République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : Analyse(EDP)

Par :

Bouchahed Hassiba et Djahmi Djazira

Intitulé

Sur quelques inégalités intégrales aux échelles de temps et leurs applications

Dirigé par : Dr. Boukerrioua-Khaled

Devant le jury

PRESIDENT	R.Chemlal	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	K. Boukerrioua	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	F.Lakhal	Univ-Guelma

Session Juin 2013

Remerciement

Nous tenons à exprimer nos remerciements et ma gratitude avant tout

Au bon dieu.

Notre encadreur **Dr.Boukerrioua** pour l'aide précieuse et les conseils judicieux pour l'élaboration de ce mémoire.

Nous remercions également **Monsieur Meftah** qui est contribué à notre formation, auxquels nous exprimons notre plus grand respect et profonde reconnaissance.

Nous ne pouvons pas oublier tous amis et collègues qui nous ont été un appui moral le long de notre formation universitaire.

Table des matières

Introduction

Les inégalités apparaissent partout et dans toutes les disciplines, elles jouent un rôle important et significatif dans toutes les branches de Mathématiques. Durant ces dernières années, les inégalités ont attiré l'attention de plusieurs mathématiciens et une intense littérature est apparue sur ce sujet. En particulier les inégalités intégrales ont connues un grand développement et des nouvelles idées et techniques sont apparues ce qui a contribué à la résolution de nombreux problèmes importants en théorie de l'approximation et en analyse numérique où l'éstimation des erreurs d'approximation est exigée.

La théorie des inégalités intégrales joue un rôle important dans l'étude des équations différentielles et intégro-différentielles, les applications dans ce domaine ont été développées d'une façon très remarquables au cours de ces dernières années dans l'étude de l'existence, l'unicité, la dépendance continue de la solution par rapport aux données initiales, l'existence globale, la stabilité de la solution et l'erreur d'estimation dans les problèmes d'approximation. La littérature dans ce sens est très riche et connaît une croissance explosive en théorie et aux applications, on peut consulter [10, 11].

Il s'avère que l'utilisation des inégalités intégrales donne des bornes explicites pour les fonctions inconnues. Pour ces raisons l'introduction des inégalités intégrales dans l'étude des propriétés des solutions des équations différentielles est indispensable. Une des inégalités intégrales la plus connue est celle de Gronwall (1919) qui a été appliquée à la résolution de quelques problèmes concernant les équations différentielles ordinaires.

Le but de ce travail est de développer un résultat obtenu dans [5] autour de l'étude des propriétés des solutions des équations dynamiques aux échelles de temps. Nous signalons que ce mémoire est basé sur les idées figurées dans les travaux [3, 4].

Une échelle de temps $\mathbb{T}$ est un sous ensemble fermé non vide de $\mathbb{R}$ Par exemple, les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et l'ensemble triadique de Cantor sont des échelles de temps. On sous-entend que la topologie de $\mathbb{T}$ est induite par celle de $\mathbb{R}$. La théorie des équations dynamiques aux échelles de temps a été introduite en 1988 par Stefan Hilger [7, 8] dans sa thèse de doctorat où il a notamment définie la Δ-dérivée de la façon suivante.

Définition 0.1 *Soit $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ une fonction et $t \in \mathbb{T}^k$, f est dite $\Delta-$différentiable en t s'il existe un vecteur $f^{\Delta}(t) \in \mathbb{R}^n$ tel que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un voisinage U de t tel que*

$$\left\| f(\sigma(t)) - f(s) - f^{\Delta}(t)(\sigma(t) - s) \right\| \leq \epsilon \mid \sigma(t) - s \mid,$$

pour tout $s \in U$. On appelle $f^{\Delta}(t)$ la $\Delta-$dérivée de f en t. Si f est $\Delta-$différentiable en t pour tout $t \in \mathbb{T}^k$, alors $f^{\Delta} : \mathbb{T}^k \to \mathbb{R}^n$ est dite la $\Delta-$dérivée de f sur $\mathbb{T}^k$.

Ici, $\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\}$, $\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{T} : s < t\}$ et

$$\mathbb{T}^k = \begin{cases} \mathbb{T}/]\rho(\sup \mathbb{T}), \sup \mathbb{T}] & \text{si} \sup \mathbb{T} < \infty \\ \mathbb{T} & \text{si} \sup \mathbb{T} = \infty \end{cases}.$$

C'est à partir de cette définition qu'ont été introduites les équations aux échelles de temps qui ont la même forme qu'une équation différentielle à l'exception que par exemple, dans une équation du premier ordre, la dérivée d'une fonction x (x') est remplacée par la Δ-dérivée (x^{Δ}) de cette fonction. Nous verrons plus loin dans le texte que si $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, la Δ-dérivée équivaut à la dérivée au sens classique et les équations aux échelles de temps deviennent des équations différentielles. Si $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, les équations aux échelles de temps deviennent des équations aux différences finies, pour plus de détails, on pêut consulter les deux livres [1, 2]. D'ailleurs, l'intérêt pour ce dernier type d'équations a connu un essor considérable au cours des dernières années pour expliquer plusieurs phénomèmes discrets notamment en économie, psychologie et génie. Qui plus est, l'informatique fait appel aux ensembles discrets et donc, les équations aux différences finies sont abondamment utilisées pour faire avancer cette science. La théorie des équations aux échelles de temps vient dans un premier temps unifier ce qui peut être fait dans les domaines des équations différentielles et les équations aux différences finies. En travaillant sous l'angle d'une échelle de temps générale, il est possible de faire progresser simultanément ces deux champs des mathématiques. Dans un deuxième temps, la théorie développée autour des échelles de temps permet l'étude de phénomènes se modélisant d'une façon qui fait appel simultanément au discret et au continu. Ainsi, une équation définie sur une échelle de temps de la forme $\cup_{n=0}^{n=\infty} [2n, 2n+1]$ est très utile pour décrire des phénomènes saisonniers. Par exemple, ce pourrait être pour l'étude d'une population d'insectes qui après un certain temps disparaît, pour réapparaître ultérieurement après avoir été pendant un certain temps sous forme de larve.

Ce travail est organisé de la façon suivante :

Dans le premier chapitre, on commence par rappeler brièvement quelques notions générales sur les échelles de temps avec exemples. Ensuite nous présentons quelques résultats préliminaires qui nous seront utiles dans notre travail.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons quelques inégalités intégrales aux échelles de temps qui sont trés utiles dans l'estimation des solutions des équations dynamiques.

Enfin, on termine le chapitre par l'exposition de quelques applications de ces inégalités intégrales aux équations dynamiques.

Chapitre 1

Notations et Préliminaires

Dans ce chapitre, nous présentons quelques définitions, exemples et théorèmes trés utiles pour le deuxième chapitre

Définition 1.1 *Une échelle de temps* $\mathbb{T}$ *est un sous ensemble fermé non vide de* $\mathbb{R}$.

Exemple 1.1 *Les ensembles* $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, [0,1] \cup [2,3], [0,1] \cup \mathbb{N}$ *et l'ensemble de Cantor sont des échelles de temps.*

Exemple 1.2 *Les ensembles* $\mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \mathbb{C}, (0,1)$ *ne sont pas des échelles de temps.*

Remarque 1.1 *La topologie de* $\mathbb{T}$ *est induite par celle de* $\mathbb{R}$.

1.1 Opérateur de saut

Définition 1.2 *Soit* $\mathbb{T}$ *une échelle de temps, pour* $t \in \mathbb{T}$,*on définit l'opérateur de saut avant* $\sigma : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$

$$\sigma(t) = \inf \{s \in \mathbb{T} : s > t\}. \tag{1.1}$$

Définition 1.3 *Soit* $\mathbb{T}$ *une échelle de temps, pour* $t \in \mathbb{T}$,*on définit l'opérateur de saut arrière* $\rho : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$

$$\rho(t) = \sup \{s \in \mathbb{T} : s < t\}. \tag{1.2}$$

Remarque 1.2 *Par convention, on supposera que* $\sigma(t) = t$ *si* t *est le maximum de* $\mathbb{T}$ *et que* $\rho(t) = t$ *si* t *est le minimum de* $\mathbb{T}$.

1.2 Classification des points

Soit $\mathbb{T}$ une échelle de temps, t un point de $\mathbb{T}$

Définition 1.4 *On dit que* t *est un point dense à droite de* $\mathbb{T}, t < \sup \mathbb{T}$ *(resp. un point dense à gauche de* $\mathbb{T}$*) si* $\sigma(t) = t$ *(resp.* $\rho(t) = t$ *).*

Définition 1.5 *On dit que* t *est un point dense s'il est simultanément dense à droite et à gauche.*

Définition 1.6 *On dit que* t *est un point dispersé à droite de* $\mathbb{T}$ *(resp. un point dispersé à gauche de* $\mathbb{T}$*) si* $\sigma(t) > t$ *(resp.* $\rho(t) < t$ *).*

Définition 1.7 *On dit que* t *est un point isolé s'il est simultanément dispersé à droite et à gauche.*

Définition 1.8 *Nous définissons les fonctions de granulation* $\mu, \nu : \mathbb{T} \to [0, \infty[$ *par :*

$$\mu(t) = \sigma(t) - t \quad \text{et} \quad v(t) = t - \rho(t). \tag{1.3}$$

Considérons les exemples suivants :

Exemple 1.3 *Soit* $\mathbb{T} = \mathbb{R}$*, pour tout* $t \in \mathbb{R}$*,*

on a

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \inf\{s \in \mathbb{R} : s > t\} = \inf(t, \infty) = t, \\ \rho(t) &= t, \end{aligned}$$

donc tous les points de $\mathbb{R}$ *sont denses. Les fonctions de granulation* μ, υ *valles :* $\mu(t) = 0$ *et* $\upsilon(t) = 0$.

Exemple 1.4 *Soit* $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, *pour tout* $t \in \mathbb{Z}$, *on a*

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \inf\{s \in \mathbb{Z}, s > t\} = \inf\{t+1, t+2, ...\} = t+1, \\ \rho(t) &= t-1, \end{aligned}$$

ainsi tous les points de $\mathbb{Z}$ *sont isolés. Les fonctions de granulation* μ, υ *valles :* $\mu(t) = 1$ *et* $\upsilon(t) = 1$.

Exemple 1.5 *Soit* $\mathbb{T} = [0,1] \cup [2,3]$ *on a :*

$$\sigma(t) = \begin{cases} t \ si \ t \in [0,1[\cup [2,3] \\ 2 \ si \ t = 1 \end{cases},$$

et

$$\rho(t) = \begin{cases} t \ si \ t \in [0,1] \cup]2,3] \\ 1 \ si \ t = 2 \end{cases}.$$

Ainsi

$$\mu(t) = \begin{cases} 0 \ si \ t \in [0,1[\cup [2,3] \\ 1 \ si \ t = 1 \end{cases},$$

et

$$v(t) = \begin{cases} 0 \ si \ t \in [0,1] \cup]2,3] \\ 1 \ si \ t = 2 \end{cases}.$$

On définit maintenant l'ensemble $\mathbb{T}^k$.

Définition 1.9 *Soit* $\mathbb{T}$ *une échelle de temps*

$$\mathbb{T}^k = \begin{cases} \mathbb{T}/\,]\rho(\sup \mathbb{T}), \sup \mathbb{T}] & si \ \sup \mathbb{T} < \infty \\ \mathbb{T} & si \ \sup \mathbb{T} = \infty \end{cases}.$$

Remarque 1.3 *Si le maximum de* $\mathbb{T}$ *est dispersé à gauche, alors on pose* $\mathbb{T}^k = \mathbb{T}/\sup \mathbb{T}$. *Sinon, par convention on aura que* $\mathbb{T}^k = \mathbb{T}$

Définition 1.10 *pour deux points* $a, b \in \mathbb{T}$, *l'intervalle d'échelle de temps est définie par :*

$$[a,b]_t = \{t \in \mathbb{T} : a \leq t \leq b\}.$$

1.3 $\Delta-$Dérivée

Définition 1.11 *Soit $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ une fonction et $t \in \mathbb{T}^k$, f est dite $\Delta-$différentiable en t s'il existe un vecteur $f^{\Delta}(t) \in \mathbb{R}^n$ tel que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un voisinage U de t tel que*

$$\left\| f(\sigma(t)) - f(s) - f^{\Delta}(t)(\sigma(t) - s) \right\| \leq \epsilon \mid \sigma(t) - s \mid,$$

pour tout $s \in U$. On appelle $f^{\Delta}(t)$ la $\Delta-$dérivée de f en t. Si f est $\Delta-$différentiable en t pour tout $t \in \mathbb{T}^k$, alors $f^{\Delta} : \mathbb{T}^k \to \mathbb{R}^n$ est dite la $\Delta-$dérivée de f sur $\mathbb{T}^k$.

Théorème 1.1 *Soit $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ une fonction et $t \in \mathbb{T}$.*

(i) Si f est $\Delta-$différentiable en t, alors f est continue en t.

(ii) Si f est continue en t et si t est dispersé à droite, alors f est $\Delta-$différentiable en t, de plus on a :

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}. \tag{1.4}$$

(iii) Si t est dense à droite, alors f est $\Delta-$différentiable en t si et seulement si

$$\lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s},$$

existe et finie.

Dans ce cas on a :

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}.$$

(iv) Si f est $\Delta-$différentiable en t, alors :

$$f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t) f^{\Delta}(t). \tag{1.5}$$

Maintenant, on donne quelques exemples concernants le calcul de la $\Delta-$dérivée

Exemple 1.6 *Considérons la fonction* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(t) = t^2$ *où* $\mathbb{T} = \left\{\frac{n}{2}, n \in \mathbb{N}_0\right\}$

Comme $t \in \mathbb{T}$ *donc* $\exists n_0 \in \mathbb{N}_0 : t = \dfrac{n_0}{2}$

Ainsi

$$\sigma(t) = \frac{n_0 + 1}{2},$$

et comme

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - t},$$

alors

$$\begin{aligned} f^{\Delta}(t) &= \frac{(\frac{n_0+1}{2})^2 - \left(\frac{n_0}{2}\right)^2}{\frac{n_0+1}{2} - \frac{n_0}{2}} \\ &= \frac{n_0+1}{2} + \frac{n_0}{2} \\ &= \frac{2n_0}{2} + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

D'où

$$f^{\Delta}(t) = 2t + \frac{1}{2}.$$

Exemple 1.7 *Considérons la fonction* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(t) = t^2$ *où* $\mathbb{T} = \{\sqrt{n}, n \in \mathbb{N}_0\}$

Pour tout $t \in \mathbb{T} : \exists\, n_0 \in \mathbb{N}_0 : t = \sqrt{n_0}$*, et donc*

$$\sigma(t) = \sqrt{n_0 + 1},$$

comme

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - t},$$

alors

$$\begin{aligned} f^{\Delta}(t) &= \frac{\left(\sqrt{n_0+1}\right)^2-\left(\sqrt{n_0}\right)^2}{\sqrt{n_0+1}-\sqrt{n_0}}. \\ &= \sqrt{n_0+1}+\sqrt{n_0}\,. \end{aligned}$$

Ainsi

$$f^{\Delta}(t)=\sqrt{t^2+1}+t.$$

Remarque 1.4 *Si* $\mathbb{T}=\mathbb{R}$, *alors d'après* (iii) *du théorème précédent on a la fonction* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

est $\Delta-$*différentiable en* $t\in\mathbb{R}$ *ssi :*

$$f^{'}(t)=\lim_{t\to s}\frac{f(t)-f(s)}{t-s},$$

existe et on a $f^{\Delta}(t)=f^{'}(t)$.

Remarque 1.5 *Si* $\mathbb{T}=\mathbb{Z}$ *d'après* (ii) *on a la fonction* $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ *est* $\Delta-$*différentiable en* $t\in\mathbb{Z}$,

et on a

$$f^{\Delta}(t)=\frac{f(\sigma(t))-f(t)}{\mu(t)}=\frac{f(t+1)-f(t)}{1}=f(t+1)-f(t)=\Delta f(t).$$

Théorème 1.2 *Si* $f\ ,g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ *sont* $\Delta-$*différentiables en* $t\in\mathbb{T}^k$, *alors :*

(i) $f+g$ *est* $\Delta-$*différentiable en* t *de plus*

$$(f+g)^{\Delta}(t)=f^{\Delta}(t)+g^{\Delta}(t),$$

(ii) αf *est* $\Delta-$*différentiable en* t *pour tout* $\alpha\in\mathbb{R}$ *et on a*

$$(\alpha f)^{\Delta}(t)=\alpha f^{\Delta}(t),$$

(iii) *fg est $\Delta-$différentiable en t et on a*

$$\begin{aligned}(fg)^{\Delta}(t) &= f^{\Delta}(t)\,g(t)+f(\sigma(t))\,g^{\Delta}(t)\\ &= f(t)\,g^{\Delta}(t)+f^{\Delta}(t)\,g(\sigma(t)),\end{aligned}$$

(iv) *si $g(t)\,g(\sigma(t))\neq 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ est $\Delta-$différentiable en t et on a*

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{\Delta}(t)=\frac{f^{\Delta}(t)\,g(t)-f(t)\,g^{\Delta}(t)}{g(t)\,g(\sigma(t))}.$$

Le Théorème suivant est énoncé dans le travail [6].

Théorème 1.3 *Soient W un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $t\in\mathbb{T}$ un point dense à droite. Si $g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}^n$ est $\Delta-$différentiable en t et si $f:W\to\mathbb{R}$ est différentiable en $g(t)\in W$, alors $f\circ g$ est $\Delta-$différentiable en t et on a*

$$(f\circ g)^{\Delta}(t)=\left\langle f'(g(t)),g(t)\right\rangle.$$

Définition 1.12 *Une fonction $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}^n$ est dite $rd-$continue si elle est continue en tout point dense à droite de $\mathbb{T}$ et si sa limite à gauche existe et est finie en tout point dense à gauche de $\mathbb{T}$.*

Remarque 1.6 *L'ensemble de toutes les fonctions $rd-$continues est noté par C_{rd} ou $C_{rd}(\mathbb{T})$.*

Remarque 1.7 *L'ensemble de toutes les fonctions $\Delta-$différentiables et $rd-$continues est noté par C^1_{rd} ou $C^1_{rd}(\mathbb{T})$.*

Exemple 1.8 *Considérons l'échelle de temps* $\mathbb{T} = \bigcup_{k=0}^{\infty} [2k, 2k+1]$.

On a

$$\mu(t) = \begin{cases} 0 \ si \ t \in \bigcup_{k=0}^{\infty} [2k, 2k+1[\\ 1 \ si \ t \in \bigcup_{k=0}^{\infty} \{2k+1\} \end{cases},$$

on suppose $t \in [0,1] \cap \mathbb{T}$, *alors on a :*

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}, \ t \in [0, 1[,$$

montrons que cette limite existe et :

$$f^{\Delta}(1) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1},$$

montrons que f *est continue en* $t = 1, f$ *est définie dans* $\mathbb{T}$ *par*

$$f(t) = \begin{cases} t \ si \ t \in [0, 1[\\ 2 \ si \ t \geq 1 \end{cases}.$$

En effet pour $t = 1, f$ *est rd−continue car* $(\lim_{t \to 1^-} f(t) = 1)$ *par contre elle n'est pas continue en ce point car* $(f(1) = 2)$.

Définition 1.13 *La fonction* $F : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *est dite primitive de* $f : \mathbb{T}^k \to \mathbb{R}$ *si elle vérifie* $F^{\Delta}(t) = f(t)$ *pour tout* $t \in \mathbb{T}^k$.

Théorème 1.4 *Toute fonction rd−continue* $f : \mathbb{T}^k \to \mathbb{R}$ *admet une primitive* $F : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *et on note*

$$\int_s^r f(t) \Delta t = F(r) - F(s) \quad pour \ tout \ \ r, s \in \mathbb{T},$$

de plus

$$\int_t^{\sigma(t)} f(\tau) \Delta \tau = \mu(t) f(t), t \in \mathbb{T}^k.$$

Preuve. On pose $F^{\Delta}(t) = f(t)$ alors

$$\int_{t}^{\sigma(t)} f(\tau)\,\Delta\tau = F(\sigma(t)) - F(t),$$

on a :

$$F^{\Delta}(t) = \frac{F(\sigma(t)) - F(t)}{\mu(t)},$$

d'où

$$F(\sigma(t)) - F(t) = F^{\Delta}(t)\,\mu(t) \Longrightarrow \int_{t}^{\sigma(t)} f(\tau)\,\Delta\tau = f(t)\,\mu(t).$$

■

Théorème 1.5 *Soient $a, b, c \in \mathbb{T}, \lambda \in \mathbb{R}$ et $f, g \in C_{rd}\left(\mathbb{T}^{k}\right)$ alors :*

$$\int_{a}^{b} [f(t) + g(t)]\,\Delta t = \int_{a}^{b} f(t)\,\Delta t + \int_{a}^{b} g(t)\,\Delta t,$$

$$\int_{a}^{b} (\lambda f(t))\,\Delta t = \lambda \int_{a}^{b} f(t)\,\Delta t,$$

$$\int_{a}^{b} f(t)\,\Delta t = -\int_{b}^{a} f(t)\,\Delta t,$$

$$\int_{a}^{b} f(t)\,\Delta t = \int_{a}^{c} f(t)\,\Delta t + \int_{c}^{b} f(t)\,\Delta t.$$

$$\int_{a}^{a} f(t)\,\Delta t = 0. \tag{1.6}$$

Si

$$\mid f(t) \mid \leq g(t)$$

sur $[a, b]_{\mathbb{T}^{k}}$ *, alors*

$$\mid \int_{a}^{b} f(t)\,\Delta t \mid \leq \int_{a}^{b} g(t)\,\Delta t.$$

Proposition 1.1 *Pour* $\mathbb{T}=\mathbb{R}$ *on a*

$$\int_a^b f(t)\,\Delta t=\int_a^b f(t)\,dt.$$

Preuve. évidente ■

Proposition 1.2 *Pour* $\mathbb{T}=\mathbb{Z}$ *on a*

$$\int_a^b f(t)\,\Delta t=\begin{cases}\sum_{t=a}^{b-1} f(t) & si\ \ a<b\\ 0 & si\ \ a=b\\ -\sum_{t=b}^{a-1} f(t) & si\ \ a>b\end{cases}.$$

Preuve. Comme $\mathbb{T}=\mathbb{Z}, a<b$, on a $\sigma(t)=t+1$.

Ainsi

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\,\Delta t &= \int_a^{a+1} f(t)\,\Delta t+\int_{a+1}^{a+2} f(t)\,\Delta t+\ ....+\int_{b-1}^{b} f(t)\,\Delta t\\ &= \int_a^{\sigma(a)} f(t)\,\Delta t+\int_{a+1}^{\sigma(a+1)} f(t)\,\Delta t+....+\int_{b-1}^{\sigma(b-1)} f(t)\,\Delta t\\ &= \mu(a)\,f(a)+\mu(a+1)\,f(a+1)+....+\mu(b-1)\,f(b-1),\end{aligned}$$

comme $\mu(t)=1$, on obtient

$$\int_a^b f(t)\,\Delta t=\sum_{t\in[a,b[} f(t).$$

De la même manière on montre le résultat dans le cas $a>b$.

Pour $a=b$ et d'après la propriété (1.6) du théorème précédent on trouve :

$$\int_a^b f(t)\,\Delta t=\int_a^a f(t)\,dt=0.$$

■

Proposition 1.3 *Si* $[a,b]$ *contient des points isolés alors :*

$$\int_a^b f(t)\,\Delta t = \begin{cases} \sum_{t\in[a,b[} \mu(t) f(t) & si\ a<b \\ 0 & si\ a=b \\ -\sum_{t\in[a,b[} \mu(t) f(t) & si\ a>b. \end{cases}$$

Preuve. On suppose que $[a,b]$ contient uniquement des points isolés. C'est-à-dire $[a,b]=\{t_0,t_1,...,t_n\}$. Autrement dit $a=t_0<t_1<...<t_n=b$.

D'après le théorème précédent on a :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\,\Delta t &= \sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t)\,\Delta t = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{\sigma(t_i)} f(t)\,\Delta t \\ &= \sum_{i=0}^{n-1}\mu(t_i) f(t_i) = \sum_{t\in[a,b[}\mu(t) f(t).\end{aligned}$$

Pour le cas $a=b$ on a :

$$\int_a^b f(t)\,\Delta t = 0,$$

par contre dans le cas $b<a$ on obtient

$$\int_a^b f(t)\,\Delta t = -\int_b^a f(t)\,\Delta t.$$

■

1.3.1 $\Delta-$Intégration par partie

Proposition 1.4

$$\int_a^b f^\sigma(t)\,g^\Delta(t)\,\Delta t = [(fg)(t)]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b f^\Delta(t)\,g(t)\,\Delta t,$$

$$\int_a^b f(t)\,g^\Delta(t)\,\Delta t = [(fg)(t)]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b f^\Delta(t)\,g^\sigma(t)\,\Delta t.$$

Preuve. D'après les propriétés de la dérivée on a

$$(fg)^{\Delta}(t) = f(\sigma(t))\, g^{\Delta}(t) + f^{\Delta}(t)\, g(t),$$

d'où

$$f(\sigma(t))\, g^{\Delta}(t) = (fg)^{\Delta}(t) - f^{\Delta}(t)\, g(t), \tag{1.7}$$

intégrons les deux membres de l'égalité (1.7) de a à b, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(\sigma(t))\, g^{\Delta}(t)\, \Delta t &= \int_a^b (fg)^{\Delta}(t)\, \Delta t - \int_a^b f^{\Delta}(t)\, g(t)\, \Delta t \\
&= [(fg)(t)]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b f^{\Delta}(t)\, g(t)\, \Delta t.
\end{aligned}$$

■

Définition 1.14 *Les fonctions :* $g_k, h_k : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}$ *sont définies par récurrence :*

$$g_0(t,s) = h_0(t,s) = 1.s, t \in \mathbb{T}.$$

$$g_{k+1}(t,s) = \int_s^t g_k(\sigma(\tau), s)\Delta\tau, h_{k+1}(t,s) = \int_s^t h_k(\tau,s)\Delta\tau k \in \mathbb{N}_0, s, t \in \mathbb{T}.$$

Sont appelées les polynômes d'échelles de temps.

Définition 1.15 *Soit* $p : \mathbb{T}^k \to \mathbb{R}, p$ *est dite régressive si elle vérifie :*

$$1 + \mu(t)p(t) \neq 0.$$

Remarque 1.8 *Pour tout* $t \in \mathbb{T}^k$*, l'ensemble des fonctions régressives et* $rd-$*continues est noté par* $\Re$.

Définition 1.16 *L'ensemble de toutes les fonctions régressives positifs est définie par :*

$$\Re^+ = \{p \in \Re : 1 + \mu(t)p(t) > 0, \text{ pour tout } t \in \mathbb{T}^k\}. \tag{1.8}$$

Définition 1.17 *Pour* $h > 0$*, on définie la transformation cylindrique :* $\xi_h : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}_h$*, par :*

$$\xi_h(z) = \frac{1}{h}\log(1 + zh),$$

où log *est le logarithme principale. Pour* $h = 0$*, on définie :* $\xi_0(z) = z$ *pour tout* $z \in \mathbb{C}$.

Théorème 1.6 *On suppose que :* $p \in \Re$ *et* $t_0 \in \mathbb{T}$ *un point fixé, alors le problème à valeur initiale*

$$y^{\Delta}(t) = p(t)y(t), \quad y(t_0) = 1, \tag{1.9}$$

admet une unique solution dans $\mathbb{T}$.

Définition 1.18 *Soit $p \in \Re$ et $t_0 \in \mathbb{T}$, la fonction exponentielle est définie par la solution du problème précédent et on a :*

$$y^{\Delta}(t) = p(t)\, y(t),$$

ce qui entraine

$$\frac{y^{\Delta}(t)}{y(t)} = p(t),$$

par intégration on obtient :

$$\log y(t) = \int_{t_0}^{t} p(\tau)\, \Delta\tau,$$

ainsi

$$y(t) = c \exp\left(\int_{t_0}^{t} p(\tau)\, \Delta\tau\right),$$

où c est une constante réelle. D'aprés la condition initiale on trouve : $c = 1$. D'où :

$$y(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} p(\tau)\, \Delta\tau\right),$$

et on pose

$$e_p(t, t_0) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} p(\tau)\, \Delta\tau\right).$$

Remarque 1.9 *Il est clair que*

$$e_p(\sigma(t), t_0) = (1 + \mu(t)p(t))e_p(t, t_0). \tag{1.10}$$

Remarque 1.10 *Pour $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, la fonction exponentielle est donnée par :*

$$e_p(t, t_0) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} p(\tau)\, d\tau\right)$$

où $t, t_0 \in \mathbb{R}$ et : $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.

Remarque 1.11 *Pour $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, la fonction exponentielle est donnée par :*

$$e_p(t, t_0) = \prod_{\tau=t_0}^{\tau=t} [1 + p(\tau)],$$

où $t, t_0 \in \mathbb{Z}, t_0 < t$ et, $p : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ est une suite vérifie

$$p(t) \neq -1 \text{ pour tout } t \in \mathbb{Z}.$$

Théorème 1.7 *Soit $a \in \mathbb{T}^k, b \in \mathbb{T}$ et $L : \mathbb{T} \times \mathbb{T}^k \to \mathbb{R}$ est continue en (t, t), pour $t \in \mathbb{T}^k$, $t > a$ et $L^\Delta(t, .)$ est rd−continue dans $[a, \sigma(t)]$,on suppose que pour tout $\epsilon > 0, \exists U$ un voisinage de t indépendant de $\tau \in [a, \sigma(t)]$ tel que :*

$$| L(\sigma(t), \tau) - L(s, \tau) - L^\Delta(t, \tau)(\sigma(t) - s) | \leq \epsilon | \sigma(t) - s | \quad \forall s \in U.$$

Où f^Δ dénote la deriveé de f par rapport à la $1^{i\grave{e}re}$ variable alors on a :

$$g(t) = \int_a^t L(t, \tau) \Delta\tau \Rightarrow g^\Delta(t) = \int_a^t L^\Delta(t, \tau) \Delta t + L(\sigma(t), t).$$

et

$$h(t) = \int_t^b L(t, \tau) \Delta\tau \Rightarrow h^\Delta(t) = \int_t^b L^\Delta(t, \tau) \Delta\tau - L(\sigma(t), t).$$

Preuve. On a

$$g(t) = \int_a^t L(t, \tau) \Delta\tau, \; g^\Delta(t) = \frac{g(\sigma(t)) - g(t)}{\mu(t)},$$

ce qui donne

$$g^\Delta(t) = \frac{1}{\mu(t)} \int_a^{\sigma(t)} L(\sigma(t), \tau) \Delta\tau - \frac{1}{\mu(t)} \int_a^t L(t, \tau) \Delta\tau. \tag{1.11}$$

d'autre part on a :

$$L^\Delta(t, \tau) = \frac{L(\sigma(t), \tau) - L(t, \tau)}{\mu(t)},$$

d'où

$$L(\sigma(t),\tau) = \mu(t) L^{\Delta}(t,\tau) + L(t,\tau). \tag{1.12}$$

Remplaçons (1.12) dans l'équation (1.11), on obtient

$$\begin{aligned}
g^{\Delta}(t) &= \int_a^{\sigma(t)} \left(L(t,\tau) + \frac{L(t,\tau)}{\mu(t)} \right) \Delta\tau - \frac{1}{\mu(t)} \int_a^t L(t,\tau)\,\Delta\tau \\
&= \int_a^{\sigma(t)} L(t,\tau)\,\Delta\tau + \int_a^{\sigma(t)} \frac{L(t,\tau)}{\mu(t)} \Delta\tau + \int_t^a \frac{L(t,\tau)}{\mu(t)} \Delta\tau \\
&= \int_a^t L^{\Delta}(t,\tau)\,\Delta\tau + \int_a^{\sigma(t)} L^{\Delta}(t,\tau)\,\Delta\tau + \frac{1}{\mu(t)} \int_t^{\sigma(t)} L(t,\tau)\,\Delta\tau,
\end{aligned}$$

comme

$$\int_t^{\sigma(t)} L(\tau)\,\Delta\tau = \mu(t) L(t),$$

on a

$$g^{\Delta}(t) = \int_a^t L^{\Delta}(t,\tau)\,\Delta\tau + \mu(t) L^{\Delta}(t,t) + L(t,t),$$

ainsi

$$g^{\Delta}(t) = \int_a^t L^{\Delta}(t,\tau)\,\Delta\tau + L(\sigma(t),t). \tag{1.13}$$

■

Théorème 1.8 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et différentiable et $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ $\Delta-$différentiable dans $\mathbb{T}^k$, alors $f \circ g$ est $\Delta-$différentiable et on a :*

$$(f \circ g)^{\Delta}(t) = \left\{ \int_0^1 f'\left(g(t) + h\mu(t) g^{\Delta}(t)\right) dh \right\} g^{\Delta}(t), \ \ t \in \mathbb{T}^k.$$

Définition 1.19 *On définit le cercle minus de soustraction $\ominus$ sur $\Re$ par*

$$
\begin{aligned}
p \ominus q &= \frac{p-q}{1+\mu q}, \\
(\ominus p)(t) &= \frac{-p(t)}{1+\mu p(t)}, \\
\ominus(\ominus p) &= p.
\end{aligned}
$$

1.4 Quelques inégalités importantes

Lemme 1.1 *On suppose que $p \geq 1, a \geq 0$. Alors*

$$
a^{\frac{1}{p}} \leq \frac{1}{p} K^{\frac{1-p}{p}} a + \frac{p-1}{p} K^{\frac{1}{p}}. \tag{1.14}
$$

pour chaque $K > 0$

Preuve. : voir [9] . ■

Lemme 1.2 *On suppose $a \geq 0, p \geq q \geq 0$ et $p \neq 0$, alors*

$$
a^{\frac{q}{p}} \leq \frac{q}{p} K^{\frac{q-p}{p}} a + \frac{p-q}{p} K^{\frac{q}{p}}, \tag{1.15}
$$

pour chaque $K > 0$.

Preuve. : Si $q = 0$, il est facile de voir que l'inégalité (1.14) est vérifiée. Il reste à prouver l'inégalité (1.15) dans le cas $q > 0$.

Posons $b = \frac{p}{q}$, donc $b \geq 1$ par le lemme précédent, on obtient le résultat.

Un résultat considéré comme un outil de base dans l'étude des inégalités de type Gronwall est donné par le lemme suivant : ■

Lemme 1.3 *(Comparaison) :*

On suppose que $u, b \in C_{rd}$, $a \in \Re^+$. Si

$$u^{\Delta}(t) \leq a(t)\, u(t) + b(t)\,, t \geq t_0, t \in \mathbb{T}^k.$$

alors,

$$u(t) \leq u(t_0)\, e_a(t, t_0) + \int_{t_0}^{t} e_a(t, \sigma(s))\, b(s)\, \Delta s, t \geq t_0, t \in \mathbb{T}^k. \tag{1.16}$$

Preuve. On utilise la propriété de la dérivée du produit de deux fonctions : ■

$$[ue_{\ominus}(.,t_0)]^{\Delta}(t) = u^{\Delta}(t)\, e_{\ominus a}(\sigma(t), t_0) + u(t)\,(e_{\ominus a}(t, t_0))^{\Delta},$$

$$= u^{\Delta}(t)\, e_{\ominus a}(\sigma(t), t_0) + u(t)\,(\ominus a)(t)\, e_{\ominus a}(t, t_0),$$

l'égalité (1.10), donne

$$[ue_{\ominus a}(.,t_0)]^{\Delta}(t) = u^{\Delta}(t)\, e_{\ominus a}(\sigma(t), t_0) + u(t)\,(\ominus a)(t)\, \frac{e_{\ominus a}(\sigma(t), t_0)}{1 + \mu(t)\,(\ominus a)(t)},$$

d'aprés la définition 1.19, on obtient

$$[ue_{\ominus a}(.,t_0)]^{\Delta}(t_0) = u^{\Delta}(t)\, e_{\ominus a}(\sigma(t), t_0) + u(t)\,(-(\ominus(\ominus a)))(t)\, e_{\ominus a}(\sigma(t), t_0),$$

$$= \left[u^{\Delta}(t) - (\ominus(\ominus a))(t)\, u(t)\right] e_{\ominus a}(\sigma(t), t_0),$$

ce qui montre que :

$$[ue_{\ominus a}(.,t_0)]^{\Delta}(t) = [u^{\Delta}(t) - a(t)u(t)]\, e_{\ominus a}(\sigma(t), t_0), \tag{1.17}$$

par intégration de l'équation (1.17) et comme $e_{\ominus a} > 0$, on obtient

$$u(t)\, e_{\ominus a}(t,t_0) - u(t_0) = \int_{t_0}^{t} [u^{\Delta}(s) - a(s)u(s)]\, e_{\ominus a}(\sigma(s), t_0)\,\Delta s$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} b(s)\, e_{\ominus a}(\sigma(s), t_0)\,\Delta s,$$

ce qui montre que

$$u(t)\, e_{\ominus a}(t,t_0) \leq \int_{t_0}^{t} b(s)\, e_{\ominus a}(\sigma(s), t_0)\,\Delta s + u(t_0), \tag{1.18}$$

multipliant l'inégalité (1.18) par $e_a(t,t_0)$, on trouve

$$u(t) \leq \int_{t_0}^{t} b(s)\, e_a(t_0, \sigma(s))\, e_a(t,t_0)\,\Delta s + u(t_0)\, e_a(t,t_0),$$

d'où

$$u(t) \leq \int_{t_0}^{t} b(s)\, e_a(t, \sigma(s))\,\Delta s + u(t_0)\, e_a(t,t_0).$$

Chapitre 2

Sur quelques inégalités intégrales aux échelles de temps

Théorème 2.1 *Soient $u(t), a(t), b(t)$ et $h_i(t)(i = 1, ...n) \in C_{rd}$, des fonctions positives. S'il existe une série des nombres réels $p_1, p_2, ..., p_n$ telle que $p \geq p_i > 0, i = 1, ...n$, alors*

$$u^p(t) \leq a(t) + b(t) \int_{t_0}^{t} \sum_{i=1}^{i=n} h_i(s) u^{p_i}(s) \Delta s, t \in \mathbb{T}^k, \tag{2.1}$$

implique

$$u(t) \leq (a(t) + b(t) \int_{t_0}^{t} e_y(t, \sigma(s)) m(s) \Delta s)^{\frac{1}{p}} \ , \ t \in \mathbb{T}^k, \tag{2.2}$$

où

$$m(t) = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{h_i(t)}{p} (p_i K^{\frac{p_i - p}{p}} a(t) + K^{\frac{p_i}{p}} (p - p_i)), \tag{2.3}$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{p_i}{p} K^{\frac{p_i - p}{p}} h_i(t) b(t). \tag{2.4}$$

Preuve. On pose

$$z(t) = \int_{t_0}^{t} \sum_{i=1}^{i=n} h_i(s) u^{p_i}(s) \Delta s, \tag{2.5}$$

l'inégalité (2.1) peut s'écrire aussi comme suit ■

$$u^p(t) \leq a(t) + b(t)z(t). \tag{2.6}$$

On applique le lemme 1.2, d'aprés (2.6), on obtient

$$\begin{aligned} u^{p_i}(t) &= (u^p(t))^{\frac{p_i}{p}} \leq (a(t) + b(t)z(t))^{\frac{p_i}{p}} \leq \frac{p_i}{p} K^{\frac{p_i - p}{p}} (a(t) + b(t)z(t)) \\ &+ \frac{p - p_i}{p} K^{\frac{p_i}{p}}, \end{aligned} \tag{2.7}$$

on dérive (2.5) et on utilise (2.6), on trouve

$$\begin{aligned} z^{\Delta}(t) &\leq \sum_{i=1}^{i=n} h_i(t) \left[\frac{p_i}{p} K^{\frac{p_i - p}{p}} (a(t) + b(t)z(t)) + \frac{p - p_i}{p} K^{\frac{p_i}{p}} \right] \\ &= y(t)z(t) + m(t), \end{aligned} \tag{2.8}$$

où

$$y(t) = b(t) \sum_{i=1}^{i=n} \frac{p_i}{p} K^{\frac{p_i - p}{p}} h_i(t), \tag{2.9}$$

et

$$m(t) = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{h_i(t)}{p} (p_i K^{\frac{p_i - p}{p}} a(t) + K^{\frac{p_i}{p}} (p - p_i)). \tag{2.10}$$

D'après le lemme 1.3 et comme $z(t_0) = 0$, l'inégalité suivante se dérive

$$z(t) \leq \int_{t_0}^{t} e_y(t, \sigma(s)) m(s) \Delta s, \ t \in \mathbb{T}^k. \tag{2.11}$$

On remplace (2.11) dans (2.6), on trouve l'inégalité souhaité.

Un autre résultat considéré comme conséquence du théorème 2.1, est donné par le théorème suivant

Théorème 2.2 *Sous les mêmes hypothèse du théorème 2.1, de plus* $a(t) > 0$ *est non* *décroissante. Si l'inégalité*

$$u^p(t) \leq a^p(t) + b(t)\int_{t_0}^{t}\sum_{i=1}^{i=n} h_i(s)u^{p_i}(s)\Delta s \ , \ t \in \mathbb{T}^k \ , \tag{2.12}$$

est satisfaite, alors, on a

$$u(t) \leq a(t)\left[1 + b(t)\int_{t_0}^{t} e_{y^*}(t,\sigma(s))m^*(s)\Delta s\right]^{\frac{1}{p}} \ , \ t \in \mathbb{T}^k, \tag{2.13}$$

où

$$m^*(t) = \sum_{i=1}^{i=n}\frac{h_i(t)a^{p_i-p}(t)}{p}(p_i K^{\frac{p_i-p}{p}} + K^{\frac{p_i}{p}}(p-p_i)), \tag{2.14}$$

et

$$y^*(t) = b(t)\sum_{i=1}^{i=n}\frac{p_i}{p}K^{\frac{p_i-p}{p}}h_i(t)a^{p_i-p}(t). \tag{2.15}$$

Preuve. Notons que $a(t) > 0$ et non décroissante pour $t \in \mathbb{T}^k$, par l'inégalité (2.12), il résulte

$$(\frac{u(t)}{a(t)})^p \leq 1 + b(t)\int_{t_0}^{t}\sum_{i=1}^{i=n} h_i(s)(\frac{u(s)}{a(s)})^{p_i}a(s)^{p_i-p}\Delta s. \tag{2.16}$$

Posons $w(t) = \dfrac{u(t)}{a(t)}$, donc l'inégalité (2.16) s'écrit de la forme

$$w^p(t) \leq 1 + b(t)\int_{t_0}^{t}\sum_{i=1}^{i=n} h_i(s)w^{p_i}(s)a(s)^{p_i-p}\Delta s, \tag{2.17}$$

on applique le théorème 2.1, d'après l'inégalité (2.17), il est facile d'obtenir l'estimation désirée.

Le résultat donné par le théorème suivant représente une généralisation du théorème 2.1. ∎

Théorème 2.3 *Sous les mêmes hypothèse du théorème 2.1. Si $L(t,)$ est la fonction définie au théorème 1.7 telle que $L(t,s) \geq 0$ et $L^{\Delta}(t,s) \geq 0$ pour $t, s \in \mathbb{T}$, avec $s \leq t$,* *alors, l'inégalité*

$$u^p(t) \leq a(t) + b(t)\int_{t_0}^{t} L(t,s)\sum_{i=1}^{i=n} h_i(s)u^{p_i}(s)\Delta s,\ t \in \mathbb{T}^k, \tag{2.18}$$

implique

$$u(t) \leq (a(t) + b(t)\int_{t_0}^{t} e_B(t,\sigma(s))A(s)\Delta s)^{\frac{1}{p}}, t \in \mathbb{T}^k, \tag{2.19}$$

où

$$A(t) = \left\{ \begin{array}{c} L(\sigma(t),t)\sum_{i=1}^{i=n} h_i(t)\left[\frac{p_i}{p}K^{\frac{p_i-p}{p}}a(t) + \frac{p-p_i}{p}K^{\frac{p_i}{p}}\right] + \\ \int_{t_0}^{t} L^{\Delta}(t,s)\sum_{i=1}^{i=n} h_i(s)\left[\frac{p_i}{p}K^{\frac{p_i-p}{p}}a(s) + \frac{p-p_i}{p}K^{\frac{p_i}{p}}\right]\Delta s \end{array} \right\}, \tag{2.20}$$

et

$$\begin{aligned} B(t) &= b(t)L(\sigma(t),t)\sum_{i=1}^{i=n} h_i(t)\frac{p_i}{p}K^{\frac{p_i-p}{p}} \\ &+ \int_{t_0}^{t} b(s)L^{\Delta}(t,s)\sum_{i=1}^{i=n} h_i(s)\frac{p_i}{p}K^{\frac{p_i-p}{p}}\Delta s. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Preuve. Soit la fonction $z(t)$ définie par

$$z(t) = \int_{t_0}^{t} L(t,s)\sum_{i=1}^{i=n} h_i(s)u^{p_i}(s)\Delta s. \tag{2.22}$$

On applique le théorème 1.7 et d'après (2.22), on obtient

$$z^{\Delta}(t) = L(\sigma(t),t)\sum_{i=1}^{i=n} h_i(t)u^{p_i}(t) + \int_{t_0}^{t} L^{\Delta}(t,s)\sum_{i=1}^{i=n} h_i(s)u^{p_i}(s)\Delta s, \tag{2.23}$$

de l'inégalité (2.7) et l'égalité (2.23), on trouve

$$
\begin{aligned}
z^{\Delta}(t) \quad \leq \quad & L(\sigma(t),t)\sum_{i=1}^{i=n} h_i(t)(\frac{p_i}{p}K^{\frac{p_i-p}{p}}(a(t)+b(t)z(t)) + \frac{p-p_i}{p}K^{\frac{p_i}{p}}) \\
& + \int_{t_0}^{t} L^{\Delta}(t,s)\sum_{i=1}^{i=n} h_i(s)(\frac{p_i}{p}K^{\frac{p_i-p}{p}}(a(s)+b(s)z(s)) \\
& + \frac{p-p_i}{p}K^{\frac{p_i}{p}})\Delta s,
\end{aligned} \tag{2.24}
$$

ce qui montre

$$
\begin{aligned}
z^{\Delta}(t) \quad \leq \quad & L(\sigma(t),t)\sum_{i=1}^{i=n} h_i(t)(\frac{p_i}{p}K^{\frac{p_i-p}{p}}a(t) + \frac{p-p_i}{p}K^{\frac{p_i}{p}}) \\
& + \int_{t_0}^{t} L^{\Delta}(t,s)\sum_{i=1}^{i=n} h_i(s)(\frac{p_i}{p}K^{\frac{p_i-p}{p}}a(s) + \frac{p-p_i}{p}K^{\frac{p_i}{p}})\Delta s \\
& + b(t)L(\sigma(t),t)\sum_{i=1}^{i=n} h_i(t)\frac{p_i}{p}K^{\frac{p_i-p}{p}}z(t) \\
& + \int_{t_0}^{t} b(s)L^{\Delta}(t,s)\sum_{i=1}^{i=n} h_i(s)\frac{p_i}{p}K^{\frac{p_i-p}{p}}z(s)\Delta s,
\end{aligned} \tag{2.25}
$$

pour $t, s \in \mathbb{T}$ avec $s \leq t$, et comme $z(s) \leq z(t)$, on obtient

$$
z^{\Delta}(t) \leq A(t) + B(t)z(t). \tag{2.26}
$$

où $A(t)$ est donné par (2.20) et $B(t)$ est donné par (2.21).

En faisant appel au lemme 1.3, on obtient l'inégalité suivante

$$
z(t) \leq \int_{t_0}^{t} e_B(t,\sigma(s))A(s)\Delta s, \; t \in \mathbb{T}, \tag{2.27}
$$

en utilisant (2.7) et (2.27), on obtient le résultat. ■

2.1 Autres résultats

Dans cette section, nous exposons quelques inégalités intégrales de type Gronwall aux échelles de temps, nous supposons dans ce qui suit que $t \geq t_0, t_0 \in \mathbb{T}^k$.

Théorème 2.4 *On suppose que* $u, f \in C_{rd}, u(t)$ *et* $f(t)$ *sont positives,* $c \geq 0$ *est une constante. Si* $L(t,s)$ *est la fonction définie au théorème 1.7 telle que* $L(t,s) \geq 0$ *,* $L^{\Delta}(t,s) \geq 0$ *pour* $t, s \in \mathbb{T}$ *avec* $s \leq t$*, alors de l'inégalité*

$$u^p(t) \leq c + \int_{t_0}^{t} f(\eta)\left[u^q(\eta) + \int_{t_0}^{\eta} L(\eta,s)u^r(s)\Delta s\right]\Delta\eta, t \in \mathbb{T}^k \tag{2.28}$$

on déduit que

$$u(t) \leq \left\{ \begin{array}{c} c + \int_{t_0}^{t} f(\eta)((\frac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}}c + \frac{p-q}{p}K^{\frac{q}{p}})e_{A^*}(\eta,t_0) + \\ \int_{t_0}^{\eta} e_{A^*}(\eta,\sigma(s))B^*(s)\Delta s)\Delta\eta \end{array} \right\}^{\frac{1}{p}}, t \in \mathbb{T}^k, \tag{2.29}$$

où

$$A^*(t) = \left[\frac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}}f(t) + \frac{r}{q}K^{\frac{r-q}{p}}(L(\sigma(t),t) + \int_{t_0}^{t} L^{\Delta}(t,s)\Delta s)\right], \tag{2.30}$$

et

$$B^*(t) = \frac{p-r}{p}K^{\frac{r}{p}}\left\{L(\sigma(t),t) + \int_{t_0}^{t} L^{\Delta}(t,s)\Delta s\right\}, \tag{2.31}$$

pour $p \neq 0$, $0 \leq q \leq p$ et $0 \leq r \leq p$.

Preuve. Posons

$$z(t) = c + \int_{t_0}^{t} f(\eta)\left[u^q(\eta) + \int_{t_0}^{\eta} L(\eta,s)u^r(s)\Delta s\right]\Delta\eta, t \in \mathbb{T}^k,$$

donc

$$\begin{aligned} z^{\Delta}(t) &= f(t)\left[u^q(t) + \int_{t_0}^{t} L(t,s)u^r(s)\Delta s\right] \\ &\leq f(t)\left[\begin{array}{c} \frac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}}z(t) + \frac{p-q}{p}K^{\frac{q}{p}} + \\ \int_{t_0}^{t} L(t,s)(\frac{r}{p}K^{\frac{r-p}{p}}z(s) + \frac{p-r}{p}K^{\frac{r}{p}})\Delta s \end{array} \right]. \end{aligned} \tag{2.32}$$

Soit la fonction $v(t)$ définie par

$$v(t) = \frac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}}z(t) + \frac{p-q}{p}K^{\frac{q}{p}} + \int_{t_0}^{t} L(t,s)(\frac{r}{p}K^{\frac{r-p}{p}}z(s) + \frac{p-r}{p}K^{\frac{r}{p}})\Delta s. \tag{2.33}$$

Alors, on a

$$\begin{aligned} v(t_0) &= \frac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}}c + \frac{p-q}{p}K^{\frac{q}{p}}, \\ \frac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}}z(t) &\leq v(t), \\ z^{\Delta}(t) &\leq f(t)v(t), \end{aligned} \tag{2.34}$$

comme $v(t)$ est non décroissante pour $t \in \mathbb{T}^k$. D'après le théorème 1.7, on a

$$\begin{aligned} v^{\Delta}(t) &= \frac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}}z^{\Delta}(t) + L(\sigma(t),t)(\frac{r}{p}K^{\frac{r-p}{p}}z(t) + \frac{p-r}{p}K^{\frac{r}{p}}) \\ &+ \int_{t_0}^{t} L^{\Delta}(t,s)(\frac{r}{p}K^{\frac{r-p}{p}}z(s) + \frac{p-r}{p}K^{\frac{r}{p}})\Delta s \end{aligned} \tag{2.35}$$

d'après (2.34) et (2.35), on déduit que

$$v^{\Delta}(t) \leq \left[\begin{array}{c} (\frac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}}f(t) + \frac{r}{q}K^{\frac{r-q}{p}}(L(\sigma(t),t) + \int_{t_0}^{t} L^{\Delta}(t,s)\Delta s))v(t) \\ +\frac{p-r}{p}K^{\frac{r}{p}}(L(\sigma(t),t) + \int_{t_0}^{t} L^{\Delta}(t,s)\Delta s) \end{array} \right], \tag{2.36}$$

l'inégalité (2.36) peut se mettre sous la forme

$$v^{\Delta}(t) \leq A^*(t)v(t) + B^*(t), \tag{2.37}$$

où $A^*(t)$ est donnée par (2.30) et $B^*(t)$ par (2.31). ■

On applique le lemme 1.3 et comme $v(t_0) = \frac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}}c + \frac{p-q}{p}K^{\frac{q}{p}}$, l'inégalité suivante se dérive

$$\begin{aligned} v(t) &\leq (\frac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}}c + \frac{p-q}{p}K^{\frac{q}{p}})e_{A^*}(t,t_0) + \int_{t_0}^{t} e_{A^*}(t,\sigma(s))B^*(s)\Delta s, \\ t &\in \mathbb{T}^k. \end{aligned} \tag{2.38}$$

L'inégalité (2.34) donne

$$z^{\Delta}(t) \leq f(t)\left[\begin{array}{c} (\frac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}}c + \frac{p-q}{p}K^{\frac{q}{p}})e_{A^*}(t,t_0) + \\ \int_{t_0}^{t} e_{A^*}(t,\sigma(s))B^*(s)\Delta s \end{array}\right]. \tag{2.39}$$

L'intégration de l'inégalité (2.39) de t_0 à t, donne

$$z(t) \leq c + \int_{t_0}^{t} f(\eta)\left[\begin{array}{c} (\frac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}}c + \frac{p-q}{p}K^{\frac{q}{p}})e_{A^*}(\eta,t_0) + \\ \int_{t_0}^{\eta} e_{A^*}(\eta,\sigma(s))B^*(s)\Delta s \end{array}\right]\Delta\eta, t \in \mathbb{T}^k. \tag{2.40}$$

En remplaçant (2.40) dans $u(t) \leq (z(t))^{\frac{1}{p}}$, on obtient l'estimation souhaitée.

Un autre résultat considéré comme conséquence du théorème précédent est donné par le théorème suivant

Théorème 2.5 *On suppose que $u, f, a \in C_{rd}, u(t)$ et $f(t)$ sont positives, $a(t) > 0$ est non décroissante. Si $L(t,s)$ est la fonction définie au théorème 1.7 telle que $L(t,s) \geq 0$, $L^{\Delta}(t,s) \geq 0$ pour $t, s \in \mathbb{T}$ avec $s \leq t$, alors, l'inégalité*

$$u^p(t) \leq a^p(t) + \int_{t_0}^{t} f(\eta)\left[u^q(\eta) + \int_{t_0}^{\eta} L(\eta,s)u^r(s)\Delta s\right]\Delta\eta, t \in \mathbb{T}^k, \tag{2.41}$$

implique

$$
\left[\begin{array}{c} u(t) \leq a(t)(1+\int_{t_0}^{t} f(\eta)a^{q-p}(\eta)((\frac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}} + \frac{p-q}{p}K^{\frac{q}{p}}) \\ e_{A^*}(\eta,t_0) + \int_{t_0}^{\eta} e_{A^*}(\eta,\sigma(s))B^*(s)\Delta s)\Delta\eta)^{\frac{1}{p}}, t \in \mathbb{T}^k, \end{array}\right], \tag{2.42}
$$

où

$$
A^*(t) = \left[\begin{array}{c} \frac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}} f(t)a^{q-p}(t) + \frac{r}{q}K^{\frac{r-q}{p}} (L(\sigma(t),t)a(t)^{r-q} + \\ \int_{t_0}^{t} L^{\Delta}(t,s)a(s)^{r-q}\Delta s) \end{array}\right], \tag{2.43}
$$

et

$$
B^*(t) = \frac{p-r}{p}K^{\frac{r}{p}}\left\{L(\sigma(t),t)a(t)^{r-q} + \int_{t_0}^{t} L^{\Delta}(t,s)a(s)^{r-q}\Delta s\right\}, t \in \mathbb{T}^k. \tag{2.44}
$$

Pour $p \neq 0$, $0 \leq r \leq q \leq p$.

Preuve. Comme $a(t) > 0$ est non décroissante, pour $t \in \mathbb{T}^k$, on observe que

$$
(\frac{u(t)}{a(t)})^p \leq 1 + \int_{t_0}^{t} f(\eta)a^{q-p}(\eta)\left[\begin{array}{c} (\frac{u(\eta)}{a(\eta)})^q + \\ \int_{t_0}^{\eta} L(\eta,s)a(s)^{r-q}(\frac{u(s)}{a(s)})^r\Delta s \end{array}\right]\Delta\eta, t \in \mathbb{T}^k. \tag{2.45}
$$

Posons

$$
w(t) = \frac{u(t)}{a(t)}, \tag{2.46}
$$

donc (2.45) peut se mettre sous la forme suivante

$$
w^p(t) \leq 1 + \int_{t_0}^{t} fa^{q-p}(\eta)\left[w^q(\eta) + \int_{t_0}^{\eta} L(\eta,s)a(s)^{r-q}w^r(s)\Delta s\right]\Delta\eta. \tag{2.47}
$$

En tenant compte de la démonstration établie au théorème précédent, on explicite le résultat suivant

$$w(t) \leq \left\{ 1 + \int_{t_0}^{t} f(\eta) a^{q-p}(t) \left[\begin{array}{c} (\frac{q}{p} K^{\frac{q-p}{p}} + \frac{p-q}{p} K^{\frac{q}{p}}) e_{A^*}(t, t_0) + \\ \int_{t_0}^{\eta} e_{A^*}(\eta, \sigma(s)) B^*(s) \Delta s \end{array} \right] \Delta\eta \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Où A^* est donnée par (2.43) et B^* par (2.44). ■

2.2 Application

Dans la section suivante, nous présentons quelques applications liées aux théorèmes 2.1et 2.4 où on va étudier quelques propriétés des solutions des équations dynamiques aux échelles de temps.

Exemple 2.1 *On considère l' équation dynamique suivante :*

$$\begin{aligned} (u^p(t))^{\Delta} + F(t, u(t)) &= r(t) \text{ pour } t \in \mathbb{T}^k \\ u(t_0) &= u_0. \end{aligned} \tag{2.48}$$

On suppose que

$$|F(t, u(t))| \leq \sum_{i=1}^{i=n} h_i(t) \left| u^{p_i} \right|, \tag{2.49}$$

où : $r(t), h_i(t) \in C_{rd}(i = 1, ...n)$ sont positives.

Par une simple intégration de l'équation (2.48) de t_0 à t et on utilise l'inégalité (2.49), on obtient

$$|u(t)|^p \leq |u_0|^p + \int_{t_0}^{t} |r(s)| \Delta s + \int_{t_0}^{t} \sum_{i=1}^{i=n} h_i(s) \left| u^{p_i}(s) \right| \Delta s, \tag{2.50}$$

l'inégalité (2.50) peut se mettre sous la forme

$$|u(t)|^p \leq a(t) + \int_{t_0}^{t} \sum_{i=1}^{i=n} h_i(s) \left| u^{p_i}(s) \right| \Delta s, \tag{2.51}$$

où

$$a(t) = |u_0|^p + \int_{t_0}^{t} |r(s)| \, \Delta s. \tag{2.52}$$

En faisant appel au théorème 2.1, on obtient une estimation pour la solution $u(t)$ de l'équation dynamique (2.48).

Exemple 2.2 *On considère le problème à valeur initiale :*

$$(u^p(t))^{\Delta} = f(t) \left[u^q(t) + \int_{t_0}^{t} L(t,s) u^r(s) \Delta s \right], u(t_0) = c, t \in \mathbb{T}^k, \tag{2.53}$$

où $f(t)$ et $L(t,s)$ sont définies au théorème 2.4, et c est une constante.

Théorème 2.6 *Supposons que $u(t)$ est une solution de* (2.53). *Alors*

$$|u(t)| \leq \begin{bmatrix} |c|^p + \int_{t_0}^{t} f(\eta)((\frac{q}{p} K^{\frac{q-p}{p}} |c|^p + \frac{p-q}{p} K^{\frac{q}{p}}) e_{A^*}(\eta, t_0) + \\ \int_{t_0}^{\eta} e_{A^*}(\eta, \sigma(s)) B^*(s) \Delta s) \Delta \eta \end{bmatrix}^{\frac{1}{p}}. \tag{2.54}$$

Preuve. La solution $u(t)$ de (2.53) satisfaite l'équation suivante :

$$u^p(t) = c^p + \int_{t_0}^{t} f(\eta) \left[u^q(\eta) + \int_{t_0}^{t} L(\eta, s) u^r(s) \Delta s \right] \Delta \eta, \tag{2.55}$$

L'équation (2.55) est estimée comme suit

$$|u(t)|^p \leq |c|^p + \int_{t_0}^{t} f(\eta) \left[|u(\eta)|^q + \int_{t_0}^{t} L(\eta, s) \, |u(s)|^r \, \Delta s \right] \Delta \eta. \tag{2.56}$$

On applique le théorème 2.4 à l'inégalité (2.56), on obtient (2.54) ■

Proposition 2.1 *Si $p = q = 1$, alors le problème* (2.53) *admet au plus une solution.*

Preuve. D'après (2.55), la solution de (2.53) vérifie

$$u(t) = c + \int_{t_0}^{t} f(\eta) \left[u(\eta) + \int_{t_0}^{t} L(\eta, s) u(s) \Delta s \right] \Delta \eta,$$

on suppose qu'il existe deux solutions u_1, u_2, donc, on aura

$$u_1(t) = c + \int_{t_0}^{t} f(\eta)\left[u_1(\eta) + \int_{t_0}^{t} L(\eta, s)u_1(s)\Delta s\right]\Delta\eta, \tag{2.57}$$

$$u_2(t) = c + \int_{t_0}^{t} f(\eta)\left[u_2(\eta) + \int_{t_0}^{t} L(\eta, s)u_2(s)\Delta s\right]\Delta\eta, \tag{2.58}$$

ce qui montre que

$$|u_1(t) - u_2(t)| \leq \int_{t_0}^{t} f(\eta)\left[|u_1(\eta) - u_2(\eta)| + \int_{t_0}^{t} L(\eta, s)\,|u_1(s) - u_2(s)|\,\Delta s\right]\Delta\eta,$$

de la forme

$$|w(t)| \leq \int_{t_0}^{t} f(\eta)\left[|w(\eta)| + \int_{t_0}^{t} L(\eta, s)\,|w(s)|\,\Delta s\right]\Delta\eta,$$

on applique le théorème 2.4 ($c = 0$), on obtient

$$|w(t)| \leq |c|\left[1 + \int_{t_0}^{t} f(\eta)(e_{A^*}(\eta, t_0)\Delta\eta\right],$$

prenons $c = 0$, on trouve $|w(t)| \leq 0$, ce qui montre que $w(t) = 0$.

Finalement,

$$u_1(t) = u_2(t).$$

■

2.3 Conclusion

Dans ce travail, on a élaboré des nouvelles inégalités intégrales, non linéaires de type Gronwall - Bellman aux échelles de temps. La contribution est l'étude de certains classes d'équations dynamiques, non linéaires dont les solutions ne peuvent être trouvés de façon explicites. Finalement, ces inégalités nous permettent d'étudier une des propriétés qualitatives la plus importante dans les équations différentielles dynamiques qui est : l'étude du comportement des solutions.

Bibliographie

[1] M. Bohner and A. Peterson, Dynamic Equations on Time Scales : An Introduction with Applications,Birkhäuser, Boston, Mass, USA, 2001.

[2] M. Bohner and A. Peterson, Eds., Advances in Dynamic Equations on Time Scales,Birkhäuser, Boston,Mass, USA, 2003.

[3] K. Boukerrioua and A.Guezane-Lakoud, Some nonlinear integral inequalities arising in differential equations, EJDE, Vol 2008 (2008), No.80, pp.1–6. http ://ejde.math.txstate.

[4] khaled Boukerrioua, "Note on Some Nonlinear Integral Inequalities and Applications to Differential Equations," International Journal of Differential Equations, vol. 2011,

[5] K. Boukerrioua, "Note on some nonlinear integral inequalities on time scales and applications to dynamic equations",Journal of Advanced Research in Applied Mathematics,Vol. 5, Issue. 2, 2013, pp. 1-12.

[6] Hugues Gilbert, Thèse de doctorat,Théorèmes d'existence pour des systèmes d'équations différentielles et d'équations aux échelles de temps,2009.

[7] S. Hilger,Ein Ma β kettenkalk¨ ul mit Anwendung auf Zentrumsmannigfaltigkeiten, PhD thesis, Universität. Würzburg (1988).

[8] S. Hilger, Analysis on measure chains–a unified approach to continuous and discrete calculus,Results Math., 18 (1990), 18–56.

[9] W.N.Li,M.A .Han,F. W. Meng,some new delay integral inequalities and their applications.J. Comput. Appl. Math.180(2005)191-200.

[10] B.G. Pachpatte, Inequalities for Differential and integral equation, Academic Press, New York, 1998.

[11] F. G.Tricomi, Integral Equations, New York, Interscience, 1957.