République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Analyse (EDP)**

Par :

Rahli Souheyla et L'Achouri Sassia

Intitulé

Existence Globale des Solution d'un System de Réaction-Diffusion

Dirigé par : Dr.Boukerrioua-Khaled

Devant le jury

PRESIDENT	Dr.Chemlal-R	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr.Boukerrioua-K	Univ-Guelma
EXAMINATEUR1	Dr.Badraoui-S	Univ-Guelma

Session Juin 2013

REMERCIEMENT

Louanges à Dieu le tout puissant de nous avoir donné courage , espoir et abnégation de réussir dans ce parcours d'erudition et de savoir .

Nous tiens à exprimer toutes reconnaissances au Docteur : Boukerrioua-K de nous avoir proposé ce sujet de recherche et d'avoir dirigé notre travail .

Nous exprimons également notre chaleureux remerciements aux Docteurs :Badraoui-S et Chemlal-R , pour l'honneur qu'ils nous ont fait d'avoir acceptés de faire de ces jury .

Table des matières

Introduction

Les équations de réaction-diffusion s'inscrivent dans le cadre de ces équations d'évolution non homogènes.Elles sont de la forme :

$$\begin{aligned} u_t + Au &= f, t \in [0, +\infty[\\ u(0) &= u_0. \end{aligned} \tag{P}$$

avec en particulier

$$A = \begin{pmatrix} -d_1\Delta & 0 & 0 & & & 0 \\ 0 & -d_2\Delta & & & & \\ 0 & & .. & & & \\ & & & .. & & \\ & & & & .. & \\ 0 & & & & & -d_m\Delta \end{pmatrix}$$

une matrice de diffusion diagonale, (A peut être triangulaire, pleine ou à coefficients variables),$d_1, d_2......d_m$ appelés coefficients de diffusion (positifs),$\Delta = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ le laplacien dans $\mathbb{R}^n$, $f = (f_1, f_2, ..., f_m)$.

En d'autres termes on aura à considérer des équations de la forme suivante :

$$\begin{aligned} \forall i &= 1, ...m,\ \partial_t u_i - d_i \Delta u_i = f_i(u_1, u_2, ...u_m) \\ u_i(0, x) &= u_{i0}(x),\ x \in \Omega\ ,\ (t, x) \in]0, T[\times \Omega \\ Bu_i &= 0\ ,(t, x) \in]0, T[\times \partial\Omega. \end{aligned} \tag{D}$$

Où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n, u_i = u_i(t, x), i = 1.....m, d_i > 0$,et B des conditions aux bords de : (En particulier de type Neumann,de Dirichlet ou de conditions mélées).

Dans ce travail, nous montrons la possibilité d'existence globale des solutions du système de réaction suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a\Delta u = \Pi - f(u,v) - \lambda u & \text{sur} \quad]0,+\infty[\times\Omega \\ \frac{\partial v}{\partial t} - d\Delta v = f(u,v) - \sigma v & \text{sur} \quad]0,+\infty[\times\Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 & \text{sur} \quad]0,+\infty[\times\partial\Omega \\ u(0,x) = u_0, \quad v(0,x) = v_0 & \text{sur } \Omega. \end{cases} \tag{G}$$

Satisfaisant à deux propriétés qu'ont trouve classiquement dans beaucoup d'applications :

(P) La positivité des solutions est préservée au cours du temps

(M) La masse totale des composants est contrôlée au cours du temps.

La condition (P) est vérifiée si et seulement si f est quasi-positive ce qui signifie que, pour tout $i = 1, \ldots m$

$$[u_1 \geq 0, u_{2,} \geq 0 \ldots u_{i-1} \geq 0, u_{i+1} \geq 0, \ldots u_m \geq 0] \Longleftrightarrow f_i(u_1, u_2, ..u_{i-1}, 0, ..u_m) \geq 0.$$

La condition (M) est par exemple satisfaite dés que

$$\sum_{i=1}^{i \;\, m} f_i \leq 0$$

Le fait que la masse totale des composants n'explose pas en temps fini incite à penser que les solutions existent en un certain sens globalement en temps.

Ce travail est organisé de la façon suivante :

Dans le premier chapitre,aprés avoir donné la forme générale des systèmes de réaction-diffusion ainsi que les exemples faisant ressortir leur rôle essentiel dans les sciences, nous avons modélisé ces derniers en utilisant la loi de comportement de Fick.

Dans le deuxième chapitre on commence par citer quelques résultats concernant les semi-groupes, puis dans la deuxième section,nous présentons des outils trés importants dans l' étude d 'existence locale de la solution du systéme(G) en donnant bien sûr la forme explicite de la solution. Enfin, l'essentiel de ce travail est présenté dans le troisième chapitre dans lequel il a été procédé à l'étude de l'existence globale de la solution du système (G) dans le cas $m = 2$, cette étude est basée sur un résultat de D. Henry [5] (effet régularisant) où pour prouver l'existence globale de la solution, il suffit de trouver une estimation uniforme de $\| f_i(u,v) - \sigma v \|_p$ $(i = 1,2)$ sur $[0, T_{\max}[$ dans l'espace $L^P(\Omega)$ pour $p > \frac{n}{2}$.

Chapitre 1

Modélisation de systèmes de réaction-diffusion

1.1 Introduction

La plus grand partie de ce mémoire est consacrée à l'étude de l'existence globale en temps des solutions d'une classe de systèmes appelés ***Systèmes de Réaction-Diffusion***, ce sont des systèmes d'équations aux dérivées partielles du type parabolique,ces systèmes intervienent dans des applications nombreuses, par exemple : en chimie, en biochemie, en métallurgie, en dynamique des populations, en génétique des populations, en biophysique...ect. En première partie, vu les applications nombreuses et variantes de ces systèmes, on donnera les démarches suivies pour modéliser certains problèmes gouvernés par le système (D) comme la publicité sur un produit, l'épidémiologie et le phénomène prédateur-proie.

Les individus diffèrent d'un problème à un autre : en chimie, par exemple, ils représentent des substances chimiques. En biochimie, ils peuvent représenter des molécules. En métallurgie, des atomes. En dynamique des populations, ce sont des humains. En génétique des populations, ils représentent des caractères. En biophysique, des charges électriques ou bien des différences de potentiel. En environnement, ils peuvent représenter les animaux ou les plantes d'une forêt, d'une mer ou bien d'un fleuve.

Pour la plus grand partie de ces problèmes, on montre qu'on aboutit à des systèmes de type (D). Les conditions aux bords seront choisies selon l'origine et la nature du problème étudié : s'il n'y a pas d'immigration des individus à travers la frontière du domaine sur lequel le problème est posé, on choisit les conditions aux bords homogènes de Nemann. S'il n'y a pas d'individus sur la frontière, on prend les conditions aux bords homogènes de Dirichlet.

L'inconnue (la solution qu'on cherche) est un vecteur dont les composantes sont généralement des fonctions positives : en chimie, par exemple, c'est un vecteur de concentrations chimiques. En biochimie ou en métallurgie, c'est un vecteur de concentrations en nombres de molécules ou d'atomes respectivement. En dynamique des populations et en environnement, c'est un vecteur de densité de populations humaines, animales ou végétales. Les conditions initiales sont généralement positives; puisqu'il s'agit de concentrations, densités, charges électriques,...ect.

1.2 Modélisation et exemples

1.2.1 Modélisation

Nous allons donner la démarche suivie pour établir (D); d'ailleurs qui est le même pour tous les phénomènes cités à l'introduction, puis nous donnerons des exemples.
On considère une région bornée de $\mathbb{R}^n$, $(n = 2$ ou $3)$ (qui peut être une surface géographique, une cellule vivante ou des molécules) dans laquelle des réactions se réalisent (ces réactions peuvent être une épidémie, une rumeur ou bien une réaction moléculaire; d'ailleurs la cellule vivante est le siège de plusieurs réactions chimiques, ainsi que les surfaces géographiques forment les lieux de milliers de virus et rumeurs circulant entre les individus des populations...).

Si on note par $u_i(x,t)$ la concentration de la i$^{\text{éme}}$ espèce prenant part dans ces réactions, $f_i(x,t,u_1(x,t),...,u_m(x,t))$ son taux de formation dans la réaction en question au point x et à l'instant $t > 0$ et J_i le flux de ces espèces à travers la frontière de notre région.Considérons un volume V infiniment petit de la région de frontière $S = \partial V$. La vitesse de formation de la i$^{\text{éme}}$ espèce dans le volume V est égale à la quantité formée par la réaction ôtée de son flux à travers la surface S; en termes d'équations :

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V u_i(x,t)\,dx = \int_V f_i(x,t,u_1(x,t),...,u_m(x,t))\,dx - \int_S J_i\,d\delta, \tag{1.1}$$

après application directe du théorème de la divergence au terme désignant le flux,on obtient :

$$\int_V \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} - f_i + \nabla J_i \right) dx = 0 \qquad i = 1, ..., m, \tag{1.2}$$

puisque le volume V est infiniment petit et arbitraire,on en déduit :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \nabla J_i dx = f_i \qquad i = 1, ..., m, \tag{1.3}$$

Remarque 1.1 :

Dans le cas des populations (plan macroscopique) on applique une loi semblable . Le flux (ou la diffusion) est donné par la loi de Fick (seconde loi de Fick) :

$$J_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \nabla u_j, \quad (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq m}}, \tag{1.4}$$

où $(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq m}}$est une matrice définie positive, appelée matrice de diffusion.
En substituant (1.4) dans (1.3), on obtient :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - A\Delta u = f(u).$$

1.3 Exemples

Propagation d'une epidémie

Soit Ω un ouvert borné à frontière régulière et soit le système

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{dS}{dt} - d_1 \Delta S = \Pi - \lambda \frac{C(T)}{T} SI - \mu S \\ \frac{dI}{dt} - d_2 \Delta I = \lambda \frac{C(T)}{T} SI - \sigma I \ ,t > 0, x \in \Omega \\ S(0, x) = S_0(x) \ , \ I(0, x) = I_0(x) \text{ sur } \Omega \\ \frac{dS}{d\eta} = \frac{\partial I}{\partial \eta} = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{E}$$

Où

- S : nombre d'individus Susceptibles ,
- I : nombre d'individus Infectés ,

- Π : le taux de recrutement ,
- λ : le risque de contact ,
- μ : le taux de mortalité naturelle,
- $T = S + I$,
- $\frac{C(T)}{T} I$: l'intensité d'infection ,
- $\sigma = \mu + \alpha$,
- α : α le taux de mortalite par infection

la dernière équation de (E) montre qu'il n'y a pas de migration à travers la frontière de Ω et on a les conditions aux bords homogènes de Newman : où η est la normale extérieure à $\partial\Omega$, les conditions initiales sont positives.

Environnement :

On prend comme exemple le phénomène naturel connu sous le nom prédateur-proie, il se produit surtout dans les forêts, la mer et les grands fleuves. Au début du vingtième siècle (1926), Volterra a proposé un système d'équations de Réaction-Diffusion décrivant l'évolution de deux types de planctons (des êtres vivants en suspension dans la mer ou l'eau douce). En supposant que le taux de mortalité des proies et l'augmentation des prédateurs dus à la prédation sont proportionnels au produit des biomasses des proies P et celle des prédateurs H et en supposant que les taux des naissances et mortalités naturelles des deux types sont linéaires et proportionnels à leurs biomasses ; aussi en tenant compte de la diffusion constante de chaque espèce, on aboutit au système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial t} = \varepsilon_P \Delta P + \alpha_n P - \alpha_m P - \gamma P\, H & \text{sur } \Omega \times]0, +\infty[\\ \dfrac{\partial H}{\partial t} = \varepsilon_H \Delta H + \alpha_n H - \alpha_m H + \gamma P\, H & \text{sur } \Omega \times]0, +\infty[\end{cases} \qquad \text{(F)}$$

avec conditions aux bords appropriées et conditions initiales positives.

Chapitre 2

Semi -groupes et problèmes semi linéaires

2.1 Semi -groupes

2.1.1 Introduction

Cette partie est consacrée au rappel de la théorie des semi-groupes utile pour la résolution du système de Réaction-Diffusion.

2.1.2 Définitions et propriétés des semi–groupes

Soit X un espace de Banach réel ou complexe muni de la norme : $x \to \|x\|_X$, on désigne par $\mathcal{L}(X)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de X dans lui même.
$\mathcal{L}(X)$ est un espace de Banach pour la norme $T \to \|T\|$ défini par :

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_X=1} \|Tx\|_X = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|_X}{\|x\|_X} \tag{2.1}$$

2.1.3 Définition d'un semi-groupe de classe C^0

Une famille $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ d'éléments $T(t) \in \mathcal{L}(X)$ pour $t \geq 0$ forme un semi-groupe de classe C^0 dans X, si elle vérifie les conditions suivantes :

$$\begin{cases} i)\ T(s+t) = T(s).T(t) \text{ pour tout } s,t \geq 0 \\ ii)\ T(0) = I \text{ (identité dans } \mathcal{L}(X)) \\ iii)\ \lim\limits_{t\to 0} \|T(t)x - x\|_X = 0 \text{ pour tout } x \in X \end{cases} \tag{2.2}$$

Remarque 2.1 :

La famille $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ qui vérifie (2.2) avec t, s de signe quelconque s'appelle groupe de classe C^0.

Exemples :

Exemple 1 (cas de dimension finie) :

Soit $X = \mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$), $A \in \mathcal{L}(X)$ alors $T(t) = e^{tA}$ pour $t \in \mathbb{R}$ est un groupe de calsse C^0.

Exemple 2 (cas de dimension infinie) :

Soit $X = l^2 = \left\{ x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty \right\}$. On sait que l^2 est un espace de Hilbert pour la norme $x \to \|x\|_2 = (\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^2)^{\frac{1}{2}}$ associé au produit scalaire $< x, y >= \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$.

On définit $T(t)x = \left\{ e^{-n^2 t} x_n \right\}_{n\in\mathbb{N}} \in l^2$ pour $t \geq 0$, on remarque que : $(2,2), i)$ et $(2,2), ii)$ sont faciles à vérifier, reste à vérifier $(2,2), iii)$. En effet :

$$\|T(t)x - x\|_{l^2}^2 = \sum_{n=1}^{N-1} (1 - e^{-n^2 t})^2 |x_n|^2 + \sum_{n=N}^{\infty} (1 - e^{-n^2 t})^2 |x_n|^2$$

et comme $\sum\limits_{n=N}^{\infty} (1 - e^{-n^2 t})^2 |x_n|^2 \leq \sum\limits_{n=0}^{\infty} |x_n|^2$ et que $x \in l^2$ donc, $\forall \varepsilon > 0$ on peut choisir N de tel sorte que : $\sum\limits_{n\geq N}^{\infty} (1 - e^{-n^2 t})^2 |x_n|^2 \leq \varepsilon$ mais $1 - e^{-n^2 t}$ est croissante pour $n \geq 1$, donc on a :

$$\sum_{n=1}^{N} (1 - e^{-n^2 t})^2 |x_n|^2 \leq (1 - e^{-n^2 t})^2 \|x\|_{l^2} \underset{t\to 0}{\to} 0$$

ce qui implique :

$$\lim_{t\to 0} \|T(t)x - x\|_{l^2}^2 \to 0.$$

On a aussi un exemple de semi-groupe qui n'est pas prolongeable à un groupe car $T(-t)x = e^{+n^2t}x_n \notin l^2 (n \in \mathbb{N})$ pour $t \neq 0$ et $x \in l^2$.

2.1.4 Semi-groupe de contraction de classe C^0

Définition 2.1 :

Un semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ de classe C^0 est appelé semi-groupe de contraction de classe C^0 si l'on a :

$$\|T(t)\| \leq 1 \qquad \forall t \geq 0.$$

Remarque 2.2 :

L'exemple 2 est un semi-groupe de contraction.

2.1.5 Générateur infinitésimal d'un semi - groupe

Introduction :

On reprend les deux exemples précédents :

a) Cas de dimension finie :

On prend $X = \mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$), $e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} t^n$; $\forall x \in X$ on a :

$$\left[\frac{d}{dt} T(t)x\right]_{t=0} = Ax$$

ou encore :

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{T(h)x - x}{h} = Ax$$

on dit que A est le générateur infinitésimal du semi-groupe $T(t)$,dans ce cas on note que : l'ensemble des opérateurs A qui sont générateurs infinitésimaux de semi-groupe $T(t)$ coincide avec $\pounds(X)$.

b) Cas de dimension infinie

Soit $X = l^2$, $T(t)x = \left\{e^{-n^2t}x_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ et considérons la suite :

$$\frac{T(h)x - x}{h} = \left\{ \frac{e^{-n^2h} - 1}{h} x_n \right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{e^{-n^2h}-1}{h} x_n = -n^2 x_n e^{-\theta_n n^2 h}$; $0 < \theta_n < 1$.

Il en résulte que :

$$\lim_{h\to 0} \frac{T(h)x - x}{h} = \left\{-n^2 x_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

donc la suite n'existe pas toujours dans l^2, mais $Ax = \left\{-n^2 x_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ est défini pour tout $x \in l^2$ et qui vérifie $\left\{-n^2 x_n\right\}_{n\in\mathbb{N}} \in l^2$. On déduit que :

$$D(A) = \left\{x \in l^2 : \left\{-n^2 x_n\right\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge dans } X\right\}$$

où $D(A)$ est le domaine de l'opérateur non borné A.

2.1.6 Le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de classe C^0

Soit X un espace de Banach réel ou complexe, $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un semi-groupe de classe C^0sur X, on a vu dans le $2^{ième}$ exemple que pour tout $x \in X$, la fonction $t \to T(t)x$ n'est pas dérivable sauf quand x fait partie d'un certain ensemble que nous avons noté $D(A)$.

Définition 2.2 :

On désigne par $D(A)$ l'ensemble des vecteurs(dérivables) dans X, i.e : l'ensemble des $x \in X$ tels que : la fonction $t \to T(t)x$ soit dérivable pour tout $t \geq 0$; donc $D(A)$ est caractérisé par :

$$D(A) = \left\{x \in X : \frac{T(h)x - x}{h} \text{ converge dans } X \text{ lorsque } h \to 0\right\} \tag{2.3}$$

dans la suite on pose : $A = \frac{T(h)-I}{h}$, où A est un opérateur qui appartient à $\mathcal{L}(X)$, $\forall h > 0$, cet opérateur est appelé générateur infinitésimal de semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ (généralement A est non borné).

2.2 Opérateurs dissipatifs et opérateurs m-dissipatifs

2.2.1 Rappels de quelques résultats utiles de l'analyse fonctionnelle

Définition 2.3 :

Une application $f : X \to X$ est dite contractante si :

$\exists K$(constante)$\in [0, 1[$ telle que : $\|f(x) - f(y)\| \leq k \|x - y\|$ pour tout $(x, y) \in X^2$

Théorème 2.1 : (du point fixe de banach) :

Soit (E, d) un espace métrique complet, f une application contractante définie de X vers X. Alors f admet un point fixe.

Preuve :

cf : [2] .

Théorème 2.2 : (de Lax Miligram)

Soit H un espace de Hilbert, $a : H \times H \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire, on suppose qu'il existe deux constantes positives $c < +\infty$ et α telles que :

i) $|a(u, v)| \leq c \|u\| \|v\|$

ii) $a(u, u) > \alpha \|u\|^2$ **(coercivité) alors :**

$$\forall f \in H,\ \exists! u \in H \text{ tel que: } a(u, v) = < f, v > \forall v \in H.$$

Peuve :

cf : [2] .

2.2.2 Opérateurs non bornés dans un espace de Banach

Dans toute la suite : X est un espace de Banach, sa norme est notée $\| \ \|$.

Définition 2.4 :

Un opérateur linéaire dans X est un couple (D, A) où D est un sous- espace vectoriel

de X et $A : D \to X$ est une application linéaire.

Définition 2.5 :

Si (D, A) est un opérateur linéaire dans X, le graphe de A et l'image de A $(G(A), R(A))$ sont définis par :

$$\begin{aligned} G(A) &= \{(u,v) \in X \times X,\ u \in D,\ v = Au\} \\ R(A) &= A(D(A)) \end{aligned}$$

Remarque 2.3 :

Dans la suite du chapitre on désignera le couple (D, A) par A.Noter cependant que lorsqu'on introduit un opérateur linéaire, il est absolument indispensable de définir son domaine.

Notations et définitions

Définition 2.6 :

Soit A un opérateur de X de domaine $D(A)$, alors $(u, v) \in A$ signifie que $u \in D(A)$ et $v \in Au$.

On dit que A est multivoque si Au contient plus d'un élément, dans le cas contraire on dit que A est univoque.

Définition 2.7 :

Un opérateur A dans X est dit dissipatif si on a : $\forall\ (u_1, v_1), (u_2, v_2) \in A$:

$$\|u_1 - u_2 - (v_1 - v_2)\| \geq \|u_1 - u_2\|$$

Si A est linéaire, la définition est donnée comme suit :

$$\forall u \in D(A), \forall\lambda > 0, \|u - \lambda Au\| \geq \|u\| \tag{2.4}$$

Remarque 2.4 :

Si $-A$ est dissipatif ; on dit que A est accrétif.

Remarque 2.5 :

si A est accrétif alors l'equation :

$$u + \lambda Au = f \tag{2.5}$$

admet au plus une solution.

preuve :

Soit u_1, u_2 deux solutions de (2.5) alors : $u_1 - u_2 = \lambda(Au_1 - Au_2)$ et on a :
$\|v\| \leq \|v - \lambda Av\|$ avec $v = u_1 - u_2$, donc :
$\|u_1 - u_2\| \leq \|u_1 - u_2 - \lambda Au_1 + \lambda Au_2\| = 0$ d'ou : $u_1 = u_2$.

Définition 2.8 :

Un opérateur dissipatif A dans X est dit m-dissipatif si :

$$R(I - \lambda A) = X \tag{2.6}$$

i.e : $\forall f \in X, \forall \lambda > 0,\ \exists! u \in D(A)$ tel que :

$$u - \lambda Au = f \tag{2.7}$$

Remarque 2.5 :

Si $-A$ est m-dissipatif dans X, on dit que A est m-accrétif.

2.2.3 Opérateurs non bornés dans un espace de Hilbert

Dans ce paragraphe on suppose que $X = H$ est un espace de Hilbert, et on note $< , >$ le produit scalaire dans H.

Définition 2.9 :

un opérateur A est dit monotone dans H si :

$$< Au, u > \geq 0 \tag{2.8}$$

Proposition 2.3 :

A est dissipatif dans H ssi $-A$ est monotone.

Preuve :

Si A est dissipatif, on a :

$$< u - \lambda Au, u - \lambda Au >= \|u - \lambda Au\|^2$$

$$= \|u\|^2 - 2\lambda < Au, u > +\lambda^2 \|Au\|^2 , \ \forall \lambda > 0, \ \forall u \in D(A)$$

donc :

$$\|u - \lambda Au\|^2 - \|u\|^2 = \lambda^2 \|Au\|^2 - 2\lambda < Au, u >$$

on divise par λ et on faisant $\lambda \to 0$, il résulte : $< Au, u > \leq 0$.

Réciproquement : si $< Au, u > \leq 0, \forall u \in D(A)$ on a :

$$\|u - \lambda Au\|^2 = \|u\|^2 - 2\lambda < Au, u > +\lambda^2 \|Au\|^2 \geq \|u\|^2$$

d'où :

$$\|u - \lambda Au\| \geq \|u\|$$

ce qui implique que A est dissipatif.

Corrollaire 2.3 :

Soit A un opérateur linéaire de domaine dense dans H tel que : $G(A) \subset G(A^*)$ et A est dissipatif alors :

$$A \; m - dissipatif \Leftrightarrow A = A^*$$

Preuve :

cf : [3].

2.2.4 Exemples :

Exemple1 :

Soit Ω un ouvert quelconque de $\mathbb{R}^n$ et $Y = L^2(\Omega)$. On définit l'opérateur linéaire B sur Y par :

$$D(B) = \{u \in H_0^1(\Omega),\ \Delta u \in L^2(\Omega)\}$$

$$Bu = \Delta u\ \forall u \in D(B)$$

où :

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega),\ \text{tel que : } u\,|_\Gamma = 0\} \text{ avec } \Gamma = fr(\Omega)$$

$$H^1(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega) \text{ tq } \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)\right\}$$

Montrons que :

***B* est un opérateur m-dissipatif de domaine dense, de plus *B* est auto-adjoint**

Preuve :

1) D'après la formule de Green on a :

$$\int_\Omega \Delta u\ v = -\int_\Omega \nabla u \nabla v\ dx + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} v\ dv$$

où n est la normale extérieure à $\Gamma = \partial\Omega$. Montrons que : $< \Delta u, u > \leq 0$

On a :

$$\forall u \in D(B), < \Delta u, u >= \int_\Omega \Delta u\ u\ dx = -\int_\Omega |\nabla u|^2\ dx \leq 0$$

donc B est dissipatif.

2)

$$\forall f \in Y,\ \exists! u \in D(B) :\ u - \lambda \Delta u = f. \tag{2.9}$$

Multipliant (2.9) par v avec $v \in H_0^1$, on trouve :

$$\int_\Omega (uv - \lambda v \Delta u)\ dx = \int_\Omega fv\ dx \qquad \forall \lambda > 0,$$

prenons $\lambda = 1$ donc :

$$\int_\Omega (uv + \nabla v \nabla u)\, dx = \int_\Omega fv\, dx$$

de la forme :

$$b(u, v) = l(v)$$

c'est évident de vérifier que $b(u, v)$ est coercive et $l(v)$ est continue, et on applique le théorème de Lax-milligram, donc : $\exists! u$ qui vérifie $u - Au = f$ d'où $B = \Delta u$ est m-dissipatif.

3) $\overline{D(B)} = Y$?. On a : $D(\Omega) \subset D(B) \subset L^2(\Omega) \Rightarrow \overline{D(B)} = L^2(\Omega)$ car $\overline{D(\Omega)} = L^2(\Omega)$.

4) $< Bu, v > = < u, B^* v >$, mais :

$< Bu, v > = - \int_\Omega \nabla v \nabla u\, dx = \int_\Omega u \Delta v\, dx = < u, \Delta v >$

ce qui implique : $(u, v) \in G(B^*)$ et d'après le corollaire (2.3) $B = B^*$ donc B est auto-adjoint.

Exemple 2 :

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $Z = L^\infty(\Omega)$.

on définit l'opérateur C par :

$$D(C) = \left\{ u \in H_0^1 \cap Z,\ \Delta u \in Z \right\}$$

$$Cu = \Delta u.$$

Montrons que C est **m-dissipatif dans** Z.

Preuve :

Montrons que : C est dissipatif ?

soit $\lambda > 0$, $f \in Z$, posons : $M = \|f\|_\infty$, et soit $u \in H_0^1$ une solution de :

$$u - \lambda \Delta u = f \text{ dans } D(\Omega) \tag{2.10}$$

l'équation (2.10) est en particulier vérifiée dans $L^2(\Omega)$, et l'on a :

$$(u - M) - \lambda(\Delta u - M) = f - M \text{ dans } L^2(\Omega)$$

posons $v = (u - M)^+ \in H_0^1(\Omega)$ avec $\nabla v = \Psi_{\{|u|>M\}} \nabla u$ donc :

$$\int_\Omega v^2 \, dx + \lambda \int_{\{|u|>M\}} |\nabla u|^2 \, dx = \int_\Omega (f - M) v \, dx \leq 0$$

d'où :

$$\int_\Omega v^2 \, dx \leq 0 \Rightarrow v = 0 \Rightarrow u \leq M \qquad \text{p.p sur}\Omega.$$

de la même manière on montre que :$u \geq -M$ p.p sur Ω donc :

$\|u\|_{L^\infty} \leq M = \|f\|_{L^\infty}$, il résulte que C est dissipatif.

Soit maintenant $f \in L^\infty(\Omega) \subset L^2(\Omega)$, $\exists! u \in H_0^1(\Omega)$ avec $\Delta u \in L^2(\Omega)$ solution de :

$$u - \Delta u = f \text{ dans } L^2(\Omega)$$

puisque $u \in L^\infty(\Omega)$ alors, $u \in D(C)$ ce qui implique : $u - Cu = f$ admet une solution unique, d'où C est m-dissipatif.

Remarque 2.8 :

Dans les deux exemples, on voit que c'est la même équation qui correspond à plusieurs opérateurs qui ont des propriétés différentes, car ils sont définis sur des domaines différents, donc, on voit l'utilité du domaine de définition.

2.2.5 Théorème de Hill-Yosida-Phillips :

Semi-groupe engendré par un opérateur m-dissipatif :

Soit X un espace de banach, A est un opérateur linéaire m-dissipatif de domaine dense.

Proposition 2.5

Soit $T(t)$ un semi-groupe de contraction et L son générateur infinitésimal alors L est m-dissipatif de domaine dense.

Preuve :

cf : [3].

Théorème 2.3 : (Hill-Yosida-Phillips)

Un opérateur linéaire A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contraction ssi A est m-dissipatif de domaine dense.

Preuve :

cf : [3].

Théorème 2.4 : (Hill-Yosida)

Soit A un opérateur linéaire m-accrétif dans un espace de Hilbert X, alors pour tout $u_0 \in D(A)$, il existe une fonction $u \in C^1([0,+\infty[\,;X) \cap C([0,+\infty[\,;D(A))$ unique telle que :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = 0 \quad \text{sur } [0,+\infty[\\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{2.11}$$

de plus ; $|u(t)| \leq u_0$ et $|\frac{du}{dt}| = |Au(t)| \leq |Au_0| \;\; \forall t \geq 0$.

$(D(A), \|..\|)$ est un espace de banach muni de la norme de graphe :

$|v| + |Av|$ et de la norme hilbertienne équivalente $(|v|^2 + |Av|^2)^{\frac{1}{2}}$.

Preuve :

cf : [3].

Corollaire 2.4 :

Sous les mêmes hypothéses du théorème (2.4), l'équation :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au + \lambda u = 0 \quad \text{sur } [0,+\infty[\\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{2.12}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$, admet une solution unique.

Preuve :

L'équation (2.12) se ramène à l'équation (2.11) grâce à l'artifice classique suivant :

$$v(t) = e^{\lambda t} u(t).$$

2.3 Existence locale de la solution d'un problème d'evolution

2.3.1 Equations non homogènes et problèmes semi-linéaires :

Dans cette partie on désigne par X l'espace de Banach et A l'opérateur linéaire m-dissipatif de domaine dense, on note $T(t)$ le semi -groupe de contraction engendré par A.

2.3.2 Equations non homogènes :

Soit $T > 0$ pour tout $x \in X$ et $f : [0,T] \to X$, une fonction donnée, on veut résoudre le problème suivant :

$$\begin{cases} i)\ u \in C([0,T], D(A)) \cap C^1([0,T], X) \\ ii)\ \dot{u}(t) = Au(t) + f(t) \qquad \forall t \in [0,T] \\ iii)\ u(0) = x \end{cases} \tag{2.13}$$

on a le résultat suivant :

Lemme 2.1 :

Soit $x \in D(A)$ **et** $f \in C([0,T], X)$, **on considère une solution** $u \in C([0,T], D(A))$ **du problème** (2.13), **alors on a :**

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s) f(s)\, ds \tag{2.14}$$

Preuve :

Soit $t \in [0,T]$, on pose :

$$w(s) = T(t-s)\, u(s) \text{ pour } s \in [0,t]$$

Soit $h \in [0, t-s]$, on a :

$$\begin{aligned} \tfrac{w(s+h)-w(s)}{h} &= T(t-s-h)\left(\tfrac{u(s+h)-u(s)}{h} - \tfrac{(T(h)-I)}{h} u(s)\right) \\ &\underset{h\to 0}{\to} T(t-s)\left(\dot{u}(s) - Au(s)\right) = (T(t-s)\, f(s)) \end{aligned}$$

puisque $T(t-s)\, f(s) \in C([0,t], X) \Rightarrow \overset{\bullet}{w} \in C([0,t], X) \Rightarrow w \in C^1([0,t], X)$.

$$\overset{\bullet}{w}(s) = T(t-s)\, f(s), \forall s \in [0,t] \tag{2.15}$$

en intégrant (2.15) sur $[0,\delta]$ et en faisant tendre δ vers t $(r<t)$ on obtient :

$$w(r)-w(0)=\int_0^r T(t-s)\,f(s)\ ds$$

donc :

$$w(r)=w(0)+\int_0^r T(t-s)\,f(s)\ ds.$$

lorsque $r\longrightarrow t$ on obtient :

$$w(r)=T(t-r)\,u(r)\rightarrow T(0)\,u(t)=u(t)\,,\ \text{d'où},\ u(t)=u(0)+\int_0^t T(t-s)\,f(s)\ ds$$

Corollaire 2.5 :

Pour tout $x\in X$ et $f\in C([0,T],X)$, le problème (2.13) possède au plus une soution.

Preuve :

Supposons que u_1 et u_2 sont deux solutions de (2.13) donc d'après (2.14) :

$$u_1(t)=x+\int_0^t T(t-s)\,f(s)\ ds$$

$$u_2(t)=x+\int_0^t T(t-s)\,f(s)\ ds$$

par substitution, on trouve : $u_1(t)-u_2(t)=0\Rightarrow u_1(t)=u_2(t)\ \forall t\in[0,T]$ et donc :

$$u_1\equiv u_2$$

Remarque 2.8 :

Pour tout $x\in X$ et $f\in C([0,T],X)$, la formule donnée par (2.14) définit une fonction $u\in C([0,T],X)$, nous allons chercher des conditions suffisantes pour que la fonction u donnée par (2.14) soit une solution de (2.13)

Remarque 2.9 :

Il est clair que si u est une solution de (2.13), on doit avoir $u(0) = x \in D(A)$, cependant cette condition n'est plus suffisante pour que u donnée par (2.14), soit solution de (2.13).

Contre exemple :

Supposons que $T(t)$ est un groupe d'isométrie et soit $y \in X/D(A)$ alors : $T(t)\, y \notin D(A)$.
on prend pour tout $t \in \mathbb{R}$: $f(t) = T(t)\, y$, et $x = 0 \in D(A)$ donc (2.14) donne :

$$u(t) = tT(t)\, y \notin D(A) \text{ pour } t \neq 0$$

donc $u(t)$ n'est plus une solution de (2.13).

Proposition 2.6 :

Soit $x \in D(A)$ et $f \in C([0,T], X)$, on suppose que l'une au moins des deux conditions suivantes est satisfaite :

i) $f \in L^1([0,T], D(A))$

ii) $f \in W^{1,1}([0,T], X)$

alors u donnée par (2.14) est solution du problème (2.13).

Preuve :

cf : [3].

Lemme 2.2 (Granwall) :

Soit $T > 0$, $\lambda \in L^1[0,T]$ tel que $\lambda \geq 0$ p.p et soit c_1, c_2 deux constantes positives $\zeta \in L^1[0,T]$, $\zeta \geq 0$ p.p tel que $\lambda\zeta \in L^1[0,T]$ alors, si $\forall t \in [0,T]$
$\zeta(t) \leq c_1 + c_2 \int_0^t \lambda(s)\, \zeta(s)\, ds$ **p.p on a :**

$$\zeta(t) \leq c_1 \exp\ c_2 \int_0^t \lambda(s)\, ds$$

Preuve :

cf : [3].

Remarque 2.10 :

En particulier, si $c_1 = 0$, alors $\zeta(t) = 0$ p.p sur $[0,T]$.

2.4 Problèmes semi-linéaires

2.4.1 Rappels

On dit que $F : X \to X$ est lipschytzienne sur les bornées de X, si pour toute constante $M > 0$, $\exists K(M)$ tel que :

$$\|F(x) - F(y)\| \leq K(M)\ \|x - y\|,\ \forall x, y \in B(0, M).$$

étant donnée $u_0 \in X$, $F : X \to X$ une fonction lipschytzienne, on cherche $T > 0$ et une fonction u solution du problème :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in C([0,T], D(A)) \cap \in C^1([0,T], X) \\ \frac{du}{dt} - Au = F(u(t)) \\ u(0,.) = u_0 \end{cases} \tag{2.16}$$

le problème (2.16) s'appelle problème semi-linéaire.

Lemme 2.3 :

Soit $T > 0$, $u_0 \in X$ et $u, v \in C([0,T], X)$ deux solutions du problème :

$$u(t) = T(t)\ u_0 + \int_0^t T(t-s)\ F(u(s))\ ds \tag{2.17}$$

alors $u = v$ (L'unicité de la solution)

Preuve :

Posons : $M = \sup \max\limits_{t \in [0,T]} \{\|u(t)\|, \|v(t)\|\}$ on a :

$$\|u(t)\| - \|v(t)\| \leq \int_0^t \|F(u(s)) - F(v(s))\|\ ds \leq K(M) \int_0^t \|u(s) - v(s)\|\ ds$$

pour $t \in [0,T]$, et d'après Gronwall ($C_1 = 0$.Remarque 3), on déduit que :

$$\|u(t) - v(t)\| = 0$$

ce qui implique : $u = v$

Proposition 2.7 :

Le problème (2.17) admet une solution unique.

Preuve :

On pose $T_M = [2K(2M + \|F(0)\| + 2]^{-1} > 0$, où T_{Max} est le temps d'existence maximale et on pose : $L = 2M + \|F(0)\|$, on définit E comme suit :

$$E = \{u \in C([0,T_M], X) \text{ tel que } \|u\| \leq L, \ \forall t \in [0,T_M]\}$$

on associe à E, la distance d induite par la norme de $C([0,T_M], X)$

$$d(u,v) = \max_{t \in [0,T_M]} \|u(t) - v(t)\|$$

Soit $\Phi_u \in C([0,T_M], X)$, $\forall u \in E$:

$$\Phi_u(t) = T(t)\, u_0 + \int_0^t T(t-s)\, F(u(s))\, ds \text{ pour } s \in [0,T_M].$$

on a : $F(u(s)) = F(0) + [F(u(s)) - F(0)]$ donc :

$$\|F(u(s))\| \leq \|F(0)\| + L\,K(L) \leq \frac{M + \|F(0)\|}{T_M}$$

il résulte que :

$$\|\Phi_u(t)\| \leq \|u_0\| + \int_0^t \|F(u(s))\|\ ds \leq M + \frac{t(M + \|F(0)\|)}{T_M} \leq L\ \forall t \in [0,T_M].$$

par conséquant $\Phi_u \in E$ d'où :

$$\Phi_u : E \rightarrow E$$

de plus ; $\forall\ (u, v) \in E \times E$, on a :

$$\|\Phi_u(t) - \Phi_v(t)\| \leq K(L) \int_0^t \|u(s) - v(s)\|\ ds \leq K(L)\ d(u,v)\ T_M \leq \frac{1}{2} d(u,v).$$

donc Φ_u est contractante et d'après le théorème du point fixe de Banach, Φ_u possède une unique solution, et en déduit que :Le problème (2.17) admet une solution unique.

Chapitre 3

Existence globale de la solution d'un système de réaction-diffusion via fonctionnelle de Lyapunov

3.1 Introduction

Soit le problème :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a\Delta u = \Pi - f(u,v) - \lambda u & \text{sur} \quad]0,+\infty[\times \Omega \\ \frac{\partial v}{\partial t} - d\Delta v = f(u,v) - \sigma v & \text{sur} \quad]0,+\infty[\times \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 & \text{sur} \quad]0,+\infty[\times \partial\Omega \\ u(0,x) = u_0, \quad v(0,x) = v_0 & \text{sur } \Omega \end{cases} \tag{G}$$

Où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $f(r,s)$ est une fonction non négative continûment differentiable sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ satisfaisant

$$f(0,s) = 0,\ f(r,0) \geq 0 \text{ pour } r, s \geq 0, \tag{3.1}$$

et

$$(\xi \geq 0, \eta \geq 0) \Longrightarrow 0 \leq f(\xi,\eta) \leq \varphi(\xi)(1+\eta)^{\beta}. \tag{3.2}$$

Si $(\sigma = \lambda = \Pi = 0)$ avec données initiales non négatives, le problème (P) représente un modèle de diffusion de substances tel que à chaque instant t, il existe une réaction chimique,ce modèle a été étudié par un chercheur qui s'appelle Rosenzweig.mac-Arthur dans le cas où $f(u,v) = u\zeta(v)$ telle que : $\zeta(v) = v^B$, la question de l'existence globale de la solution est posé par un autre chercheur, cette question a trouvé une réponse par N. Alikakos [1] lorsque $B \leq \frac{n+2}{n}$, ensuite; K.Masuda [7] a résolu le problème dans le cas $B \geq 1$. En (1983) A.Haroux et A.Youkana [4] ont généralisé la méthode de K.Masuda en jouant sur la non linéarité de ζ qui doit vérifier certaines conditions par exemple :

$$\lim_{s\to\infty} \frac{\log(1+\zeta(s))}{s} = 0.$$

La technique traitée par A.Haroux, A.Youkana [4] s'appelle technique de la fonctionnelle de Liapounov.

Pour u_0 et v_0 bornées, l'existence locale en temps de la solution est classique pour ce système $(\sigma = \lambda = \Pi = 0)$ (on note T_{Max} le temps d'existence maximale), de plus, les solutions sont positives si $u_0, v_0 \geq 0$.

Il en résulte par application du principe du maximum, l'estimation à priori :

$$\|u(t)\|_\infty \leq \|u_0\|_\infty \;\; \forall\, 0 \leq t \leq T_{Max}$$

puisque $f(u,v) \geq 0$, s'il était possible d'établir une estimation a priori uniforme pour $v(t)$, l'existence globale en résulterait, mais, et c'est là la difficulté, une telle estimation n'est pas du tout évidente sauf bien sûr dans le cas trivial $a = d$ où :

$$\|w\|_\infty = \|u+v\|_\infty \leq \|w_0\|_\infty = \|u_0+v_0\|_\infty$$

puisque :

$$\frac{\partial}{\partial t}(u+v) - a\,\Delta(u+v) = 0$$

donne :

$$\frac{\partial w}{\partial t} - a\,\Delta w = 0$$

avec $w = u + v$, et d'après le principe de maximum on trouve :

$$\|w\|_{\infty} = \|u+v\|_{\infty} \leq \|w_0\|_{\infty} = \|u_0 + v_0\|_{\infty} .$$

3.2 Notations et préliminaires :

On désigne par $\|.\|_p$, $p \in [1, +\infty[$ et $\|.\|_{\infty}$ les normes usuelles dans les espaces $L^p(\Omega)$, $L^{\infty}(\Omega)$, respectivement, définies par

$$\|u\|_p^p = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} |u(x)|^p \, dx,$$

$$\|u\|_{\infty} = \sup_{x \in \Omega} ess \, |u(x)| .$$

On définit aussi les espaces $L^p(0,T,X)$, $p \in [1, +\infty[$et $L^{\infty}(0,T,X)$ comme suit :

$L^p(0,T,X) = \left\{ u : \ [0,T] \rightarrow X \text{ mesurable } , \int_0^T \|u\|_X^p \, dt < \infty \right\}$,

muni de la norme

$$\|u\|_{L^p(0,T,X)}^p + \int_0^T \|u\|_X^p \, dt,$$

$L^{\infty}(0,T,X) = \{ u : \ [0,T] \rightarrow X \text{ mesurable } , \sup ess_{t \in]0,T[} \|u\|_X < \infty \}$,

muni de la norme

$$\|u\|_{L^{\infty}(0,T,X)} = \sup ess_{t \in]0,T[} \|u\|_X \ .$$

L'étude de l'existence locale et l'unicité de la solution (u,v) du problème (G) découle de la théorie de base des équations paraboliques semi-linéaires(voir proposition 2.7).

En conséquence, il existe un $T_{\max} \in]0, +\infty]$ tel que (G) possède une unique solution classique sur$]0, T_{\max}[\times \Omega$.

De plus, si $T_{\max} < \infty$, alors

$$\lim_{t \uparrow T_{\max}} (\|u(t)\|_{\infty} + \|v(t)\|_{\infty}) = +\infty .$$

et donc explosion en temps fini.

Par conséquent, s'il existe une constante positive C telle que

$$\|u(t)\|_{\infty} + \|v(t)\|_{\infty} \leq C, \text{pour tout } t \in]0, T_{\max}[,$$

alors $T_{\max} = +\infty$.

Cependant l'étude de la positivité de la solution est basée sur le lemme suivant :

Lemme 3.1 :

On suppose que la matrice D du système (D) est diagonale. Alors, toute région de la forme

$$\mathbf{\Sigma} = \cap_{i=1}^{m} \{u : u_i \geq 0\},$$

est invariante dès que la fonction $F = (f_1, f_2, ..., f_m)$ satisfait

$$f_i(u_1, u_2, ..u_{i_{-1}}, 0, ..u_m) \geq 0, \text{ pour tout } u_j \geq 0, i, j = 1, ...m (i \neq j).$$

3.2.1 Existence locale

L'existence locale en temps de la solution est classique pour le système (G).

Il suffit de transformer le système (G) en :

$$\begin{cases} U'(t) = H\,U(t) + F(U(t)), t > 0 \\ U(0) = U_0 \in X. \end{cases}$$

$$H(U(t)) = (a\,\Delta\,u(t), b\,\Delta\,v(t))$$

$$F(U(t)) = (\Pi - f(u(t), v(t) - \sigma u(t)), f(u(t), v(t)) - \lambda v(t))$$

puisque F est localement lipschyzienne en $U \in X = C(\overline{\Omega}) \times C(\overline{\Omega})$ (Proposition 2.7).

Dans la section suivante nous exposons les principaux résultats qui assurent la positivité et l'existence globale de la solution du système (G).

3.3 Existence globale et positivité de la solution

3.3.1 positivité de la solution

D'aprés le Lemme 3.1 et comme $f(0,s)=0$ et $f(r,0)\geq 0$ pour tous $r,s\geq 0$,alors la région suivante est invariante

$$\Sigma=\left\{(u_0,v_0)\in\mathbb{R}^2 \text{ such that } u_0\geq 0,\ v_0\geq 0\right\},$$

ce qui montre que la solution du problème (G) reste dans Σ, c'est àdire positive.

Maintenant conçernant l'existence globale de la solution du système (G), on applique le Théorème de comparaison voir[10, Theorem 10.1] à la première équation du système (G), on obtient

$$0\leq\ u(t,x)\leq\max(\|u_0\|_\infty,\frac{\Pi}{\sigma})=K. \tag{3.3}$$

Pour prouver que v est globale en temps, et d'aprés un résultat dans [5] ,il suffit de trouver une estimation pour la quantité suivante

$$\|f(u,v)-\lambda v\|_p \text{ pour } p>\frac{n}{2}, i.e.$$

$$\|f(u,v)-\lambda v\|_p\leq Cte, \tag{3.4}$$

où Cte est une constante positive independente de t.

D'aprés (3.2), nous allons établir la bornitude de la quantité $\|z\|_p$ sur $]0,T_{\max}[$ dans le but de l 'assurer pour $\|z\|_\infty$ sur $]0,T_{\max}[$.

prenons $p\geq 2$,et on pose

$$\alpha=\frac{(d-a)^2}{4ad},\alpha(p)=\frac{p\alpha+1}{p-1},M_p=K+\frac{\Pi}{\sigma\alpha(p)}. \tag{3.5}$$

Dans la suite, nous présentons quelques Lemmes importants dans l'établissement de l' estimation (3.4).

Lemma 1 *Soit* (u,v) *une solution du système (G).Alors*

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega} udx + \int_{\Omega} f(u,v)\,dx + \lambda\int_{\Omega} udx = \Pi\Omega \tag{3.6}$$

Proof. evidente ■

Lemma 2 *On suppose que* $p \geq 2$ *et soit*

$$G_q(t) = \int_{\Omega}\left[qu + \exp(-\frac{p-1}{p\alpha+1}\ln(\alpha(p)(M_p-u)))v^p\right]dt, \tag{3.7}$$

où (u,v) *est une solution du système* (G) *sur* $]0, T_{\max}[$*.Alors sous les conditions (3.1) -(3.2), il existe deux constantes* $q>0$ *et* $s>0$ *telles que*

$$\frac{d}{dt}G_q(t) \leq -(p-1)\sigma G_q + s. \tag{3.8}$$

Proof. On pose ■

$$h(u) = -\frac{p-1}{p\alpha+1}\ln(\alpha(p)(M_p-w)), \tag{3.9}$$

donc

$$G_q(t) = q\int_{\Omega} udx + N(t), \tag{3.10}$$

où

$$N(t) = \int_{\Omega} e^{h(u)}v^p dx. \tag{3.11}$$

On dérive $N(t)$ par rapport à t et on applique la formule de Green , on obtient

$$\frac{d}{dt}N = H + S, \tag{3.12}$$

où

$$\begin{aligned} H &= -d\int_{\Omega}((h'(u))^2 + h''(u))e^{h(u)}v^p(\nabla u)^2dx \\ &\quad -p(d+a)\int_{\Omega} h'(u)e^{h(u)}v^{p-1}\nabla u\nabla vdx \\ &\quad -a\int_{\Omega} p(p-1)e^{h(u)}v^{p-2}(\nabla v)^2dx, \end{aligned} \tag{3.13}$$

et

$$
\begin{aligned}
S &= \Pi \int_{\Omega} h'(u) e^{h(u)} v^p dx + \\
& \int_{\Omega} \left[p v^{p-1} f(u,v) - h'(u) v^p f(u,v) \right] e^{h(u)} dx \\
& -\lambda \int_{\Omega} h'(u) u e^{h(u)} v^p dx \\
& -p\sigma \int_{\Omega} e^{h(u)} v^p dx - p\Pi \int_{\Omega} e^{h(u)} v^{p-1} dx.
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

On observe que II est donné par

$$
H = - \int_{\Omega} Q e^{h(u)} dx,
$$

où

$$
\begin{aligned}
Q &= d((h'(u))^2 + h''(u)) v^p (\nabla u)^2 + \\
& + p(a+d) h'(u) v^{p-1} \nabla u \nabla v + ap(p-1) v^{p-2} (\nabla v)^2,
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

est la forme quadratique en fonction de ∇u et ∇v , qui est nonnegative si

$$
(p(a+d)h'(u)v^{p-1})^2 - 4adp(p-1)((h'(u))^2 + h''(u))v^{2p-2} \leq 0, \tag{3.16}
$$

on choisit $h(u)$ telle que

$$
h\prime(u) = \frac{1}{\alpha(p)(M_p - u)}, \; h''(u) = \frac{\alpha(p)}{(\alpha(p)(M_p - u))^2}. \tag{3.17}
$$

L'inégalité (3.16) pêut s'écrire de la forme

$$
4adpv^{2p-2} \left\{ \begin{array}{c} p \left[\alpha \frac{1}{(\alpha(p)(M_p - u)^2} - \frac{\alpha(p)}{(\alpha(p)(M_p - u))^2} \right] + \\ \frac{1+\alpha(p)}{(\alpha(p)(M_p - u))^2} \end{array} \right\} = 0, \tag{3.18}
$$

Mais

$$p\alpha - p\alpha(p) + 1 + \alpha(p) = 0,$$

donc l'inégalité (3.16) est vérifiée,$Q \geq 0$ par conséquent

$$H = -\int_{\Omega} Qe^{h(w)}dx \leq 0, \tag{3.19}$$

tandis que le terme S pêut être estimer comme suit

$$\begin{aligned} S \quad &\leq \quad \int_{\Omega} (\Pi h'(u) - \sigma p)e^{h(u)}v^p dx + \\ &\quad\ \int_{\Omega} (pv^{p-1}f(u,v) - h'(u)v^p f(u,v))e^{h(w)}dx, \\ &\leq \quad -(p-1)\sigma \int_{\Omega} e^{h(u)}v^p dx + \\ &\quad\ \int_{\Omega} \left[pv^{p-1}f(u,v) - h'(w)v^p f(u,v)\right] e^{h(u)}dx, \end{aligned} \tag{3.20}$$

puisque

$$h'(u) = \frac{1}{\alpha(p))(M_p - u)} \leq \frac{1}{\alpha(p))(M_p - K)} = \frac{\sigma}{\Pi}. \tag{3.21}$$

D'autre part , on a

$$\begin{aligned} -h'(u) \quad &= \quad \frac{-1}{\alpha(p)(M_p - u)} \leq \frac{-1}{\alpha(p))M_p}, \\ h(u) \quad &\leq \quad \frac{-1}{\alpha(p)} \ln \frac{\Pi}{\sigma}. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Comme $v \geq 0$, alors d'aprés (3.22),on observe que

$$\begin{aligned} & pv^{p-1}f(u,v) - h'(w)v^p f(w,z) \\ \leq \quad & (pv^{p-1} - \frac{1}{\alpha(p))M_p}v^p)f(u,v). \end{aligned}$$

Donc, il existe $c_1 > 0$ telle que

$$pv^{p-1}f(u,v) - h'(u)v^p f(u,v) \leq c_1 f(u,v). \tag{3.23}$$

D'aprés (3.20) et (3.23),on obtient l'éstimation suivante

$$\begin{aligned} S &\leq -(p-1)\sigma N + c_1 \int_\Omega f(u,v)\, e^{h(u)}dx \\ &\leq -(p-1)\sigma N + c_1 e^{\frac{-1}{\alpha(p)}\ln\frac{\Pi}{\sigma}} \int_\Omega f(u,v)\, dx, \end{aligned} \tag{3.24}$$

on pose

$$q_1 = c_1 e^{\frac{-1}{\alpha(p)}\ln\frac{\Pi}{\sigma}}, \tag{3.25}$$

utilisant (3.6), on trouve

$$S \leq -(p-1)\sigma N + q_1 \Pi\, |\Omega| - q_1 \frac{d}{dt}\int_\Omega u(t,x)dx, \tag{3.26}$$

il est clair que d'aprés (3.10),on obtient

$$S \leq -(p-1)\sigma G_q + q_1((p-1)\sigma K + \Pi)\, |\Omega| - q_1 \frac{d}{dt}\int_\Omega u(t,x)dx, \tag{3.27}$$

ce qui montre d'aprés (3.12) que

$$\frac{d}{dt}G_q \leq -(p-1)\sigma G_q + s, \tag{3.28}$$

où

$$s = q_1((p-1)\sigma K + \Pi)\, |\Omega|. \tag{3.29}$$

Maintenant, on pêut établir l'existence globale de la solution du système (G).

Theorem 1 *Sous les conditions (3.1) et (3.2),les solutions du système (G) sont globales et uniformement bornées sur* $[0,+\infty[\times \Omega$.

Proof. Multiplions l'inégalité (3.28) par $e^{(p-1)\sigma t}$ puis par une simple intégration du résultat,on déduit l'existence d'une constante positive $C > 0$ independente de t telle que :

$$G_q(t) \leq C. \tag{3.30}$$

■

D'aprés (3.9),on observe que

$$e^{h(u)} \geq e^{\frac{-1}{\alpha(p)} \ln \alpha(p))M_p}, \tag{3.31}$$

ce qui montre que pour tout $p \geq 2$, on a

$$\int_\Omega v^p dx \leq e^{\frac{1}{\alpha(p)} \ln(K\alpha(p)+\frac{\Pi}{\sigma})} G_q(t) \leq C_1(p), \tag{3.32}$$

où

$$C_1(p) = Ce^{\frac{1}{\alpha(p)} \ln(K\alpha(p)+\frac{\Pi}{\sigma})}, \tag{3.33}$$

prenons $p > \frac{n}{2}$ et procédons à l'estimation uniforme de la quantité $\|f(u,v) - \sigma v\|_p$.

Soit

$$A = \max_{0 \leq \xi \leq K} \varphi(\xi), \tag{3.34}$$

l'inégalité (3.2), montre que

$$f(u,v) \leq \varphi(u)(1+v)^\beta,$$

ce qui implique,

$$\begin{aligned} \int_\Omega f^p(u,v)\,dx &\leq \int_\Omega (\varphi(u))^p (1+v)^{\beta p}) dx \leq \\ A^p \int_\Omega (1+v)^{\beta p}) &= C(\beta p, |\Omega|, A), \end{aligned} \tag{3.35}$$

Finalement

$$\|f(u,v) - \sigma v\|_p \leq Cte.$$

Remark 1 *L'inégalité (3.35) déroule de la formule suivante :*

$$(x+y)^r \leq 2^{r-1}(x^r + y^r), x, y \geq 1, r \geq 1.$$

Bibliographie

[1] N. D. Alikakos, Lp -Bounds of Solutions of Reaction-Diffusion Equations. Comm. Partial. Differential. Equations 4, (1979), 827-868.

[2] H. Bresis, Analyse Fonctionnelle. Théorie et Application, Masson, Paris,1983.

[3] T. Casenave, A. Haraux, Introduction au Problèmes d'Evolution Semi Linéaires, Eddition Ellipses.

[4] A.Haraux et A.Youkana, On a Result of K. Masuda Concerning Reaction-Diffusion Equations, Tohoku .Math .J. 40.(1988) S. p. 159-163

[5] D. Henry, Theory of Semi-Linear Parabolic Equations , Lecture Notes in Math, 840, Springer Verlas, New York (1984).

[6] S. Kouachi, Cours de Magister1999-2000, Existence globale de la solution des systèmes paraboliques.

[7] K.Masuda, On the Global Exietence and Asymtotic Behavior of Solution of Reaction-Diffusion Equations, Hokaido Math. J.12. (1983), pp. 360-370.

[8] L. Melkemi, A. Z. Mokrane, and A. Youkana, On the uniform boundness of the solutions of systems of reaction-diffusion equtions. EJQTDE, 2005, no. 24. 1-10.

[9] F. Roth, Global Solutions of Reaction-Diffusion Systems. Lecture Notes in Mathematics. 1072, Springer-Verlag, Berlin (1984).

[10] J. Smoller, Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations, Springer-Verlag, New York (1983).