République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : Probabilités et Applications

Par :

CHAFAI Meryem et SLIMANI Hanane

Intitulé

Lois classiques de fiabilité

Dirigé par : S.BOUHADJAR

Devant le jury

PRESIDENT	A.EZZEBSA	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	S.BOUHADJAR	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	M.KARBOUA	Univ-Guelma

Session Juin 2013

Remerciement

Tout d'abord nous exprimons nos remercîment sincères à Monsieur

BOUHADJAR Slimane

Notre encadreur qui a dirigé notre travail et nous a conseillé

Judicieusement

.Nous exprimons aussi nos remercîment à tous les enseignants du département de la science exacte qui ont contribué à notre formation pour avoir le diplôme de master académique en mathématiques appliquées

.Nous exprimons également nos remercîment les plus chaleureux à tous nos collègues pour leurs aides durant tout ce travaille leurs encouragements.

.Enfin nous remercions tous ceux qui de loin ou de prés ont contribué à l'élaboration et à l'aboutissement de ce travaille.

Dédicace

Notre dédions a modeste travail à deux personnes qui sont les plus chères au monde qui nous ont comblé de leurs amours et leurs affections

.A nos mères qui nous ont toujours soutenues depuis premier pas jusqu'à ce jour et qui ont toujours su trouver les mots qu'il fallait pour nous encourager.

.A nos pères qui ont tout fait pour que nous ne manquions de rien.

.A tous nos enseignants qui ont contribué à notre formation.

.A toutes les familles : ***CHAFAI- SLIMANI.***

.A le fiancé de Hanane : Karim

.A tout les collègues et amies et particulièrement : ***Hassiba. Kawther. Fatima. Aicha, wahida, meriem, Salwa. Wafa. Zouleikha. Sameh. Sara. et Ibtissam.***

.A la sœur cadette de ***Hanane: Hadjira,****et le frère* ***Benjamin de Meryem :Ilyes***

.A la promotion ***2012-2013.***

Table des matières

Introduction

L'intérêt pour la théorie de fiabilité a été une conséquence des problèmes liés à l'élaboration en 1940 de systèmes radioélectroniques destinés à des fins militaires.

Fiabilité est un mot provenant de l'adjectif "fiable". Le petit Robert en donne la définition suivante : <<aptitude d'un système, d'un matériel à fonctionner sans incident pendant un temps donné >>; pour L'AFNOR, la fiabilité est : <<la caractéristique d'un dispositif qui s'exprime par la probabilité pour ce dispositif d'accomplir une fonction requise, pendant une période donnée >>.

La fiabilité est un concept qui intéresse de nombreux domaines de l'activité humaine : économique, scientifique, technique et industriel,... Elle est étroitement liée à des notions de sécuriaire à différents niveaux de la vie du système (ou équipement) : au niveaux de la conception ou de la fabrication, afin de pouvoir élever le degré de fiabilité selon les normes spécifiées; au niveauté de fonctionnement, de qualité, d'efficacité ou de performance. L'étude de fiabilité est nécess de l'exploitation, afin d'estimer les incidences du support logistique sur ses conditions d'utilisation; au niveau des services de maintenance, dans le but de prévoir les dates de prophylaxie et d'arrêts préventifs; au niveau des gestionnaires des pièces de recharge, afin d'estimer le volume des stocks de sécurité et assurer par là même la disponibilité de la pièce, en évitant les stocks morts etc....

Donc la théorie de la fiabilité a développé l'étude des méthodes probabilistes et statistiques permettant d'améliorer les prévisions de panne ou le contrôle de qualité nécessaire à la sortie d'une chaîne de production.

Notre objectif, dans ce mémoire, est de construire des outils afin d'évaluer la probabilité de bon fonctionnement d'un élément ou d'un système. L'étude de la fiabilité se ramène alors à l'étude d'une variable aléatoire positive représentant la durée de bon fonctionnement. Ce type d'étude amène à l'utilisation des résultats classiques de la théorie générale des probabilités.

Le mémoire est composé de deux chapitres:

- **Chapitre 1.** *Notions générales sur la fiabilité:* dans ce chaptire, nous introduisons le vocabulaire et les définitions concernant les caractéristiques de la fiabilité.

- **Chapitre 2.** *Lois classiques de la fiabilité:* nous allons, dans ce chapitre, évoquer les lois de probabilité qui interviennent le plus fréquemment dans la théorie de la fiabilité.

Chapitre 1

Notions générales sur la fiabilité:

Dans ce chapitre, on donne Les notions de base de la fiabilité et les définitions de ses caractéristiques qu'on utilisera par la suite, et on rappelle brièvement quelques résultats sur les systèmes en série et les systèmes en parallèle.

1.1 Définitions:

Définition générale. La fiabilité est l'aptitude d'un système à accomplir une fonction (ou mission) donnée durant une période déterminée dans des conditions spécifiées d'exploitation.

1.1.1 Durée de vie d'un système:

Le terme de système au sens large, il peut n'avoir qu'un composant. Ce système est mis en marche à la date $t = 0$ et il s'agit d'évaluer la date de première défaillance que nous noterons, dans la suite,"T". C'est une variable aléatoire positive de fonction de répartition F.

La variable T est appelée la durée de vie (life time) du système (ou bien le temps de défaillance du système).

On a:

$$F(t) = \mathbb{P}(T \leq t)$$

1.1.2 Fiabilité d'un système:

La fiabilité (reliability) d'un système est notée "R". C'est la probabilité de la durée de vie de bon fonctionnement du système.

$$\begin{aligned} R(t) &= \mathbb{P}(T > t) \\ &= 1 - F(t) \end{aligned}$$

Remarque:

La fonction de fiabilité R est une fonction décroissante continue à droite en tout point de $\mathbb{R}_+$.

De plus, on a:

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} R(x) = 0$$

1.1.3 Durée de survie:

Lorsqu'un système a bien fonctionné jusqu'à la date t, le temps d'attente de la panne est appelé la durée de survie du sytème au temps t (ou encore durée de vie résiduelle). Donc la durée de survie représente la variable aléatoire $T - t$ conditionnée par l'événement $\{T > t\}$. Nous la notons "T_t".

La distribution de T_t est donnée par:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_t > x) &= \mathbb{P}(T - t > x \;/\; T > t) \\ &= \frac{R(t+x)}{R(t)}, \text{ pour } x \geq 0 \end{aligned}$$

C'est à partir de cette notion que nous allons introduire les principales autres caractéristiques de fiabilité.

Commençons par examiner le comportement de la fonction de répartition de T_t lorsque la variable tend vers zéro.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_t \leq x) &= \frac{R(t) - R(t+x)}{R(t)} \\ &= x\frac{f(t)}{R(t)} + o(x)\end{aligned}$$

C'est une fonction de x, presque linéaire dont le coefficient proportionnalité est $\frac{f(t)}{R(t)}$.

1.1.4 Taux de défaillance:

Le coefficient $\frac{f(t)}{R(t)}$ est appelé taux de défaillance (ou hasard rate) et on le note h ou $h(t)$. Il est donc défini par:

$$\begin{aligned}h(t) &= \lim_{x\to 0}\frac{R(t) - R(t+x)}{x.R(t)} \\ &= -[\log R(t)]'\end{aligned}$$

Le terme **"taux de défaillance"** sous-entend une grandeur permettant de mesurer la vitesse d'apparition des pannes. Il est possible, en effet, d'interpréter $h(t)$ comme le pourcentage moyen de panne par unité de temps, qui apparaissent à la date t. Ceci apparait clairement à l'occasion d'un test de production. A la date $t = 0$, un groupe de N éléments indépendants et identiques sont mis en fonctionnement. Ces éléments tombent en panne, les uns après les autres. A la date t, un contrôle est effectué pour constater les dégâts. Il reste $N(t)$ éléments en bon état. La loi de $N(t)$ est binomiale (N essais avec probabilité $R(t)$ de réussite de chaque essai),

$$\mathbb{P}(N(t) = k) = \frac{N!}{(N-k)!k!}(R(t))^k(1 - R(t))^{N-k}$$

Le nombre moyen d'éléments en fonctionnement à la date t est donc:

$$\mathbb{E}(N(t)) = N.R(t)$$

Le taux de défaillance d'un élément peut donc être traduit en termes d'espérances:

$$
\begin{aligned}
h(t) &= \lim_{x\to 0}\frac{N.R(t)-N.R(t+x)}{x.N.R(t)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\mathbb{E}(N(t))-\mathbb{E}(N(t+x))}{x.\mathbb{E}(N(t))}
\end{aligned}
$$

C'est le rapport entre le nombre moyen de pannes par unité de temps et le nombre moyen d'éléments en bon fonctionnement. Il traduit bien une **"vitesse"** de dégradation.

La notion de **"taux de défaillance"** est, pour le fiabiliste, une caractéristique importante. Sa connaissance suffit à déterminer la fiabilité grâce à la relation suivante:

$$R(t) = \exp\left(-\int_0^t h(u)\,du\right)$$

La primitive H de h s'annulant en 0 est appelée la fonction de risque (ou hazard function). Elle est donc définie par:

$$H(t) = \log\left(\frac{1}{R(t)}\right)$$

Dans les applications concrètes, il est très fréquent de supposer le taux de défaillance constant.

Il faut dire que les calculs s'en trouvent grandement simplifiés. Dans ce cas, la fonction H est linéaire et la distribution est exponentielle.

Proposition: La seule distribution de durée de vie vérifiant $R(0) = 1$, et dont le taux de défaillance est constant, égal à a est la loi exponentielle de paramètre a avec:

$$F(x) = 1 - e^{-ax}$$

Preuve: Supposons que la durée de vie T a une densité de la forme:

$$f(x) = a.e^{-ax}$$

la fiabilité s'écrit alors:

$$R(t) = \exp(-at)$$

Le taux de défaillance est donc:

$$\begin{aligned} h(t) &= -\left[\log\left(R\left(t\right)\right)\right]' \\ &= \frac{f(t)}{R(t)} \\ &= a \end{aligned}$$

Réciproquement, supposons que $h(t)$ est constant et vaut a. Alors :

$$\begin{aligned} R(t) &= \exp\left(-\int_0^t h(x)dx\right) \\ &= \exp\left(-\int_0^t a.dx\right) \end{aligned}$$

Ce qui implique que:

$$R(t) = \exp(-at)$$

c'est-à-dire:

$$F(t) = 1 - \exp(-at)$$

donc la loi est exponentielle.

1.1.5 Temps moyens:

L'espérance de la durée de vie T joue un grand rôle en fiabilité; c'est le **"temps moyen de panne"** ou $M.T.T.F.$ (Mean Time To Failure). Nous le notons "m" :

$$\begin{aligned} m &= MTTF \\ &= \mathbb{E}\left(T\right) \end{aligned}$$

C'est une mesure importante de la qualité d'un système. Pour la calculer, il est préférable d'utiliser la formule d'intégration suivante:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(T) &= \int_0^{+\infty} (1 - F(u))du \\ &= \int_0^{+\infty} R(u)du \end{aligned}$$

L'espérance de survie à la date t est appelée **"durée moyenne de vie résiduelle de panne"** (M.R.T.F. mean residual Time to Failure). Elle est notée "$m(t)$".

Proposition: La formule de la durée moyenne de vie résiduelle est donnée par:

$$m(t) = \frac{1}{R(t)} \int_t^{\infty} R(u).du$$

1.1.6 Fonction de structure:

Considérons maintenant un système de n éléments (composants), en supposant que tous les composants sont indépendants. On précise qu'un composant ne possède que deux états; il fonctionne ou il est en panne.

Si X_i est l'état du composant i, on pose:

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{si le } i^{eme} \text{ composant fonctionne,} \\ 0, & \text{si le } i^{eme} \text{ composant est en panne.} \end{cases}$$

Cette dichotomie est valable aussi pour le système:

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1, & \text{si le système fonctionne,} \\ 0, & \text{si le système est en panne.} \end{cases}$$

La fonction Φ est appelée la fonction de structure du système.Alors, on déduit que la fiabilité du système peut s'écrire :

$$R = P(\Phi(x) = 1) = \mathbb{E}(\Phi(x))$$

1.2 Système en série:

Un système en série est un système composé de n composants disposés linéairement.

système en série

Ce système tombe en panne si au moins un composant est en panne.

La fonction de structure du système est donnée par:

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= \min_{1\leq i\leq n} X_i \\ &= \prod_{i=1}^{n} X_i\end{aligned}$$

où $X_1, X_2, ..., X_n$. sont les états respectifs des composants $1, 2, ..., n$.

Le temps de panne (la durée de vie) du système est donné par:

$$T = \min_{1\leq i\leq n} T_i$$

où T_i est le temps de panne du composant i, $i = 1, 2, ..., n$.

La fiabilité R est le produit des fiabilités,

$$R(t) = \prod_{i=1}^{n} R_i(t)$$

où $R_i(t)$ est la fiabilité du composant $i, i = 1, 2, ..., n$.

En effet, on a:

$$\begin{aligned}R(t) &= \mathbb{P}(T > t) \\ &= \mathbb{P}(\min_{1\leq i\leq n} T_i > t) \\ &= \mathbb{P}(T_1 > t, T_2 > t, ..., T_n > t) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(T_i > t)\end{aligned}$$

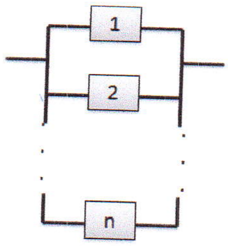
puisque on a supposé que les composants sont indépendants.

Donc,

$$R(t) = \prod_{i=1}^{n} R_i(t)$$

1.3 Système en parallèle:

Un système en parallèle est composé de n éléments (composants) disposés en parallèle, tels que le système tombe en panne, si et seulement si tous les composants sont en panne.



système en parallèle

La fonction de structure du système est donnée par:

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \max_{1\leq i\leq n} X_i \\ &= 1-\prod_{i=1}^{n}(1-X_i) \end{aligned}$$

Le temps de panne du système est donné par:

$$T = \max_{1\leq i\leq n} T_i$$

La fiabilité est donnée par:

$$R(t) = 1-\prod_{i=1}^{n}(1-R_i(t))$$

où $R_i(t)$ est la fiabilité du composant $i, i = 1, 2, ..., n$.

En effet, on a:

$$
\begin{aligned}
R(t) &= \mathbb{P}(T > t) \\
&= 1 - \mathbb{P}(T \leq t) \\
&= 1 - \mathbb{P}(\max_{1 \leq i \leq n} T_i \leq t) \\
&= 1 - \mathbb{P}(T_1 \leq t, T_2 \leq t, ..., T_n \leq t) \\
&= 1 - [\mathbb{P}(T_1 \leq t), \mathbb{P}(T_2 \leq t), ..., \mathbb{P}(T_n \leq t)] \\
&= 1 - [(1 - \mathbb{P}(T_1 > t)), (1 - \mathbb{P}(T_2 > t)), ..., (1 - (\mathbb{P}(T_n) > t))] \\
&= 1 - \prod_{i=1}^{n} [1 - \mathbb{P}(T_i > t)]
\end{aligned}
$$

Donc,

$$R(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - R_i(t))$$

Chapitre 2

Lois classiques de fiabilité

Nous allons, dans ce chapitre, évoquer les lois de probabilité qui interviennent le plus fréquemment dans la théorie de la fiabilité, Les lois les plus simples utilisées en fiabilité sont celles dont le taux de défaillance est constant. C'est pourquoi nous commençons par la loi exponentielle.

2.1 Loi exponentielle:

La célèbre fonction d'Euler (fonction gamma), joue un rôle important pour l'utilisation des lois exponentielles en fiabilité. Nous en rappelons les propriétés de base.

Définition: La fonction gamma Γ est définie sur l'ensemble des réels positifs par:

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} x^{z-1}.e^{-x}.dx$$

Il est facile de vérifier la relation suivante:

$$\begin{aligned} \Gamma(0) &= \Gamma(1) \\ &= 1 \\ \text{et } \Gamma(z+1) &= z.\Gamma(z) \text{ pour tout } z \text{ positif.} \end{aligned}$$

Si k un entier, on trouve:

$$\Gamma(k+1) = k!$$

2.1.1 Caractéristiques de la loi exponentielle:

La densité: La seule distribution possible pour une durée de vie dont la fiabilité en 0 vaut 1 et dont le taux de défaillance h est constant de valeur a, est la loi exponentielle de paramètre a, de densité:

$$f(x) = a.e^{-ax}$$

Cela suffit à définir la loi exponentielle; mais il est possible également de l'introduire à partir des durées de vie résiduelles.

Proposition: Le seul type de distribution pour une durée de vie vérifiant $R(0) = 1$, et dont telle que les durées de vie résiduelles ont toutes même loi est la loi exponentielle.

Preuve: On sait que la distribution de la durée de survie est donnée par:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_t > x) &= \mathbb{P}(T - t > x \,/\, T > t)\\ &= \frac{R(t+x)}{R(t)}\end{aligned}$$

En prenant $t = 0$, ce rapport est égal à $R(x)$.

Comme les durées de vie ont toutes même loi, on conclut que:

$$R(t+x) = R(t).R(x), \text{ pour tout couple } (t,x) \text{ de réels positifs.}$$

Cette égalité est une propriété caractéristique classique de l'exponentielle.

Les moments:

Proposition: Pour tout r positif ou nul, le moment d'ordre r de la durée de vie de T exponentielle de paramètre $a > 0$ est donné par:

$$\mathbb{E}(T^r) = \frac{\Gamma(r+1)}{a^r}$$

Si r est entier, on obtient:

$$\mathbb{E}(T^r) = \frac{r!}{a^r}$$

En particulier, on a:

$$\mathbb{E}(T) = \frac{1}{a} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(T) = \frac{1}{a^2}$$

Preuve: On démontre l'égalité:

$$\mathbb{E}(T^r) = \frac{\Gamma(r+1)}{a^r}$$

en utilisant la démonstration par récurrence,

Pour $r = 0$, on a:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(T^0) &= \mathbb{E}(1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(0+1)}{a^0} &= \frac{\Gamma(1)}{1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Donc, l'égalité est vraie pour $r = 0$, on suppose qu'elle est vraie jusqu'à l'ordre r et on la démontre pour l'ordre $(r+1)$.

On a:

$$\mathbb{E}(T^{r+1}) = \int_0^{+\infty} x^{r+1}.a.e^{-ax}.dx$$

En utilisant l'intégration par partie:

$$\mathbb{E}(T^{r+1}) = \frac{(r+1)}{a^r}.\int_0^{+\infty} (ax)^r.e^{-ax}.dx$$

On pose: $y = ax$,on trouve:

$$\mathbb{E}(T^{r+1}) = \tfrac{(r+1)}{a^r}.\int_0^{+\infty} y^r.e^{-y}.\tfrac{1}{a}.dy$$

Mais

$$\int_0^{+\infty} x^r.a.e^{-ax}.dx = \mathbb{E}(T^r)$$

qui est égal à $\frac{\Gamma(r+1)}{a^r}$ par supposition,

Donc:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(T^{r+1}\right) &= \frac{(r+1)}{a}\frac{\Gamma(r+1)}{a^r} \\
&= \frac{1}{a^{r+1}}(r+1)\Gamma(r+1) \\
&= \frac{1}{a^{r+1}}\Gamma(r+2)
\end{aligned}
$$

La relation $\Gamma(r+1) = r!$ pour r entier, permet d'obtenir:

$$\mathbb{E}(T^r) = \frac{r!}{a^r}$$

2.1.2 Utilisation de loi exponentielle:

Bien sûr, aucun système réel n'est, à un instant donné, totalement " sans mémoire " relativement à la qualité de fonctionnement. Cependant, dans la vie d'un produit, la période de maturité correspond à un taux de défaillance approximativement constant, et pour cette période, le choix d'un modèle exponentiel est tout à fait satisfaisant. Pour les systèmes électroniques, cette période est même très étendue. Le modèle exponentiel est également important sur le plan théorique car il permet des calculs explicites et sert de référence pour tous les systèmes existants. Remarquons les propriétés de quelques systèmes simples formés de composants exponentiels.

Considérons un ensemble de n éléments. Chacun d'entre eux a une durée de vie de loi exponentielle de paramètre respectif a_i, $i = 1, 2, ..., n$.

Pour le système série, la fiabilité est:

$$
\begin{aligned}
R(t) &= \prod_{i=1}^{n} R_i(t) \\
&= \exp(-a.t) \text{ où } a = \sum_{i=1}^{n} a_i
\end{aligned}
$$

Le système série, formé de composants exponentiels est lui même exponentiel dont le paramètre est la somme des paramètres correspondants.

Pour le système parallèle, la fiabilité est:

$$R(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n} [1 - \exp(-a_i.t)]$$

Remarquons que, dans le cas d'éléments fiables (c'est-à-dire les constants a_i sont petits), et pour des faibles valeurs de t, nous pouvons utiliser l'approximation suivante:

$$R(t) \simeq 1 - t^n \prod_{i=1}^{n} a_i$$

2.1.3 Statistique d'ordre de l'exponentielle:

Afin d'étudier la qualité de fonctionnement d'une machine, un test est organisé avec n machines identiques. Les durées de vie, notées "T_1", "T_2", ..., "T_n "suivent la loi exponentielle de paramètre a positif, et sont supposées indépendantes. Lors du test, on note "$T_{(1)}$", "$T_{(2)}$", ..., "$T_{(n)}$" les dates d'apparitions successives des pannes. Les inter-arrivées sont notés "D_1", "D_2", ..., "D_n" et donc définies par:

$$\begin{cases} D_1 = T_{(1)} \\ D_2 = T_{(2)} - T_{(1)} \\ D_3 = T_{(3)} - T_{(2)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ D_n = T_{(n)} - T_{(n-1)} \end{cases}$$

Dans la pratique, les observations portent sur D_k et $T_{(k)}$ plus que sur les durées de vie elles-mêmes. Il est donc intéressant d'analyser les propriétés de ces variables.

Proposition: Les variables D_k pour $k = 1, 2, ..., n$ vérifient les propriétés suivantes:

1) la loi des inter-arrivées est donnée par:

$$\mathbb{P}(D_k \leq x) = 1 - \exp\left(-\left(n - k + 1\right) ax\right)$$

2) les variables D_k sont indépendantes,

3) l'espérance de D_k est donnée par $\mathbb{E}(D_k) = \frac{1}{(n-k+1)a}$,

4) la variance de D_k est donnée par $\mathbb{V}(D_k) = \mathbb{E}\left(D_k\right)^2$.

Preuve: 1) On démontre cette assertion de proche en proche. Pour $k = 1$ la variable D_1 est

$$D_1 = \min\left(T_1, T_2, ..., T_n\right)$$

donc:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(D_1 > x\right) &= \mathbb{P}\left(\min_{1\leq i\leq n}\{T_i > x\}\right) \\
&= \prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}\left(T_i > x\right) \\
&= e^{-nax}.
\end{aligned}$$

Pour calculer $\mathbb{P}\left(D_2 > x\right)$, il suffit de remarquer que D_2 représente le minimum des durées de vie des $(n-1)$ machines restantes, donc :

$$\mathbb{P}\left(D_2 > x\right) = e^{-a(n-1)x}$$

La formule générale s'obtient ainsi, par récurrence.

Les assertions 3) et 4) sont des conséquences immédiates de l'assertion 1).

Proposition: Soit k un entier $(1 \leq k \leq n)$, la variable $T_{(k)}$ représente la date de la $k^{ème}$ panne. La fonction de répartition, l'espérance et la variance sont données par:

$$\mathbb{P}(T_{(k)} \leq t) = \sum_{i=k}^{n} C_n^i. \left(1 - e^{-at}\right)^i .e^{-(n-i)at}$$

$$\mathbb{E}(T_{(k)}) = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + ... + \frac{1}{n-k+1}\right)$$

$$\mathbb{V}\left(T_{(k)}\right) = \frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n-1)^2} + ... + \frac{1}{(n-k+1)^2}\right)$$

Preuve: La variable $T_{(k)}$ est la date de la $k^{ième}$ panne. Elle est inférieur à t si, au maximum $(n-k)$ machines sont encore en fonctionnement à la date t. Alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T_{(k)} \leq t) = \sum_{i=k}^{n} C_n^i.\mathbb{P}\left(i \text{ machine sont en panne}\right) \times \\
\mathbb{P}\left((n-i) \text{ machines soient en fonctionnement}\right)
\end{aligned}$$

Mais, on a :

$$\mathbb{P}\left(\text{une machine en panne}\right) = 1 - e^{-at}$$

et

$$\mathbb{P}\left(\text{une machine en fonctionnement}\right) = e^{-at}$$

De plus, comme les variables $T_1, T_2, ..., T_n$ sont indépendantes, on déduit que:

$$\mathbb{P}\left(i \text{ machine sont en panne}\right) = \left(1 - e^{-at}\right)^i$$

et

$$\mathbb{P}\left(\left(n-i\right) \text{ machines soient en fonctionnement}\right) = e^{-a(n-i)t}$$

Alors:

$$\mathbb{P}(T_{(k)} \leq t) = \sum_{i=k}^{n} C_n^i. \left(1 - e^{-at}\right)^i .e^{-(n-i)at}$$

Pour calculer l'espérance et la variance de $T_{(k)}$, il suffit d'utiliser la formule donnant la loi de D_i dans la proposition précédente, à savoir :

$$T_{(k)} = \sum_{i=1}^{k} D_i$$

2.2 Loi gamma:

La distribution $\Gamma\left(a, b\right)$ de paramètres a et b, $\left(a, b > 0\right)$, est définie par sa densité qui de la forme suivante:

$$f\left(t\right) = K.t^{a-1}.e^{-bt}$$

où K est le coefficient de normalisation donnant l'intégrale égale à 1. Cette distribution est liée à la fonction gamma par la relation:

$$K = b^a. \left(\Gamma\left(a\right)\right)^{-1}$$

La densité: En remplaçons K par sa valeur, on déduit que la densité de loi gamma s'écrit sous la forme:

$$f(t) = b.\,(bt)^{a-1}\, e^{-bt}\, (\Gamma(a))^{-1}$$

Les moments:

En utilisant la définition ci- dessus, nous obtenons, pour le moment d'ordre $r > 0$

$$\mathbb{E}(T^r) = \Gamma(a+r).\Gamma(a)^{-1}.b^{-r}$$

Ce qui permet, en particulier, d'exprimer les valeurs de l'espérance et de la variance d'une variable de loi gamma $\Gamma(a,b)$:

$$\mathbb{E}(T) = \frac{a}{b} \text{ et } Var(T) = \frac{a}{b^2}$$

2.3 Loi de Weibull:

On étudie maintenant, la plus populaire des lois (non exponentielles) rencontrées en fiabilité, aussi bien dans les domaines mécaniques qu'électroniques. Son succès tient à sa caractérisation par son taux de défaillance qui est fonction puissance de t.

Une variable T suit une loi de Weibull ($W(a,b)$) de paramètres a et b si son taux de défaillance s'écrit:

$$h(t) = a.b.(bt)^{a-1}$$

et de densité:

$$f(t) = a.b.(b.t)^{a-1} e^{-(bt)^a}$$

L'utilisation de la loi de Weibull est très importante et cette loi permet de modéliser de nombreuse situations d'usure de matérièl, par exemple, on la trouve également comme approximation dans des situations très simples, comme dans l'exemple suivant:

Exemple: Un système est formé de trois éléments identiques en parallèle, le taux de défaillance de chaque élément est constant égal à a.

La fiabilité s'écrit donc:

$$R(t) = 1 - \left(1 - e^{-at}\right)^3$$

Si la durée de vie moyenne a^{-1} de chaque élément est assez grande, il est possible d'utiliser l'approximation suivante:

$$R(t) = \exp\left(-(at)^3\right)$$

dont le taux de défaillance est bien de la forme puissance.

La fiabilité:

Pour déterminer la fiabilité de la loi de Weibull, nous partons de la définition de son taux de défaillance, et nous utilisons la relation:

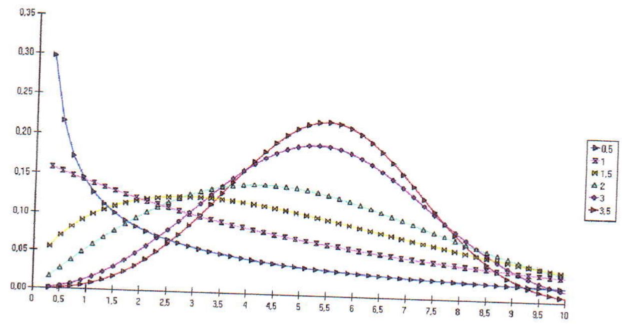
$$h(t) = \left[\log \frac{1}{R(t)}\right]'$$

La fiabilité s'exprime alors simplement:

$$R(t) = \exp\left(-(bt)^a\right)$$

La représentation graphique:

La densité de weibull de pramètre (a, b) représenté par:



densité de probabilité

Le cas particulier $a = 1$ correspond à la loi exponentielle.

Le cas $a = 2$ donne la distribution habituellement appelée loi de **Rayleigh**.

Si $a < 1$ la densité est décroissante de l'infini vers 0,sans mode,sans point d'inflexion.

Si $1 < a < 2$ la densité a une tangente verticale en 0. Elle croît vers la valeur modale et décroit ensuit.

Si $a > 2$ le démarrage en 0 est horizontale, il y a un mode et deux points d'inflexions.

Pour la distribution de Weibull, il apparait que le paramètre a joue le rôle du paramètre de forme alors que b joue le rôle du paramètre d'échelle.

Les moments:

La définition des moments fait intervenir la fonction gamma rencontrée plus haut. Soit T une durée de vie de loi de Weibull de paramètres a et b, le moment d'ordre r (r est positif) de T est:

$$\mathbb{E}(T^r) = b^{-r}.\Gamma\left(1+\frac{r}{a}\right)$$

Si $r = 1$, on obtient le temps moyen de panne:

$$\mathbb{E}(T) = (ba)^{-1}.\Gamma\left(\frac{1}{a}\right)$$

Si $r = 2$, on trouve la variance:

$$\mathbb{V}(T) = b^{-2}\left(\Gamma\left(1+\frac{2}{a}\right) - \Gamma^2\left(1+\frac{1}{a}\right)\right)$$

Proposition: Soit X_1, X_2 deux variables distribuées selon une loi de Weibull de paramètres a et b_1 (resp. a et b_2). Si X_1 et X_2 sont indépendantes alors $\min\{X_1,\ X_2\}$ est distribuée selon la loi de Weibull de paramètres a et $(b_1^a + b_2^a)^{\frac{1}{a}}$.

Preuve: Il Suffit de monter que la fiabilité de $(\min\{X_1,\ X_2\})$ est égle à:

$(\exp[-(b_1^a + b_2^a).t^a])$

Posons R_1 la fiabilité de X_1, R_2 la fiabilité de X_2 et R la fiabilité de $\min\{X_1,\ X_2\}$.

On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\min\{X_1,\ X_2\} > t) &= \mathbb{P}(\min\{X_1,\ X_2\} > t) \\
&= \mathbb{P}(X_1 > t,\ X_2 > t)
\end{aligned}$$

Comme les variables X_1 et X_2 sont indépendant, on conclut que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\min\{X_1,\ X_2\} > t) &= \mathbb{P}(X_1 > t).\mathbb{P}(\ X_2 > t) \\
&= R_1(t).R_2(t) \\
&= \exp(-(b_1t)^a).\exp(-(b_2t)^a)
\end{aligned}$$

Alors

$$
\begin{aligned}
R(t) &= \mathbb{P}(\min\{X_1,\ X_2\} > t) \\
&= \exp\left[-\left(b_1^a + b_2^a\right).t^a\right]
\end{aligned}
$$

2.4 Loi lognormale:

Une autre distribution couramment utilisée est la loi lognormale. Elle a été introduite pour la modélisation des durées des semi-conducteurs, à partir de constatations statistiques. Son champ d'application touchait déjà de nombreux domaines. Le nom est suffisamment explicite pour justifier la définition suivante:

Définition: La variable T suit la loi lognormale $LN(m, v)$ de paramètre m et v si $\log(T)$ suit la loi normale de centre m et de variance v.

Nous proposons un exemple concret qui illustre le rôle de la distribution lognormale dans certains problèmes de fiabilité mécanique.

Exemple: Considérons une poutre qui a, au départ, un défaut de surface (fissure) de profondeur X_0 et se trouve soumise à des chocs réguliers. A chaque choc la fissure augmente. Nous notons $X_1, X_2, ...$ les profondeurs successives. Il y aura rupture si la valeur critique Y est atteinte. Supposons qu'à chacun des chocs, l'évolution de la fissure $D_i = X_i - X_{i-1}$ soit proportionnelle à X_i, avec des coefficients C_i aléatoires liés aux conditions de choc:

$$X_i - X_{i-1} = C_i.X_{i-1}$$

Alors, en effectuant la somme des n coefficients C_i correspondants aux n premiers chocs, nous avons:

$$\sum_{i=1}^{n} C_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - X_{i-1})}{X_{i-1}}.$$

Ceci peut s'écrire, si le nombre de n chocs est assez grand et si chaque augmentation D_i

est suffisamment petite:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} C_i &= \int_{X_0}^{X_n} \frac{dX}{X} \\ &= \log\left(X_n\right) - \log\left(X_0\right).\end{aligned}$$

D'où:

$$\log\left(X_n\right) = \log\left(X_0\right) + \sum_{i=1}^{n} C_i.$$

La variable $\log\left(X_n\right)$ peut donc être interprétée comme la somme d'un grand nombre de variables aléatoires indépendantes. C'est donc asymptotiquement une variable normale. Cet exemple légitime l'utilisation de la loi lognormale en fiabilité.

La densité: De façon générale, X une variable aléatoire positive de densité f_X et H une fonction dérivable inversible d'inverse G. La variable aléatoire $Y = H(X)$ a pour densité:

$$f_Y(t) = J^{-1} f_X\left(G\left(X\right)\right)$$

où J est le Jacobien de G. Ici X est une variable de loi normale, H est la fonction log, et J s'écrit donc:

$$J(t) = \frac{1}{t}$$

Ce qui nous permet d'écrire la densité sous la forme:

$$f(t) = \frac{1}{t.\sqrt{2\pi v}} \exp\left(-\frac{\left(\log(t) - m\right)^2}{2v}\right)$$

Les moments:

A partir de l'expression de la densité, pour obtenir le moment d'ordre r, il suffit d'effectuer le changement de variable $x = \log(u)$ dans l'intégrale suivante:

$$\mathbb{E}(T^r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \int_{0}^{+\infty} u^r.e^{-A} \frac{du}{u}$$

où le terme A est défini par:

$$A = \frac{\left(\log\left(t\right) - m\right)^2}{2v}$$

Après les calculs, on trouve la formule du moment d'ordre r qui est donnée par:

$$\mathbb{E}(T^r) = \exp\left(m.r + r^2\frac{v}{2}\right)$$

Nous en déduisons l'espérance et la variance comme cas particuliers:
$\mathbb{E}(T) = \exp\left(m + \frac{v}{2}\right)$ et $Var(T) = (e^v - 1)\,\mathbb{E}(T)^2$.

Bibliography

[1] R. E. Barlow, F. Proshen, "Statistical theory of reliability and life testing probability models" Holt, Rinehart and Winston, New York, 1975.

[2] Christiane Cocozza-Thivent, Procesus stochastiques et fiabilité des systèmes. Springer,1997.

[3] Jean-Louis BON, " *Fiabilité des Systèmes Méthodes Mathématiques* " Masson.

[4] M. Métivier, Notions fondamentales de la théorie des probabilités. Dunod, Paris, 1972.