République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Equations aux Dérivées Partielles**

Par :

Mr. Debbar ilyas

Intitulé

Etude Analytique des équations intégrales et intégrons-différentielles non linéaires de Volterra

Dirigé par : **Dr. Guebbai Hamza**

Devant le jury

PRESIDENT	Mr. F. ELLAGGOUNE	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Mr. H.Guebbai	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Mr. A.Hitta	Univ-Guelma

Session Juin 2013

Remerciements

Nous tenons à remercier en premier lieu Allah qui nous a donnée vie et santé pour le parachèvement de ce modeste travail.

Nous remercions de tout cœur notre encadreur, **Dr GUEBBAI Hamza**, pour son soutien, son encouragement, la confiance qu'il nous témoignée en acceptant de diriger ce travail et pour avoir mis à notre disposition ses conseils pour une meilleure maitrise du sujet.

Nous remercions tous les enseignants du département du Math qui n'ont ménagé aucun effort pour toujours donner le meilleur d'eux.

Nous remercions nos familles qui nous ont toujours donné la possibilité de faire ce que nous voulions durant nos études et qui ont toujours cru en nous.

En fin, nous remercions tous ceux qui ont contribué à ce travail par leurs remarques, leurs suggestions et leurs soutiens.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

A mes très chers parents qui ont toujours été là pour moi, et qui m'ont donné un magnifique modèle de labeur et de persévérance. A ceux qui n'ont jamais cessé de m'apporter l'affection, l'amour, le courage et le bon sens. J'espère qu'ils trouveront dans ce travail toute ma reconnaissance et tout mon amour.

A ma chère mère

En témoignage de ma prof onde gratitude et de mon incontestable reconnaissance, pour tous les sacrifices qu'elle me contente, toute la confiance qu'elle m'accorde et tout l'amour dont elle m'entoure. La plus belle mère du monde.

A Mon Cher père

Qui est le meilleur père dans ce monde, grâce à So encouragement, sa confiance et son soutien moral et matériel et pour son amour infini en exprimant mes gratitudes, mon profond amour et ma passion.

A toute ma famille et en particulier à mon frère sadam, iasar, Ali.

A tous mes amis surtout : Chouaaib, Sadam, Walid, et Mouhcen, Yacien, Bilale , Nasaro. Et la section maths 2013 « master 2 » et tous ceux qui me sont chers .Que Dieu vous garde.

ilyas

Étude Analytique des Equations Intégrales et Intégro-différentielles non linéaires de Volterra

Ilyes DEBBAR

Table des matières

Introduction

On appelle équation integrale une équation fonctionnelle oú la fonction inconnue figure sous le singe d'intégrations $\int$, Les méthodes d'existance et d'unicité des équations intégrales jouent un rôle trés important dans divers domaines scientifiques : La théorie mathématique, essentiellement l'analyse des équations intégrales qui permet d'analyser le problème, de prouver l'unicité de la solution.
Ce mémoire est divisé en trois chapitres : Dans le premier chapitre, nous rappelons le théorème du Shauder, et on présenté le lemme d'unicité et quelques propriété de dérivation. Comme, on démontre des résultats qui seront de grande utilité dans les chapitres suivants.

Le deuxième chapitre, est consacré à l'existance et l'unicité de la solution de l'équation intégrale non linéaire de Volterra. Cette équation est d'une grande importance en mathématiques, elle a été étudier dans [1], [2]... et d'autre encore. Les méthodes qu'on va utiliser sont basées sur les idées de Schauder.

Dans le troisième chapitre, on va effectuer un travail qui plus oroginale comparé au précédent chapitre. Nous allons utiliser les mêmes méthodes pour étudier une équation intégro-différentielle non linéaire de Volterra. On peut considérer cette équation comme une généralisation de la précédente.

1

Rappels et Outils

Dans ce chapitre, on va présenter quelques résultats qui seront trés utile dans notre travail. Ces résultats seront utiliser pour les démonstrations d'existance et d'unicité des équations étudiées dans la suite.

1.1 Théorème de Schauder

Dans cette section, nous rappelons le théorème de Schauder qui est le résultat qui assure l'existance des solutions des équations qui nous intéresses. Il existe plusieurs versions de ce théorème, celle qui nous intérrèsse est la suivannte

Théorème 1. *Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel topologique séparé et C un ensemble convexe et fermé de E. Si T est une application continue de C dans C tel que $T(C)$ est relativement compact, alors T admet un point fixe.*

Démonstration. Voir [3]. □

1.2 Lemme d'unicité

Le problème avec le théorème de Schauder est qu'il n'assure pas l'unicité, donc on a besoin d'autre résultats pour l'assurée. Ce lemme, comme l'indique le titre de la section, sera utiliser pour démontrer l'unicité des solutions des équations qu'on va étudier.

Lemme 1. *Soit $\varphi(t)$ est une fonction continue positive sur $[a,b]$, qui vérifie*

$$\exists L > 0;\ \varphi(t) \leq L \int_a^t \varphi(s)ds.$$

Alors $\forall t \in [a,b];\ \varphi(t) = 0$.

Démonstration. Puisque $\varphi(t)$ est continue sur $[a,b]$, $\exists M > 0$ tel que

$$\varphi(t) \leq M, \quad \forall t \in [a,b].$$

Donc

$$\varphi(t) \leq LM \int_a^t ds = LM(t-a).$$

D'autre part, on a

$$\varphi(t) \leq L \int_a^t \varphi(s)ds.$$

Donc

$$\varphi(t) \leq L^2 M \int_a^t (s-a)ds = L^2 M \frac{(t-a)^2}{2} ds.$$

Si on repètte cette opération n fois on trouve le résultat suivant :

$$\varphi(t) \leq L^n M \frac{(t-a)^n}{n!}.$$

Par passage à la limite , on récupère le résultat. □

1.3 Propriété de dérivation

Soit ψ une fonction définit de $[a,b]^2$ à image dans $\mathbb{R}$, tel que pour tout $s \in [a,b]$, $\psi(.,s) \in C^1(a,b)$. On definit la fonction suivante

$$\varphi(t) := \int_a^t \psi(t,s)ds, \quad t \in [a,b]\,.$$

Proposition 2.

$$\forall t \in [a,b], \quad \varphi'(t) = \psi(t,t) + \int_a^t \frac{\partial \psi}{\partial t}(t,s)ds.$$

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{\int_a^{t+h} \psi(t+h,s)ds - \int_a^t \psi(t,s)ds}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\int_a^{t} \psi(t+h,s)ds + \int_t^{t+h} \psi(t+h,s)ds - \int_a^t \psi(t,s)ds}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \psi(t+h,s)ds + \int_a^t \lim_{h\to 0} \frac{\psi(t+h,s)-\psi(t,s)}{h} ds \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \psi(t+h,s)ds + \int_a^t \frac{d\psi}{dt}(t,s)ds
\end{aligned}$$

Mais, en utilisant le théorème des accroissements finis, il existe $\xi \in]0,h[$ tel que

$$\frac{1}{h}\int_t^{t+h} \psi(t+h,s)ds = \psi(t+h,t+\xi).$$

On fait tendre h vers 0 pour obtenir le résultat. □

2

Équation Intégrale

Soit K une fonction définie de $[a,b]^2 \times \mathbb{R}$ à image dans $\mathbb{R}$. On suppose que K vérifie les hypothèses suivantes

$$(H1) \left\| \begin{array}{ll} (1) & K \in C([a,b]^2 \times \mathbb{R}), \\ (2) & \exists M \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall t, s \in [a,b],\ \forall x \in \mathbb{R},\quad |K(t,s,x)| \leq M. \end{array} \right.$$

Proposition 3. *La fonctionelle* $\Phi(\cdot) := \int_a^t K(t,s,\cdot)ds + f(t)$ *est définie sur* $C([a,b])$ *dans lui même.*

Démonstration. On met, pour tout $u \in C([a,b])$,

$$\bar{u}(t) := \int_a^t K(t,s,u(s))ds + f(t).$$

Pour tout $t \in [a,b]$,

$$\begin{aligned} |\bar{u}(t) - \bar{u}(x)| &= \left| \int_a^t K(t,s,u(s))ds - \int_a^x K(x,s,u(s))ds + f(t) - f(x) \right| \\ &\leq \left| \int_a^t (K(t,s,u(s))ds - K(x,s,u(s)))\, ds \right| + M\,|t-x| + |f(t) - f(x)|, \end{aligned}$$

En appliquant le théorème de la convergence dominnéede Lebesgue, on obtient

$$\lim_{x \to t} |\bar{u}(t) - \bar{u}(x)| = 0.$$

Ce qui donne le résultat. $\square$

Soit l'équation intégrale non linéaire suivante :

$$u(t) = \int_a^t K(t, s, u(s))ds + f(t); \quad \forall t \in [a, b], \tag{2.1}$$

où, $f \in C([a, b])$ et u est l'inconnu à chercher dans le même espace.

2.1 Existance de la solution

Nous allons démontrer qu'on peut trouver une solution de l'équation (1.1), mais sur un intervelle réduit.

Théorème 4. *Il existe r tel que l'équation (1.1) réduite à $[a, a + r]$ admet une solution $u \in C([a, a + r])$*

Démonstration. On commence par montrer que Φ est continue : Soit $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C(a, b)$, qui a pour limite la fonction $u \in C(a, b)$,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \Phi(u_n) &= \lim_{n\to+\infty} \left(\int_a^t K(t, s, u_n(s))ds + f(t) \right) \\
&= \int_a^t \lim_{n\to+\infty} K(t, s, u_n(s))ds + f(t) \\
&= \int_a^t K(t, s, \lim_{n\to+\infty} u_n(s))ds + f(t) \\
&= \Phi(u).
\end{aligned}$$

Pour, $\rho > 0$ et $0 < r \leq \frac{\rho}{M}$, on définit l'ensemble suivant

$$F := \{u \in C(a, b) \ : \ u(a) = f(a), \ \forall t \in [a, a + r], \ |u(t) - f(t)| \leq \rho\}.$$

Il est claire que l'ensemble F est fermé et convexe. Pour tout $u \in F$ et tout $t \in [a, a + r]$

$$\begin{aligned}
\Phi(u)(a) &= f(a), \\
|\Phi(u)(t) - f(t)| &= \left| \int_a^t K(t, s, u(s))ds \right|, \\
&\leq Mr, \\
&\leq \rho.
\end{aligned}$$

Donc, $\Phi(F) \subset F$. Pour conclure en utilisant le théorème de Schauder, il faut montrer que $\Phi(F)$ est relativement compact. Il suffit de montrer que cette famille est équicontinue : voir le théorème d'Arzela-Ascoli. On a,

$$\begin{aligned}
|\Phi(u)(t) - \Phi(u)(x)| &= \left| f(t) - f(x) + \int_a^t K(t,s,u(s)) - \int_a^x K(x,s,u(s))\, ds\, ds \right| \\
&\leq |f(t) - f(x)| + \left| \int_x^t K(t,s,u(s))\, ds \right| \\
&+ \left| \int_a^x (K(t,s,u(s))ds - K(x,s,u(s)))\, ds \right|
\end{aligned}$$

En se basant sur la continuité de f et de K et de ça majoration, on peut montrer que

$$\forall t \in [a, a+r]\,,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall u \in F, \quad |x - t| < \delta \Rightarrow |\Phi(u)(x) - \Phi(u)(t)| < \varepsilon.$$

On applique le théorème de Schauder pour réccupérer le résultat.

□

2.2 Prolongement de la solution

Dans cette section, on va démontrer l'existance global de la solution.

Théorème 5. *L'équation* (1.1) *admet une solution* $u \in C([a, b])$.

Démonstration. $\bar{u}$ est la solution réduite dans l'intervale $[a, a+r]$, soit l'équation se transfore suivante

$$u(t) = f(t) + \int_a^{a+r} k(t,s,\bar{u}(s))ds + \int_{a+r}^t k(t,s,u(s))ds, \quad t \in [a+r, b]$$

ou $\bar{u}$ est la solution réduite dans l'intervale $[a, a+r]$,
on pose

$$g(t) = f(t) + \int_a^{a+r} k(t,s,\bar{u}(s))ds,$$

alors on a

$$u(t) = g(t) + \int_{a+r}^t k(t,s,u(s))ds.$$

En appliquant le thérème précédant,on trouve qu'il existe une solution $\bar{u}(t)$ de cette équation dans l'intervale réduite $[a+r, a+r+r']$.
la fonction :

$$u(t) = \begin{cases} \bar{u}(t) & t \in [a, a+r], \\ \bar{\bar{u}}(t) & t \in [a+r, a+r+r'], \end{cases}$$

qui continue par construction, est solution de l'équation d'origine sur l'intervale $[a, a+r+r']$
On répète la même opération jusqu'à récupération du résultat.

□

2.3 Unicité de la solution

Sous les hypothèses $(H1)$, on n'arrive pas à démontrer l'unicité de la solution. Donc, on rajoute les hypothèses supplimentaires suivantes

$(H2)$ $\|\exists L \in R,\ \forall x, y \in R,\ \forall t, s \in [a, b] \quad |K(t, s, x) - K(t, s, y)| \leq L|x - y|$.

Théorème 6. *La solution de (2.1) est unique.*

Démonstration. Soient $u, v \in C[a, b]$ deux solutions de l'équation (2.1). on a :

$$\begin{aligned} |v(t) - u(t)| &= \left| \int_a^t k(t, s, v(s)) - k(t, s, u(s))\, ds \right| \\ &\leq \int_a^t |k(t, s, v(s)) - k(t, s, u(s))|\, ds \\ &\leq L \int_a^t |v(s) - u(s)|\, ds \end{aligned}$$

Si on applique le lemme 1, on obtient

$$|v(t) - u(t)| = 0.$$

Alors on arrive que l'équation (2.1) admet une unique solution. □

3
Équation Intégro-différentielle

Dans ce chapitre, K est une fonction définie de $[a,b]^2 \times \mathbb{R}^2$ à image dans $\mathbb{R}$. On suppose que K vérifie les hypothèses suivantes

$$(H3)\left\|\begin{array}{lc} (1) & K \in C([a,b]^2 \times \mathbb{R}^2), \\ (2) & \dfrac{\partial K}{\partial t} \in C([a,b]^2 \times \mathbb{R}^2), \\ (3) & \exists M \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall t,s \in [a,b],\ \forall x,y \in \mathbb{R}, \\ & \max\left(\left|K(t,s,x,y)\right|, \left|\dfrac{\partial K}{\partial t}(t,s,x,y)\right|\right) \leq M. \end{array}\right.$$

Proposition 7. *Soit $f \in C^1(a,b)$. La fonctionelle $\Phi(\cdot) := \int_a^t K(t,s,\cdot,\cdot)ds + f(t)$ est définie sur $C^1([a,b])$ dans lui même.*

Démonstration. On met, pour tout $u \in C^1([a,b])$,

$$\bar{u}(t) := \int_a^t K(t,s,u(s),u'(s))ds + f(t).$$

De la même façon que celle utiliser dans le premier chapitre, on montre que $\bar{u}$ est continue. En appliquant la proposition 2, on obtient

$$\bar{u}'(t) = K(t,t,u(t),u'(t)) + \int_a^t \frac{\partial K}{\partial t}(t,s,u(s),u'(s))ds + f'(t).$$

Ce qui donne le résultat. $\square$

Soit l'équation intégro-différentielle non linéaire suivante :

$$u(t) = \int_a^t K(t, s, u(s), u'(s))ds + f(t); \quad \forall t \in [a, b], \tag{3.1}$$

où, $f \in C^1([a, b])$ et u est l'inconnu à chercher dans le même espace.

3.1 Existance de la solution

Comme dans le chapitre précédent, nous allons démontrer qu'on peut trouver une solution de l'équation (3.1), mais sur un intervelle réduit.

Théorème 8. *Il existe r tel que l'équation* (3.1) *réduite à $[a, a+r]$ admet une solution $u \in C^1([a, a+r])$*

Démonstration. De la même façon que le chapitre 1, on montre que la fonctionnelle Φ est continue sur $C^1([a, a+r])$ dans lui même.
Pour, $\rho > 0$ et $0 < r \leq \frac{\rho}{M}$, on définit l'ensemble suivant

$$\begin{aligned} F \ := \ & \{u \in C(a, b) \ : \ u(a) = f(a), \ \forall t \in [a, a+r], \ |u(t) - f(t)| \leq \rho, \\ & |u'(t) - f'(t)| \leq M + \rho\}. \end{aligned}$$

Il est claire que l'ensemble F est fermé et convexe. Pour tout $u \in F$ et tout $t \in [a, a+r]$

$$\begin{aligned} \Phi(u)(a) &= f(a), \\ |\Phi(u)(t) - f(t)| &= \left| \int_a^t K(t, s, u(s), u'(s))ds \right|, \\ &\leq Mr, \\ &\leq \rho, \\ |\Phi(u)'(t) - f'(t)| &= \left| K(t, t, u(t), u'(t)) + \int_a^t \frac{\partial K}{\partial t}(t, s, u(s), u'(s))ds \right|, \\ &\leq M + Mr, \\ &\leq M + \rho. \end{aligned}$$

Donc, $\Phi(F) \subset F$. Pour conclure en utilisant le théorème de Schauder, il faut montrer que $\Phi(F)$ est relativement compact. On a,

$$|\Phi(u)(t) - \Phi(u)(x)| \leq \left(M + \rho + \max_{s \in [a,b]} |f'(s)| \right) |t - x|,$$

ce qui donne le résultat.

□

3.2 Prolongement de la solution

Dans cette section, on va démontrer l'existance global de la solution.

Théorème 9. *L'équation* (1.1) *admet une solution* $u \in C([a, b])$.

Démonstration. De la même façon que dans le chapitre précédent. □

3.3 Unicité de la solution

Sous les hypothèses $(H3)$, on n'arrive pas à démontrer l'unicité de la solution. Donc, on rajoute les hypothèses supplimentaires suivantes

Contrairement au chapitre précédent les conditions (H3) n'assurent pas l'existance de la solution. Donc, on rajoute les hypothèses suivantes

$$(H4)\left\| \begin{array}{ll} (1) & \exists a, b, \overline{a}, \overline{b} \in \mathbb{R},\ \forall x, y, \overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R},\ \forall t, s \in [0, T], \\ & |k(t, s, x, y) - k(t, s, \overline{x}, \overline{y})| \leq a|x - \overline{x}| + b|y - \overline{y}|, \\ & |\frac{\partial k}{\partial t}(t, s, x, y) - \frac{\partial k}{\partial t}(t, s, \overline{x}, \overline{y})| \leq \overline{a}|x - \overline{x}| + \overline{b}|y - \overline{y}| \\ (2) & b < 1, \end{array} \right.$$

Théorème 10. *La solution de (3.1) est unique.*

Démonstration. Soient $u, v \in C^1[a, b]$ deux solutions de l'équation (3.1). On met

$$\gamma(t) := |v(t) - u(t)| + |v'(t) - u'(t)|.$$

on a :

$$\begin{aligned} |v(t) - u(t)| &\leq \max(c, d) + \int_a^t \gamma(s)\, ds, \\ (1 - d)|v'(t) - u'(t)| &\leq a|v(t) - u(t)| + \max(\overline{c}, \overline{d}) \int_a^t \gamma(s)\, ds. \end{aligned}$$

Alors, il existe p positive tel que

$$\gamma(t) \leq p \int_a^t \gamma(s)\, ds.$$

Si on applique le lemme 1, on obtient

$$v(t) = u(t)$$

Alors on arrive que l'équation (3.1) admet une unique solution. $\square$

4 Conclusions

Dans ce travail, nous avons reprit un mélange entre ce qui a été fait par [1] et celui par [2]. Lors de l'étude de l'équation intégrale non linéaire de Volterra, nous avons tout d'abord commencer par assurer une solution de l'équation sans chercher à savoir si elle est unique ou pas. Ce qui représente le travail de [1].

Puis, on a pris uniquement la technique et la condition de [2] qui assure l'unicité sans parler de la méthode qu'il a utiliser pour montrer l'existance. Puisque, à notre avis elle sont trop restrictive comparer à celle de [1].

En gardant, le même sens on a étudié l'équation intégro-différentielle non linéaire de Volterra, qui est plus originale comparé à l'équation précédente. Nous avons assurer tout d'abord l'existance de la solution, puis on a rajouté des hypothèses pour assurer l'unicité de celle-ci.

On peut aussi montrer l'existance et l'unicité de la solution directement et en rassemblant tout les hypothèses comme ça était fait par [2].

Bibliographie

[1] P. Linz, *Analytical and Numerical Methods for Volterra Equations.*SIAM Studies in Applied Mathematics. Philadelphia/1985.

[2] Tokui Sato, *Sur L'équation Intégrale non Linéaire de Volterra.* Compositio Mathematica. tome 11 (1953), p 271-290.

[3] http ://wwwfr.wikipedia.org/wiki/théorème-du-point-fixe-de-Schauder