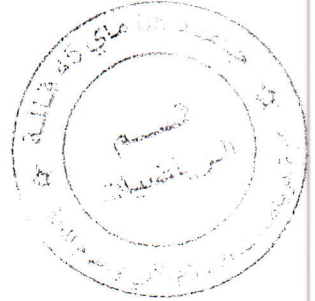


République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche  
Scientifique

M/510.089

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique  
et des Sciences de la Matière  
Département de Mathématiques



### Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

**Master Académique en Mathématiques**

Option : **Equations aux Dérivées Partielles**

Par :

Melle. KHALLA Besma



### Intitulé

**Traitement Numérique des équations intégrales et  
intégré-différentielles non linéaires de Volterra**

Dirigé par : Dr. Guebbai Hamza

Devant le jury

**PRESIDENT  
RAPORTEUR  
EXAMINATEUR**

Mr. D. Bellaouar  
Mr. H. Guebbai  
Mme. F. Aissaoui

Univ-Guelma  
Univ-Guelma  
Univ-Guelma

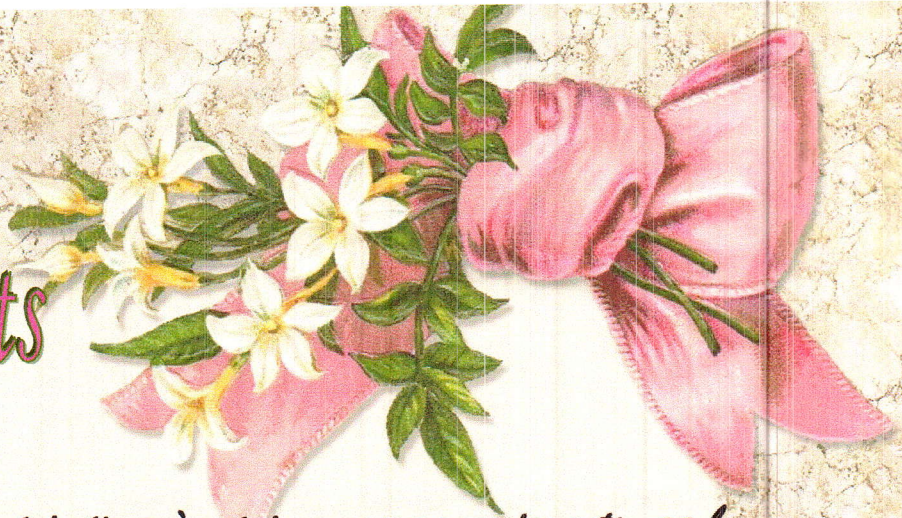
Session Juin 2013

Traitement Numérique des équations  
intégrales et intégréo-déffirentielles non  
linéaires de volterra

**KHALLA Bessma**  
Mémoire de master en mathématiques  
**Université de Guelma**

27 mai 2013

# Remerciements



*En premier lieu et avant je tiens à exprimer mes remerciements au bon « Dieu » qui nous a entouré de sa bienveillance et nous a renforcé avec le courage et la force pour avoir enfin mené à bien ce travail.*

*Ensuite, je tiens à exprimer ma profonde gratitude à notre encadreur Dr. **Geibbai Hamza** pour avoir accepté de nous suivre, et nos plus vifs remerciements pour son soutien, sa patience, ses conseils judicieux, pertinents, et sa sympathie dont il nous a fait preuve tout au long de l'élaboration de ce travail.*

*J'adresse également notre remerciement, à tous nos enseignants, qui nous ont donnée les bases de la science, nous remercions très sincèrement, les membres de jury pour nous avoir fait l'honneur d'évaluer notre travail*

*Je pense se tournent maintenant vers mes parents qui nous ont entourés par la tendresse et l'amour dévoué depuis notre enfance. Merci de votre soutien de tous les jours et j'espère que vous soyez aussi fiers de nous que nous le sommes de vous.*

*Et finalement à tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin à accomplir ce travail je leur dis Merci.*

## Bessma

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Rappels et Outils</b>	<b>5</b>
1.1	Théorème du point fixe de Banach . . . . .	5
1.2	Intégration Numérique . . . . .	6
1.3	Résultats important . . . . .	7
1.3.1	Lemme de majoration . . . . .	7
1.3.2	Propriété de dérivation . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Equation intégrale</b>	<b>10</b>
2.1	Existence et unicité de la solution du système . . . . .	11
2.2	Analyse de l'erreur . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Equation intégral-déffrentielle non linéaire de Volterra</b>	<b>14</b>
3.1	Existence et unicité de la solution du système . . . . .	15
3.2	Analyse de l'erreur . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Résultats Numériques</b>	<b>19</b>

## Introduction

On appelle équation intégrale une équation fonctionnelle où la fonction inconnue figure sous le signe d'intégrations  $\int$ . Les méthodes de résolution numérique des équations intégrales jouent un rôle très important dans divers domaines scientifiques. Avec l'avantage des machines de calcul numérique, notamment les ordinateurs, ces méthodes sont devenues aujourd'hui un outil essentiel pour l'investigation dans les différents problèmes fondamentaux de notre assimilation des phénomènes scientifiques qui sont difficiles, à savoir impossible à résoudre dans le passé. Ainsi, notons qu'il existe actuellement un grand nombre de méthodes numériques utilisées dans les différentes branches de la recherche scientifique. La théorie mathématique, essentiellement l'analyse des équations intégrales qui permet d'analyser le problème, de prouver l'unicité de la solution, des méthodes d'approximation efficaces. L'analyse numérique, qui étudie la réalisabilité de ces méthodes, principalement l'analyse de la vitesse de convergence et l'estimation de l'erreur. La programmation sur machine, qui retranscrit ces méthodes sous forme d'algorithmes rapides

et efficaces.

ce mémoire est divisé en quatre chapitres : Dans le premier chapitre, nous rappelons le théorème du point fixe de Banach, et on présente quelques quadratures dans l'analyse numérique. Comme, on démontre des résultats qui seront de grande utilité dans les chapitres suivants.

Le deuxième chapitre, est consacré à l'approximation numérique de l'équation intégrale non linéaire de Volterra. Cette équation est d'une grande importance en mathématiques, elle a été étudiée dans [4], [3]... et d'autres encore. Les méthodes qu'on va utiliser sont basées sur les idées de Nyström : on remplace l'intégrale par une quadrature et on résout le système obtenu.

Dans le troisième chapitre, on va effectuer un travail plus original comparé au précédent chapitre. Nous allons approcher numériquement, en utilisant les mêmes méthodes de Nyström, une équation intégro-différentielle non linéaire de Volterra. On peut considérer cette équation comme une généralisation de la précédente.

Le quatrième chapitre, représente des résultats numériques des équations intégrales et intégro-différentielles de Volterra, qu'on a étudiés.

# 1

## Rappels et Outils

Dans notre travail on a besoin de quelques résultats, plus ou moins classiques, à fin de démontrer la convergence des techniques numériques qu'on va construire dans la suite. Ce chapitre, est dédié à ces résultats. On va les citer et les démontrer sans entrer dans les détails et dans le sens dans lequel on va les utiliser après.

### 1.1 Théorème du point fixe de Banach

Soit  $(X, \|\cdot\|)$  un espace de Banach,  $T$  une application définie de  $X$  sur lui-même. Le théorème de Banach nous assure l'existence et l'unicité d'un point fixe  $x^*$  de  $T$  c-à-d,  $x^* = T(x^*)$ .

**Définition 1.** On dit que  $T$  est une *application lipschitzienne* si

$$\exists k > 0, \forall x, y \in X, \|T(x) - T(y)\| \leq k \|x - y\|.$$

Si  $k < 1$ ,  $T$  est appelée *contraction*.

**Théorème 1.** Si  $T$  est contractante, alors elle a un unique point fixe  $x^* \in X$ .

De plus, la suite

$$\begin{cases} x_0 \in X, \\ x_{n+1} = T(x_n) \quad n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

converge vers  $x^*$  et on a

$$\|x_n - x\| \leq \frac{k^n}{1-k} \|x_1, x_0\|$$

Démonstration. Voir □

## 1.2 Intégration Numérique

Soient  $a < b$  deux réels et  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Dans cette section, on va rappeler les méthodes de Newton-Côtes pour l'approximation numérique de l'intégrale suivante  $\int_a^b f(t)dt$ .

Pour  $N \in \mathbb{N}$ , on définit la subdivision suivante :  $t_j = a + jh$ ,  $0 \leq j \leq N$  et  $h = \frac{b-a}{N}$ . Les formules d'intégrations numériques sont

$$\int_a^b f(t)dt \simeq h \sum_{i=0}^N w_i f(t_i),$$

où, les  $w_i$  sont des quantités positives appelées poids, tel  $\max_{0 \leq j \leq N} |w_j| \leq W$  fixe pour tout  $N \in \mathbb{N}$ .

**Définition 2.** La méthode des trapèzes est la méthode de quadrature qui a pour poids la suite suivante

$$\begin{cases} w_0 = w_N = \frac{1}{2}, \\ w_j = 1, \quad 1 \leq j \leq N-1, \end{cases}$$



Cette méthode est celle qu'on va utiliser dans nos calculs numériques. On l'a choisie puisqu'elle assure la convergence du calcul sous la condition de continuité uniquement. Contrairement à d'autres méthodes, tel Simpson, qui exige plus de régularité.

### 1.3 Résultats importants

Cette section est dédiée pour la démonstration de résultats très importants pour la démonstration de convergence des méthodes numériques construites dans ce travail. On demande au lecteur de ne pas s'attarder dans l'utilité de ces résultats, qu'il verra dans la suite.

#### 1.3.1 Lemme de majoration

**Lemme 1.** Soit  $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  vérifiant

$$|\xi_n| \leq A \sum_{i=0}^{n-1} |\xi_i| + B_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

où,

$$A > 0, |B_n| \leq B.$$

Alors,

$$|\xi_n| \leq (1 + A)^{n-1}(B + A|\xi_0|), \quad n \geq 1.$$

*Démonstration.* On procède par récurrence. Soit

$$(p_n) =: |\xi_n| \leq (1 + A)^{n-1}(B + A|\xi_0|), \quad n \geq 1.$$

Pour  $n = 1$  on a

$$(p_1) : |\xi_1| \leq A|\xi_0| + B_1 \\ \leq A|\xi_0| + B.$$

Supposons que la propriété est vraie jusqu'à  $n$ , et on va démontrer qu'elle est vraie pour  $n + 1$ .

$$(p_{n+1}) : |\xi_{n+1}| \leq A \sum_{i=0}^n |\xi_i| + B_{n+1} \\ \leq A \sum_{i=1}^n (1+A)^{i-1} (B + A|\xi_0|) + B + A|\xi_0| \\ \leq ((1+A)^n - 1) (B + A|\xi_0|) + B + A|\xi_0| \\ \leq (1+A)^n (B + A|\xi_0|)$$

□

### 1.3.2 Propriété de dérivation

Soit  $\psi$  une fonction définie de  $[a, b]^2$  à image dans  $\mathbb{R}$ , tel que pour tout  $s \in [a, b]$ ,  $\psi(\cdot, s) \in C^1(a, b)$ . On définit la fonction suivante

$$\varphi(t) := \int_a^t \psi(t, s) ds, \quad t \in [a, b].$$

**Proposition 2.**

$$\forall t \in [a, b], \quad \varphi'(t) = \psi(t, t) + \int_a^t \frac{\partial \psi}{\partial t}(t, s) ds.$$

*Démonstration.* On a :

$$\begin{aligned}
 \varphi'(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_a^{t+h} \psi(t+h, s) ds - \int_a^t \psi(t, s) ds}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_a^t \psi(t+h, s) ds + \int_t^{t+h} \psi(t+h, s) ds - \int_a^t \psi(t, s) ds}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \psi(t+h, s) ds + \int_a^t \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\psi(t+h, s) - \psi(t, s)}{h} ds \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \psi(t+h, s) ds + \int_a^t \frac{d\psi}{dt}(t, s) ds
 \end{aligned}$$

Mais, en utilisant le théorème des accroissements finis, il existe  $\xi \in ]0, h[$  tel que

$$\frac{1}{h} \int_t^{t+h} \psi(t+h, s) ds = \psi(t+h, t+\xi).$$

On fait tendre  $h$  vers 0 pour obtenir le résultat. □

# 2

## Equation intégrale

Dans la pratique les équations intégrales non linéaire de volterra ne peuvent pas être résolus explicitement, c'est nécessaire d'avoir recours aux techniques numériques. Il ya beaucoup d'alternatives disponible comme vous allez le constater. Mais, nous nous concentrons ici sur les idées sous-jacentes sur lesquelles ces méthodes sont basées. On considère l'équation suivante

$$f(t) = g(t) + \int_0^t k(t, s, f(s)) ds, \quad 0 \leq t \leq T \quad (2.1)$$

où  $g \in C(0, T)$ , et  $f$  une fonction à trouver dans le même espace.

Sous les hypothèses suivantes

$$(H1) \begin{cases} (1) & K \in C([0, T]^2 \times \mathbb{R}), \\ (2) & \exists M \in \mathbb{R}, \forall t, s \in [0, T], \forall x \in \mathbb{R}, |K(t, s, x)| \leq M, \\ (3) & \exists L \in \mathbb{R}, \forall x, y \in \mathbb{R}, \forall t, s \in [0, T], |K(t, s, x) - K(t, s, y)| \leq L|x - y|, \end{cases}$$

l'équation (2.1) admet une unique solution (voir ilyes).

En appliquant la méthode de Nystöm, en utilisant la quadrature donnée dans le chapitre 1, on récupère le système suivant

$$F_0 = g(0) \tag{2.2}$$

$$F_n = g(t_n) + h \sum_{i=0}^n w_i k(t_n, t_i, F_i), \quad 1 \leq n \leq N, \tag{2.3}$$

où  $F_n$  approche  $f(t_n)$ .

## 2.1 Existence et unicité de la solution du système

Nous avons approché notre équation intégrale par un système linéaire. Avant de démontrer la convergence de notre procédure, on doit s'assurer que le système admet une unique solution.

**Théorème 3.** *Pour  $h$  suffisamment petit, le système (2.2)-(2.3) admet une unique solution.*

*Démonstration.* Pour  $1 \leq n \leq N$ , on met

$$\Phi_n(X) := g(t_n) + h w_n k(t_n, t_n, X) + h \sum_{i=0}^{n-1} w_i k(t_n, t_i, F_i),$$

qui est une application définie de  $\mathbb{R}$  dans lui-même.

On a

$$\begin{aligned} |\Phi_n(X) - \Phi_n(Y)| &= |h w_n k(t_n, t_n, X) - h w_n k(t_n, t_n, Y)| \\ &\leq h W L |X - Y|. \end{aligned}$$

Donc, pour  $h$  suffisamment petit les fonctions  $\Phi_n$  sont contractantes et le système (2.2) admet une unique solution.  $\square$

## 2.2 Analyse de l'erreur

Dans cette section nous allons démontrer que la méthode numérique, construite dans la section précédente, converge vers la solution exacte de l'équation. Mais il faut définir dans quel sens ! Les méthodes discutées dans la section antérieure déterminent une solution approximative seulement aux points  $t_i$ . Donc, nous pouvons parler d'erreur uniquement au niveau de ces points. Pour cela, on définit

$$\varepsilon_i = F_i - f(t_i), \quad i \geq 0.$$

On dit que la méthode est convergente si

$$\lim_{h \rightarrow 0} (\max_{0 \leq n \leq N} |\varepsilon_i|) = 0.$$

**Définition 3.** Soit  $f$  est une solution de (2.1). Alors la fonction

$$\delta(h, t_n) = \int_0^{t_n} k(t_n, s, f(s)) ds - h \sum_{i=0}^n w_i k(t_n, t_i, f(t_i))$$

est appelée *l'erreur de la consistance locale* pour (2.1).

L'erreur de la consistance locale est une mesure de l'exactitude avec qui, dans le contexte d'une équation donné, la règle de l'intégration numérique représente l'intégrale. Si

$$\lim_h \max_{0 \leq n \leq N} |\delta(h, t_n)| = 0,$$

alors l'erreur de consistante est dite **logique** pour l'équation.

**Théorème 4.** *Si l'erreur de consistance est logique pour l'équation (2.1), alors*

$$\lim_{h \rightarrow 0} (\max_{0 \leq n \leq N} |\varepsilon_n|) = 0.$$

*Démonstration.* Pour  $n \geq 1$ , on a

$$\begin{aligned} \varepsilon_n &= F_n - f(t_n) \\ &= h \sum_{i=0}^n w_i (k(t_n, t_i, F_i) - k(t_n, t_i, f(t_i))) - \delta(h, t_n) \end{aligned}$$

En utilisant la condition (3) de (H1) et en choisissant  $h < \frac{1}{LW}$ , on obtient

$$|\varepsilon_n| \leq \frac{hWL}{1 - hWL} \sum_{i=0}^{n-1} |\varepsilon_i| + \frac{|\delta(h, t_n)|}{1 - hWL}.$$

En appliquant le lemme 1, on récupère

$$|\varepsilon_n| \leq (1 - hWL)^{-n} \max_{1 \leq i \leq n} |\delta(h, t_i)|.$$

Et du fait que  $(1 - hWL)^{-n} \leq 1$ , on obtient le résultat souhaité.  $\square$

Cette méthode est très intéressante, puisqu'on s'attendait que l'erreur comise lors du changement de l'intégrale par la quadrature serait plus grande que l'erreur d'approximation. Mais on voit bien que ce n'est pas le cas.

## Equation intégro-déffirentielle non linéaire de Volterra

L'originalité de notre travail se resume dans l'étude numérique de l'équation intégro-différentielle non linéaire de Volterra suivante :

$$f(t) = g(t) + \int_0^t k(t, s, f(s), f'(s)) ds, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3.1)$$

où  $g \in C^1(0, T)$ , et  $f$  une fonction à chercher dans le même espace. Sous les hypothèses suivantes

$$(H2) \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad K \in C([0, T]^2 \times \mathbb{R}), \\ (2) \quad \exists M \in \mathbb{R}, \forall t, s \in [0, T], \forall x \in \mathbb{R}, \\ \max \left( |K(t, s, x, y)|, \left| \frac{\partial K}{\partial t}(t, s, x, y) \right| \right) \leq M, \\ (3) \quad \exists a, b, \bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{R}, \forall x, y, \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}, \forall t, s \in [0, T], \\ |k(t, s, x, y) - k(t, s, \bar{x}, \bar{y})| \leq a|x - \bar{x}| + b|y - \bar{y}|, \\ \left| \frac{\partial k}{\partial t}(t, s, x, y) - \frac{\partial k}{\partial t}(t, s, \bar{x}, \bar{y}) \right| \leq \bar{a}|x - \bar{x}| + \bar{b}|y - \bar{y}| \\ (4) \quad b < 1, \end{array} \right.$$

l'équation (3.1) admet une unique solution (voir ilyes).

Cette équation contient plus d'information sur la solution. En appliquant



la proposition de dérivation, on obtient

$$f'(t) = g'(t) + k(t, t, f(t), f'(t)) + \int_0^t \frac{\partial k}{\partial t}(t, s, f(s), f'(s)) ds, \quad 0 \leq t \leq T$$

En appliquant la méthode de Nystöm, en utilisant la quadrature donnée dans le chapitre 1, on récupère le système suivant

$$U_0 = g(0) \tag{3.2}$$

$$V_0 = g'(t_n) + k(0, 0, U_0, V_0) \tag{3.3}$$

$$U_n = g(t_n) + h \sum_{i=0}^n w_i k(t_n, t_i, U_i, V_i), \quad 1 \leq n \leq N, \tag{3.4}$$

$$V_n = g'(t_n) + k(t_n, t_n, U_n, V_n) + h \sum_{i=0}^n w_i \frac{\partial k}{\partial t}(t_n, t_i, U_i, V_i,) \tag{3.5}$$

où  $U_n$  approche  $f(t_n)$  et  $V_n$  approche  $f'(t_n)$ .

### 3.1 Existence et unicité de la solution du système

Contrairement au chapitre précédent, les hypothèses (H2) ne suffisent pas pour assurer l'existence et l'unicité du système (3.2) – (3.5). Donc, on doit rajouter l'hypothèse suivante

$$(H3) \quad \|a\| < 1$$

**Théorème 5.** *Pour  $h$  suffisamment petite, le système (3.2) – (3.5) admet une unique solution.*

*Démonstration.* On va munir l'espace  $\mathbb{R}^2$ , de la norme suivante

$$\forall \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad \left\| \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right\|_1 = |X| + |Y|.$$

Pour tout  $n \geq 1$ , on définit

$$\Phi_n \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} g(t_n) + hw_n k(t_n, t_n, X, Y) + h \sum_{i=0}^{n-1} w_i k(t_n, t_i, U_i, V_i) \\ g'(t_n) + k(t_n, t_n, X, Y) + hw_n \frac{\partial k}{\partial t}(t_n, t_n, X, Y) + h \sum_{i=0}^{n-1} w_i \frac{\partial k}{\partial t}(t_n, t_i, U_i, V_i) \end{pmatrix}.$$

On a

$$\left\| \Phi_n \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - \Phi_n \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} \right\|_1 = \left\| \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \right\|_1$$

Où,

$$\beta_1 = hw_n (k(t_n, t_n, X, Y) - k(t_n, t_n, X', Y')),$$

$$\beta_2 = k(t_n, t_n, X, Y) - k(t_n, t_n, X', Y') + hw_n \left( \frac{\partial k}{\partial t}(t_n, t_n, X, Y) - \frac{\partial k}{\partial t}(t_n, t_n, X', Y') \right).$$

Mais

$$|\beta_1| \leq hW (a|X - Y| + b|X' - Y'|),$$

$$|\beta_2| \leq (a + hW a')|X - Y| + (b + b' hW)|X' - Y'|$$

Alors :

$$\left\| \Phi_n \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - \Phi_n \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} \right\|_1 \leq \max(hW a, hW b, (a + hW a'), (b + b' hW)) \left\| \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} \right\|_1$$

Puisque  $a < 1$ , en appliquant le théorème de Banach, on obtient le résultat.

□

### 3.2 Analyse de l'erreur

Dans cette section nous allons démontrer que la méthode numérique, construite dans la section précédente, converge vers la solution exacte de

l'équation. Contrairement au chapitre précédent, et puisque maintenant on travail sur  $C^1(0, T)$ , on va définir une erreur plus exigeante. Pour cela, on définit

$$\varepsilon_i = |U_i - f(t_i)| + |V_i - f'(t_i)|, \quad i \geq 0.$$

On dit que la méthode est convergente si

$$\lim_{h \rightarrow 0} (\max_{0 \leq n \leq N} |\varepsilon_i|) = 0.$$

L'erreur de consistance change elle aussi dans ce chapitre

$$\begin{aligned} \delta(h, t_n) = & \left| \int_0^{t_n} k(t_n, s, f(s), f'(s)) ds - h \sum_{i=0}^n w_i k(t_n, t_i, f(t_i), f'(t_i)) \right| \\ & + \left| \int_0^{t_n} \frac{\partial k}{\partial t}(t_n, s, f(s), f'(s)) ds - h \sum_{i=0}^n w_i \frac{\partial k}{\partial t}(t_n, t_i, f(t_i), f'(t_i)) \right|. \end{aligned}$$

**Théorème 6.** Si l'erreur de consistance est logique pour l'équation (3.1), alors

$$\lim_{h \rightarrow 0} (\max_{0 \leq n \leq N} |\varepsilon_i|) = 0.$$

*Démonstration.* Pour  $n \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} \varepsilon_n \leq & (a + ahW + \bar{a}hW) |U_n - f(t_n)| + (b + bhW + \bar{b}hW) |V_n - f'(t_n)| \\ & + hW \sum_{i=0}^{n-1} ((a + \bar{a}) |U_i - f(t_i)| + (b + \bar{b}) |V_i - f'(t_i)|) \\ & + \delta(h, t_n). \end{aligned}$$

Pour  $h$  assez petit,  $\alpha := \min(1 - (a + ahW + \bar{a}hW), 1 - (b + bhW + \bar{b}hW)) > 0$ , et

$$\varepsilon_n \leq \frac{hW \max(a + \bar{a}, b + \bar{b})}{\alpha} \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_i + \frac{1}{\alpha} \delta(h, t_n).$$

# 4

## Résultats Numériques

Nous avons arbitrairement choisi des équations pour illustrer l'efficacité de notre méthode. A notre connaissance, ces équations ne représentent aucun intérêt physique, mais elles ont un grand intérêt mathématiques dans nos applications.

Nous allons utiliser la méthode des trapèzes puiqu'elle assure que l'erreur de consistence est logique pour les deux équations. Les termes  $F_n$ ,  $U_n$  et  $V_n$  ne seront pas exactement calculer. Mais ils seront approchés à l'aide du procédé d'itération du théorème de Banach avec une condition d'arrêt du type  $\|x - T(x)\| \leq \frac{1}{10N}$ .

### 4.1 Equation intégrale

Pour le deuxième chapitre, on a choisi l'équation suivante

$$f(t) = g(t) + \int_0^t \frac{\cos(f(s))}{s^2 + t^2 + 1} ds, \quad t \in [0, 1],$$

$k(t, s, x) = \frac{\cos(x)}{s^2 + t^2 + 1}$  vérifie (H1) avec  $M = L = 1$ . Si on prend

$$g(t) = \arccos(t) + \ln \sqrt{\frac{t^2 + 1}{2t^2 + 1}},$$

alors l'équation admet la solution suivante

$$f(t) = \arccos(t).$$

$N$	$\max_{1 \leq j \leq N}  F_j - f(t_j) $
10	1.0773e-002
50	2.6535e-003
100	1.3597e-003
200	6.8832e-004
300	4.6079e-004
500	2.7740e-004
1000	1.3905e-004
1500	9.2774e-005

TABLE 4.1 - Equation intégrale

## 4.2 Equation intégrro-différentielle non linéaire

Pour le troisième chapitre, on a choisi l'équation suivante

$$f(t) = g(t) + \int_0^t \frac{t(s+1)}{5 + (f(s) + f'(s))^2} ds, \quad t \in [0, 1],$$

$k(t, s, x, y) = \frac{t(s+1)}{5 + (x+y)^2}$  vérifie (H2) et (H3) avec  $M = a = b = \bar{a} = \bar{b} = \frac{2}{5}$ .

Si on prend

$$g(t) = t - \frac{t}{2} \ln(6 + 2t + t^2) + \frac{t}{2} \ln(6),$$

on trouve que,

$$f(t) = t.$$

$N$	$\max_{1 \leq j \leq N} ( F_j - f(t_j)  +  V_j - f'(t_j) )$
10	1.7130e-002
50	3.3778e-003
100	1.6859e-003
200	8.4219e-004
300	5.6130e-004
500	3.3670e-004
1000	1.6832e-004
1500	1.1221e-004

TABLE 4.2 – Equation intégro-différentielle

## Bibliographie

- [1] S.BENHAMED, *Quelques Théorèmes du Point Fixe et leurs applications* Paris.(2006)
- [2] I.DEBBAR, *Étude Analytique des Équations Intégrales et Intégrodifférentielles non linéaires de Volterra* .2ème Master.Département de Mathématique.Univ-Guelma.(2013)
- [3] P. LINZ, *Analytical and Numerical Methods for Volterra Equations*.SIAM Studies in Applied Mathematics. Philadelphia/1985.
- [4] TOKUI SATO, *Sur L'équation Intégrale non Linéaire de Volterra*. Compositio Mathematica. tome 11 (1953), p 271-290.