République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

UNIVERSITE 08 MAI 45 GUELMA

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Equations aux Dérivées Partielles**

Par :

Melle. Hallaci Khadidja

Intitulé

Equations du mouvement de deux fluides compressible et incompressible avec une inter-surface libre

Dirigé par : Pr. Hisao Fujita Yashima

Devant le jury

PRESIDENT	Mr. M. Z. Aissaoui	MCA	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Mr. H.F. Yashima	Prof	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Mr. D. Bellaour	MAA	Univ-Guelma

Session Juin 2013

Equations du mouvement de deux fluides compressible et incompressible avec une inter-surface libre

Hallaci Khadidja
Mémoire de master en mathématiques
Université 08 Mai 1945 Guelma

27 mai 2013

Remerciements

Au nom d'Allah, le tout miséricordieux, le très miséricordieux

La reconnaissance est la mémoire du cœur

« LE GRAND MERCI POUR ALLAH»

En préambule à ce mémoire, je tiens à exprimer toutes mes reconnaissances au Professeur **Hisao Fujita Yashima**, de m'avoir proposé ce sujet de recherche et d'avoir dirigé mon travail.

Je lui remercie aussi pour son soutien, et surtout ses conseils et ses encouragements tout au long de mes recherches.

Mes remerciements s'adressent également à notre responsable de Master et directeur du laboratoire de Mathématiques appliquées et de modélisation le Docteur Aissaoui Mohamed Zine.

Je souhaite aussi remercier l'ensemble du laboratoire L.M.A.M pour leur accueil et leur aide.

Et sans oublier bien sur mes parents qui m ont soutenue durant toutes mes études, ma sœur, mon frère, et mes collègues qui m ont aidé et encouragé au cours de la réalisation de ce travail.

☺MERCI à Tous et à Toutes.

Table des matières

Résumé

Dans ce travail, nous nous proposons d'étudier les équations du mouvement de deux fluides compressible et incompressible avec l'inter-surface libre. La condition sur l'inter-surface libre consiste à l'égalité de la composante tangentielle de la tenseur de contrainte, où on tient compte également de la tension superficielle. On introduit une transformation des sous-domaines et du système des équations à l'aide d'un changement de variables, et ensuite on examine l'existance et l'unicité de la solution du système d'équations linéarisées.

Introduction

Dans la nature on trouve très souvent le mouvement d'un liquide avec la surface libre (dans le cas de la mer, d'un lac, de l'huile dans une bouteille semi-remplie, d'une tasse de thé, ...). Au-dessus de la surface considérée, on trouve généralement l'air ou éventuellement un autre gaz. Même si ces phénomènes sont très fréquents, l'étude des équations qui les décrivent, à l'exception de phénomène des ondes, ne semble pas bien développée. Les fameuses équations de Navier-Stokes, qui décrivent le mouvement d'un fluide visqueux et incompressible, sont généralement étudiées dans un domaine fixe, c'est-à-dire avec des frontières prédéterminées.

Les études des équations de Navier-Stokes avec la surface libre ont été commencées par Solonnikov dans les années 1970. Plus tard, dans les années 1980 Tani (voir [1]) a entrepris l'étude des équations du mouvement de fluide compressible avec une inter-surface libre, en développant les méthodes pour ce système d'équations, en particulier en utilisant les coordonnées Lagrangiennes. L'étude des équations du mouvement de fluide avec une surface libre a connu un certain développement auxquels ont contribué plusieurs auteurs, parmi lesquels nous citons les travaux [2], [4].

Dans le présent mémoire nous allons considérer le problème du mouvement de deux fluides, un fluide visqueux compressible et un fluide visqueux incompressible, avec une inter-surface libre.

Plus précisement on s'intéresse au mouvement stationnaire. On va considérer notre problème dans une bande horizontale infinie de $\mathbb{R}^2$ délimitée par deux constantes a et b ($-\infty < b < a < \infty$) et on va supposer que l'inter-surface se trouve entre $x_2 = a$ et $x_2 = -b$. Dans la partie inférieure nous allons considérer les equations de Navier-Stokes (pour un fluide visqueux et incompressible), tandis que dans la partie supérieure nous considérons les équations du mouvement d'un gaz visqueux barotropique. Sur l'inter-surface on considère l'effet de la tension superficielle, et la condition de la surface libre qui consiste à l'égalité de la composante tangentielle du tenseur de contrainte.

Du point de vue technique nous suivons l'idée du travail [4], où on considère les équations de Navier-Stokes et utilise les coordonnées eulériennes et leurs transformation particulière. Dans le présent mémoire nous utilisons une transformation analogue des variables (et donc des sous-domaines occupés par deux fluides distincts), mais nous concentrons notre attention en particulier sur les équations linéarisées de la part du fluide compressible, ce qui constituera le contenu principal du ce mémoire.

Chapitre 1

Description physique du problème

1.1 Formule de Laplace

Ce chapitre est consacré à l'étude des phénomèmes qui se manifestent à proximité de la surface de séparation de deux milieux continues. Si cette surface de séparation est incruvée, dans son voisinage les pressions dans les deux milieux seront différentes. Pour déterminer cette différence de pression (qu'on appelle pression superficielle), on doit formuler la condition de l'équilibre thermodynamique entre les deux corps en tenant compte des propriétés de la surface de séparation.

Admettons que la surface de séparation est soumise à un déplacement infinitésimal. Considérons la normale de la surface en chaque point fixé, notons $\delta\lambda$, le segment de la normale compris entre l'intersection avec la surface non déplacée et la surface déplacée que nous considérons positif et par p_1 et p_2 les pressions dans le premier et le second milieu . Le volume de tout élément d'éspace compris entre ces surfaces est égal à $\delta\lambda df$, où df est l'élément de surface. Le travail qui doit être fourni pour provoquer cette variation de volume sera égal à

$$\int (-p_1 + p_2)\delta\lambda df.$$

D'autre part, pour trouver le travail de déplacement total δR de la surface, il faut ajouter à cette expression le travail lié à la variation d'aire de la surface de séparation. On sait que ce travail est proportionnel à la variation δf de l'aire de la surface et vaut $\alpha\delta f$, où α est la tension superficielle, donc le travail total est égal à

$$\delta R = -\int (p_1 - p_2)\delta\lambda df + \alpha\delta f \tag{1.1}$$

On sait que la condition d'équilibre thermodynamique implique que δR s'annule. Soient R_1 et R_2 les principaux rayons de courbure en un point donné de la surface, il convient de considérer R_1 et R_2 positifs s'ils sont orientés vers le premier milieu, car dans ce cas les éléments de longueur dl_1 et dl_2 contenus dans les plans des sections principales de la surface subissent, lors du déplacement infinitésimal de celle-ci, des accroissements respectivement égaux à $\frac{\delta\lambda}{R_1}dl_1$ et $\frac{\delta\lambda}{R_2}dl_2$ (dl_1 et dl_2 doivent être considérés comme des éléments d'arc des circonférences de rayons R_1 et R_2). Par conséquent après le déplacement, l'élément de surface $df = dl_1 dl_2$ sera égal à

$$dl_1\Big(1+\frac{\delta\lambda}{R_1}\Big)dl_2\Big(1+\frac{\delta\lambda}{R_2}\Big) \approx dl_1 dl_2\Big(1+\frac{\delta\lambda}{R_1}+\frac{\delta\lambda}{R_2}\Big),$$

autrement dit il varie de

$$\delta\lambda df\Big(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\Big).$$

Il s'ensuit que la variation totale de l'aire de la surface de séparation est égale à

$$\delta f = \int \delta\lambda\Big(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\Big)df. \tag{1.2}$$

En remplaçant cette expréssion dans (1.1) et en l'égalisant à zéro on trouve la condition d'équilibre sous la forme

$$\int \delta\lambda\Big\{(p_1 - p_2) - \alpha\Big(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\Big)\Big\}df = 0.$$

Cette condition doit être vérifiée pour un déplacement infinitésimal arbitraire (i.e. pour $\delta\lambda$ arbitraire), donc l'expression entre accolades sous le signe d'integration est identiquement nulle, i.e.

$$p_1 - p_2 = \alpha\Big(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\Big). \tag{1.3}$$

C'est cette formule (formule de Laplace) qui détermine la pression supperfficielle (voir [6]). On voit que si R_1 et R_2 sont positifs, $p_1 > p_2$, cela signifie que la plus grande pression règne dans un corps dont la surface est convexe. Pour $R_1 = R_2 = \infty$ (i.e. la surface de séparation est plane), les pressions dans les deux corps sont égales. Appliquons la formule(1.3) à l'étude de l'équilibre mécanique entre des corps en contact mutuel, supposons que ni la surface de séparation, ni les corps eux-même sont soumis à une force extérieure, dans ces conditions la pression est constante tout le long des corps. Compte tenu de la formule (1.3), la condition d'équilibre s'écrit sous la forme

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = constante. \tag{1.4}$$

La somme des inverses des rayons de courbure doit être constante tout le long de la surface de séparation libre. Si toute la surface est libre, la condition (1.4) implique que la surface est sphérique, mais si la surface est fixée le long d'une ligne, sa forme sera plus compliquée.

Si on applique cette théorie à l'équilibre de minces pellicules (liquide) fixées à un cadre rigide, alors la condition d'équilibre d'une pellicule mince s'écrit

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0. \tag{1.5}$$

Examinons maintenant la condition d'équilibre à la surface d'un corps soumis à l'action du champ de pesanteur, supposons que le second milieu est l'atmosphère terreste dont la pression peut être supposée constante sur l'étendue du corps(nous prendrons comme corps un liquide incompressible), on a alors $p_2 = constante$, donc la pression dans le fluide est

$$p_1 = const - \varrho g x_3$$

la coordonnée x_3 est comptée suivant la verticale ascendante (voir [6]), ainsi la condition d'équilibre se présente sous la forme

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{g\varrho}{\alpha} x_3 = const. \tag{1.6}$$

Pour trouver la forme d'équilibre de la surface d'un fluide , il est plus commode d'utiliser la condition d'équilibre au lieu de (1.6), par la résolution directe du problème variationnel du minimum de l'énergie libre totale qu'on note par E, comme l'énerger libre interne d'un fluide ne dépend que du volume, alors la forme d'équilibre de la surface exerce son influence tout d'abord sur l'énergie supperficielle libre

$$\int \alpha df,$$

ensuite sur l'énergie dans le champ extérieur (champ de pesenteur), qui est égale à

$$g\varrho \int x_3 dV.$$

On peut donc écrire la condition d'équilibre sous la forme

$$\alpha \int df + g\varrho \int x_3 dV = minE \tag{1.7}$$

la détermination de ce minimum doit s'appuyer sur la condition suplémentaire

$$\int dV = const \tag{1.8}$$

Les constantes α, ϱ et g figurent dans les conditions d'équilibre (1.6), (1.7) sous la forme du rapport $\dfrac{\alpha}{g\varrho}$ a la dimension du carré d'une longueur noté a,

$$a = \sqrt{\frac{2\alpha}{g\varrho}} \tag{1.9}$$

est appelée constante capillaire. La forme de la surface du fluide ne dépend que de cette canstante, donc si la constante capillaire est grande on peut négliger le champ de pesenteur lors du calcul de la forme de la surface.

Soit $x_3 = \lambda(x_1, x_2)$ l'équation de la surface, nous supposons que λ est petit partout, ce que signifie que la surface ne s'écarte que faiblement du plan $x_3 = 0$. On note par f l'aire de la surface, donc on a

$$f = \int \sqrt{1 + (\frac{\delta\lambda}{\partial x_1})^2 + (\frac{\delta\lambda}{\partial x_2})^2}\, dx_1 dx_2$$

si λ est petit, f s'écrit sous la forme suivante

$$f \approx \int \Big[1 + \frac{1}{2}(\frac{\delta\lambda}{\partial x_1})^2 + \frac{1}{2}(\frac{\delta\lambda}{\partial x_2})^2\Big] dx_1 dx_2. \tag{1.10}$$

Soit la variation δf de f

$$\delta f = \int \Big\{\frac{\partial\lambda}{\partial x_1}\frac{\partial\delta\lambda}{\partial x_1} + \frac{\partial\lambda}{\partial x_2}\frac{\partial\delta\lambda}{\partial x_2}\Big\} dx_1 dx_2,$$

en intégrant par parties on obtient :

$$\delta f = -\int \Big(\frac{\partial^2\lambda}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\lambda}{\partial x_2^2}\Big)\delta\lambda dx_1 dx_2,$$

en comparant cette exrpession avec (1.2), on trouve

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = -\Big(\frac{\partial^2\lambda}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\lambda}{\partial x_2^2}\Big). \tag{1.11}$$

La formule (1.11) représente la somme des inverses des rayons de courbure d'une surface faiblement incurvée.

Lorsque trois phases en contact mutuelles sont en équilibre, leurs surfaces de séparation occupent des positions telles que, la résultante des trois forces de tension superficielle s'exerçant sur la ligne commune le long de laquelle les trois phases sont en contact, soit nulle. Cette condition exige que les surfaces de séparation se coupent sous des angles dépendant des valeurs de la tension superficielle (ces angles sont appelés angles de raccordement).

Enfin, examinons les conditions aux limites qui doivent être vérifiées à la frontière de deux fluides en mouvement, compte tenu des forces de tension superficielle. Si l'on ne tient pas compte de la tension superficielle, alors à la frontière de séparation des deux fluides on a :

$$n_k(\sigma^{(2)}_{jk} - \sigma^{(1)}_{jk}) = 0,$$

(où $\sigma_{jk} = -p\delta_{jk} + \sigma'_{jk}$ est appelé tenseur des contraintes) cette condition exprime l'égalité des forces de frottement s'exerçant sur la surface des deux fluides. Si on tient compte la tension superficielle, on aurra :

$$n_k\sigma^{(2)}_{jk} - n_k\sigma^{(1)}_{jk} = \alpha\Big(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\Big)n_j, \qquad (1.12)$$

où le second membre représente une force suplémentaire dont la valeur est donnée par la formule de Laplace et qui est dirigée suivant la normale à la surface, ainsi la formule (1.12) s'écrit

$$(p_1 - p_2)n_j = \big(\sigma'^{(1)}_{jk} - \sigma'^{(2)}_{jk}\big)n_k + \alpha(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2})n_j, \qquad (1.13)$$

où

$$\sigma'_{jk} = \eta\Big(\frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_j} - \frac{2}{3}\delta_{jk}\nabla\cdot v\Big) + \zeta\delta_{jk}\nabla\cdot v,$$

est la partie due à la viscosité du tenseur des contraintes.

Le coefficient de tension superficielle α n'est pas nécéssairement constant le long de la surface . Dans ces conditions, outre la force normale (qui s'annule dans le cas d'une surface plane), il existe une force tangentielle notée f_t est donnée par $f_t = \nabla\alpha$.

En ajoutant cette force au second membre de l'égalité (1.13) nous obtenons la condition aux limites :

$$\left[p_1 - p_2 - \alpha(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2})\right] n_j = (\sigma'^{(1)}_{jk} - \sigma'^{(2)}_{jk}) n_k + \frac{\partial\alpha}{\partial x_j}, \tag{1.14}$$

(le vecteur unitaire de la normale n est orienté vers l'intérieur du premier fluide). On notera que cette condition est satisfaite seulement dans le cas d'un fluide visqueux.

1.2 Equations du mouvement de gaz

Nous allons considérer le système d'équations d'un gaz visqueux. Plus précisément en désignant par :

$\varrho = \varrho(x, t)$: la densité du gaz

$v = v(x, t) = (v_1(x, t), v_2(x, t), v_3(x, t))$: la vitesse

$p = p(x, t)$: la pression

$f = (f_1, f_2, f_3)$: la force extérieure.

Il s'agit d'un système composé de deux équations du mouvement, l'équation de la conservation de la masse, communément connue sous le nom de l'équation de continuité, et l'équation de la conservation de la quantité du mouvement.

1.2.1 Equation de continuité

D'après la loi de la conservation de la masse, on a

$$\partial_t \varrho + \nabla \cdot (\varrho v) = 0. \tag{1.15}$$

1.2.2 Equation de la conservation de la quantité du mouvement

Désignons par η, ζ les coéfficients de viscosité d'écoulement et volumique (qui sont strictement positifs). L'équation qui exprime la conservation de la quantité du mouvement, (voir [6]), aura la forme

$$\varrho \partial_t v_j + \varrho \sum_{k=1}^{3} v_k \frac{\partial}{\partial x_k} v_j + \frac{\partial}{\partial x_j} p =$$
$$= \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k} \Big(\eta \big(\frac{\partial}{\partial x_k} v_j + \frac{\partial}{\partial x_j} v_k - \frac{2}{3} \delta_{jk} \nabla \cdot v \big) \Big) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\zeta \nabla \cdot v) + \varrho f_j \qquad j = 1,2,3. \tag{1.16}$$

Quant à la pression, nous allons utiliser l'approximation dite *approximation d'un gaz barotropique*, qui consiste à considérer la pression p comme fonction $p = p(\varrho)$ de la densité ϱ. Souvent on utilise l'approximation

$$p = c_1 \frac{R}{\mu} \varrho^{\gamma},$$

pour des raisons dues à la transformation adiabatique du gaz. Mais dans le présent travail nous considérons la formule générale

$$p = p(\varrho). \tag{1.17}$$

où γ est l'exposant adiabatique ($\gamma \approx 1.4$), et c_1 est une constante, R est la constante universelle des gaz ($R \approx 8,31.10^7 erg/mole.K$) et μ est la masse molaire moyenne de l'air ($\mu \approx 28.96$).

1.3 Equations de Navier-Stokes

Si on considère que

$$\nabla \cdot v = 0$$

et

$$\eta = constante$$

Alors l'équation (1.16) se réduit à

$$\varrho \partial_t v_j + \varrho \sum_{k=1}^{3} v_k \frac{\partial}{\partial x_k} v_j + \frac{\partial}{\partial x_j} p =$$

$$= \eta \Delta v_j + \varrho f_j \qquad j = 1, 2, 3. \tag{1.18}$$

Si on pose

$$\varrho = 1$$

et si on note v la viscosité η, alors l'équation de Navier-Stokes s'écrit sous la forme

$$\partial_t v + (v \cdot \nabla) v + \nabla p = v \Delta v + f_j, \tag{1.19}$$

$$\nabla \cdot v = 0. \tag{1.20}$$

1.4 Condition sur l'inter-surface libre

Considérons un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ limité par les deux surfaces

$$S_b = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | \ x_2 = -b\},$$

et

$$S_a = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | \ x_2 = a\},$$

c'est-à-dire

$$\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | -b < x_2 < a\} \subset \mathbb{R}^2.$$

On suppose que

$$S_h = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | \ x_2 = h\},$$

est la surface de séparation du domaine Ω.

On désigne par $v^{[1]}$, $v^{[2]}$ et p_1, p_2 les vecteurs vitesses et les pressions du fluide dans le premier et le second milieu (où p_1, p_2 sont différentes). D'après ce qu'on a vu dans la formule de Laplace la condition sur l'inter- surface libre S_h (voir [6]) est donnée par

$$[p_1 - p_2]n_j - \Big[\eta(\partial_{x_j} v_k^{[1]} + \partial_{x_k} v_j^{[1]}) + (\frac{1}{3}\eta + \zeta)\delta_{jk}\nabla \cdot v^{[1]}\Big] n_k + \nu\Big[\partial_{x_j} v_k^{[2]} + \partial_{x_k} v_j^{[2]}\Big] n_k =$$

$$= -\Big[\alpha \frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2}\Big] n_j \qquad j = 1,2 \tag{1.21}$$

où $n = (n_1, n_2)$ désigne la normale à S_h, $h = h(x_1)$ est la hauteur de la surface libre (qui est inconnue) telle que $|h(x_1)|$ est petite et α est le coefficient (strictement positif) de la tension superficielle.

Chapitre 2

Transformation des équations à l'aide d'un changement de variables

Dans ce chapitre on va transformer le problème stationnaire à l'aide d'un changement de variable.

2.1 Systèmes d'équations

Considérons le domaine Ω défini par

$$\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | -b < x_2 < a\} \subset \mathbb{R}^2.$$

On suppose que Ω contient les deux sous-domaines

$$\Omega_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | \; h(x_1) < x_2 < a\} \tag{2.1}$$

et

$$\Omega_2 = \{(x_1; x_2) \in \mathbb{R}^2 | -b < x_2 < h(x_1)\}; \tag{2.2}$$

on considère la force extérieure comme la somme de deux champs vectoriels : l'un est la force gravitationnelle $(0, -g)$, l'autre désigné par f_1 sur Ω_1 et par f_2 sur Ω_2, c-à-d

dans Ω_1

$$f = f_1 - gx_2$$
$$= f_1 - gh$$

et dans Ω_2

$$f = f_2$$

où $g > 0$ représente l'accélération de pesenteur.

Nous écrivons la pression dans la forme

$$q_1 = p_1 - \overline{p}_1,$$

et

$$q_2 = p_2 - \overline{p}_1 + gx_2,$$

où $\overline{p}_1$ est constante. On aura alors

$$p_1 - p_2 = q_1 - q_2 - gh.$$

Dans Ω_1, le problème consiste à trouver $(v^{[1]}, q_1, h)$ qui satisfasse aux équations

$$\nabla \cdot (\varrho v^{[1]}) = 0. \tag{2.3}$$

$$\varrho(v^{[1]} \cdot \nabla) v_j^{[1]} + \nabla q_1 = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k}\Big(\eta\big(\frac{\partial}{\partial x_k} v_j^{[1]} + \frac{\partial}{\partial x_j} v_k^{[1]} - \frac{2}{3}\delta_{jk} \nabla \cdot v^{[1]}\big)\Big)$$
$$+ \frac{\partial}{\partial x_j}(\zeta \nabla \cdot v^{[1]}) - \varrho gh + \varrho f_1, \tag{2.4}$$

avec les conditions aux limites

$$[q_1 - q_2] n_j - \Big[\eta(\partial_{x_j} v_k^{[1]} + \partial_{x_k} v_j^{[1]}) + (\frac{1}{3}\eta + \zeta)\delta_{jk} \nabla \cdot v^{[1]}\Big] n_k + \nu\Big[\partial_{x_j} v_k^{[2]} + \partial_{x_k} v_j^{[2]}\Big] n_k =$$

$$= \left[gh - \alpha \frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2}\right] n_j \qquad j = 1,2 \ sur \ S_h \tag{2.5}$$

$$v^{[1]} = 0 \qquad sur \ S_a \tag{2.6}$$

$$v^{[1]} \cdot n = 0 \qquad sur \ S_h, \tag{2.7}$$

ici $n = (n_1, n_2)$ désigne la normale extérieur à S_h.

D'autre part dans Ω_2 le problème consiste à trouver $(v^{[2]}, q_2, h)$ qui satisfasse aux équations

$$-\nu \Delta v^{[2]} + (v^{[2]} \cdot \nabla) v^{[2]} + \nabla q_2 = f_2, \tag{2.8}$$

$$\nabla \cdot v^{[2]} = 0, \tag{2.9}$$

avec les conditions aux limites

$$[q_1 - q_2] n_j - \left[\eta(\partial_{x_j} v_k^{[1]} + \partial_{x_k} v_j^{[1]}) + (\frac{1}{3}\eta + \zeta)\delta_{jk} \nabla \cdot v^{[1]}\right] n_k + \nu\left[\partial_{x_j} v_k^{[2]} + \partial_{x_k} v_j^{[2]}\right] n_k =$$

$$= \left[gh - \alpha \frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2}\right] n_j \qquad j = 1,2 \ sur \ S_h, \tag{2.10}$$

$$v^{[2]} = 0 \qquad sur \ S_b, \tag{2.11}$$

$$v^{[2]} \cdot n = 0 \qquad sur \ S_h. \tag{2.12}$$

2.1.1 Définition des espaces fonctionnels

Soit $D \subset \mathbb{R}^n$, $n = 1,2$. Pour $s \in \mathbb{N}$ et $q \geq 1$, on définit

$$W_q^s(D) = \left\{\varphi; \sum_{|\alpha| \leq s} \|D^\alpha \varphi\|_{L_q(D)} < \infty\right\}$$

avec

$$D^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} ... \partial_n^{\alpha_n}, \qquad |\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n.$$

On utilise également les espaces de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$ ou $H^s(S_{\overline{h}})$ avec $s \geq 0$ non entier. On les définit par

$$\|\varphi\|^2_{H^s(\mathbb{R})} = \|\widehat{\varphi}(\xi)(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\|^2_{L^2(\mathbb{R})}$$

où $\widehat{\varphi}(\cdot)$ est la transformée de Fourier de $\varphi(\cdot)$; l'espace $H^s(S_{\overline{h}})$ peut être défini de manière analogue en considérant les fonctions définies sur $S_{\overline{h}}$ comme fonctions de $x_1 \in \mathbb{R}$. Pour la définition des espaces de Sobolev $H^s(D)$ avec $s \geq 0$ non entier, en général, voir [5]

Pour préciser l'hypothèse sur les donnés f_1 et f_2, on aura besoin de l'aide des changements de variables $\vartheta, \widetilde{\vartheta}$, qui seront définis par h tel que

$$\vartheta\big(\widetilde{\vartheta}(\Omega_1^{(0)})\big) = \Omega_1,$$

et

$$\vartheta\big(\widetilde{\vartheta}(\Omega_2^{(0)})\big) = \Omega_2,$$

où

$$\Omega_1^{(0)} = \big\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 < x_2 < a\big\}$$

et

$$\Omega_2^{(0)} := \big\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, -b < x_2 < 0\big\}$$

on précise la dépendance de ϑ, $\widetilde{\vartheta}$ avec h par la notation $\vartheta^{(h)}$, $\widetilde{\vartheta}^{(h)}$.

Le résultat principal du problème stationnaire de Navier-Stokes est donné par théoreme suivant

Théorème 2.1. *Supposons que f_2 satisfait aux conditions suivantes :*

i) pour tout $h \in L^{q^*}(\mathbb{R})$, $\dfrac{\partial}{\partial x_1} h \in H^{r-\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$ *et* $-\dfrac{b}{2} < h < \dfrac{a}{2}$, *on a*

$$f_2|_{\Omega_2^{(h)}} \in H^{r-2}(\Omega_2^{(h)}),$$

avec

$$\Omega_2^{(h)} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | -b < x_2 < h\}.$$

ii) il existe une constante c_0 *telle que*

$$\| f_2 \circ \vartheta^{(h)} \circ \widetilde{\vartheta}^{(h)} - f_2 \circ \vartheta^{(h')} \circ \widetilde{\vartheta}^{(h')} \|_{H^{r-2}(\Omega_2^{(0)}) \cap W_q^1(\Omega_2^{(0)})} \le c_0 \| h - h' \|_{L^{q^*}(\mathbb{R})},$$

pour tout $h,\ h' \in L^{q^*}(\mathbb{R})$, $\dfrac{\partial}{\partial x_1} h$, $\dfrac{\partial}{\partial x_1} h' \in H^{r-\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$

où

$$r \ge 3,\ 1 \le q < 2,\ q^* = 2q/(2-q).$$

Si

$$b > 0,\ et\ si\ \| f_2 \|_{H^{r-2}(\Omega_1^{(0)}) \cap W_q^1(\Omega_1^{(0)})},\ et\ c_0\ sont\ assez\ petits,$$

alors il existe une solution $(v^{[2]}, q_2, h)$ *du problème* (2.2), (2.10) *vérifiant :*
$v^{[2]} \in H^r(\Omega_2)$, $\nabla q_2 \in H^{r-2}(\Omega_2)$, $q_2 \to 0$ *pour* $|x_1| \to \infty$, $h \in L^{q^*}(\mathbb{R})$, $\dfrac{\partial}{\partial x_1} h \in H^{r-\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$.

Démonstration. Une partie importante de la démonstration concernant le changement de variables et de fonctions inconnues est illustrée dans le paragraphe § 2.2.2 Pour la démonstration complète de ce théorème, voir [4]. □

2.2 Changement de variables

Maintenant on va définir un changement de variables ϑ. Soit Θ un opérateur régularisant choisi convenablement pour l'étude ultérieure. Posons

$$\overline{h}(x_1) = h * \Theta,$$

$$\beta(x_1) = h(x_1) - \overline{h}(x_1),$$

la convolution $*$ s'effectuant dans $\mathbb{R}$.

On définit $\widetilde{\beta}$ par la relation

$$(\widetilde{\beta})\widehat{\ }(\xi_1, x_2) = \widehat{\beta}(\xi_1)\exp(-|\xi||x_2|)$$

où le symbole $\widehat{\ }$ désigne la transformée de Fourier de la première variable.

On désigne par

$$\Omega_1^* = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | \ \overline{h} < x_2 < a\},$$

$$\Omega_2^* = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | -b < x_2 < \overline{h}\}.$$

2.2.1 Changement de variables pour le système d'équations dans Ω_1

On définit la transformation $\widetilde{\vartheta}$ des variables spatiales :

$$\widetilde{\vartheta} : \Omega_1^{(0)} \to \Omega_1^*,$$

$$\widetilde{\vartheta}_1 = x_1, \qquad \widetilde{\vartheta}_2 = x_2 + \overline{h}(x_1)\frac{a - x_2}{a},$$

et on pose

$$\beta^*(x) = \widetilde{\beta}(\widetilde{\vartheta}^{-1}(x)),$$

on voit que

$$\beta^*(x_1, \overline{h}(x_1)) = \beta(x_1) \qquad pour\ tout\ x_1 \in \mathbb{R}.$$

Maintenant, à l'aide de la fonction β^*, on définit une transformation ϑ des variables qui transforme le domaine stable Ω_1^* en Ω_1, plus précisément

$$\left\{ \begin{array}{l} \vartheta_1(x) = x_1; \\ \vartheta_2(x) = x_2 + \beta^*(x)\dfrac{a - x_2}{a - \overline{h}}. \end{array} \right. \tag{2.13}$$

Posons d'abord

$$A = (a_{ij}) = (\partial_{x_j}\vartheta_i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \partial_{x_1}\vartheta_2 & \partial_{x_2}\vartheta_2 \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

on a donc, pour $\varphi : \Omega_1\ (resp. \Omega_2) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi \circ \vartheta : \Omega_1^*\ (resp. \Omega_2^*) \longrightarrow \mathbb{R} \\ \nabla(\varphi \circ \vartheta) = {}^tA(\nabla\varphi) \circ \vartheta \end{array} \right. \tag{2.15}$$

ou, pour $\psi : \Omega_1^*\ (resp. \Omega_2^*) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi \circ \vartheta^{-1} : \Omega_1\ (resp. \Omega_2) \longrightarrow \mathbb{R} \\ \nabla(\psi \circ \vartheta^{-1}) = ({}^tA^{-1}\nabla\psi) \circ \vartheta^{-1} \end{array} \right. \tag{2.16}$$

On pose

$$\left\{ \begin{array}{l} u^{[1]} = v^{[1]} \circ \vartheta \\ \pi_1 = q_1 \circ \vartheta, \qquad \widetilde{\varrho} = \varrho \circ \vartheta \end{array} \right. \tag{2.17}$$

Pour éviter la confusion qui peut être provoquée par l'utilisation de la même lettre x_1, x_2 nous utilisons la notation y_1, y_2 pour désigner les points dans Ω_1^*,

$$x = (x_1, x_2) \in \Omega_1,$$

$$y = (y_1, y_2) \in \Omega_1^*.$$

Les relations (2.15), (2.16), (2.17) impliquent alors :

$$
\begin{aligned}
\left(\nabla\cdot(\varrho v^{[1]})\right)\circ\vartheta(y) &= \Big[\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_j}(\varrho v_j^{[1]})\Big]\circ\vartheta(y)\\
&= \sum_{j=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\varrho\circ\vartheta(y)\, v_j^{[1]}\circ\vartheta(y)\right]\\
&= \sum_{j=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\widetilde{\varrho}\, v_j^{[1]}(\vartheta(y))\right]\\
&= \sum_{j=1}^{2}\sum_{l=1}^{2}\frac{\partial\vartheta_l^{-1}}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial y_l}(\widetilde{\varrho}\, u_j^{[1]})\\
&= \sum_{l,j=1}^{2} a_{lj}^{-1}\frac{\partial}{\partial y_l}(\widetilde{\varrho}\, u_j^{[1]})
\end{aligned}
$$

avec $\dfrac{\partial\vartheta_l^{-1}}{\partial x_j} = a_{lj}^{-1}$;

en substituant cette expression dans (2.3) on obtient

$$
\sum_{l,j=1}^{2} a_{lj}^{-1}\frac{\partial}{\partial y_l}(\widetilde{\varrho}\, u_j^{[1]}) = 0 \qquad dans\ \Omega_1^* \tag{2.18}
$$

$$
\begin{aligned}
\left[\varrho\left((v^{[1]}\cdot\nabla)v_j^{[1]}\right)\right]\circ\vartheta(y) &= \left[\varrho\left(\sum_{k=1}^{2} v_k^{[1]}\frac{\partial}{\partial x_k}v_j^{[1]}\right)\right]\circ\vartheta(y)\\
&= \varrho\circ\vartheta(y)\left(\sum_{k=1}^{2} v_k^{[1]}\circ\vartheta(y)\frac{\partial}{\partial x_k}v_j^{[1]}\circ\vartheta(y)\right)\\
&= \widetilde{\varrho}\left(\sum_{k=1}^{2} u_k^{[1]}\sum_{l=1}^{2}\frac{\partial\vartheta_l^{-1}}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial y_l}u_j^{[1]}\right)\\
&= \sum_{l,k=1}^{2}\widetilde{\varrho}\left(u_k^{[1]} a_{lk}^{-1}\frac{\partial}{\partial y_l}u_j^{[1]}\right)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}(\nabla q_1)\circ\vartheta(y) &= {}^tA^{-1}\nabla\big(q_1\circ\vartheta(y)\big)\\ &= {}^tA^{-1}\nabla\pi_1\\ &= \sum_{k=1}^{2}{}^ta_{jk}^{-1}\frac{\partial}{\partial y_k}\pi_1\end{aligned}$$

On a

$$\eta\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}\Big(\frac{\partial}{\partial x_k}v_j^{[1]}+\frac{\partial}{\partial x_j}v_k^{[1]}-\frac{2}{3}\delta_{jk}\nabla\cdot v^{[1]}\Big)+\zeta\frac{\partial}{\partial x_j}(\nabla\cdot v^{[1]})=$$

$$=\eta\triangle v_j^{[1]}+(\frac{1}{3}\eta+\zeta)\frac{\partial}{\partial x_j}\nabla\cdot v^{[1]};$$

on a en outre

$$\begin{aligned}(\triangle v_j^{[1]})\circ\vartheta(y) &= \Big(\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_k}v_j^{[1]}\Big)\circ\vartheta(y)\\ &= \sum_{k=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_k}v_j^{[1]}\circ\vartheta(y)\\ &= \sum_{k=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_k}\sum_{l=1}^{2}\frac{\partial\vartheta_l^{-1}}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial y_l}u_j^{[1]}\\ &= \sum_{l=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial\vartheta_l^{-1}}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial y_l}u_j^{[1]}\\ &= \sum_{l,k=1}^{2}\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial\vartheta_i^{-1}}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial y_i}\frac{\partial\vartheta_l^{-1}}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial y_l}u_j^{[1]}\\ &= \sum_{i,l,k=1}^{2}a_{ik}^{-1}\frac{\partial}{\partial y_i}\Big[a_{lk}^{-1}\frac{\partial}{\partial y_l}u_j^{[1]}\Big],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Big[\frac{\partial}{\partial x_j}(\nabla\cdot v_k^{[1]})\Big]\circ\vartheta(y) &= \Big(\frac{\partial}{\partial x_j}\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_k}v_k^{[1]}\Big)\circ\vartheta(y)\\ &= \frac{\partial}{\partial x_j}\Big[\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_k}v_k^{[1]}\circ\vartheta(y)\Big]\\ &= \frac{\partial}{\partial x_j}\Big[\sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{2}\frac{\partial\vartheta_l^{-1}}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial y_l}u_k^{[1]}\Big]\end{aligned}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_j}\Big[\sum_{l,k=1}^{2} a_{lk}^{-1}\frac{\partial}{\partial y_l}u_k^{[1]}\Big]$$
$$= \sum_{m=1}^{2}\frac{\partial \vartheta_m^{-1}}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial y_m}\Big[\sum_{l,k=1}^{2} a_{lk}^{-1}\frac{\partial}{\partial y_l}u_k^{[1]}\Big]$$
$$= \sum_{m,l,k=1}^{2} a_{mj}^{-1}\frac{\partial}{\partial y_m}\Big[a_{lk}^{-1}\frac{\partial}{\partial y_l}u_k^{[1]}\Big].$$

Donc on a

$$\eta(\triangle v_j^{[1]})\circ\vartheta(y)+(\frac{1}{3}\eta+\zeta)(\frac{\partial}{\partial x_j}\nabla\cdot v^{[1]})\circ\vartheta(y)=\eta\sum_{i,l,k=1}^{2} a_{ik}^{-1}\frac{\partial}{\partial y_i}\Big[a_{lk}^{-1}\frac{\partial}{\partial y_l}u_j^{[1]}\Big]+$$
$$+(\frac{1}{3}\eta+\zeta)\sum_{m,l,k=1}^{2} a_{mj}^{-1}\frac{\partial}{\partial y_m}\Big[a_{lk}^{-1}\frac{\partial}{\partial y_l}u_k^{[1]}\Big].$$

En substituant ces expressions dans (2.4) on obtient

$$\sum_{l,k=1}^{2}\widetilde{\varrho}\Big(u_k^{[1]}a_{lk}^{-1}\frac{\partial}{\partial y_l}u_j^{[1]}\Big)+\sum_{k=1}^{2}{}^t a_{jk}^{-1}\frac{\partial}{\partial y_k}\pi_1=\widetilde{\varrho}\widetilde{f_1}+\eta\sum_{i,l,k=1}^{2} a_{ik}^{-1}\frac{\partial}{\partial y_i}\Big[a_{lk}^{-1}\frac{\partial}{\partial y_l}u_j^{[1]}\Big]+$$
$$+(\frac{1}{3}\eta+\zeta)\sum_{m,l,k=1}^{2} a_{mj}^{-1}\frac{\partial}{\partial y_m}\Big[a_{lk}^{-1}\frac{\partial}{\partial y_l}u_k^{[1]}\Big]-\widetilde{\varrho}g(\beta+\overline{h})\qquad dans\ \Omega_1^*. \tag{2.19}$$

Quant aux conditions à la frontière, il est évident que (2.6) équivaut à

$$u^{[1]}=0\qquad sur\ S_a \tag{2.20}$$

Pour transformer (2.7), on le multiple par la matrice

$$B=b_{ij}=B^{(n,\overline{n})}$$

qui représente la rotation autour de la droite

$$\{x;\ n\perp x\}\cap\{x;\ \overline{n}\perp x\}$$

et telle que

$$Bn = \overline{n}$$

où $\overline{n}$ désigne la normale extérieure sur $S_{\overline{h}}$.

On obtient

$$u^{[1]} \cdot \overline{n} = 0 \qquad sur \ S_{\overline{h}}, \tag{2.21}$$

pour la transformation de la condition (2.5), voir § 2.2.3

Ces transformations nous permettent de chercher un domaime

$$\Omega_1^* = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | \ \overline{h} < x_2 < a\}$$

et de construire $(v^{[1]}, q_1, h)$ satisfaisant aux (2.1) a partir de $(u^{[1]}, \pi_1, h = \overline{h} + \beta)$ si elle existe.

2.2.2 Changement de variables pour le système d'équations dans Ω_2

De manière analogue on a

$$\widetilde{\vartheta} : \Omega_2^{(0)} \to \Omega_2^*$$

$$\widetilde{\vartheta}_1 = x_1, \qquad \widetilde{\vartheta}_2 = x_2 + \overline{h}(x_1)\frac{x_2 + b}{b}$$

$$\begin{cases} \vartheta_1(x) = x_1; \\ \vartheta_2(x) = x_2 + \beta^*(x)\dfrac{x_2 + b}{\overline{h} + b}. \end{cases} \tag{2.22}$$

On pose

$$\begin{cases} u^{[2]} = |A| A^{-1} v^{[2]} \circ \vartheta \equiv |A| a_{ij}^{-1} v_j^{[2]} \circ \vartheta \\ \pi_2 = q_2 \circ \vartheta, \qquad |A| = detA \end{cases} \tag{2.23}$$

Les relations (2.15), (2.16), (2.23) impliquent alors

$$
\begin{aligned}
\Big((v^{[2]}\cdot\nabla)v^{[2]}\Big)\circ\vartheta(y) &= \Big(\sum_{k=1}^{2} v_k^{[2]}\frac{\partial}{\partial x_k}v_j^{[2]}\Big)\circ\vartheta(y)\\
&= \sum_{k=1}^{2} v_k^{[2]}\circ\vartheta(y)\frac{\partial}{\partial x_k}v_j^{[2]}\circ\vartheta(y)\\
&= \sum_{k=1}^{2}\frac{A}{|A|}u_k^{[2]}\sum_{l=1}^{2}\frac{\partial\vartheta_l^{-1}}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial y_l}(\frac{A}{|A|}u_j^{[2]})\\
&= \sum_{l,k=1}^{2}\frac{A}{|A|}u_k^{[2]}a_{kl}^{-1}\frac{\partial}{\partial y_l}(\frac{A}{|A|}u_j^{[2]})\\
&= \frac{1}{|A|}(u^{[2]}\cdot\nabla)(\frac{A}{|A|}u^{[2]})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\triangle v^{[2]})\circ\vartheta(y) &= \Big(\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_j}v^{[2]}\Big)\circ\vartheta\\
&= \sum_{j=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_j}v^{[2]}\circ\vartheta(y)\\
&= \sum_{j=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_j}\sum_{l=1}^{2}\frac{\partial\vartheta_l^{-1}}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial y_l}\Big(\frac{A}{|A|}u^{[2]}\Big)\\
&= \sum_{m,l,j=1}^{2}\frac{\partial\vartheta_m^{-1}}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial y_m}\Big[a_{lj}^{-1}\frac{\partial}{\partial y_l}\Big(\frac{A}{|A|}u^{[2]}\Big)\Big]\\
&= a_{mj}^{-1}\frac{\partial}{\partial y_m}\Big[a_{lj}^{-1}\frac{\partial}{\partial y_l}\Big(\frac{A}{|A|}u^{[2]}\Big)\Big]\\
&= a_{mj}^{-1}a_{lj}^{-1}\frac{\partial}{\partial y_m}\Big[\frac{\partial}{\partial y_l}\Big(\frac{A}{|A|}u^{[2]}\Big)\Big]+a_{mj}^{-1}\Big(\frac{\partial}{\partial y_m}a_{lj}^{-1}\Big)\frac{\partial}{\partial y_l}\frac{A}{|A|}u^{[2]}\\
&= \Big[\Big(a_{mj}^{-1}\,{}^t a_{jl}^{-1}-\delta_{lm}+\delta_{lm}\Big)\frac{\partial}{\partial y_m}\Big]\Big[\frac{\partial}{\partial y_l}\Big(\frac{A}{|A|}u^{[2]}\Big)\Big]+\\
&\quad + a_{mj}^{-1}\Big(\frac{\partial}{\partial y_m}a_{lj}^{-1}\Big)\frac{\partial}{\partial y_l}\frac{A}{|A|}u^{[2]}
\end{aligned}
$$

$$= \Big[\Big((A^{-1}({}^tA^{-1}) - I)\nabla\Big)\cdot\nabla\Big]\frac{A}{|A|}u^{[2]} + \frac{\partial}{\partial y_l}\Big[\frac{\partial}{\partial y_l}\Big(\frac{A}{|A|}u^{[2]}\Big)\Big] +$$
$$+ a^{-1}_{mj}\Big(\frac{\partial}{\partial y_m}a^{-1}_{lj}\Big)\frac{\partial}{\partial y_l}\frac{A}{|A|}u^{[2]}$$
$$= \frac{A}{|A|}\triangle u^{[2]} + 2\Big(\frac{\partial}{\partial y_l}\frac{A}{|A|}\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial y_l}u^{[2]}\Big) + \Big(\triangle\frac{A}{|A|}\Big)u^{[2]} +$$
$$+ \Big[\Big((A^{-1}({}^tA^{-1}) - I)\nabla\Big)\cdot\nabla\Big]\frac{A}{|A|}u^{[2]} + a^{-1}_{mj}\Big(\frac{\partial}{\partial y_m}a^{-1}_{lj}\Big)\frac{\partial}{\partial y_l}\frac{A}{|A|}u^{[2]}.$$

$$(\nabla q_2)\circ\vartheta(y) = {}^tA^{-1}\nabla\pi_2.$$

En subtituant ces expressions dans (2.8) et en le multipliant par $|A|A^{-1}$, on a

$$-\nu\triangle u^{[2]} + \nabla\pi_2 =$$
$$= |A|A^{-1}f_2\circ\vartheta - A^{-1}(u^{[2]}\cdot\nabla)\Big(\frac{A}{|A|}u^{[2]}\Big) + S(A, u^{[2]}, \nabla\pi_2) \qquad dans\ \Omega_2^* \tag{2.24}$$

où

$$S(A, u^{[2]}, \nabla\pi_2) = \nu|A|A^{-1}\Big\{2\Big(\frac{\partial}{\partial y_l}\frac{A}{|A|}\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial y_l}u^{[2]}\Big)$$
$$+ \Big(\triangle\frac{A}{|A|}\Big)u^{[2]} + \Big[\Big((A^{-1}({}^tA^{-1}) - I)\nabla\Big)\cdot\nabla\Big]\frac{A}{|A|}u^{[2]}$$
$$+ a^{-1}_{mj}\Big(\frac{\partial}{\partial y_m}a^{-1}_{lj}\Big)\frac{\partial}{\partial y_l}\frac{A}{|A|}u^{[2]}\Big\} + \Big(I - |A|A^{-1}\,{}^tA^{-1}\Big)\nabla\pi_2.$$

on a

$$(\nabla\cdot v^{[2]})\circ\vartheta(y) = \Big(\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial v_j^{[2]}}{\partial x_j}\Big)\circ\vartheta(y)$$
$$= \sum_{j=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_j}v^{[2]}\circ\vartheta(y)$$
$$= \sum_{j=1}^{2}\sum_{l=1}^{2}\frac{\partial\vartheta_l^{-1}}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial y_l}v^{[2]}\circ\vartheta(y)$$

$$= \sum_{l,j=1}^{2} a_{lj}^{-1} \frac{\partial}{\partial y_l}\Big(\frac{A}{|A|} u^{[2]}\Big)$$
$$= a_{lj}^{-1} \frac{\partial}{\partial y_l}\Big(\frac{a_{jk}}{|A|} u_k^{[2]}\Big)$$
$$= \Big(a_{lj}^{-1}\Big(\frac{\partial}{\partial y_l}\frac{1}{|A|}\Big)a_{jk} + a_{lj}^{-1}\big(\frac{\partial}{\partial y_l} a_{jk}\big)\frac{1}{|A|}\Big)u_k^{[2]} + \frac{1}{|A|}\nabla \cdot u^{[2]}.$$

Or, en réduisant a_{jk}, a_{lj}^{-1}, on voit que

$$a_{lj}^{-1}\Big(\frac{\partial}{\partial y_l}\frac{1}{|A|}\Big)a_{jk} + a_{lj}^{-1}\big(\frac{\partial}{\partial y_l} a_{jk}\big)\frac{1}{|A|} = 0 \qquad pour \;\; k = 1,2$$

on peut donc remplacer (2.9) par

$$\nabla \cdot u^{[2]} = 0 \qquad dans \;\; \Omega_2^* \tag{2.25}$$

Quant aux conditions à la frontière, il est évident que (2.11) équivaut à

$$u^{[2]} = 0 \qquad sur \;\; S_b \tag{2.26}$$

Pour transformer (2.12), on le multiple par la matrice B on a

$$u^{[2]} \cdot \overline{n} = 0 \qquad sur \;\; S_{\overline{h}} \tag{2.27}$$

pour la transformation de la condition (2.10), voir § 2.2.3

Ces transformations nous permettent de chercher un domaine

$$\Omega_2^* = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | -b < x_2 < \overline{h}\}$$

et de construire $(v^{[2]}, q_2, h)$ satisfaisant aux (2.2) à partir de $(u^{[2]}, \pi_2, h = \overline{h} + \beta)$ si elle existe.

Nous voulons souligner l'importance de la relation (2.25), car cette relation nous permet d'utiliser les méthodes pour les équations de Navier-Stokes même si nous avons introduit le changement de variables et de domaines.

2.2.3 Changement de variables pour la condition sur l'inter-surface libre

Pour transformer (2.5), (2.10), on le multiple par la matrice B ;

on a :

$$B\big(q_1 \circ \vartheta - q_2 \circ \vartheta\big) n_j = \big(\pi_1 - \pi_2\big)\overline{n}_j$$

$$\begin{aligned}
\eta\Big(\frac{\partial}{\partial x_j} v_k^{[1]} \circ \vartheta\Big) &= \eta\Big(\sum_{l=1}^{2} \frac{\partial \vartheta_l^{-1}}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial y_l} u_k^{[1]}\Big) \\
&= \eta\Big(\sum_{l=1}^{2} a_{lj}^{-1} \frac{\partial}{\partial y_l} u_k^{[1]}\Big) \\
&= \eta\Big((a_{lj}^{-1} - \delta_{lj}) \frac{\partial}{\partial y_l} u_k^{[1]} + \frac{\partial}{\partial y_j} u_k^{[1]}\Big).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta\Big(\frac{\partial}{\partial x_k} v_j^{[1]} \circ \vartheta\Big) &= \eta\Big(\sum_{m=1}^{2} \frac{\partial \vartheta_m^{-1}}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial y_m} u_j^{[1]}\Big) \\
&= \eta\Big(\sum_{m=1}^{2} a_{mk}^{-1} \frac{\partial}{\partial y_m} u_j^{[1]}\Big) \\
&= \eta\Big((a_{mk}^{-1} - \delta_{mk}) \frac{\partial}{\partial y_m} u_j^{[1]} + \frac{\partial}{\partial y_k} u_j^{[1]}\Big).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\frac{1}{3}\eta + \zeta)\delta_{jk}\Big(\nabla \cdot v^{[1]} \circ \vartheta\Big) &= (\frac{1}{3}\eta + \zeta)\delta_{jk}\Big(\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i} v_i^{[1]} \circ \vartheta\Big) \\
&= (\frac{1}{3}\eta + \zeta)\delta_{jk}\Big(\sum_{i=1}^{2}\sum_{l=1}^{2} \frac{\partial \vartheta_l^{-1}}{\partial x_i} v_i^{[1]} \frac{\partial}{\partial y_l} u_i^{[1]}\Big) \\
&= (\frac{1}{3}\eta + \zeta)\delta_{jk}\Big(\sum_{l,i=1}^{2} a_{li}^{-1} \frac{\partial}{\partial y_l} u_i^{[1]}\Big) \\
&= (\frac{1}{3}\eta + \zeta)\delta_{jk}[(a_{li}^{-1} - \delta_{li}) \frac{\partial}{\partial y_l} u_i^{[1]} + \frac{\partial}{\partial y_i} u_i^{[1]}].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nu\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}v_k^{[2]}\circ\vartheta\Big) &= \nu\Big(\sum_{l=1}^{2}\frac{\partial\vartheta_l^{-1}}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial y_l}\big(\frac{A}{|A|}u_k^{[2]}\big)\Big)\\ &= \nu\Big(\sum_{l=1}^{2}a_{lj}^{-1}\frac{\partial}{\partial y_l}\big(\frac{A}{|A|}u_k^{[2]}\big)\Big)\\ &= \nu\Big(a_{lj}^{-1}\big(\frac{\partial}{\partial y_l}\frac{A}{|A|}\big)u_k^{[2]}+\big(a_{lj}^{-1}\frac{A}{|A|}-\delta_{lj}\big)\frac{\partial}{\partial y_l}u_k^{[2]}+\frac{\partial}{\partial y_j}u_k^{[2]}\Big).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nu\Big(\frac{\partial}{\partial x_k}v_j^{[2]}\circ\vartheta\Big) &= \nu\Big(\sum_{m=1}^{2}\frac{\partial\vartheta_m^{-1}}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial y_m}\big(\frac{A}{|A|}u_j^{[2]}\big)\Big)\\ &= \nu\Big(\sum_{m=1}^{2}a_{mk}^{-1}\frac{\partial}{\partial y_m}\big(\frac{A}{|A|}u_k^{[2]}\big)\Big)\\ &= \nu\Big(a_{mk}^{-1}\big(\frac{\partial}{\partial y_m}\frac{A}{|A|}\big)u_j^{[2]}+\big(a_{mk}^{-1}\frac{A}{|A|}-\delta_{mk}\big)\frac{\partial}{\partial y_m}u_j^{[2]}+\frac{\partial}{\partial y_k}u_j^{[2]}\Big);\end{aligned}$$

alors on a

$$\begin{aligned}&(\pi_1-\pi_2)\overline{n}_j-\Big\{\eta(\partial_{y_j}u_k^{[1]}+\partial_{y_k}u_j^{[1]})+(\frac{1}{3}\eta+\zeta)\delta_{jk}\nabla\cdot u^{[1]}\Big\}\overline{n}_k+\nu\Big\{\partial_{y_j}u_k^{[2]}+\partial_{y_k}u_j^{[2]}\Big\}\overline{n}_k-\\ &\qquad -\Big\{(g-\alpha\triangle)(\beta+\overline{h})\Big\}\overline{n}_j=\\ &=\big(\eta+(\frac{1}{3}\eta+\zeta)\delta_{jk}\big)T_j^{[1]}(B^{(n,\overline{n})},u^{[1]})-\nu T_j^{[2]}(B^{(n,\overline{n})},A,u^{[1]})\qquad sur\ S_{\overline{h}}.\end{aligned}\tag{2.28}$$

Comme $\overline{n}_k=\Big(B^{(n,\overline{n})}\,n\Big)_k$, on a

$$\begin{aligned}T_j^{[1]}(B^{(n,\overline{n})},u^{[1]}) &= \Big\{(a_{lj}^{-1}-\delta_{lj})\Big(\frac{\partial}{\partial y_l}u_k^{[1]}\Big)\overline{n}_k+\\ &+(a_{mk}^{-1}-\delta_{mk})\Big(\frac{\partial}{\partial y_m}u_j^{[1]}\Big)\overline{n}_k\Big\}+\Big\{(a_{li}^{-1}-\delta_{li})\Big(\frac{\partial}{\partial y_l}u_i^{[1]}\Big)\Big\}\overline{n}_k,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}T_j^{[2]}(B^{(n,\overline{n})},A,u^{[1]}) &= -\Big\{a_{lj}^{-1}\big(\frac{\partial}{\partial y_l}\frac{A}{|A|}\big)u_k^{[2]}\,\overline{n}_k+\big(a_{lj}^{-1}\frac{A}{|A|}-\delta_{lj}\big)\frac{\partial}{\partial y_l}u_k^{[2]}\,\overline{n}_k+\\ &+a_{mk}^{-1}\big(\frac{\partial}{\partial y_m}\frac{A}{|A|}\big)u_j^{[2]}\,\overline{n}_k+\big(a_{mk}^{-1}\frac{A}{|A|}-\delta_{mk}\big)\frac{\partial}{\partial y_m}u_j^{[2]}\,\overline{n}_k\Big\}.\end{aligned}$$

Chapitre 3

Systèmes d' équations linéarisées

3.1 Equations de Navier-Stokes linéarisées dans un domaine donné

On va considérer les équations linéairisées pour le cas stationnaire dans un domaine donné

$$\Omega_2^* = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | -b < x_2 < \overline{h}\}.$$

On suppose que

$$\overline{h} \in C^\infty(\mathbb{R})$$

$$\partial^\alpha \overline{h} \to 0 \qquad pour\ |x_1| \to \infty \qquad pour\ tout\ \alpha \geq 0$$

Dans ce domaine on considère le système d'équations

$$-\nu\Delta u^{[2]} + \nabla\pi_2 = \widetilde{f}_2 \tag{3.1}$$

$$\nabla \cdot u^{[2]} = 0 \tag{3.2}$$

avec les conditions aux limites

$$\left\{[\eta(\partial_{x_j} u_k^{[1]} + \partial_{x_k} u_j^{[1]}) + (\frac{1}{3}\eta + \zeta)\delta_{jk}\nabla \cdot u^{[1]}]\overline{n}_k\right\}_{tan} +$$

$$+\left\{\nu[\partial_{x_j} u_k^{[2]} + \partial_{x_k} u_j^{[2]}]\overline{n}_k\right\}_{tan} = \widetilde{\varphi}_2 \qquad sur\ S_{\overline{h}} \tag{3.3}$$

$$u^{[2]} = 0 \qquad sur\ S_b \tag{3.4}$$

$$u^{[2]} \cdot n = 0 \qquad sur\ S_{\overline{h}} \tag{3.5}$$

où $\{\}_{tan}$ veut dire la partie tangentielle et $\overline{n}$ est la normale extérieure sur $S_{\overline{h}}$

Théorème 3.1. *Si*

$$\widetilde{f}_2 \in H^{r-2}(\Omega_2^*), \qquad \widetilde{\varphi}_2 \in H^{r-\frac{3}{2}}(S_{\overline{h}})$$

alors il existe une solution $(u^{[2]}, \pi_2)$ *est une seule du problème* (3.1), (3.3) *vérifiant :* $u^{[2]} \in H^r(\Omega_2^*)$, $\nabla\pi_2 \in H^{r-2}(\Omega_2^*)$, $\pi_2 \to 0$ *pour* $|x_2| \to \infty$ *et on a*

$$\|u^{[2]}\|_{H^r(\Omega_2^*)} + \|\nabla\pi_2\|_{H^{r-2}(\Omega_2^*)} \leq c\{\|\widetilde{f}_2\|_{H^{r-2}(\Omega_2^*)} + \|\widetilde{\varphi}_2\|_{H^{r-\frac{3}{2}}(S_{\overline{h}})}\}. \tag{3.6}$$

Démonstration. pour la démonstration du théorème, voir [4]. □

3.2 Equations du gaz linéarisées dans un domaine donné

On va considérer les équations dans le domaine

$$\Omega_1^* = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 |\, \overline{h} < x_2 < a\}.$$

On suppose que

$$\overline{h} \in C^\infty(\mathbb{R}),$$

$$\partial^\alpha \overline{h} \to 0 \qquad pour\ |x_1| \to \infty \qquad pour\ tout\ \alpha \geq 0.$$

Dans ce domaine on considère le système d'équations

$$\nabla\cdot(\widetilde{\varrho}u^{[1]})=0, \tag{3.7}$$

$$-\eta\Delta u^{[1]}-(\frac{1}{3}\eta+\zeta)\nabla(\nabla\cdot u^{[1]})+\nabla\pi_1=$$
$$=\widetilde{\varrho}\widetilde{f}_1-\widetilde{\varrho}g(\beta+\overline{h}) \tag{3.8}$$

avec les conditions aux limites

$$\left\{[\eta(\partial_{x_j}u_k^{[1]}+\partial_{x_k}u_j^{[1]})+(\frac{1}{3}\eta+\zeta)\delta_{jk}\nabla\cdot u^{[1]}]\overline{n}_k\right\}_{tan}+$$
$$+\left\{\nu[\partial_{x_j}u_k^{[2]}+\partial_{x_k}u_j^{[2]}]\overline{n}_k\right\}_{tan}=\widetilde{\varphi}_1 \qquad sur\ S_{\overline{h}}, \tag{3.9}$$

$$u^{[1]}=0 \qquad sur\ S_a, \tag{3.10}$$

$$u^{[1]}\cdot n=0 \qquad sur\ S_{\overline{h}}. \tag{3.11}$$

Pour résoudre ce problème, on va étudier dans la suite les équations linéarisées. Plus précisément on va considérer

$$\lambda'\widetilde{\varrho}+\nabla\widetilde{\varrho}\cdot\overline{u}^{[1]}+\widetilde{\varrho}\nabla\cdot\overline{u}^{[1]}=\lambda'\overline{\varrho}, \tag{3.12}$$

$$-\eta\Delta u^{[1]}-(\frac{1}{3}\eta+\zeta)\nabla(\nabla\cdot u^{[1]})=$$
$$=\widetilde{\varrho}\widetilde{f}_1-\widetilde{\varrho}g(\beta+\overline{h})-\nabla\pi_1(\widetilde{\varrho}), \tag{3.13}$$

avec les conditions aux limites (3.9)-(3.11) où $\overline{\varrho}$, $\overline{u}^{[1]}$, $u^{[2]}$, $\widetilde{f}_1$ et $\widetilde{\varphi}_1$ sont données, λ' est pris suffisamment grand.

Théorème 3.2. *Si*

$$\nabla(\nabla\cdot\overline{u}^{[1]})\in L^p(\Omega_1^*),\ \ p>2,\qquad \nabla\cdot\overline{u}^{[1]}\in L^\infty(\Omega_1^*),$$

alors, il existe une unique solution de l'équation (3.12) *et on a*

$$\|\widetilde{\varrho}-\varrho^*\|_{H^1(\Omega_1^*)}\leq\frac{\lambda'}{\lambda'-c}\|\overline{\varrho}-\varrho^*\|_{H^1(\Omega_1^*)}+\frac{1}{\lambda'-c}\|\nabla\cdot(\varrho^*\overline{u}^{[1]})\|_{H^1(\Omega_1^*)},\tag{3.14}$$

où c est une constante, telle que, $0<c<\lambda'$, *et* ϱ^* *est une solution de l'équation*

$$\nabla\pi_1(\widetilde{\varrho})=-\widetilde{\varrho}g(\beta+\overline{h})$$

Démonstration. En faisant la différence entre l'équation (3.12) pour $\widetilde{\varrho}$ et $\lambda'\varrho^*+\nabla\cdot(\varrho^*\overline{u}^{[1]})$, on obtient

$$\lambda'(\widetilde{\varrho}-\varrho^*)+\nabla(\widetilde{\varrho}-\varrho^*)\cdot\overline{u}^{[1]}+(\widetilde{\varrho}-\varrho^*)\nabla\cdot\overline{u}^{[1]}=\lambda'(\overline{\varrho}-\varrho^*)-\nabla\cdot(\varrho^*\overline{u}^{[1]}).\tag{3.15}$$

i) On multiplie l'équation (3.15) par $\widetilde{\varrho}-\varrho^*$ et en intégrant sur Ω_1^*, on trouve

$$\lambda'\int_{\Omega_1^*}|\widetilde{\varrho}-\varrho^*|^2\,dx+\int_{\Omega_1^*}\nabla(\widetilde{\varrho}-\varrho^*)(\widetilde{\varrho}-\varrho^*)\cdot\overline{u}^{[1]}\,dx+\int_{\Omega_1^*}|\widetilde{\varrho}-\varrho^*|^2\nabla\cdot\overline{u}^{[1]}\,dx=$$

$$=\lambda'\int_{\Omega_1^*}(\overline{\varrho}-\varrho^*)(\widetilde{\varrho}-\varrho^*)\,dx-\int_{\Omega_1^*}\nabla\cdot(\varrho^*\overline{u}^{[1]})(\widetilde{\varrho}-\varrho^*)\,dx,\tag{3.16}$$

on intègre par partie le terme $\int_{\Omega_1^*}\nabla(\widetilde{\varrho}-\varrho^*)(\widetilde{\varrho}-\varrho^*)\cdot\overline{u}^{[1]}\,dx$, on obtient

$$\int_{\Omega_1^*}\nabla(\widetilde{\varrho}-\varrho^*)(\widetilde{\varrho}-\varrho^*)\cdot\overline{u}^{[1]}\,dx=-\frac{1}{2}\int_{\Omega_1^*}|\widetilde{\varrho}-\varrho^*|^2\nabla\cdot\overline{u}^{[1]}\,dx.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a

$$|\lambda' \int_{\Omega_1^*} (\overline{\varrho}-\varrho^*)(\widetilde{\varrho}-\varrho^*)\,dx| \leq \lambda' \Big(\int_{\Omega_1^*} |\overline{\varrho}-\varrho^*|^2\,dx\Big)^{\frac{1}{2}} \cdot \Big(\int_{\Omega_1^*} |\widetilde{\varrho}-\varrho^*|^2\,dx\Big)^{\frac{1}{2}},$$

$$|\int_{\Omega_1^*} \nabla\cdot(\varrho^*\overline{u}^{[1]})(\widetilde{\varrho}-\varrho^*)\,dx| \leq \Big(\int_{\Omega_1^*} |\nabla\cdot(\varrho^* u^{[1]})|^2\,dx\Big)^{\frac{1}{2}} \cdot \Big(\int_{\Omega_1^*} |\widetilde{\varrho}-\varrho^*|^2\,dx\Big)^{\frac{1}{2}},$$

on a aussi

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_1^*} |\widetilde{\varrho}-\varrho^*|^2 \nabla\cdot\overline{u}^{[1]}\,dx \leq \frac{1}{2}\|\nabla\cdot\overline{u}^{[1]}\|_{L^\infty(\Omega_1^*)} \int_{\Omega_1^*} |\widetilde{\varrho}-\varrho^*|^2\,dx,$$

en substituant ces expressions dans (3.16) on obtient

$$\begin{aligned}
&\lambda' \int_{\Omega_1^*} |\widetilde{\varrho}-\varrho^*|^2\,dx - \frac{1}{2}\|\nabla\cdot\overline{u}^{[1]}\|_{L^\infty(\Omega_1^*)} \int_{\Omega_1^*} |\widetilde{\varrho}-\varrho^*|^2\,dx \leq \\
&\leq \lambda' \int_{\Omega_1^*} |\widetilde{\varrho}-\varrho^*|^2\,dx + \frac{1}{2}\|\nabla\cdot\overline{u}^{[1]}\|_{L^\infty(\Omega_1^*)} \int_{\Omega_1^*} |\widetilde{\varrho}-\varrho^*|^2\,dx \\
&\leq \lambda' \Big(\int_{\Omega_1^*} |\overline{\varrho}-\varrho^*|^2\,dx\Big)^{\frac{1}{2}} \cdot \Big(\int_{\Omega_1^*} |\widetilde{\varrho}-\varrho^*|^2\,dx\Big)^{\frac{1}{2}} + \\
&+ \Big(\int_{\Omega_1^*} |\nabla\cdot(\varrho^*\overline{u}^{[1]})|^2\,dx\Big)^{\frac{1}{2}} \cdot \Big(\int_{\Omega_1^*} |\widetilde{\varrho}-\varrho^*|^2\,dx\Big)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Maintenant, on divise l'équation (3.17) par le terme

$$\Big(\int_{\Omega_1^*} |\widetilde{\varrho}-\varrho^*|^2\,dx\Big)^{\frac{1}{2}},$$

de sorte qu'on a

$$\Big(\lambda' - \frac{1}{2}\|\nabla\cdot\overline{u}^{[1]}\|_{L^\infty(\Omega_1^*)}\Big)\|\widetilde{\varrho}-\varrho^*\|_{L^2(\Omega_1^*)} \leq \lambda'\|\overline{\varrho}-\varrho^*\|_{L^2(\Omega_1^*)} + \|\nabla\cdot(\varrho^*\overline{u}^{[1]})\|_{L^2(\Omega_1^*)}.$$

On pose

$$c = \frac{1}{2}\|\nabla \cdot \overline{u}^{[1]}\|_{L^\infty(\Omega_1^*)};$$

alors on a

$$\|\widetilde{\varrho} - \varrho^*\|_{L^2(\Omega_1^*)} \le \frac{\lambda'}{\lambda' - c}\|\overline{\varrho} - \varrho^*\|_{L^2(\Omega_1^*)} + \frac{1}{\lambda' - c}\|\nabla \cdot (\varrho^* \overline{u}^{[1]})\|_{L^2(\Omega_1^*)}. \tag{3.18}$$

ii) On applique ∇ à l'équation (3.15) et on la multiplie par $\nabla(\widetilde{\varrho} - \varrho^*)$ on obtient

$$\lambda'|\nabla(\widetilde{\varrho} - \varrho^*)|^2 + \nabla[\nabla(\widetilde{\varrho} - \varrho^*) \cdot \overline{u}^{[1]}] \cdot \nabla(\widetilde{\varrho} - \varrho^*) + \nabla[(\widetilde{\varrho} - \varrho^*)\nabla \cdot \overline{u}^{[1]}] \cdot \nabla(\widetilde{\varrho} - \varrho^*) =$$

$$= \lambda'\nabla(\overline{\varrho} - \varrho^*) \cdot \nabla(\widetilde{\varrho} - \varrho^*) - \nabla[\nabla \cdot (\varrho^* \overline{u}^{[1]})] \cdot \nabla(\widetilde{\varrho} - \varrho^*),$$

on intègre cette équation sur Ω_1^*, on trouve

$$\begin{aligned}
&\lambda' \int_{\Omega_1^*} |\nabla(\widetilde{\varrho} - \varrho^*)|^2\, dx + \int_{\Omega_1^*} |\nabla(\widetilde{\varrho} - \varrho^*)|^2 \nabla \cdot \overline{u}^{[1]}\, dx + \int_{\Omega_1^*} (\widetilde{\varrho} - \varrho^*)(\nabla(\nabla \cdot \overline{u}^{[1]})) \cdot \nabla(\widetilde{\varrho} - \varrho^*) \\
&+ \int_{\Omega_1^*} \sum_{j,k=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_j}(\widetilde{\varrho} - \varrho^*)\Big(\frac{\partial}{\partial x_k}\overline{u}_j^{[1]}\Big)\frac{\partial}{\partial x_k}(\widetilde{\varrho} - \varrho^*)\, dx + \\
&+ \int_{\Omega_1^*} \sum_{j,k=1}^{2} \Big(\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_j}(\widetilde{\varrho} - \varrho^*)\Big)\overline{u}_j^{[1]}\frac{\partial}{\partial x_k}(\widetilde{\varrho} - \varrho^*)\, dx = \qquad (3.19) \\
&= \lambda' \int_{\Omega_1^*} \nabla(\overline{\varrho} - \varrho^*) \cdot \nabla(\widetilde{\varrho} - \varrho^*)\, dx - \int_{\Omega_1^*} \nabla[\nabla \cdot (\varrho^* \overline{u}^{[1]})] \cdot \nabla(\widetilde{\varrho} - \varrho^*)\, dx
\end{aligned}$$

on intègre par parties le dèrnier terme du premier membre de l'équation (3.19), on trouve

$$\int_{\Omega_1^*} \sum_{j,k=1}^{2} \Big(\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_j}(\widetilde{\varrho} - \varrho^*)\Big)\overline{u}_j^{[1]}\frac{\partial}{\partial x_k}(\widetilde{\varrho} - \varrho^*)\, dx = -\frac{1}{2}\int_{\Omega_1^*} |\nabla(\widetilde{\varrho} - \varrho^*)|^2 \nabla \cdot \overline{u}^{[1]}\, dx,$$

en substituant cette expression dans (3.19) on obtient

$$\lambda' \int_{\Omega_1^*} |\nabla(\widetilde{\varrho}-\varrho^*)|^2 \, dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega_1^*} |\nabla(\widetilde{\varrho}-\varrho^*)|^2 \nabla \cdot \overline{u}^{[1]} \, dx +$$

$$+ \int_{\Omega_1^*} (\widetilde{\varrho}-\varrho^*)(\nabla(\nabla \cdot \overline{u}^{[1]})) \cdot \nabla(\widetilde{\varrho}-\varrho^*) \, dx +$$

$$+ \int_{\Omega_1^*} \sum_{j,k=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_j} (\widetilde{\varrho}-\varrho^*) (\frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u}_j^{[1]}) \frac{\partial}{\partial x_k} (\widetilde{\varrho}-\varrho^*) \, dx = \tag{3.20}$$

$$= \lambda' \int_{\Omega_1^*} \nabla(\overline{\varrho}-\varrho^*) \cdot \nabla(\widetilde{\varrho}-\varrho^*) \, dx - \int_{\Omega_1^*} \nabla[\nabla \cdot (\varrho^* \overline{u}^{[1]})] \cdot \nabla(\widetilde{\varrho}-\varrho^*) \, dx.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a :

$$|\lambda' \int_{\Omega_1^*} \nabla(\overline{\varrho}-\varrho^*) \cdot \nabla(\widetilde{\varrho}-\varrho^*) \, dx| \leq \lambda' \Big(\int_{\Omega_1^*} |\nabla(\overline{\varrho}-\varrho^*)|^2 \, dx \Big)^{\frac{1}{2}} \cdot \Big(\int_{\Omega_1^*} |\nabla(\widetilde{\varrho}-\varrho^*)|^2 \, dx \Big)^{\frac{1}{2}},$$

et

$$| \int_{\Omega_1^*} \nabla[\nabla \cdot (\varrho^* \overline{u}^{[1]})] \cdot \nabla(\widetilde{\varrho}-\varrho^*) \, dx| \leq$$

$$\leq \Big(\int_{\Omega_1^*} |\nabla[\nabla \cdot (\varrho^* \overline{u}^{[1]})]|^2 \, dx \Big)^{\frac{1}{2}} \cdot \Big(\int_{\Omega_1^*} |\nabla(\widetilde{\varrho}-\varrho^*)|^2 \, dx \Big)^{\frac{1}{2}}$$

et

$$| \int_{\Omega_1^*} (\widetilde{\varrho}-\varrho^*)(\nabla(\nabla \cdot \overline{u}^{[1]})) \cdot \nabla(\widetilde{\varrho}-\varrho^*) \, dx| \leq$$

$$\leq \Big(\int_{\Omega_1^*} |\widetilde{\varrho}-\varrho^*|^2 |\nabla(\nabla \cdot \overline{u}^{[1]})|^2 \, dx \Big)^{\frac{1}{2}} \cdot \Big(\int_{\Omega_1^*} |\nabla(\widetilde{\varrho}-\varrho^*)|^2 \, dx \Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \|\nabla(\widetilde{\varrho}-\varrho^*)\|_{L^2(\Omega_1^*)} \Big(\int_{\Omega_1^*} |\widetilde{\varrho}-\varrho^*|^2 |\nabla(\nabla \cdot \overline{u}^{[1]})|^2 \, dx \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

On applique l'inégalité de Hölder, compte tenu que $p > 2$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, de sorte qu'on obtient

$$\|\nabla(\widetilde{\varrho} - \varrho^*)\|_{L^2(\Omega_1^*)} \Big(\int_{\Omega_1^*} |\widetilde{\varrho} - \varrho^*|^2 |\nabla(\nabla \cdot \overline{u}^{[1]})|^2 \, dx \Big)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \|\nabla(\widetilde{\varrho} - \varrho^*)\|_{L^2(\Omega_1^*)} \Big(\int_{\Omega_1^*} |\widetilde{\varrho} - \varrho^*|^q \, dx \Big)^{\frac{2}{q} \cdot \frac{1}{2}} \cdot \Big(\int_{\Omega_1^*} |\nabla(\nabla \cdot \overline{u}^{[1]})|^p \, dx \Big)^{\frac{2}{p} \cdot \frac{1}{2}}$$

$$\le \|\nabla(\widetilde{\varrho} - \varrho^*)\|_{L^2(\Omega_1^*)} \|\widetilde{\varrho} - \varrho^*\|_{L^q(\Omega_1^*)} \|\nabla(\nabla \cdot \overline{u}^{[1]})\|_{L^p(\Omega_1^*)}.$$

D'après l'inégalité de l'injection de Sobolev on a $\forall q \ge 1 \; \exists C_q$ tel que

$$\|\widetilde{\varrho} - \varrho^*\|_{L^q(\Omega_1^*)} \le C_q \|\nabla(\widetilde{\varrho} - \varrho^*)\|_{L^2(\Omega_1^*)}.$$

Donc on obtient

$$\|\nabla(\widetilde{\varrho} - \varrho^*)\|_{L^2(\Omega_1^*)} \|\widetilde{\varrho} - \varrho^*\|_{L^q(\Omega_1^*)} \|\nabla(\nabla \cdot \overline{u}^{[1]})\|_{L^p(\Omega_1^*)} \le$$

$$\le C_q \|\nabla(\nabla \cdot \overline{u}^{[1]})\|_{L^p(\Omega_1^*)} \|\nabla(\widetilde{\varrho} - \varrho^*)\|^2_{L^2(\Omega_1^*)}$$

et

$$\Big| \int_{\Omega_1^*} \sum_{j,k=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_j}(\widetilde{\varrho} - \varrho^*)\Big(\frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u}_j^{[1]}\Big) \frac{\partial}{\partial x_k}(\widetilde{\varrho} - \varrho^*) \, dx \Big| \le \|\nabla \overline{u}^{[1]}\|_{L^\infty(\Omega_1^*)} \|\nabla(\widetilde{\varrho} - \varrho^*)\|^2_{L^2(\Omega_1^*)}.$$

En substituant ces expressions dans (3.19), et en le divisant par

$$\|\nabla(\widetilde{\varrho} - \varrho^*)\|_{L^2(\Omega_1^*)}$$

on trouve

$$\|\nabla(\widetilde{\varrho} - \varrho^*)\|_{L^2(\Omega_1^*)} \le \frac{\lambda'}{\lambda' - c^*} \|\nabla(\overline{\varrho} - \varrho^*)\|_{L^2(\Omega_1^*)} + \frac{1}{\lambda' - c^*} \|\nabla[\nabla \cdot (\varrho^* \overline{u}^{[1]})]\|_{L^2(\Omega_1^*)} \tag{3.21}$$

avec $c^* = \frac{1}{2} \|\nabla \cdot \overline{u}^{[1]}\|_{L^\infty(\Omega_1^*)} + \|\nabla \overline{u}^{[1]}\|_{L^\infty(\Omega_1^*)} + C_q \|\nabla(\nabla \overline{u}^{[1]})\|_{L^p(\Omega_1^*)}$

iii) En faisant la somme entre(3.18) et (3.21), et en écrivant $\frac{\lambda'}{\lambda'-c}$ et $\frac{1}{\lambda'-c}$ au lieu de

$$\sup\{\frac{\lambda'}{\lambda'-c}, \frac{\lambda'}{\lambda'-c^*}\}$$

et

$$\sup\{\frac{1}{\lambda'-c}, \frac{1}{\lambda'-c^*}\},$$

on obtient (3.14). □

On introduit la norme

$$\|u\|^2_{\widetilde{H}^1(\Omega)} = \int_\Omega \Big(\eta|\nabla u|^2 + (\frac{1}{3}\eta+\zeta)|\nabla\cdot u|^2\Big)\,dx,$$

qui correspond au produit scalaire

$$\langle u, v\rangle_{\widetilde{H}^1(\Omega)} = \int_\Omega \Big(\sum_{j,k=1}^{2} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}\frac{\partial v_k}{\partial x_j} + (\frac{1}{3}\eta+\zeta)(\nabla\cdot u)(\nabla\cdot v)\Big)\,dx.$$

On remarque que la norme $\|\cdot\|_{\widetilde{H}^1(\Omega)}$ est équivalente à la norme usuelle de $H^1(\Omega)$.

Pour qu'on puisse utiliser cette norme de manière analogue à $H^1_0(\Omega)$ dans l'étude variationnelle usuelle de l'équation de type elliptique, nous introduisons l'espace suivant. On pose

$$\widetilde{H}^1_0(\Omega) = \Big\{u\in\widetilde{H}^1(\Omega)|\ u=0\ sur\ S_a,\ u\cdot n=0\ sur\ S_{\overline{h}},$$
$$\{[\eta(\partial_{x_j}u_k+\partial_{x_k}u_j)+(\frac{1}{3}\eta+\zeta)\delta_{jk}\nabla\cdot u]\overline{n}_k\}_{tan}=0\ sur\ S_{\overline{h}}\Big\}.$$

En vertu des conditions à la frontière des éléments de $\widetilde{H}^1_0(\Omega)$, on a

$$\langle u, v\rangle_{\widetilde{H}^1(\Omega)} = -\int_\Omega v\cdot[\eta\Delta u^{[1]} + (\frac{1}{3}\eta+\zeta)\nabla(\nabla\cdot u)]\,dx,$$

pour $u, v\in\widetilde{H}^1_0(\Omega)$.

Théorème 3.3. *Si*

$$\widetilde{f}_1 \in L^2(\Omega_1^*), \qquad \widetilde{\varphi}_1 \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_1^*),$$

$$et \ \left\{\nu[\partial_{x_j} u_k^{[2]} + \partial_{x_k} u_j^{[2]}]\overline{n}_k\right\}_{tan} \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_1^*)$$

alors il existe une unique solution $u^{[1]}$ *de l'équation* (3.13) *dans* $\widetilde{H}^1(\Omega_1^*)$, *et on a*

$$\|u^{[1]}\|_{\widetilde{H}^1(\Omega_1^*)} \leq C\Big\{\|\widetilde{\varrho}\widetilde{f}_1\|_{L^2(\Omega_1^*)} + \|\widetilde{\varrho}g(\beta+\overline{h})\|_{L^2(\Omega_1^*)} + \|\nabla\pi_1(\widetilde{\varrho})\|_{L^2(\Omega_1^*)} +$$
$$+ \left\|\left\{\nu[\partial_{x_j} u_k^{[2]} + \partial_{x_k} u_j^{[2]}]\overline{n}_k\right\}_{tan}\right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_1^*)} + \|\widetilde{\varphi_1}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_1^*)}\Big\} \tag{3.22}$$

où C est une constante.

Démonstration. On multiplie l'équation (3.13) par $u^{[1]}$ et en intégrant par parties sur Ω_1^*, on trouve

$$-\int_{\partial\Omega_1^*} [(\eta\nabla u^{[1]} + (\frac{1}{3}\eta+\zeta)\nabla\cdot u^{[1]})\cdot u^{[1]}]\,dx + \int_{\Omega_1^*}\left(\eta|\nabla u^{[1]}|^2 + (\frac{1}{3}\eta+\zeta)|\nabla\cdot u^{[1]}|^2\right)dx =$$
$$= \int_{\Omega_1^*} \widetilde{\varrho}\widetilde{f}_1 u^{[1]}\,dx + \int_{\Omega_1^*}\widetilde{\varrho}g(\beta+\overline{h})u^{[1]}\,dx - \int_{\Omega_1^*}\nabla\pi_1(\widetilde{\varrho})u^{[1]}\,dx.$$

En vertu de la condition (3.9), on déduit que

$$\int_{\Omega_1^*}\left(\eta|\nabla u^{[1]}|^2 + (\frac{1}{3}\eta+\zeta)|\nabla\cdot u^{[1]}|^2\right)dx =$$
$$= -\int_{\partial\Omega_1^*}\left[\left\{\nu[\partial_{x_j} u_k^{[2]} + \partial_{x_k} u_j^{[2]}]\overline{n}_k\right\}_{tan} - \widetilde{\varphi_1}\right]\cdot\{u^{[1]}\}_{tan}\,dx + \tag{3.23}$$
$$+ \int_{\Omega_1^*}\widetilde{\varrho}\widetilde{f}_1 u^{[1]}\,dx - \int_{\Omega_1^*}\widetilde{\varrho}g(\beta+\overline{h})u^{[1]}\,dx - \int_{\Omega_1^*}\nabla\pi_1(\widetilde{\varrho})u^{[1]}\,dx.$$

On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur chaque terme du second membre, ainsi on trouve

$$\begin{aligned}\|u^{[1]}\|^2_{\widetilde{H}^1(\Omega_1^*)} \leq \Big[\Big\| \Big\{ \nu[\partial_{x_j} u_k^{[2]} + \partial_{x_k} u_j^{[2]}]\overline{n}_k \Big\}_{tan} \Big\|_{L^2(\partial\Omega_1^*)} + \\ + \|\widetilde{\varphi_1}\|_{L^2(\partial\Omega_1^*)} \Big] \|\{u^{[1]}\}_{tan}\|_{L^2(\partial\Omega_1^*)} + \\ + \Big[\|\widetilde{\varrho}\widetilde{f}_1\|_{L^2(\Omega_1^*)} + \|\widetilde{\varrho} g(\beta + \overline{h})\|_{L^2(\Omega_1^*)} + \|\nabla\pi_1(\widetilde{\varrho})\|_{L^2(\Omega_1^*)} \Big] \cdot \|u^{[1]}\|_{L^2(\Omega_1^*)},\end{aligned} \tag{3.24}$$

compte tenue de la définition de la norme de $H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$, on obtient

$$\begin{aligned}\|u^{[1]}\|^2_{\widetilde{H}^1(\Omega_1^*)} \leq \Big[\Big\| \Big\{ \nu[\partial_{x_j} u_k^{[2]} + \partial_{x_k} u_j^{[2]}]\overline{n}_k \Big\}_{tan} \Big\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_1^*)} + \\ + \|\widetilde{\varphi_1}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_1^*)} \Big] \|\{u^{[1]}\}_{tan}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_1^*)} + \\ + \Big[\|\widetilde{\varrho}\widetilde{f}_1\|_{L^2(\Omega_1^*)} + \|\widetilde{\varrho} g(\beta + \overline{h})\|_{L^2(\Omega_1^*)} + \|\nabla\pi_1(\widetilde{\varrho})\|_{L^2(\Omega_1^*)} \Big] \cdot \|u^{[1]}\|_{L^2(\Omega_1^*)},\end{aligned} \tag{3.25}$$

puis on apllique l'inégalité

$$ab = \frac{1}{2\varepsilon}a^2 + \frac{\varepsilon}{2}b^2 \tag{3.26}$$

sur le second membre de l'inégalité (3.25), on trouve

$$\begin{aligned}\|u^{[1]}\|^2_{\widetilde{H}^1(\Omega_1^*)} \leq \frac{1}{2\varepsilon}\Big[\Big\| \Big\{ \nu[\partial_{x_j} u_k^{[2]} + \partial_{x_k} u_j^{[2]}]\overline{n}_k \Big\}_{tan} \Big\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_1^*)} + \|\widetilde{\varphi_1}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_1^*)} \Big]^2 + \\ + \frac{\varepsilon}{2}\|u^{[1]}\|^2_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_1^*)} + \frac{\varepsilon}{2}\|u^{[1]}\|^2_{L^2(\Omega_1^*)} + \\ + \frac{1}{2\varepsilon}\Big[\|\widetilde{\varrho}\widetilde{f}_1\|_{L^2(\Omega_1^*)} + \|\widetilde{\varrho} g(\beta + \overline{h})\|_{L^2(\Omega_1^*)} + \|\nabla\pi_1(\widetilde{\varrho})\|_{L^2(\Omega_1^{2*})} \Big]^2.\end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Poincaré on a

$$\|u^{[1]}\|_{L^2(\Omega_1^*)} \leq K\|u^{[1]}\|_{\widetilde{H}^1(\Omega_1^*)},$$

et d'après les théorèmes de la trace (voir [5]), on a

$$\|u^{[1]}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_1^*)} \leq K'\|u^{[1]}\|_{\widetilde{H}^1(\Omega_1^*)}.$$

Si on choisit convenablement ε dans (3.26), on obtient

$$\|u^{[1]}\|_{\widetilde{H}^1(\Omega_1^*)} \leq C\Big\{\|\widetilde{\varrho}\widetilde{f}_1\|_{L^2(\Omega_1^*)} + \|\widetilde{\varrho}g(\beta+\overline{h})\|_{L^2(\Omega_1^*)} + \|\nabla\pi_1(\widetilde{\varrho})\|_{L^2(\Omega_1^*)} +$$

$$+\Big\|\Big\{\nu[\partial_{x_j}u_k^{[2]} + \partial_{x_k}u_j^{[2]}]\overline{n}_k\Big\}_{tan}\Big\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_1^*)} + \|\widetilde{\varphi_1}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_1^*)}\Big\}.$$

En ce qui concerne l'existence et l'unicité de la solution, on rappelle d'abord qu'il est possible de construire une fonction $\widetilde{w} \in H^2(\Omega_1^*)$, telle que

$$\widetilde{w} = 0 \qquad sur\ S_a$$

$$\widetilde{w}\cdot n = 0 \qquad sur\ S_{\overline{h}}$$

$$\Big\{[\eta(\partial_{x_j}\widetilde{w} + \partial_{x_k}\widetilde{w}) + (\frac{1}{3}\eta+\zeta)\delta_{jk}\nabla\cdot\widetilde{w}]\overline{n}_k\Big\}_{tan} =$$

$$= \widetilde{\varphi}_1 - \Big\{\nu[\partial_{x_j}u_k^{[2]} + \partial_{x_k}u_j^{[2]}]\overline{n}_k\Big\}_{tan} \qquad sur\ S_{\overline{h}}.$$

Nous renvoyons la démonstration de la possibilité de construire une tellle fonction à [4] (p. 544 - 545). Cela étant, on va chercher la solution de l'équation

$$-\eta\triangle u - (\frac{1}{3}\eta+\zeta)\nabla(\nabla\cdot u) =$$

$$= \widetilde{\varrho}\widetilde{f}_1 - \widetilde{\varrho}g(\beta+\overline{h}) -\!- \nabla\pi_1(\widetilde{\varrho}) + \eta\triangle\widetilde{w} + (\frac{1}{3}\eta+\zeta)\nabla(\nabla\cdot\widetilde{w}),$$

avec les conditions aux limites

$$u = 0 \qquad sur\ S_a$$

$$u\cdot n = 0 \qquad sur\ S_{\overline{h}}$$

$$\Big\{[\eta(\partial_{x_j}u_k + \partial_{x_k}u_j) + (\frac{1}{3}\eta+\zeta)\delta_{jk}\nabla\cdot u]\overline{n}_k\Big\}_{tan} = 0 \qquad sur\ S_{\overline{h}},$$

c'est-à-dire

$$u \in \widetilde{H}_0^1(\Omega_1^*),$$

on rappelle que $\widetilde{H}_0^1(\Omega_1^*)$ a une structure analogue à $H_0^1(\Omega_1^*)$. Alors on peut appliquer la méthode variationnelle usuelle (voir par exemple [7]), en utilisant l'espace $\widetilde{H}_0^1(\Omega_1^*)$ au lieu de $H_0^1(\Omega_1^*)$; de cette manière on obtient un unique solution $u \in \widetilde{H}_0^1(\Omega_1^*)$ de problème posé ci-dessus.

A la fin on pose $u^{[1]} = \widetilde{w} + u$ qui sera la solution de l'équation (3.13) □

Théorème 3.4. *Si*

$$\widetilde{f}_1 \in L^2(\Omega_1^*), \qquad \partial\Omega_1^* \in \mathscr{C}^2,$$

alors la solution $u^{[1]}$ *de l'équation* (3.13) *vérifie* $u^{[1]} \in H^2(\Omega_1^*)$, *et on a*

$$\begin{aligned} \|u^{[1]}\|_{H^2(\Omega_1^*)} \leq c\Big\{&\|\widetilde{\varrho}\widetilde{f}_1\|_{L^2(\Omega_1^*)} + \|\widetilde{\varrho}g(\beta+\overline{h})\|_{L^2(\Omega_1^*)} + \|\nabla\pi_1(\widetilde{\varrho})\|_{L^2(\Omega_1^*)} \\ &+ \Big\|\Big\{\nu[\partial_{x_j}u_k^{[2]} + \partial_{x_k}u_j^{[2]}]\overline{n}_k\Big\}_{tan}\Big\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_1^*)} + \|\widetilde{\varphi_1}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_1^*)}\Big\}, \end{aligned} \tag{3.27}$$

avec une constante $c > 0$.

Démonstration. Pour la démonstration voir [7] (théorème 4 de chapitre IV, (p.215)) ; ce théorème doit être complété par les théorèmes de la trace (voir[5]). □

Etant démontrés les **théorèmes 3.2**, **3.3** et **3.4**, on peut déduire la conclusion suivante

Corollaire 3.1. *Sous les mêmes conditions des* ***théorèmes 3.2*** *et* ***3.3****, le problème* (3.12), (3.13) *avec les conditions aux limites* (3.9) - (3.11) *(avec* $\partial\Omega_1^* \in \mathscr{C}^2$*), admet une unique solution* $(\widetilde{\varrho}, u^{[1]})$ *dans* $H^1(\Omega_1^*) \times H^2(\Omega_1^*)$ *et la solution* $(\widetilde{\varrho}, u^{[1]})$ *vérifie les inégalités* (3.14), (3.27).

Conclusion et perspective

Dans le **chapitre 2** nous avons transformé le problème avec un changement de variables de sorte que, même si le domaine n'est pas connu a priori, on peut travailler dans un domaine fixé.

Dans le **chapitre 3** nous avons étudié les équations linéarisées dans ce domaine, ces études nous ont donnée des estimations utiles pour poursuivre notre recherche sur le système d'équations non-linéaires complet.

Pour résoudre le système d'équations complet nous avons besoin de trouver le point fixe d'un opérateur qui, à des fonctions donnée $\overline{\varrho}$, $\overline{u}^{[1]}$, $\overline{u}^{[2]}$, associe la solution $\widetilde{\varrho}$, $u^{[1]}$, $u^{[2]}$ des équations linéarisées. Mais nous avons besoin également de trouver des domaines Ω_1, Ω_2 inconnus, concernant ce dernier problème nous espérons qu'on pourra utiliser l'idée développée dans le travail [4], en effet nous avons fait la transformation de domaine inconnu en utilisant la méthode suivie par [4], ce qui nous fait espérer de construire le domaine inconnu de manière analogue.

Comme nous l'avons évoqué dans l'introduction le problème de l'inter-surface libre entre deux fluides un compressible et l'autre incompressible est l'un des problèmes fondamentaux de la mécanique des fluides appliquée aux phénomènes naturels. A notre connaissance ce problème, à cause de la difficulté technique, n'est pas encore résolu. Nous espérons que les travaux présentés dans ce mémoire donneront une contribution utile à la recherche de problème de l'inter-surface libre entre deux fluides compressible et incompressible.

Bibliographie

[1] ATUSI TANI : *Two-phase free boundary problem for compressible viscous fluid moyion*, J.Math. Kyoto Univ.(JMKYAZ), 24-2 (1984), p. 243-267

[2] GENEVIÈVE. ALLAIN : *Un problème de Navier-Stokes avec surface libre et tension superficielle*, Annales de la faculté des sciences de Toulouse, 5 ème série, tome7, (1985), p. 29-56

[3] H.FUJITA YASHIMA : *Modélisation de la physique des fluides*, cours de l'université de Guelma, 2010-2011

[4] H.FUJITA YASHIMA : *Problème de la surface libre de l'équation de Navier-Stokes - Cas statinnaire et cas périodique -*, Annali Della Scuola Normale Superiore Di Pisa 4 ème série, tome 12, (1985), p. 531-587

[5] J.L.LIONS- E. MAGENESS : *Problème aux limites non homogène et applications*, Dunod, Paris (1968).

[6] L.LANDAU, E.LIFCHITZ : *Physique théorique*, Tome 6 (*Mécanique des fluides.*) Mir, Moscou, 1989.

[7] V.MIKHAÏLOV :*Equations aux dérivées partielles*, Edition Mir, Mosco, (1980)