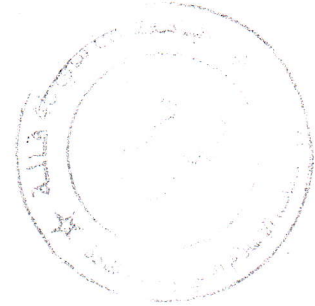


République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques



Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Master Académique en Mathématiques
Option : Equations aux Dérivées Partielles



Par :

ZOUAIMIA Sihem et YEKHLEF Amina

Intitulé

**Estimations d'erreur a posteriori pour le problème du
laplacien en utilisant les éléments finis de Crouzeix-
Raviart**

Dirigé par : Dr. CHAOUI Abderazak

Devant le jury

PRESIDENT
RAPPORTEUR
EXAMINATEUR

Dr : K. FERNANE
Dr : A. CHAOUI
Dr : K. BOUKERRIOUA

Univ-Guelma
Univ-Guelma
Univ-Guelma

Session Juin 2013

Remerciement

En premier lieu, Nous tenons à remercier vivement:

Le bon Dieu, le clément et le miséricordieux qui nous a donné le courage, la force et la patience pour achever notre travail.

Durant la réalisation de ce travail, nous étions entourés et guidés par plusieurs personnes :

Ingénieurs, techniciens et enseignants, qui nous ont transmis leurs savoir faire et expériences pour surmonter les difficultés que nous avons rencontrées.

Au terme de ce travail nous tenons à remercier :

Notre encadreur , nous le remercions aussi pour son encouragement constant, son assistance utile ainsi que la patience dont il a fait preuve.

Les enseignants qui ont contribué à notre formation et qui ont accepté de juger ce travail.

Notre grand respect à mon examinateur et aux membres de jury nous feraient, nous espérons l'honneur d'apprécier notre travail.

Enfin nous remercions tous ceux qui nous ont aidés de près ou de loin.

Dédicace

A celui que les rois s'inclinent devant sa majesté et les césars devant sa force ; à celui que la sagesse revient à ses conseils et son cœur est rempli de tendresse et de patience, à toi papa.

C'est avec un grand plaisir que je réserve ces lignes en signe de gratitude et de reconnaissance pour exprimer Mes remerciements les plus sincères à mon grand dieu toute puissance de nous avoir donné la santé et la patience pour terminer ce travail.

elle que le soleil a brillé pour éclairer ses yeux, qui a offert la beauté aux fleurs et le charme à tout ce qui est beau pour la personne qui ne jamais cesse de me porter aide et courage, à toi MAMAN.

A ma cher frère : LOTFI

A mes chers Sœurs : AMEL, ROMAÏSSA

Je dis merci à ceux qui m'ont toujours poussé à l'avant pour réaliser mes rêves : mon mari FARES

A tout mes amies surtout :

AMINA, CHAHRA, NADJET, AMEL, NADIA, RADIA .

ZOUAIMIA SIHEM

Dédicace

C'est avec un grand plaisir que je réserve ces lignes en signe de gratitude et de reconnaissance pour exprimer Mes remerciements les plus sincères à mon grand dieu toute puissance de nous avoir donné la santé et la patience pour terminer ce travail.

elle que le soleil a brillé pour éclairer ses yeux, qui a offert la beauté aux fleurs et le charme à tout ce qui est beau pour la personne qui ne jamais cesse de me porter aide et courage, à toi MAMAN.

À mes chers frères : HICHEM, ABDE GHANI.

À mes chers Sœurs : FARIDA, MASSIKA, SALIHA, ABLA, AMIRA.

Je dis merci à ceux qui m'ont toujours poussé à l'avant pour réaliser mes rêves : mon mari KAMEL

À tout mes amies surtout :

SIHEM, WAFI, ZINEB, ZINA, HADJER, SOUMIA, AMEL, ROUFIA, KHADIJA, RADIA, NADIA.

Amina

Table des matières

1	Rappel d'analyse fonctionnelle	6
1.1	Types d'équations aux dérivées partielles	6
1.1.1	Problèmes elliptiques	6
1.1.2	Problèmes paraboliques	7
1.1.3	Problèmes hyperboliques	7
1.2	Espaces de Hilbert	7
1.3	Espaces de Sobolev	8
1.3.1	L'espace $H^1(\Omega)$	9
1.3.2	L'espace $H_0^1(\Omega)$	9
1.3.3	L'espace $H^2(\Omega)$	9
1.4	Inégalité de Poincaré	10
1.5	Problème abstrait	10
1.6	Approximation interne du problème	11
1.7	Éléments finis	13
1.8	Le maillage	13
1.9	La formule de Green	14
2	Résolution du problème numérique	15
2.1	Introduction	15
2.2	Étude du problème <i>a priori</i>	16
2.3	Étude du problème <i>a posteriori</i>	17
2.4	Critère d'optimalité des indicateurs d'erreur	18
2.5	Adaptation de maillage	19
2.6	Raffinement de type h	19

3	Estimations d'erreur <i>a posteriori</i> pour le problème du laplacien	20
3.1	Introduction	20
3.2	Éléments finis de Crouzeix-Raviart	20
3.2.1	Description géométrique	20
3.2.2	Description topologique	21
3.2.3	Définitions et propriétés	22
3.3	Opérateurs d'interpolation de Clément	24
3.3.1	Éléments finis conformes de premier ordre	24
3.3.2	Définition	24
3.3.3	Propriétés de l'opérateur d'interpolation de Clément	25
3.4	Outils fonctionnels	26
3.4.1	Formules de Green	26
3.5	Problèmes continus et discrétisés	26
3.5.1	Problème continu	26
3.5.2	Problème discret	27
3.6	Outils et propriétés analytiques	27
3.6.1	Décomposition de Helmholtz	28
3.6.2	Relations d'orthogonalité	30
3.7	Analyse <i>a posteriori</i> de la discrétisation	33
3.7.1	Borne supérieure de l'erreur	33
3.7.2	Borne inférieure de l'erreur	34

Résumé

Dans ce mémoire, on introduit des estimateurs d'erreur *a posteriori* pour l'équation elliptique dans \mathbb{R}^d , $d = 2, 3$ via une méthode d'éléments finis non conformes [12] en espace. Pour cette discrétisation, on élabore un indicateur d'erreur résiduel spatial basé sur les sauts des dérivées normales et tangentielles de notre approximation. Les bornes inférieures et supérieures de la norme de l'erreur forment les résultats principaux de cette étude. En outre, on montre que ces estimateurs sont fiables et efficaces.

Mots-clés: *a posteriori*, éléments finis non conformes.

Abstrat

In this thesis, we introduce an *a posteriori* estimator for a nonconforming finite element approximation [12] of the elliptic equation in \mathbb{R}^d , $d = 2, 3$. For this discretization, we derive a residual indicator based on the jumps of the normal and tangential derivatives of the nonconforming approximation. Lower and upper bounds form the main results. We confirm the efficiency and reliability of these estimators. Our analysis covers nonconforming finite element approximation (Crouzeix-Raviart's element).

Keywords: *a posteriori*, nonconforming finite element.

Notations

\mathbb{R}	espace vectoriel des nombres réels
\mathbb{C}	espace vectoriel des nombres complexes
\mathbb{k}	espace vectoriel désignant \mathbb{R} ou \mathbb{C}
\mathbb{N}	ensemble des entiers naturels
$\Omega \subset \mathbb{R}^d$	domaine ouvert borné de dimension $d = 2, 3$
$C^k(\Omega)$	espace des fonctions k fois continuellement dérivables sur Ω
$L^2(\Omega)$	espace des fonctions de carré intégrable sur Ω
$H^k(\Omega)$	espace de Sobolev des fonctions dont les dérivées k -ièmes appartiennent à $L^2(\Omega)$
$H_0^k(\Omega)$	espace de Sobolev des fonctions de $H^k(\Omega)$ satisfaisant une condition au bord de type Dirichlet homogène
$\frac{\partial u}{\partial x_i}$	dérivée partielle de u par rapport à la variable x_i
n	vecteur normal sortant le long Γ
$\frac{\partial}{\partial \nu}$	dérivée normal sortante
$\partial_x u$	dérivée partielle de u par rapport à la variable x
Δu	opérateur laplacien de u
∇u	opérateur gradient de u
$\ \cdot\ $	norme $L^2(\Omega)$
$\ \cdot\ _K, \ \cdot\ _E$	norme L^2 sur le domaine K ou sur une face E
$\ \cdot\ _{1,\Omega}$	norme de l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$
$ \cdot _{1,\Omega}$	semi-norme de l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$
$\Gamma = \partial\Omega$	bord de Ω
T_h	triangulation de Ω
K	triangle ou tétraèdre de T_h
$ K $	aire ou volume de T
E_K	arête de K
ε_h	ensemble des arêtes/faces de T_h
ε_h^{int}	ensemble des arêtes/faces intérieures de T_h
$a \lesssim b$	il existe une constante positive C indépendante de a et de b telle que $a \leq Cb$

$a \sim b$	il existe des constantes positives C_1 et C_2 indépendantes de a et de b telles que $C_1 b \leq a \leq C_2 b$
$n_E = (n_{E1}, n_{E2})$	normale extérieure d'une arête E
$t_E = (-n_{E2}, n_{E1})$	vecteur tangent à l'arête E
h_E	longueur ou diamètre d'un élément E
h_K	diamètre de la maille K
ε_h	L'ensemble de toutes les arêtes/faces de T_h
ε_h^{int}	L'ensemble des arêtes/faces intérieures de T_h
ε_K	L'ensemble des arêtes/faces d'un élément K
ω_K	réunion des éléments partageant une arête/face commune avec K
ω_E	réunion des éléments partageant l'arête /face E
ω_x	réunion des éléments partageant le noeud x
$\tilde{\omega}_K$	réunion des éléments partageant un noeud avec K
$\tilde{\omega}_E$	réunion des éléments partageant un noeud avec E
N_h	L'ensemble des noeuds de la triangulation T_h
\mathcal{N}_h^{int}	L'ensemble des noeuds intérieurs de la triangulation T_h
$\delta_{i,j}$	symbole de Kronecker $\delta_{i,j} = 1, \text{ si } i = j, 0 \text{ sinon}$
$\mathcal{M}_E(v)$	valeur moyenne intégrale d'une fonction u sur une arête/face E
$[[u]]$	le saut de u
$u _E$	la restriction de la fonction u à l'ensemble E
$(,)$	le produit scalaire

Chapitre 1

Rappel d'analyse fonctionnelle

1.1 Types d'équations aux dérivées partielles

Il existe une classification des équations aux dérivées partielles linéaires du second ordre. Considérons par exemple une équation aux dérivées partielles écrite sous la forme:

$$Au_{xx} + Bu_{yy} + Cu_{xy} + Du_x + Eu_y + F = 0 \quad (*)$$

L'appellation "elliptique", "parabolique" ou "hyperbolique" d'une équation aux dérivées partielles (*) correspond à la nature de la conique décrite par l'équation caractéristique correspondante, c'est-à-dire:

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

Donnons maintenant des exemples d'équations elliptiques, paraboliques et hyperboliques

1.1.1 Problèmes elliptiques

L'équation elliptique modèle est

$$-\Delta u = f$$

où $\Delta u = \partial_1^2 u + \partial_2^2 u$, ∂_i désignant la dérivée partielle par rapport à la i -ème variable (et donc ∂_i^2 la dérivée partielle d'ordre 2 par rapport à la i -ème variable). Cette équation modélise par exemple le phénomène de conduction de la chaleur stationnaire.

1.1.2 Problèmes paraboliques

L'équation parabolique modèle est

$$u_t - \Delta u = f$$

où u_t désigne la dérivée partielle de u par rapport au temps (u est donc une fonction de x , variable d'espace, et de t ; variable de temps). Cette équation modélise par exemple la conduction de la chaleur en régime instationnaire. Cette équation parabolique comporte deux opérateurs : la dérivée d'ordre 1 en temps et la dérivée d'ordre 2 en espace.

1.1.3 Problèmes hyperboliques

Les équations de type hyperbolique interviennent principalement en mécanique des fluides. Elles sont souvent obtenues en négligeant les phénomènes de diffusion (parce qu'ils sont faibles) dans les équations de conservation de la mécanique. L'exemple plus classique d'équation hyperbolique est l'équation des ondes :

$$u_{tt} - \Delta u = 0$$

1.2 Espaces de Hilbert

Définition 1.2.1. (Produit scalaire):

On appelle produit scalaire dans un espace vectoriel E , une forme bilinéaire symétrique définie positive sur E , on a le produit scalaire de deux éléments x, y de E sous la forme (x, y) .

Définition 1.2.2. (Espace de Hilbert):

Un espace de Hilbert est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire (x, y) qui est complet lorsqu'il est normé par la norme associée à ce produit scalaire.

Définition 1.2.3. (L'espace $L^2(\Omega)$):

L'espace $L^2(\Omega)$ des fonctions de carré sommable sur Ω , où Ω est un domaine ouvert de \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 , c'est à dire telles que l'intégrale $\int_{\Omega} f(x) dx$ existe, muni du produit scalaire :

$$(f, g) = \int_{\Omega} f(x)g(x) dx.$$

Lemme 1.2.4. (Inégalité de Cauchy-Schwartz)

Si u et w sont des fonctions de $L^2(\Omega)$, alors :

$$\left| \int_{\Omega} u w \, dv \right| \leq \left(\int_{\Omega} u^2 \, dv \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} w^2 \, dv \right)^{\frac{1}{2}}$$

Démonstration:

Soit t un nombre réel quelconque. La fonction $(u + tw)^2$ étant positive quel que soit t , on

a

$$0 \leq \int_{\Omega} (u + tw)^2 \, dv \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

ce qui peut également s'écrire:

$$0 \leq \int_{\Omega} u^2 \, dv + 2t \int_{\Omega} u w \, dv + t^2 \int_{\Omega} w^2 \, dv \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

ou encore:

$$0 \leq At^2 + Bt + C \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

où

$$A = \int_{\Omega} w^2 \, dv, \quad B = 2 \int_{\Omega} u w \, dv, \quad C = \int_{\Omega} u^2 \, dv$$

Il s'agit donc d'un polynôme de degré 2 en la variable t qui est toujours positif. Cela n'est possible que si le discriminant $B^2 - 4AC$ est négatif ou nul c-à-d $B^2 - 4AC \leq 0$. En remplaçant les valeurs de A , B et C , on trouve immédiatement l'inégalité de Cauchy-Schwartz ce qui termine la démonstration du lemme.

1.3 Espaces de Sobolev

Les espaces de Sobolev ont été introduits au début du siècle et permis de résoudre bon nombre de problèmes concernant les équations aux dérivées partielles restés sans réponse jusque là.

Nous nous limiterons aux espaces les plus utiles en gardant bien à l'esprit que la théorie sous-jacente est beaucoup plus vaste.

Dans ce qui suit, sauf mention explicite du contraire, on suppose l'ouvert Ω borné.

1.3.1 L'espace $H^1(\Omega)$

Définition 1.3.1. On note $H^1(\Omega)$ l'espace fonctionnel linéaire défini par :

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \mid \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \forall i \right\}$$

que l'on munit du produit scalaire noté $((u, w))_{1, \Omega}$:

$$((u, v))_{1, \Omega} = \int_{\Omega} (u \cdot v + \nabla u \cdot \nabla v)$$

et par le fait même d'une norme induite :

$$\|u\|_{1, \Omega} = ((u, u))_{1, \Omega}^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{\Omega} (u^2 + \nabla u^2) \right)^{\frac{1}{2}}$$

1.3.2 L'espace $H_0^1(\Omega)$

Définissons maintenant un autre espace de Sobolev qui est un sous-espace de $H^1(\Omega)$ et qui nous sera très utile pour les problèmes avec conditions aux limites de Dirichlet .

Définition 1.3.2. Soit $C_c^\infty(\Omega)$ l'espace des fonctions de classe C^∞ à support compact dans Ω et dense dans H_0^1 . L'espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ est défini comme l'adhérence de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$.

On peut définir que $H_0^1(\Omega)$ est un sous-espace de $H^1(\Omega)$ constitué des fonctions qui s'annulent sur le bord $\partial\Omega$ puisque tel est le cas des fonctions de $C_c^\infty(\Omega)$. En général, $H_0^1(\Omega)$ est strictement plus petit que $H^1(\Omega)$ car $C_c^\infty(\Omega)$ est un sous-espace strict de $C_c^\infty(\bar{\Omega})$.

1.3.3 L'espace $H^2(\Omega)$

Définition 1.3.3. On note $H^2(\Omega)$ l'espace

$$H^2(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \mid \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^2(\Omega), \forall i, j \right\}$$

que l'on munit du produit scalaire noté $((u, w))_{2, \Omega}$:

$$((u, w))_{2, \Omega} = \int_{\Omega} \left(u \cdot w + \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_i} \right) + \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} \right) \right) dv$$

et de la norme induite :

$$\|u\|_{2,\Omega} = \left(\int_{\Omega} \left(u^2 + \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 + \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right) \right) dv \right)^{\frac{1}{2}}$$

Définition 1.3.4. Si $u \in H^2(\Omega)$, alors la fonction $\partial u / \partial n$ définie sur la frontière Γ est appelée la trace normale de u au bord que l'on note $\gamma(u)$. C'est -à-dire :

$$\gamma(u) = \frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot n$$

où n est le vecteur normal unitaire à Γ .

Définition 1.3.5. L'espace $H_0^2(\Omega)$ est défini par

$$H_0^2(\Omega) = \left\{ u \in H^2(\Omega) \mid u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma \right\}$$

1.4 Inégalité de Poincaré

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N borné dans au moins une direction de l'espace. Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour toute fonction

$$v \in H_0^1(\Omega), \int_{\Omega} |v(x)|^2 dx \leq C \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx$$

1.5 Problème abstrait

Soit V un espace de Hilbert réel de produit scalaire $(\cdot)_V$ et de norme $\|\cdot\|_V$. Fixons une forme bilinéaire continue

$$a : V \times V \rightarrow \mathbb{R} : (u, v) \rightarrow a(u, v).$$

La bilinéarité signifiant la linéarité sur u et v ; tandis que la continuité est équivalente à l'existence d'une constante $M > 0$ telle que :

$$|a(u, v)| \leq M \|u\|_V \|v\|_V, \quad \forall u, v \in V.$$

Nous considérons le problème abstrait (ou variationnel) suivant: étant donné $f \in L^2(\Omega)$,

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ telle que} \\ a(u, v) = f(v), \quad \forall v \in V. \end{cases} \quad (1.1)$$

L'existence d'une solution à ce problème est basée sur la coercivité de la forme a :

Définition 1.5.1. *On dit que la forme bilinéaire a est V -elliptique ou coercive sur V si et seulement s'il existe $\alpha > 0$ tel que*

$$a(u, u) \geq \alpha \|u\|_V^2, \quad \forall u \in V.$$

Alors on a le théorème suivant

Théorème 1.5.2. (Lax-Milgram)

Si la forme bilinéaire $a(u, v)$ est coercive, et si $f(v)$ une forme linéaire continue sur V , alors:

Le problème variationnel

$$\begin{cases} \text{chercher la fonction } u \in V \text{ telle que:} \\ a(u, v) = f(v), \quad \forall v \in V \end{cases}$$

admet une solution unique dans V

De plus, si a est symétrique, ce problème est équivalent au problème de minimisation

$$\begin{cases} \text{chercher la fonction } u \text{ qui réalise le minimum dans } V \text{ de} \\ J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - f(v) \end{cases}$$

1.6 Approximation interne du problème

On reprend le cadre abstrait du §"1.5": soient V un espace de Hilbert réel; une forme bilinéaire $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, continue et V -elliptique.

La méthode d'approximation interne (dite méthode de Galerkin) du problème (1.1) consiste à remplacer l'espace V par une famille de sous-espaces V_h de dimension finie, $h > 0$ étant paramètre réel destiné à tendre vers 0, de sorte que V_h tend vers V , lorsque $h \rightarrow 0$.

Ainsi pour chaque h , on résoud le problème suivant:

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V_h, \text{ solution de} \\ a(u_h, v_h) = f(v_h), \forall v_h \in V_h \end{cases} \quad (1.2)$$

La méthode précédente s'appelle méthode d'approximation interne car tous les espaces V_h sont supposés inclus dans V .

Lemme 1.6.1. (de Céa)

Soient $u \in V$ la solution du problème (1.1) et $u_h \in V_h$ la solution du problème(1.2). Alors il existe une constante C indépendante de h telle que :

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{C}{\alpha} \inf_{v \in V_h} \|u - v\|_V$$

Démonstration

On a immédiatement en vertu des problèmes (1.1) et (1.2):

$$a(u, v) = f(v) \quad , \quad \forall v \in V$$

$$a(u_h, v_h) = f(v_h), \quad \forall v_h \in V_h.$$

Puisque $V_h \subset V$, on peut prendre $v = v_h$ dans la première équation et soustraire pour obtenir:

$$a(u - u_h, v_h) = 0 \quad , \quad \forall v_h \in V_h$$

En particulier:

$$a(u - u_h, u_h) = 0$$

et on en conclut que :

$$a(u - u_h, u - v_h) = a(u - u_h, u - v_h) \quad , \quad \forall v_h \in V_h$$

La coercivité et la continuité de la forme bilinéaire a nous permettent alors d'écrire:

$$\alpha \|u - u_h\|_V^2 \leq C \|u - u_h\|_V \|u - v_h\|_V \quad , \quad \forall v_h \in V$$

ce qui entraîne que :

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{C}{\alpha} \|u - v_h\|_V, \quad \forall v_h \in V_h$$

Puisque cette dernière inégalité est vraie quel que soit $v_h \in V_h$, on a le résultat.

Définition 1.6.2. *On dit que la famille des problèmes $a(u_h, v_h) = f(v_h)$, $\forall v_h \in V_h$ associée à V_h est convergente si et seulement si : $\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_V = 0$*

On dit que la convergence est d'ordre r si et seulement si il existe $C > 0$ (indépendant de h) tel que

$$\|u - u_h\|_V \leq Ch^r.$$

1.7 Éléments finis

La méthode des éléments finis consiste à approcher, dans un sous-espace de dimension finie, un problème écrit sous forme variationnelle dans un espace de dimension infinie. La solution approchée est dans ce cas une fonction déterminée par un nombre fini de paramètres, comme, par exemple, ses valeurs en certains points (les noeuds du maillage).

Avantages : Traitement possible de géométries complexes, détermination plus naturelle des conditions aux limites, possibilité de démonstrations mathématiques de convergence et de majoration d'erreurs.

Inconvénients : Complexité de mise en oeuvre et coût en temps de calcul et en mémoire.

1.8 Le maillage

Dans la méthode des éléments finis, la construction du sous-espace V_h nécessite la discrétisation préalable du domaine Ω en éléments géométriques simples. La discrétisation du domaine Ω est un problème technique difficile et la qualité du maillage est cruciale pour la qualité de l'approximation.

En dimension deux, les éléments sont des triangles ou des quadrangles de côtés droits ou curvilignes. En dimension trois, ce sont des tétraèdres ou hexaèdres.

Un maillage en éléments finis doit satisfaire les critères suivants:

1/ Les éléments K_i du maillage doivent recouvrir le domaine Ω :

$$\cup_i K_i = \Omega$$

Ceci implique que, par exemple en dimension deux ce domaine soit polygonal ou approché par un polygone si l'on utilise des éléments droits.

2/ L'intersection de deux éléments distincts ne peut être que:

- l'ensemble vide.
- un sommet.
- un côté.
- une face (en dimension trois).

1.9 La formule de Green

Si $u \in H^2(\Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$, on a :

$$-\int_{\Omega} \Delta u(x)v(x)dx = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} v d\delta$$

avec $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \nabla u \cdot \nu$ où ν est un vecteur normal extérieur à Γ

Chapitre 2

Résolution du problème numérique

2.1 Introduction

Dans le cadre de la résolution de problèmes physiques tels qu'en mécanique des fluides, des solides ou plus généralement de systèmes d'équations aux dérivées partielles, on rencontre bien souvent le problème de l'efficacité des méthodes numériques employées. Dans bien des cas, la difficulté rencontrée, dans le cadre d'une résolution via une méthode d'éléments finis, est que le taux de convergence de ces méthodes numériques se trouve détérioré. On trouve à cela plusieurs raisons:

- la géométrie du domaine :présente-t-il des coins ?
- la nature des conditions au bord : la frontière est elle mixte ?

Le raffinement de maillage automatique peut répondre à ce genre de problèmes. Le raffinement de maillage est une technique algorithmique qui permet d'améliorer le taux de convergence des méthodes numériques employées. L'idée de base est de raffiner les régions sensibles du maillage de notre domaine où l'approximation de notre solution serait "mauvaise" tout en abandonnant les régions les moins sensibles à une approximation classique. Cet abandon s'explique évidemment par le coût d'un raffinement uniforme: à quoi bon raffiner des zones où l'approximation est plus que convenable? La réponse est triviale.

C'est dans ce cadre que l'on fait intervenir la notion d'estimateurs *a posteriori*. Estimateurs, puisqu'il s'agit évidemment d'estimer au mieux les erreurs commises dans la triangulation de notre domaine. Le terme *a posteriori*, quant à lui, par opposition au caractère *a priori*, désigne évidemment le fait que l'on doit déterminer l'ordre d'erreur sans pour autant

connaître la solution exacte de notre problème. Alors en pratique comment déterminer un ordre d'erreur sans connaître la solution exacte? L'idée est de trouver une quantité équivalente à l'erreur commise entre la solution exacte et la solution approchée du problème étudié. C'est l'essence même de la mise en place des estimateurs ou indicateurs d'erreur *a posteriori*.

L'élaboration de ces indicateurs d'erreur repose sur une discrétisation des problèmes d'équations aux dérivées partielles via des méthodes d'éléments finis non conformes. On choisit ici les méthodes d'éléments finis de Crouzeix-Raviart. Le chapitre 3 est une introduction aux indicateurs *a posteriori*. On présente la discrétisation du problème de Laplace statique via la méthode d'éléments finis de Crouzeix-Raviart.

De nombreux problèmes touchant à la physique ou à l'ingénierie mathématique sont donc régis par des équations aux dérivées partielles. Bien entendu, les solutions explicites de tels problèmes sont rarement connues et de ce fait on s'attache particulièrement à la résolution numérique de ces équations.

En général, les preuves théoriques de convergence, en l'occurrence les estimations *a priori*, assurent la fiabilité mais en aucun cas l'efficacité. L'ordre de convergence se trouve parfois détérioré ; on trouve plusieurs raisons à cela : géométrie du domaine, régularité de la solution exacte, etc. La problématique est donc de trouver une méthode à la fois fiable et efficace. Les estimateurs *a posteriori* vont jouer ce rôle.

2.2 Étude du problème *a priori*

Pour mettre en oeuvre une méthode numérique fiable, il est nécessaire de prouver des résultats théoriques préalables. Ce sont les estimations *a priori*. *A priori* car on suppose la connaissance de la solution u ou de ses attributs: sa régularité, l'espace dans lequel vit cette solution.

Pour établir des estimations *a priori*, on utilise les formulations variationnelles continue et discrète du problème. Soit V un espace de Banach. La formulation variationnelle continue se présente en général sous cette forme: trouver la solution u telle que

$$a(u, v) = (f, v), \quad \forall v \in V \tag{2.1}$$

où a est une forme bilinéaire continue et f une donnée du problème.

Soit $h > 0$. La formulation variationnelle discrète consiste à déterminer une solution u_h vérifiant :

$$a_h(u_h, v_h) = (f_h, v_h), \quad \forall v_h \in V_h \quad (2.2)$$

où V_h est un sous espace de dimension finie de V . Si l'espace V_h n'est pas inclus dans V , on parle d'approximation non conforme. Les application a_h , f_h sont respectivement les approximations de a et f dans V_h . L'estimation *a priori* se présente comme suit :

$$\|u - u_h\|_V \lesssim B_h(u) + C_h(f) \quad (2.3)$$

où

$$B_h(u) = h^p \|u\|_W$$

où W est un sous espace fonctionnel de V qui dépend exclusivement de la régularité de u et p est un entier représentant l'ordre de convergence entre la solution exacte u et son approximation u_h . Quant à la quantité $C_h(f)$, elle dépend exclusivement de la différence entre la donnée f et son approximation f_h et d'une puissance q de h supérieure à p (termes de degrés supérieurs). La preuve théorique d'une telle inégalité assure bien évidemment la convergence de la méthode numérique employée, à condition évidemment d'avoir des hypothèses de régularité pour avoir l'efficacité de cette méthode.

2.3 Étude du problème *a posteriori*

Les estimations d'erreur *a posteriori* ont été introduites en 1978 par Babuska et Rheinbolt. A la différence des estimations d'erreur *a priori*, les estimations d'erreur *a posteriori* permettent de contrôler l'erreur exacte par une quantité ne dépendant que de la triangulation, des données du problème (membre de droite, conditions limites, paramètres du modèles physiques) et de la solution approchée (donc connue). Depuis les travaux de Babuska et Rheinbolt, l'intérêt pour de telles estimations s'est considérablement accru. Cet intérêt est principalement dû à la nécessité d'obtenir des résultats numériques précis sans que le coût de calcul soit trop élevé. En effet, l'analyse d'erreur *a posteriori* permet de déterminer explicitement si la solution approchée est une approximation de la solution exacte u suffisamment précise pour les besoins de l'ingénieur.

De plus, afin d'optimiser les calculs, les estimations d'erreur *a posteriori* permettent de raffiner certaines parties de la triangulation en fonction de la solution approchée.

pour mettre en oeuvre des estimations d'erreur *a posteriori*, on doit prouver l'existence d'une borne d'erreur η qui vérifie le critère suivant:

$$\|u - u_h\|_V \lesssim \eta(h, u_h, f_h) + \zeta_h(f). \quad (2.4)$$

où $\zeta_h(f)$ est une quantité négligeable devant η (termes d'ordre supérieurs). La quantité η se calcule très facilement à partir des données u_h et f_h , par suite il est facile d'obtenir une borne de l'erreur globale, cette borne est appelée estimateur global. En pratique, l'estimateur global est une somme d'estimateurs locaux η_K où K est une maille de notre triangulation T_h . L'estimateur global s'écrit alors:

$$\eta = \sqrt{\sum_{K \in T_h} \eta_K^2} \quad (2.5)$$

2.4 Critère d'optimalité des indicateurs d'erreur

Comme nous venons de le voir, l'estimateur global η est une somme d'estimateurs locaux η_K . Pour prouver l'équivalence entre les estimateurs et l'erreur globale, on doit montrer non seulement l'inégalité globale (2.4), mais aussi l'inégalité locale suivante :

$$\eta_K \lesssim \|u - u_h\|_{\omega_K} + \chi_h(f, K) \quad (2.6)$$

où $\|\cdot\|_{\omega_K}$ est la restriction à ω_K de la norme de V et ω_K est la réunion des éléments partageant une arête /face commune avec K .

Définition 2.4.1. Une famille d'indicateurs locaux $(\eta_K)_{K \in T_h}$ vérifie le critère d'optimalité si elle vérifie l'inégalité globale (2.4) et l'inégalité locale (2.6).

Le critère d'optimalité assure l'équivalence entre l'erreur et les estimateurs *a posteriori*. Ce critère permet donc d'assurer le bon comportement des estimateurs d'erreur.

2.5 Adaptation de maillage

Du point de vue théorique, on voit que les quantités $(\eta_K)_{K \in T_h}$ ne dépendent que des données u_h , f_h et du problème considéré, *a fortiori* ces indicateurs sont faciles à calculer. La problématique est donc la suivante: en pratique, quelle va être la stratégie employée pour utiliser ces résultats? Nous allons utiliser pour cela la stratégie d'adaptation de maillages. L'adaptation de maillage consiste à localiser les lieux où l'erreur est importante. Nous sommes donc en mesure d'apprécier les lieux où l'erreur est importante. Le but étant, bien entendu, de se concentrer sur les mailles du domaine dont l'estimateur local est le plus élevé. Le procédé de maillage adaptatif s'opère comme suit:

1. construction d'un maillage initial T_0 de Ω . On fixe: $k = 0$.
2. calcul de la solution approchée sur T_k à l'aide d'une méthode d'éléments finis.
3. calcul des estimateurs $(\eta_K)_{K \in T_k}$. Stop, lorsque l'erreur globale $\eta^2 = \sum_{K \in T_h} \eta_K^2$ est assez petite.
4. on raffine tout les éléments $K \in T_k$ qui vérifient le critère $\eta_K \geq \delta$, la tolérance δ étant donnée.
5. $k \leftarrow k + 1$ et on retourne à l'étape (2).

Regardons précisément l'étape 4. Comment fixe-t-on la tolérance δ et comment s'opère la procédure de raffinement? Nous nous sommes plus particulièrement intéressés au raffinement de type h (h -raffinement) décrit dans la section suivante.

2.6 Raffinement de type h

Le raffinement de type h consiste à enrichir l'espace d'éléments finis localement en partitionnant les mailles qui vérifient le critère $\eta_K \geq \delta$. On définit la tolérance comme suit

$$\delta = \frac{1}{2\sigma} \sum_{K \in T_k} \eta_K \quad (2.7)$$

où σ représente le nombre de mailles de T_k . Les mailles K de T_k dépassant la tolérance sont raffinées comme suit:

$$h_K := \frac{1}{2} h_K$$

Chapitre 3

Estimations d'erreur *a posteriori* pour le problème du laplacien

3.1 Introduction

Ce chapitre rappelle des estimations d'erreur *a posteriori* pour le problème de Laplace 2D via une discrétisation par éléments finis non conformes de Crouzeix-Raviart. Ces estimateurs sont mis en place de manière standard. En outre, nous avons pris le soin de décrire les différentes étapes de construction de ces indicateurs d'erreur.

3.2 Éléments finis de Crouzeix-Raviart

On propose dans cette partie une brève description des éléments finis de Crouzeix-Raviart. Ces éléments finis sont de type non conforme autrement dit que l'espace des approximations n'est pas inclus au sens ensembliste dans l'espace de vie de la solution .

3.2.1 Description géométrique

Dans le cadre 2D, l'élément fini de référence est représenté par une maille triangulaire dont les degrés de liberté correspondent au milieu de chacune des arêtes comme le montre la figure suivante:

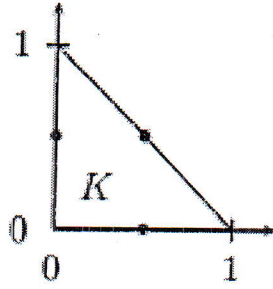


FIG.1 – Élément fini P_1 non conforme 2D

Clairement cet élément présente des discontinuités au niveau des interfaces des arêtes, le seul point de continuité au niveau des interfaces étant le milieu des arêtes.

Dans le cadre 3D, l'élément fini de référence est représenté par un tétraèdre dont les degrés de liberté correspondent aux barycentres des faces des tétraèdres.

3.2.2 Description topologique

Nous fixons un maillage T_h de Ω qui est régulier au sens de Ciarlet [10], autrement dit, il existe $\sigma > 0$ tel que

$$\frac{h_K}{\rho_K} \leq \sigma, \quad \forall K \in T_h, \quad (3.1)$$

où h_K et ρ_K désignent respectivement le diamètre de K et le diamètre de la plus grande boule inscrite dans K . Tous les éléments sont des triangles/tétraèdres notés K . L'ensemble de toutes les arêtes /faces de T_h est symbolisé par ε_h . On définit également l'ensemble ε_h^{int} des arêtes/faces intérieures de T_h et l'ensemble ε_K des arêtes/faces d'un élément K . Enfin pour une arête/face donnée $E \in \varepsilon_K \cap \varepsilon_L$, on désigne par h_E , la longueur ou le diamètre d'un élément E .

Il est également nécessaire de définir des patches locaux: pour un élément K , on définit ω_K comme la réunion de tous les éléments qui partagent une arête/face avec K . Pour une arête/face E , ω_E désigne la réunion des triangles/tétraèdres ayant E pour arête/face. Enfin, pour un noeud x , on définit ω_x comme la réunion de tous les triangles/tétraèdres ayant x pour noeud. De la même manière, on définit par $\tilde{\omega}_K$ et $\tilde{\omega}_E$ la réunion de tous les triangles/tétraèdres partageant respectivement un noeud avec K et E . \mathcal{N}_h représente l'ensemble des noeuds de la triangulation T_h et \mathcal{N}_h^{int} l'ensemble des noeuds intérieurs de la

triangulation T_h .

On introduit ici l'espace des éléments finis non conformes de Crouzeix-Raviart:

$$X_h^0 = \{v \in L^2(\Omega) : v|_K \in P_1, \forall K \in T_h,$$

$$\int_E v|_K = \int_E v|_L, \forall E \in \varepsilon_K \cap \varepsilon_L \cap \varepsilon_h^{int}, K, L \in T_h,$$

$$\int_E v|_K = 0, \forall E \in \varepsilon_K \cap \Gamma, K \in T_h\}.$$

Dans le cadre 2D, l'espace peut-être reformulé comme suit

$$X_h^0 = \{v \in X_h : v = 0 \text{ au milieu des arêtes du bord } \Gamma\}$$

avec

$$X_h = \{v \in L^2(\Omega) : v|_K \in P_1, \forall K \in T_h,$$

$$v \text{ est continu au milieu des arêtes}\}$$

Les fonctions de base de cet élément fini sont les suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} p_1(\hat{x}, \hat{y}) = 1 - 2\hat{y} \\ p_2(\hat{x}, \hat{y}) = -1 + 2\hat{x} + 2\hat{y} \\ p_3(\hat{x}, \hat{y}) = 1 - 2\hat{x} \end{array} \right.$$

3.2.3 Définitions et propriétés

Étant donnée une arête E , on choisit une direction normale arbitraire n_E et on définit K_{in} et K_{ext} comme étant les deux éléments partageant cette arête/face. On peut supposer, sans aucune restriction, que $n_E = (n_{E1}, n_{E2})$ pointe vers K_{ext} (Figure 5). Le vecteur tangent est défini par $t_E = (-n_{E2}, n_{E1})$.

On utilisera également, lors de l'analyse par éléments finis des équations aux dérivées partielles, la propriété suivante :

$$\int_E [[u_h]]_E = 0 \quad \forall E \in \varepsilon_h, \forall u_h \in X_h^0, \quad (3.2)$$

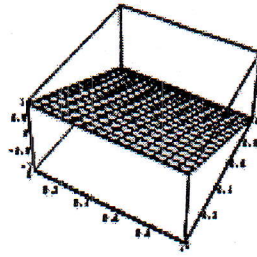


FIG.2. Fonction de base \hat{p}_1

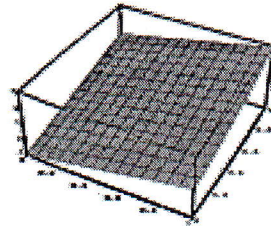


FIG.3. Fonction de base \hat{p}_2

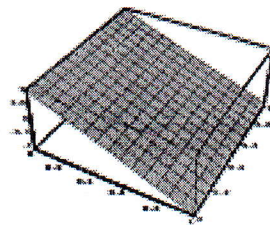


FIG.4. Fonction de base \hat{p}_3

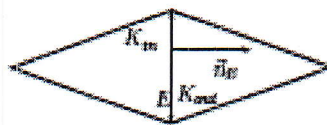


FIG.5. Deux éléments partageant une arête E

où le saut d'une fonction v à travers une arête/face E au point x est défini par

$$[[v(x)]]_E = \begin{cases} \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} v(x + \alpha n_E) - v(x - \alpha n_E) & \text{si } E \in \varepsilon_h^{int}, \\ v(x) & \text{si } E \in \varepsilon_h \setminus \varepsilon_h^{int}. \end{cases}$$

Notons également que le signe de $[[v(x)]]_E$ dépend de l'orientation de n_E . Néanmoins, des quantités telles que le saut du gradient $[[\nabla v \cdot n_E]]_E$ sont indépendantes de cette orientation. Pour une fonction $v \in X_h^0$, on définit le gradient discontinu $\nabla_h v$ par

$$(\nabla_h v)|_K = \nabla v|_K, \forall K \in T_h$$

3.3 Opérateurs d'interpolation de Clément

3.3.1 Éléments finis conformes de premier ordre

Nous avons défini précédemment les éléments finis de type non conformes, rappelons à présent la définition de l'élément fini conforme P_1

$$V_h = \{v \in L^2(\Omega) : v|_K \in P_1, \forall K \in T_h\}$$

avec

$$V_h^0 = V_h \cap H_0^1(\Omega)$$

3.3.2 Définition

Pour notre analyse a posteriori, nous avons besoin de l'interpolé de Clément. On définit:

$$Y_h = \{v \in L^2(\Omega) : v|_K \in H^1(K), \forall K \in T_h,$$

$$\int_E v|_K = \int_E v|_L, \forall E \in \varepsilon_K \cap \varepsilon_L \cap \varepsilon_h^{int}, K, L \in T_h\}$$

$$Y_h^0 = \{v \in L^2(\Omega) : v|_K \in H^1(K), \forall K \in T_h,$$

$$\int_E v|_K = \int_E v|_L, \forall E \in \varepsilon_K \cap \varepsilon_L \cap \varepsilon_h^{int}, K, L \in T_h,$$

$$\int_E v|_K = 0, \forall E \in \varepsilon_K \cap \Gamma, K \in T_h \}$$

Remarque 3.3.1. Notez que $H^1(\Omega) \subset Y_h$ et que $X_h^0 \cap H_0^1(\Omega) \subset Y_h^0$.

On rappelle que l'opérateur d'interpolation de Clément est défini comme suit: on définit de manière standard l'application qui à tout noeud x associe $\lambda_x \in V_h$ et vérifiant

$$\lambda_x(y) = \delta_{x,y}, \forall y \in \mathcal{N}_h.$$

Pour tout élément $v \in Y_h$ et $w \in Y_h^0$, on définit les opérateurs I_C et I_C^0 par

$$I_C v = \sum_{x \in \mathcal{N}_h} |\omega_x|^{-1} \left(\int_{\omega_x} v \right) \lambda_x, \quad (3.3)$$

$$I_C^0 w = \sum_{x \in \mathcal{N}_h^{int}} |\omega_x|^{-1} \left(\int_{\omega_x} w \right) \lambda_x, \quad (3.4)$$

Remarque 3.3.2. $I_C v$ appartient à V_h , alors que $I_C^0 w$ appartient à V_h^0 .

3.3.3 Propriétés de l'opérateur d'interpolation de Clément

Les opérateurs définis précédemment vérifient les propriétés suivantes:

lemme 3.3.3. Pour tout $v \in Y_h$ et $w \in Y_h^0$, on a

$$\|v - I_C v\|_K \lesssim h_K \|\nabla_h v\|_{\tilde{\omega}_K}, \forall K \in T_h, \quad (3.5)$$

$$\|v - I_C v\|_E \lesssim h_E^{1/2} \|\nabla_h v\|_{\tilde{\omega}_E}, \forall E \in \varepsilon_h, \quad (3.6)$$

$$\|w - I_C^0 w\|_K \lesssim h_K \|\nabla_h w\|_{\tilde{\omega}_K}, \forall K \in T_h, \quad (3.7)$$

$$\|w - I_C^0 w\|_E \lesssim h_E^{1/2} \|\nabla_h w\|_{\tilde{\omega}_E}, \forall E \in \varepsilon_h^{int}, \quad (3.8)$$

$$\|\nabla I_C^0 w\|_K \lesssim \|\nabla_h w\|_{\tilde{\omega}_K}, \forall K \in T_h. \quad (3.9)$$

Démonstration:

Toutes ces propriétés sont démontrées dans [11].

3.4 Outils fonctionnels

3.4.1 Formules de Green

La valeur moyenne d'une fonction v sur une arête/face E est définie par

$$\mathcal{M}_E(v) = \frac{1}{|E|} \int_E v.$$

Nous aurons également besoin des formules de Green suivantes : si D est un ouvert borné de \mathbb{R}^2 et $v, w \in H^1(D)$, alors on a

$$\int_D \nabla v \cdot \text{curl } w = \int_{\partial D} v \text{ curl } w \cdot n = \int_{\partial D} \nabla v \cdot t w, \quad (3.10)$$

où t est le vecteur unitaire tangent le long de ∂D et $\text{curl } w$ le vecteur défini comme suit $\text{curl } w = \begin{pmatrix} \partial_2 w \\ -\partial_1 w \end{pmatrix}$. En outre, si D est un ouvert borné de \mathbb{R}^3 et $v \in H^1(D), w \in H^1(D)^3$ alors on a

$$\int_D \nabla v \cdot \text{curl } w = \int_{\partial D} v \text{ curl } w \cdot n = \int_{\partial D} (\nabla v \times n) \cdot w. \quad (3.11)$$

3.5 Problèmes continus et discrétisés

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^d , $d = 2$ ou 3 , avec un bord Γ polygonal.

3.5.1 Problème continu

On considère le problème elliptique de second ordre suivant:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (3.12)$$

On multiplie l'équation par une fonction test régulière v et on intègre par partie. À l'aide de la formule de Green, on trouve:

$$-\int_{\Omega} \Delta u \cdot v = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} v \, d\delta = \int_{\Omega} f \cdot v.$$

Comme u doit satisfaire une condition aux limites de Dirichlet $u = 0$ sur Γ , on choisit un

espace de Hilbert V tel que toute fonction $v \in V$ vérifie aussi $v = 0$ sur Γ . Dans ce cas, l'égalité précédent devient:

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f v$$

Alors la formulation variationnelle proposée pour (3.12) est:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que} \\ \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f v, \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{array} \right. \quad (3.13)$$

Pour que le terme de gauche de (3.13) ait un sens il suffit que ∇u et ∇v appartiennent à $L^2(\Omega)$, et pour que le terme de droite de (3.13) ait aussi un sens il suffit que v appartienne à $L^2(\Omega)$. (on a supposé que $f \in L^2(\Omega)$), par conséquent, un choix raisonnable pour l'espace de Hilbert est $V = H_0^1(\Omega)$; le sous-espace de $H^1(\Omega)$ dont les éléments s'annulent sur le bord Γ .

3.5.2 Problème discret

À présent nous allons discrétiser (3.13) de manière assez standard. Nous employons pour cela, la méthode d'éléments finis non conformes précédemment décrite.

La discrétisation totale du problème (3.12) via une méthode d'éléments finis de Crouzeix-Raviart est donnée par : trouver $u_h \in X_h^0$, telle que :

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \nabla u_h \cdot \nabla v_h = \int_{\Omega} f v_h \quad (3.14)$$

pour tout $v_h \in X_h^0$.

3.6 Outils et propriétés analytiques

Contrairement à la méthode d'éléments finis P_1 -conformes, la mise en oeuvre d'indicateurs d'erreur *a posteriori* nécessite ici une étude analytique plus poussée. En effet, dans le cas conforme, rien ne nous empêche de prendre pour valeur u_h dans la formulation variationnelle (3.13) puisque u_h s'annule sur le bord Γ . De plus l'erreur $e_h = u - u_h$ en tant que différence de deux fonctions dans $H_0^1(\Omega)$, appartient également à $H_0^1(\Omega)$.

3.6.1 Décomposition de Helmholtz

Le problème évident est que notre interpolé u_h , et à plus forte raison e_h , est seulement dans $H^1(\Omega)$. De ce fait, l'idée consiste à employer une décomposition de l'erreur, plus précisément du gradient de l'erreur.

Lemme 3.6.1. (Décomposition de Helmholtz de l'erreur):

Le gradient de l'erreur se décompose de la manière suivante

$$\nabla_h e = \nabla w + \text{curl } \varphi, \quad (3.15)$$

avec $\varphi \in H^1(\Omega)$ et $w \in H_0^1(\Omega)$. En outre, w et φ vérifie les inégalités suivantes:

$$|w|_{1,\Omega} \leq \|\nabla_h e\|, \quad (3.16)$$

$$|\varphi|_{1,\Omega} \lesssim \|\nabla_h e\| \quad (3.17)$$

Démonstration:

L'idée consiste à introduire un problème elliptique auxiliaire. Considérons le problème de Dirichlet suivant, dont le but est de déterminer $w \in H_0^1(\Omega)$ solution de

$$\begin{cases} \text{div}(\nabla_h e - \nabla w) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ w = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (3.18)$$

On multiplie l'équation du problème par une fonction v et on intègre par partie, d'après la formule de Green on trouve :

$$\int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla v = \int_{\Omega} \nabla_h e \cdot \nabla v, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (3.19)$$

est la formulation faible du problème (3.18)

Étant donné que le champ de vecteurs $\nabla_h e - \nabla w$ est à divergence nulle sur Ω , i.e:

$$\text{div}(\nabla_h e - \nabla w) = 0 \text{ dans } \Omega$$

Par le théorème I.3.1 de [14], il existe $\varphi \in H^1(\Omega)$ telle que: $\text{curl } \varphi = \nabla_h e - \nabla w$

Pour démontrer l'inégalité (3.16), en utilisant (3.19) avec $v = w$, on trouve:

$$\int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla w = \int_{\Omega} \nabla_h e \cdot \nabla w \quad \forall w \in H_0^1(\Omega)$$

C'est-à-dire:

$$\int_{\Omega} (\nabla w)^2 = \int_{\Omega} \nabla_h e \cdot \nabla w \quad \forall w \in H_0^1(\Omega)$$

D'après Cauchy-Schwartz on a

$$\|\nabla w\|^2 \leq \|\nabla_h e\| \|\nabla w\|$$

Alors:

$$\|\nabla w\| \leq \|\nabla_h e\|$$

Et comme $\|\nabla w\| = |w|_{1,\Omega}$, on trouve l'inégalité (3.16).

L'inégalité (3.17) est obtenue comme suit : en utilisant la relation (3.15), on écrit que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\text{curl } \varphi|^2 &= \int_{\Omega} \text{curl } \varphi \cdot \text{curl } \varphi \\ &= \int_{\Omega} \text{curl } \varphi \cdot (\nabla_h e - \nabla w) \end{aligned}$$

À l'aide de la formule de Green et de la condition au bord $w = 0$ sur Γ , on obtient

$$\int_{\Omega} |\text{curl } \varphi|^2 = \int_{\Omega} \text{curl } \varphi \cdot \nabla_h e \quad (3.20)$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz nous permet de conclure que

$$\|\text{curl } \varphi\| \leq \|\nabla_h e\|$$

Puisque $|\varphi|_{1,\Omega} = \|\text{curl } \varphi\|$, l'inégalité (3.17) est alors une conséquence directe des estimations précédentes.

Remarque 3.6.2. *A fortiori, on constate que pour évaluer l'erreur $\nabla_h e$, nous sommes dans l'obligation d'évaluer les termes ∇w et $\text{curl } \varphi$. L'idée sera par la suite non pas d'évaluer ces quantités mais plutôt d'évaluer les différences $\nabla(w - w_h)$ et $\text{curl}(\varphi - \varphi_h)$, où w_h et φ_h représentent respectivement les interpolés P_1 -conformes de w et φ .*

C'est justement l'objet des lemmes suivants.

3.6.2 Relations d'orthogonalité

Nous allons introduire à présent quelques notations relatives aux sauts normal et tangentiel du gradient de u_h . on définit les quantités $J_{E,n}$ et $J_{E,t}$ comme suit :

$$J_{E,n} = \begin{cases} [[\nabla u_h \cdot n_E]]_E & \text{si } E \in \varepsilon_h^{int} \\ 0 & \text{si } E \in \varepsilon_h \setminus \varepsilon_h^{int} \end{cases}$$

$$J_{E,t} = \begin{cases} [[\nabla u_h \cdot t_E]]_E & \text{si } E \in \varepsilon_h^{int} \\ -\nabla u_h \cdot t_E & \text{si } E \in \varepsilon_h \setminus \varepsilon_h^{int} \end{cases} .$$

Lemme 3.6.3. (Orthogonalité au sens de Galerkin):

L'erreur e satisfait la relation d'orthogonalité suivante

$$\sum_{K \in T_h} \int_K \nabla_h e \cdot \nabla w_h = 0, \quad \forall w_h \in V_h^0 \quad (3.21)$$

Démonstration:

La preuve est immédiate. L'inclusion $V_h^0 \subset X_h^0$ permet de prendre $v = w_h$ dans la relation (3.13):

On trouve:

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla w_h = \int_{\Omega} f w_h, \quad \forall w_h \in H_0^1(\Omega)$$

et dans la relation (3.14) on trouve :

$$\sum_{K \in T_h} \int_K \nabla u_h \cdot \nabla w_h = \int_{\Omega} f w_h, \quad \forall w_h \in X_h^0$$

Vient ensuite la relation (3.21) en soustrayant (3.13) à (3.14).

Lemme 3.6.4. (Orthogonalité de l'erreur):

L'erreur satisfait

$$\sum_{K \in T_h} \int_K \nabla_h e \cdot \text{curl } \varphi_h = 0, \quad \forall \varphi_h \in V_h \quad (3.22)$$

Démonstration :

Considérons un élément arbitraire φ_h dans V_h . En utilisant la formule de Green (cf. les identités (3.10) et (3.11)), on obtient en se rappelant que $u \in H_0^1(\Omega)$.

$$\begin{aligned}
\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \nabla_h e. \operatorname{curl} \varphi_h &= \int_{\Omega} \nabla u. \operatorname{curl} \varphi_h - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \nabla_h u_h. \operatorname{curl} \varphi_h \\
&= \int_{\Gamma} u \operatorname{curl} \varphi_h \cdot n - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} u_h \cdot \operatorname{curl} \varphi_h \cdot n_K \\
&= - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} u_h \operatorname{curl} \varphi_h \cdot n_K \\
&= - \sum_{E \in \varepsilon_h} \int_E [[u_h]]_E \operatorname{curl} \varphi_h \cdot n_E \\
&= - \sum_{E \in \varepsilon_h} (\operatorname{curl} \varphi_h \cdot n_E) \int_E [[u_h]]_E
\end{aligned}$$

comme la fonction $(\operatorname{curl} \varphi_h \cdot n_E)|_E$ est constante sur $E \in \varepsilon_h$. La propriété des éléments finis de Crouzeix-Raviart (3.2), satisfaite par $u_h \in X_h^0$, nous permet de conclure cette preuve.

Lemme 3.6.5. Soit $\varphi \in H^1(\Omega)$. Alors l'erreur satisfait l'identité suivante:

$$\int_{\Omega} \nabla_h e. \operatorname{curl} \varphi = \sum_{E \in \varepsilon_h} \int_E J_{E,t} \cdot \varphi \tag{3.23}$$

Démonstration:

Une intégration par parties dans Ω sur chaque élément K donne (d'après la formule de Green):

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \nabla_h e. \operatorname{curl} \varphi &= \int_{\Omega} \nabla u. \operatorname{curl} \varphi - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \nabla u_h. \operatorname{curl} \varphi \\
&= \int_{\Gamma} \operatorname{curl} \varphi \cdot n u - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} \nabla u_h \cdot t_K \varphi \\
&= \sum_{E \in \varepsilon_h} \int_E (-\nabla u_h \cdot t_E) \varphi
\end{aligned}$$

Puisque $u \in H_0^1(\Omega)$ et $\varphi \in H^1(\Omega)$, on conclut en utilisant la définition de $J_{E,t}$.

Lemme 3.6.6. *L'erreur e satisfait*

$$\sum_{K \in T_h} \int_K \nabla_h e \cdot \nabla w = \sum_{K \in T_h} \int_K f w + \sum_{E \in \varepsilon_h} \int_E J_{E,n} w, \quad \forall w \in H_0^1(\Omega)$$

Démonstration:

Une intégration par parties sur chaque élément et le fait que $\Delta u_h = 0$ pour tout élément de $K \in T_h$ montre que

$$\begin{aligned} \sum_{K \in T_h} \int_K \nabla_h e \cdot \nabla w &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla w - \sum_{K \in T_h} \int_K \nabla_h u_h \cdot \nabla w \\ &= \int_{\Omega} f w - \sum_{K \in T_h} \left(- \int_K \Delta u_h w + \int_{\partial K} n \cdot \nabla u_h w \right) \\ &= \int_{\Omega} f w - \sum_{K \in T_h} \sum_{E \in \varepsilon_K} \int_E n \cdot \nabla u_h w. \end{aligned}$$

On conclut en utilisant la définition de $J_{E,n}$ et la continuité de w à travers les arêtes/faces.

Lemme 3.6.7. *Pour tout $w \in H_0^1(\Omega)$ et $\varphi \in H^1(\Omega)$ on a:*

$$\sum_{K \in T_h} \int_K \nabla_h e \cdot (\nabla w + \text{curl } \varphi) = \sum_{K \in T_h} \int_K f w + \sum_{E \in \varepsilon_h} \int_E (J_{E,n} w + J_{E,t} \varphi) \quad (3.24)$$

Démonstration:

D'après le lemme 3.6.5 on a :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla_h e \cdot \text{curl } \varphi &= \sum_{E \in \varepsilon_h} \int_E J_{E,t} \varphi \\ \sum_{K \in T_h} \int_K \nabla_h e \cdot \text{curl } \varphi &= \sum_{E \in \varepsilon_h} \int_E J_{E,t} \varphi \end{aligned}$$

D'après le lemme 3.6.6 on a :

$$\sum_{K \in T_h} \int_K \nabla_h e \cdot \nabla w = \sum_{K \in T_h} \int_K f w + \sum_{E \in \varepsilon_h} \int_E J_{E,n} w$$

On fait la somme direct entre les deux inégalités, on a donc:

$$\sum_{K \in T_h} \int_K \nabla_h e. (\nabla w + \text{curl } \varphi) = \sum_{K \in T_h} \int_K f w + \sum_{E \in \varepsilon_h} \int_E (J_{E,n} w + J_{E,t} \varphi)$$

3.7 Analyse *a posteriori* de la discrétisation

Nous allons à présent définir l'estimateur d'erreur local relatif à discrétisation (3.14).

Définition 3.7.1. *L'estimateur d'erreur local η_K est défini par*

$$\eta_K = h_K \|f_h\|_K + \sum_{E \in \varepsilon_K} h_E^{\frac{1}{2}} (\|J_{E,n}\|_E + \|J_{E,t}\|_E)$$

L'estimateur d'erreur global η est donné par

$$\eta^2 = \sum_{K \in T_h} (\eta_K)^2$$

où f_h est une approximation de f via des élément finis P^0 , plus précisément on a :

$$(f_h)|_K := \frac{1}{|K|} \int_K f, \text{ pour tout } K \in T_h.$$

Pour établir l'équivalence entre l'erreur $\|\nabla_h e\|$ et η , nous allons démontrer dans un premier temps que l'erreur $\|\nabla_h e\|$ est majorée à une constante près par η et dans un second temps que l'erreur locale sur le patch d'une maille K , $\|\nabla_h e\|_{\omega_K}$ est minorée à une constante près par η_K .

3.7.1 Borne supérieure de l'erreur

Théorème 3.7.2. [12] *Il existe une constante positive C_1 telle que,*

$$\|\nabla u - \nabla_h u_h\| \leq C_1 (\eta + \xi) \tag{3.25}$$

Les termes d'approximation local et global étant donnés par

$$\xi_K = h_K \|f - f_h\|_{\omega_K}, \quad \xi^2 = \sum_{K \in T_h} \xi_K^2$$

Démonstration:

En utilisant la décomposition de l'erreur (3.15), on peut écrire :

$$\int_{\Omega} |\nabla_h e|^2 = \int_{\Omega} \nabla_h e \cdot (\nabla w + \text{curl } \varphi)$$

Les Lemmes 3.6.3 et 3.6.4 mènent directement à :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla_h e|^2 &= \int_{\Omega} \nabla_h e \cdot (\nabla w + \text{curl } \varphi) \\ &= \int_{\Omega} \nabla_h e \cdot [\nabla (w - w_h) + \text{curl } (\varphi - \varphi_h)] \end{aligned}$$

Soit $w_h = I_C^0 w \in V_h^0$ et $\varphi_h = I_C \varphi \in V_h$.

L'utilisation du lemme 3.6.7 auquel substitue w par $w - w_h$ et φ par $\varphi - \varphi_h$, donne

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K |\nabla_h e|^2 = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K f (w - w_h) + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \int_E J_{E,n} (w - w_h) + J_{E,t} (\varphi - \varphi_h).$$

On introduit l'interpolé f_h comme suit

$$\begin{aligned} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K |\nabla_h e|^2 &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K (f - f_h) (w - w_h) \\ &\quad + \int_K f_h (w - w_h) + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \int_E J_{E,n} (w - w_h) + J_{E,t} (\varphi - \varphi_h). \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et les inégalités du Lemme 3.3.3 vérifiées par les interpolés de Clément ainsi que les propriétés (3.16) et (3.17) de la décomposition de l'erreur, on conclut que

$$\int_{\Omega} |\nabla_h e|^2 \leq C_1 (\eta + \xi) (|w|_{1,\Omega} + |\varphi|_{1,\Omega}) \leq C_1 (\eta + \xi) \|\nabla_h e\|$$

ce qui démontre l'inégalité (3.25)

3.7.2 Borne inférieure de l'erreur

Nous allons à présent démontrer que notre erreur est bornée inférieurement.

Théorème 3.7.3. [12] *Il existe une constante positive C_2 telle que,*

$$\eta_K \leq C_2 (\|\nabla_h e\|_{\omega_K} + \xi_K) \quad (3.26)$$

Démonstration:

Voir [12]

Bibliography

- [1] R. Adams. Sobolev Spaces. *Academic Press, New York*, 1975.
- [2] M. Ainsworth and J.T. Oden. A posteriori error estimation infinite element analysis. *Wiley – Interscience Publication*, 2000.
- [3] Alexandre Ern. Aide-mémoire ,Éléments finis. *Dunod, Paris*, 2005.
- [4] I. Babuska and W.C. Rheinbolt. Error estimates for adaptative finite element computations. *SIAM journal on Numerical Analysis*, 15(4) : 736 – 754, 1978.
- [5] I. Babuska and W.C. Rheinbolt. A posteriori error estimates for the finite element method. *International J.Numer.Methods Engineering*, 12 : 1597 – 1615, 1978.
- [6] E. Bécache, P. Ciarlet, C. Hazard et E. Lunéville. La méthode des éléments finis de la théorique à la pratique, concepts généraux. *Boulevard Victor, Paris*.2010
- [7] R. E. Bank and A. Weiser. Some a posteriori error estimators for elliptic partial differential equations. *Mathematics of Computation*, 1985.
- [8] D. Braess. Finite elements. *Cambridge University Press*, 1997.
- [9] P. Ciarlet, E. Lunéville. La méthode des éléments finis de la théorique à la pratique, concepts généraux. *Boulevard Victor, Paris*.2009
- [10] P.G.Ciaret.The finite Element Method for Elliptic Problems. *North – Holland, Amesterdam, The Netherlands*, 1978.
- [11] P. Clément. Approximation by finite element functions using local regularization. *RAIRO Anal. Numér*, 9 : 77 – 84, 1975.

- [12] E. A. Dari, R. Durán, C. Padra, and V. Vampa. A posteriori Error estimators for non-conforming finite element methods. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, *M2AN*, 30(4) : 385 – 400, 1996.
- [13] D. Gilbarg and N. Trudinger. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. *Springer Verlag, Berlin*, 1983.
- [14] V. Girault and P. Raviart. Finite element methods for the Navier-Stokes equations. *Springer*, 1986.
- [15] S. Nicaise. Analyse numérique et Equations aux dérivées partielles (cours et problèmes résolus).