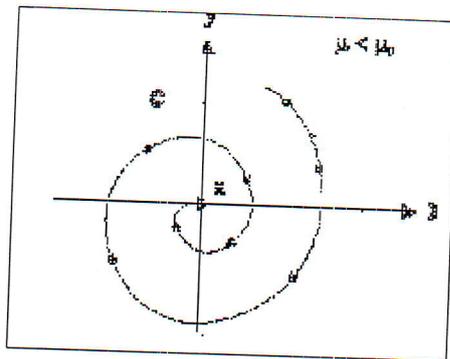
On discute trois cas selon le signe du  $\mu$

$\mu < 0$  on a  $\text{Re}(\lambda_1, \lambda_2) < 0$ , d'où  $x = (0, 0)$  est un "foyer stable"

$\mu = 0$  on a  $\text{Re}(\lambda_1, \lambda_2) = 0$ , d'où  $x = (0, 0)$  est un "centre"

$\mu > 0$  on a  $\text{Re}(\lambda_1, \lambda_2) > 0$ , d'où  $x = (0, 0)$  est un "foyer instable"

Ceci est présenté dans les figures suivantes :



## Conclusion

La théorie de bifurcation est une méthode d'étude de l'impact des valeurs de paramètres sur le comportement du système. Un avantage non négligeable de cette méthode est qu'elle permet de représenter les choses graphiquement, que ce soit pour l'identification des bifurcations ou pour la synthèse des résultats au niveau du diagramme.

Les bifurcation selle-noeud et de hopf sont génériques dans l'ensemble des systèmes dynamiques quelconques (sans symétrie) de  $\mathbb{R}^n$  dès lors que l'on s'intéresse à la stabilité d'un équilibre en faisant varier un paramètre. Ceci signifie que, sur une surface de codimension un dans l'espace des paramètres de contrôles, un équilibre stable se déstabilisera en suivant le diagramme de bifurcation de l'une des ces deux bifurcation. Pour déterminer laquelle, il faut linéariser le système dynamique autour de l'équilibre et analyser les valeurs propres de la matrice jacobienne ainsi obtenu. En faisant varier un paramètre de contrôle, l'équilibre se déstabilise par passage d'une valeur propre à travers l'axe des imaginaires pures ; S'il s'agit d'une valeur propre réelle, on est en présence d'une bifurcation selle-noeud. S'il s'agit d'une paire de valeurs propres conjuguées, on est en présence d'une bifurcation de Hopf. A la différence de la bifurcation selle-noeud, les points ne disparaissent pas après leur rencontre : ils se croisent et échangent leur stabilité. La bifurcation fourche est générique dans l'ensemble des systèmes dynamiques. Cette bifurcation correspond alors à une brisure de symétrie et correspond au changement de signe d'une valeur propre réelle.

## RÉFÉRENCES

- [1] Jean-olivier jisson cours mastre 1 ENS Ecole pratique des Hautes études UMR CNRS 8046.
- [2] Sabrina Badi, cours d'équation différentielle 1-2 (License LMD 2010-2011).
- [3] Amar Makhlouf, cours de magister(2001-2002).
- [4] Demailly-analyse numérique et PUG, 1996.
- [5] Jean-Pierre Fransoise, matéquation différentielle mathématique et application. Université P.M Paris, 2005.
- [6] Eric Benoit, Equation différentielle CIMPA Tlemcen 2008, 29 Avril 2008.
- [7] L. Perko : bifurcation of limit cycles Géométric Theory,1992.
- [8] L.Perko : Differential equation and Dynamical systems,2001.
- [9] J.Hale and H. Kocak : Dynamic and bifurcation.
- [10] Elmer G. Wiens : Non linear Dynamics : Bifurcation and two Dimensional flows.