

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique

M/510.079

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques



Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Equations aux Dérivées Partielles**



Par :

Melle. Bazine Imane

Intitulé

Modélisation mathématique des phénomènes de grêle

Dirigé par : **Dr. Mohamed Zine Aissaoui**

Devant le jury

PRESIDENT

Mr. Hisao Fujita Yashima

Prof

Univ-Guelma

RAPPORTEUR

Mr. Mohamed Zine Aissaoui

MCA

Univ-Guelma

EXAMINATEUR1

Mme. Fatima Aissaoui

MAA

Univ-Guelma

Session Juin 2013

Modélisation mathématique des phénomènes de grêle

Bazine Imane

Mémoire de master en mathématiques

Université 08 mai 1945-Guelma

28 mai 2013

Je dédie ce mémoire

A mes chers parents, symbole de sacrifice, de tendresse et d'amour...



Remerciements

*En préambule à ce mémoire nous remercions **ALLAH** qui nous aide et nous donne la patience et le courage durant ces longues années d'étude.*

*Je tiens à remercier sincèrement Messieurs, **Hisao Fujita Yashima** et **Mohamed Zine Aissaoui**, qui, en tant que Directeurs de mémoire, se sont toujours montrés à l'écoute et très disponibles tout au long de la réalisation de ce mémoire, ainsi pour l'inspiration, l'aide et le temps qu'ils ont bien voulu me consacrer.*

*Je souhaite adresser mes remerciements les plus sincères aux personnes qui m'ont apporté leur aide et qui ont contribué à l'élaboration de ce mémoire ainsi qu'à la réussite de cette formidable année universitaire surtout à **Mlle Hanane Belhireche**.*

Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à tous mes proches et amies, qui m'ont toujours soutenue et encouragée au cours de la réalisation de ce mémoire.

Merci à tous et à toutes.



Résumé

Dans ce présent mémoire nous proposons un modèle mathématique du phénomène de grêle et nous étudions les équations différentielles de ce modèle dans le cadre d'analyse mathématique.

Table des matières

Introduction	iii
1 Description du phénomène de grêle	1
2 Formulation du problème	3
2.1 Définition des quantités physiques	3
2.2 Formulation des équations	5
3 Etude de l'équation de la densité de gouttelettes	7
4 Etude de l'équation de la densité de grêle	10
5 Existence d'une solution de l'équation approchée	14
6 Existence d'une solution de l'équation (non modifiée)	22
Conclusion et perspectives	28
Bibliographie	30

Introduction

La grêle est un type de précipitation qui se forme dans des orages particulièrement forts, lorsque l'air est très humide et que les courants ascendants sont puissants.

Dans ce mémoire nous proposons un modèle mathématique du phénomène de grêle, ce modèle sert à la description de la formation des grêlons ainsi que son parcours suivi au sein du nuage.

Notre mémoire est organisé de la manière suivante :

Chapitre 1 : Ce chapitre est dédié à une description physique du phénomène de grêle.

Chapitre 2 : Dans ce chapitre nous définissons les quantités physiques qu'on a besoin dans notre étude et puis la formulation des équations de la densité des gouttelettes ainsi que de la grêle.

Chapitre 3 : C'est le chapitre où nous étudions l'équation de la densité de gouttelettes établie dans le chapitre 2.

Chapitre 4 : Dans ce chapitre on s'intéresse à l'étude de l'équation de la densité de grêle sur les caractéristiques.

Chapitre 5 : Ici nous examinons l'existence d'une solution au système d'équations étudiées dans les chapitres 3 et 4 avec le système des équations des caractéristiques modifié, en utilisant la théorie du point fixe à l'aide du théorème de Schauder, ainsi que l'unicité dans un cas particulier.

Chapitre 6 : On termine notre travail par étudier le système d'équations précédent mais sans modification, autrement dit l'étudier "presque partout".

Chapitre 1

Description du phénomène de grêle

Lors de conditions météorologiques instables, se forment de gigantesques nuages appelés **cumulonimbus**, dont la base horizontale atteint souvent 20 à 30km et 10 à 15km de hauteur où la température est largement négative (de l'ordre de -40°C).

Le cumulonimbus peut être divisé conventionnellement en trois zones, une zone inférieure engendrée par la formation des gouttelettes, une zone centrale caractérisée par la présence de gouttelettes surfondues et une zone supérieure particulièrement riche de cristaux de glace.

A l'intérieur d'un cumulonimbus, de forts courants verticaux ascendants et descendants provoquent d'importantes turbulences.

Les courants ascendants portent les gouttelettes d'eau vers le haut traversant rapidement des zones de température négatives, les gouttelettes se solidifient et donne naissance à un nombre important des cristaux de glace, mais elle peuvent également rester en surfusion jusqu'à -39°C , seion qu'elles contiennent ou non, un noyau de congéiation.

Une fois formés, les petits cristaux de glace vont continuer leur ascension dans le nuage en grossissant par absorption de gouttelettes d'eau ce qui génère des petits **grêlons**, ces derniers sortent du courant ascendant, mais pas du nuage, pour plonger vers le bas sous

l'effet des courants descendants. s'ils ont assez fondu à la descente, ils reprennent le chemin ascendants et continuent à grossir, ce processus peut être répété plusieurs fois jusqu'au moment où le poids de ces grêlons devient trop important, provoquant leur chute de plus en plus rapide donc leur parcours à température positive est trop court, ils n'ont pas le temps de fondre, ils restent durs, et arrivent au sol sous forme de grêle. Les grêlons qui en résultent sont formés alors de plusieurs couches qui sont similaires à un oignon en coupe transversale, la présence de ces couches diverses et successives montre que le grêlon, au cours de sa formation, a voyagé à travers le nuage dans des zones de températures et d'humidité très variables.

Quant à leur forme extérieure, elle est généralement sphérique. Or, nous avons qu'une goutte liquide abandonnée dans l'air en chute libre, prend la forme d'une larme, qui est celle de moindre résistance. Si le grêlon est sphérique, c'est que cette goutte, pendant sa congélation, a été roulée par des courants, dans tous les sens.

Néanmoins la grêle reste un phénomène rare du fait que seul 10% des cumulonimbus génèrent des grêlons pouvant atteindre le sol, les averses de grêle durent peu de temps (environ 5 à 10 minutes) et ne concernent que la superficie limitée traversée par l'orage.

Chapitre 2

Formulation du problème

2.1 Définition des quantités physiques

Les quantités physiques que nous devons considérer sont :

$\rho = \rho(z)$ la densité de l'air sec,

π_0 la densité initiale de H_2O liquide contenue dans les gouttelettes ,

$\sigma = \sigma(z)$ la densité de H_2O en l'état liquide contenue dans des gouttelettes,

$\nu = \nu(m, z)$ la densité de H_2O en l'état solide contenue dans les cristaux de glace,

Les densités $\sigma(z)$ et $\nu(m, z)$ sont exprimées comme masse par l'unité de volume de l'aire.

$v = v_3(z)$ la vitesse de l'air ainsi que la vitesse des gouttelettes (dans le présent travail nous la considérons comme une constante positive),

$U(m) = (0, 0, U_3(m))$ la vitesse des cristaux de glace de masse m , (dans la suite $U_3(m)$ sera notée $U(m)$)

On peut supposer que $U(m)$ est une fonction décroissante de m et que

$$U(m) > 0 \text{ pour } m < \bar{m}^*$$

$$U(m) < 0 \text{ pour } m > \bar{m}^*$$

$$U(\bar{m}^*) = 0$$

pour une certaine valeur critique $\bar{m}^* > 0$,

$T = T(z)$ la température (nous la considérons comme une fonction décroissante donnée).

Cela étant, nous supposons que la quantité de condensation (dans l'unité de volume et de temps) est donnée approximativement par

$$b(z) \approx \left(\pi_0 \frac{d\rho}{dz} - \frac{d}{dT} \bar{\pi}_{vs}(T) \frac{dT}{dz} \right) v$$

où $\bar{\pi}_{vs}(T)$ désigne la densité de la pression de la vapeur saturée. (pour la définition de la pression de la vapeur saturée voir [3])

Un morceau de glace se forme par un amas de gouttelettes arrivant dans une zone froide et agitée où elles se sont solidifiées normalement en s'agglomérant ensemble. Nous désignons par la quantité

$$K_{ls}(T; m) \sigma(z)$$

le nombre de nouveaux morceaux de glace dans l'unité de volume.

On suppose que

$$K_{ls}(T; m) \geq 0$$

et que

$$K_{ls}(T; m) = 0$$

pour

$$T \leq 273 \cdot 15^\circ K$$

pour

$$0 < m \leq \bar{m}_0, \quad m \geq \bar{m}_1$$

C'est à dire

$$K_{ls}(T; m) > 0$$

seulement pour

$$0 < \bar{m}_0 < m < \bar{m}_1 < \infty$$

pour certaines valeurs \bar{m}_0 et \bar{m}_1 .

2.2 Formulation des équations

Les gouttelettes givrent sur les noyaux de glace et forment une couche d'eau surfondue à la surface, ce qui donne alors naissance à un grêlon dense, d'où l'augmentation de la masse d'un morceau de glace (de masse m) peut s'exprimer par l'équation

$$\frac{dm}{dt} = mZ_{ls}(T; m)\sigma \quad (2.1)$$

où $Z_{ls}(m)$ est le taux de conglomérat des gouttelettes sur un morceau de glace (taux par rapport à la masse de morceau de glace; on peut estimer que $Z_{ls}(m) \sim m^{-1/3}$)

On suppose que $Z_{ls}(T(z), m)$ et $\partial_m Z_{ls}(T(z), m)$ sont continues et $Z_{ls}(T(z), m) \geq 0$.

Donc la solidification totale est donnée par le terme

$$\sigma \left[\int_0^{\infty} K_{ls}(T; m) dm + \int_0^{\infty} Z_{ls}(m) v(m; z) dm \right]$$

En appuyant sur les considérations précédentes, on écrit l'équation pour la densité de gouttelettes comme suit

$$b(z)v - v\partial_z\sigma(z) - \sigma \left[\int_0^\infty K_{ls}(T; m) dm + \int_0^\infty Z_{ls}(m)v(m; z) dm \right] = 0 \quad (2.2)$$

où

$$b(z) \approx \pi_0 \frac{d\rho}{dz} - \frac{d}{dT} \bar{\pi}_{vs}(T) \frac{dT}{dz} \quad (2.3)$$

On suppose que $b(\cdot) \in L^\infty([\bar{z}_0, \bar{z}_1])$.

D'autre part l'équation de la densité de grêle que nous considérons est l'équation aux dérivées partielles

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} (v(m, z)U(m)) + \frac{\partial}{\partial m} (v(m, z)mZ_{ls}(T; m)\sigma(z)) = \\ = K_{ls}(T; m)\sigma(z) + Z_{ls}(T; m)\sigma(z)v(m, z) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Sur les trajectoires (sur le plan $(m; z)$) de chaque morceau de glace on a le système suivant

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt} = U(m) \\ \frac{dm}{dt} = mZ_{ls}(T(z); m)\sigma(z) \end{cases} \quad (2.5)$$

Pour la formulation de ces équations nous avons suivi les idées de [7] et [6].

Chapitre 3

Etude de l'équation de la densité de gouttelettes

Dans ce chapitre nous allons étudier l'équation (2.2) en supposant que la fonction $v(m; z)$ est connue.

Soient $0 < \bar{z}_0 < \bar{z}_1 < \infty$, $0 < \bar{m}_0 < \infty$.

Proposition 3.1. Soit $v(m; z)$ une fonction donnée dans $L^\infty([\bar{m}_0, \infty[\times]\bar{z}_0, \bar{z}_1])$. Alors l'équation (2.2) avec la condition initiale $\sigma(\bar{z}_0) = \sigma_0 (\geq 0)$ admet une solution σ et une seule dans $L^\infty([\bar{z}_0, \bar{z}_1])$ et la solution σ a l'expression

$$\begin{aligned} \sigma(z) = & \sigma_0 \exp\left(-\int_{\bar{z}_0}^z \frac{1}{v} \left[\int_0^\infty K_{ls}(T; m) dm + \int_0^\infty Z_{ls}(m) v(m; z') dm \right] dz'\right) + \\ & + \int_{\bar{z}_0}^z b(z') \exp\left(-\int_{z'}^z \frac{1}{v} \left[\int_0^\infty K_{ls}(T; m) dm + \int_0^\infty Z_{ls}(m) v(m; z'') dm \right] dz''\right) dz' \end{aligned} \quad (3.1)$$

Démonstration. On remarque que l'équation (2.2) contient une seule fonction inconnue σ et est linéaire par rapport à σ , ce qui facilite la résolution de l'équation.

En réécrivant l'équation (2.2), on a

$$\partial_z \sigma(z) = -a(z)\sigma(z) + b(z) \quad (3.2)$$

où

$$a(z) = \frac{1}{v} \left[\int_0^\infty K_{ls}(T; m) dm + \int_0^\infty Z_{ls}(m) v(m; z) dm \right] \quad (3.3)$$

D'après le théorème d'existence et d'unicité des équations différentielles ordinaires ce problème de Cauchy admet une unique solution exprimée par

$$\sigma(z) = \sigma_0 e^{-\int_{\bar{z}_0}^z a(z') dz'} + \int_{\bar{z}_0}^z b(z') e^{-\int_{z'}^z a(z'') dz''} dz'$$

ou encore

$$\begin{aligned} \sigma(z) = & \sigma_0 \exp \left(- \int_{\bar{z}_0}^z \frac{1}{v} \left[\int_0^\infty K_{ls}(T; m) dm + \int_0^\infty Z_{ls}(m) v(m; z') dm \right] dz' \right) + \\ & + \int_{\bar{z}_0}^z b(z') \exp \left(- \int_{z'}^z \frac{1}{v} \left[\int_0^\infty K_{ls}(T; m) dm + \int_0^\infty Z_{ls}(m) v(m; z'') dm \right] dz'' \right) dz' \end{aligned}$$

□

Proposition 3.2. On suppose les mêmes hypothèses de la **proposition 3.1**, et que

$$b(z) \leq -\frac{d\bar{\pi}_{vs}(T)}{dT} \frac{dT}{dz}.$$

Alors on a

$$\sigma(z) \leq \sigma(\bar{z}_0) + \bar{\pi}_{vs}(T(\bar{z}_0))$$

$$\forall z \geq \bar{z}_0$$

Démonstration. Pour tout $z \geq \bar{z}_0$ on a

$$\sigma(z) = \sigma(\bar{z}_0) + \int_{\bar{z}_0}^z \partial_{z'} \sigma(z') dz'$$

et de l'équation (3.2) on a

$$\partial_z \sigma(z) \leq b(z)$$

ou encore

$$\partial_z \sigma(z) \leq \frac{d\bar{\pi}_{vs}(T)}{dT} \frac{dT}{dz}$$

En rappelant que $\bar{\pi}_{vs}(T) > 0$ pour tout $T > 0$, on obtient

$$\begin{aligned} \sigma(z) &< \sigma(\bar{z}_0) - \int_{\bar{z}_0}^z \frac{d\bar{\pi}_{vs}(T)}{dT} \frac{dT}{dz'} dz' \\ &= \sigma(\bar{z}_0) + \bar{\pi}_{vs}(T(\bar{z}_0)) - \bar{\pi}_{vs}(T(z)) \\ &\leq \sigma(\bar{z}_0) + \bar{\pi}_{vs} T(\bar{z}_0) \end{aligned}$$

La proposition est démontrée. □

On rappelle que l'hypothèse $b(z) \leq -\frac{d\bar{\pi}_{vs}(T)}{dT} \frac{dT}{dz}$ est conforme à l'expression approximative de $b(z)$ donnée dans (2.3). Cette approximation est également conforme aux relations physiques du phénomène.

Chapitre 4

Etude de l'équation de la densité de grêle

Quant à l'équation de la densité de grêle, il nous convient de la considérer sur les caractéristiques. On va donc définir avant tout les caractéristiques pour l'équation (2.4). Pour cela on considère l'équation (2.5) avec les conditions initiales

$$\begin{cases} m(0) = \tilde{m} & (\bar{m}_0 \leq \tilde{m} < \bar{m}^*) \\ z(0) = \bar{z}_0 \end{cases} \quad (4.1)$$

ou

$$\begin{cases} m(0) = \bar{m}_0 \\ z(0) = \tilde{z} & (\bar{z}_0 \leq \tilde{z} < \bar{z}_1) \end{cases} \quad (4.2)$$

selon la position du point de départ de la caractéristique. On désigne les solutions $(m(t), z(t))$ par

$m(\tilde{m}, \bar{z}_0; t), z(\tilde{m}, \bar{z}_0; t)$ dans le premier cas

ou

$m(\bar{m}_0, \tilde{z}; t), z(\bar{m}_0, \tilde{z}; t)$ dans le second cas

En outre, il faut considérer également les caractéristiques qui partent de $\{z = \bar{z}_1\}$, même si nous supposons que $v(m(t), z(t)) = 0$, sur ces caractéristiques.

On va supposer que $\bar{m}^* \geq \bar{m}_1$ de sorte que $K_{I_s}(T(z), m)$ est identiquement nulle sur ces caractéristiques. En tout cas, l'équation (2.5) nous permet de définir, formellement, ces caractéristiques, que nous désignons par $m(\tilde{m}, \bar{m}_1; t)$, $z(\tilde{m}, \bar{m}_1; t)$.

En transformant l'équation (2.4) sur les caractéristiques, on aura

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}v(m(t), z(t)) = & -v(m(t), z(t))m\sigma(z(t))(\partial_m Z_{I_s}(T(z), m))\Big|_{m=m(t), z=z(t)} + \\ & + K_{I_s}(T(z(t)); m(t))\sigma(z(t)) \end{aligned} \quad (4.3)$$

sur chaque caractéristique. Dans l'expression (4.3) on entend

$$m(t) = m(\tilde{m}, \bar{z}_0; t) \text{ ou } m(\bar{m}_0, \tilde{z}; t)$$

et

$$z(t) = z(\tilde{m}, \bar{z}_0; t) \text{ ou } z(\bar{m}_0, \tilde{z}; t).$$

Cette équation doit être envisagée avec la condition initiale

$$\begin{aligned} v(m(0), z(0)) &= v(\tilde{m}, \bar{z}_0) \\ &\text{ou} \\ v(m(0), z(0)) &= v(\bar{m}_0, \tilde{z}) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Si la fonction σ est donnée, il suffit de résoudre l'équation (4.3) sur chaque caractéristique pour obtenir $v(m, z)$.

Lemme 4.1. *Supposons que σ est donnée dans $L^\infty([\bar{z}_0, \bar{z}_1])$ et que l'équation (2.5) avec les conditions (4.1) ou (4.2) admet la solution $(m(t), z(t))$. Alors sur la caractéristique*

$(m(t), z(t))$ l'équation (4.3) admet la solution unique

$$v(m(t), z(t)) = v(m(0), z(0)) \exp\left(-\int_0^t m\sigma(z(t'))(\partial_m Z_{ls}(T(z), m)) dt'\right) + \\ + \int_0^t K_{ls}(T(z(t')), m(t'))\sigma(z(t')) \exp\left(-\int_t^{t'} m\sigma(t'')(\partial_m Z_{ls}(T(z), m)) dt''\right) dt'. \quad (4.5)$$

Démonstration. Comme (4.3) est une équation linéaire par rapport à la fonction inconnue $v(m(t), z(t))$ et que les fonctions $\sigma(z(t))(\partial_m Z_{ls}(T(z), m))\big|_{m=m(t), z=z(t)}$ et $K_{ls}(T(z(t)); m(t))\sigma(z(t))$ sont bien définies, l'équation (4.3) avec la condition initiale (4.4) admet la solution unique (4.1). \square

On rappelle que les caractéristiques sont bien définies pourvu que les seconds membres de (2.5) ne s'annulent pas simultanément. Or, a priori on ne peut pas exclure l'éventualité de présence d'un point (m, z) où l'on ait

$$U(m) = \sigma(z) = 0$$

et donc

$$U(m) = mZ_{ls}(T(z); m)\sigma(z) = 0,$$

en annulant simultanément les seconds membres de (2.5). Dans ce cas on ne peut pas appliquer le **lemme** 4.1 pour obtenir $v(m, z)$ pour tous les points (m, z) de Ω . Pour contourner cette difficulté, dans le prochain chapitre on va utiliser une approximation de l'équation et dans le chapitre successif on va examiner la possibilité de résoudre le problème "presque partout".

Pour les équations approchées que nous allons considérer dans le prochain chapitre, nous

introduisons une approximation en considérant au lieu de système (2.5) le système d'équations

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt} = U(m) \\ \frac{dm}{dt} = mZ_{I_S}(T(z); m) \max(\sigma(z), \epsilon) \quad \epsilon > 0 \end{cases} \quad (4.6)$$

Pour cette approximation nous avons le résultat suivant

Lemme 4.2. *Soit $\sigma(z)$ une fonction donnée dans $L^\infty([\bar{z}_0, \bar{z}_1[)$. Alors l'équation (4.6) avec les conditions (4.1) ou (4.2) admet la solution $(m(t), z(t))$ et sur ces caractéristiques $(m(t), z(t))$ l'équation (4.3) avec la condition initiale (4.4) admet une solution $v(m(t), z(t))$ et une seule; les fonctions $v(m(t), z(t))$ ainsi obtenues, quand elles sont considérées comme une fonction définie sur $[\bar{m}_0, \infty[\times [\bar{z}_0, \bar{z}_1[$, forment une fonction appartenant à $L^\infty([\bar{m}_0, \infty[\times [\bar{z}_0, \bar{z}_1[)$.*

Démonstration. Il suffit de remarquer que les deux seconds membres du systèmes d'équations (4.6) sont partout bien définis et ne s'annulent pas, ce qui nous permet de le résoudre partout. Cela étant, on peut résoudre l'équation (4.3) avec la condition initiale (4.4) comme dans le **lemme** 4.1. En outre, comme le second membre de l'équation (4.3) est borné, on voit aisément que la fonction $v(m, z)$ considérée sur $[\bar{m}_0, \infty[\times [\bar{z}_0, \bar{z}_1[$ appartient à $L^\infty([\bar{m}_0, \infty[\times [\bar{z}_0, \bar{z}_1[)$. □

Chapitre 5

Existence d'une solution de l'équation approchée

Dans ce chapitre nous allons démontrer l'existence de solution du système d'équations approchées (2.2), (2.4), (4.6).

On définit d'abord l'opérateur G qui, à une $\bar{\sigma}$, la solution des système d'équations σ . Plus précisément on pose

$$G = G_1 \circ G_2$$

avec

$$G_1 : L^\infty(\omega) \rightarrow L^\infty(\Omega)$$

$$\bar{\sigma} \mapsto \bar{v}$$

et

$$G_2 : L^\infty(\Omega) \rightarrow L^\infty(\omega)$$

$$v \mapsto \sigma$$

où

$$\Omega = [\bar{m}_0, \infty[\times \omega, \omega = [\bar{z}_0, \bar{z}_1[$$

σ est la solution de l'équation différentielle ordinaire (2.2) et v est la solution de l'équation (4.3) sur chaque caractéristique.

Théorème 5.1. *Pour tout $\epsilon > 0$ le système d'équations (2.2)-(2.4) avec l'équation des caractéristiques modifiée (4.6) admet une solution (σ, ν) dans la classe $L^\infty(\omega) \times L^\infty(\Omega)$*

Nous allons démontrer ce théorème en utilisant le **théorème de Schauder**

Théorème 5.2 (Théorème de Schauder). *Toute application continue P d'un ensemble compact convexe Ω d'un espace de Banach X dans lui même possède un point fixe.*

Démonstration. Pour la démonstration du théorème on peut consulter le livre [4], Chapitre XVI, §3. □

Afin d'appliquer le **théorème de Schauder** on considère un ensemble convexe B défini par

$$B = \{\sigma \in L^\infty(\omega), \sigma(z) \geq 0 \text{ pour tout } z \in [\bar{z}_0, \bar{z}_1[\text{ et}$$

$$\|\sigma\|_{L^\infty(\omega)} \leq \sigma(\bar{z}_0) + \bar{\pi}_{\nu_s}(T(\bar{z}_0))\}$$

on a d'après la **proposition 3.2** $C(B) \subset B$ et on montre que $C(B)$ est compact en utilisant le **théorème d'Ascoli-Arzelà**.

Théorème 5.3 (Théorème d'Ascoli-Arzelà). *Soit \bar{G} un domaine borné fermé de l'espace euclidien E^n . Considérons l'espace des fonctions continues $\mathcal{C}(\bar{G})$, soit M un ensemble de fonction dans $\mathcal{C}(\bar{G})$.*

Pour que l'ensemble $M \subset \mathcal{C}(\bar{G})$ soit compact, il faut et il suffit que les fonctions de M soient

i) uniformément bornées;

ii) équicontinues

Démonstration. Pour la démonstration du théorème on peut consulter le livre [8], Chapitre V, §1. □

En effet, on a d'après la **proposition** 3.2 toutes les fonctions σ de B sont uniformément bornées donc le point i) du **théorème** est vérifié.

En ce qui concerne l'équicontinuité on aura besoin du lemme suivant

Lemme 5.1. Si $v \in L^\infty(\Omega)$, alors $\sigma(z)$ est lipschitzienne.

Démonstration. Soient $z_1, z_2 \in [\bar{z}_0, \bar{z}_1[$ tels que $z_1 < z_2$ alors

$$\begin{aligned} |\sigma(z_2) - \sigma(z_1)| &= \left| \int_{z_1}^{z_2} \partial_{z'} \sigma(z') dz' \right| \\ &\leq \int_{z_1}^{z_2} |\partial_{z'} \sigma(z')| dz' \\ &\leq \int_{z_1}^{z_2} \left| \frac{1}{v} \left[\int_0^{\infty} K_{ls}(T; m) dm + \int_0^{\infty} Z_{ls}(m) v(m; z') dm \right] \right| dz' + \int_{z_1}^{z_2} b(z') dz' \end{aligned}$$

comme toutes les fonctions sous les signes d'intégral sont bornées on aura

$$|\sigma(z_2) - \sigma(z_1)| \leq L |z_2 - z_1|$$

où L est une constante. □

Pour $\sigma \in G(B)$, par le **lemme 5.1**, pour tout $z_1, z_2 \in [\bar{z}_0, \bar{z}_1[$, $\exists L$ une constante qui ne dépend ni de z ni de σ tels que

$$|\sigma(z_2) - \sigma(z_1)| \leq L |z_2 - z_1|$$

soit $\varepsilon > 0$, soit $\eta = \frac{\varepsilon}{L}$ alors $\forall z_1, z_2 \in [\bar{z}_0, \bar{z}_1[$

$$|z_2 - z_1| \leq \eta \implies |\sigma(z_2) - \sigma(z_1)| \leq L |z_2 - z_1| \leq \varepsilon$$

ce qui est exactement l'équicontinuité de $G(B)$, alors le point **ii**) est aussi vérifié.

Donc d'après le **théorème 5.3** l'ensemble $G(B)$ est compact.

Maintenant on va démontrer que l'opérateur G est continu,

Lemme 5.2. *L'opérateur G est continu de $L^\infty(\omega)$ dans lui même.*

Démonstration. Soient (σ_1, v_1) et (σ_2, v_2) vérifient le système (2.2), (2.4), (4.6)

Première partie On va montrer que G_1 est continu

En effet, si v_1 et v_2 sont deux solutions de l'équation (2.4) on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} v_1(m(t), z(t)) &= \\ &= -v_1(m(t), z(t)) (\partial_m Z_{is}(T(z), m)) + K_{is}(T(z(t)); m(t)) \sigma_1(z(t)) \\ \frac{d}{dt} v_2(m(t), z(t)) &= \\ &= v_2(m(t), z(t)) (\partial_m Z_{is}(T(z), m)) + K_{is}(T(z(t)); m(t)) \sigma_2(z(t)) \end{aligned}$$

En faisant la différence entre les deux équations on obtient

$$\frac{d}{dt} v_2(m(t), z(t)) - \frac{d}{dt} v_1(m(t), z(t)) =$$

$$= [-v_2(m(t), z(t)) + v_1(m(t), z(t))] (\partial_m Z_{ls}(T(z), m)) + \\ + K_{ls}(T(z(t)); m(t)) [\sigma_2(z(t)) - \sigma_1(z(t))]$$

En posant

$$\Xi = v_2 - v_1, \Sigma = \sigma_2 - \sigma_1$$

la dernière équation devient

$$\frac{d}{dt} \Xi(m(t), z(t)) = \\ = -\Xi(m(t), z(t)) (\partial_m Z_{ls}(T(z), m)) + K_{ls}(T(z(t)); m(t)) \Sigma(z(t))$$

En résolvant formellement l'équation précédente on aura

$$\Xi(m(t), z(t)) = \\ - \int_0^t K_{ls}(T(z(i')), m(i')) \sigma(z(i')) \exp \left\{ - \int_0^t \partial_m Z_{ls}(T(z(i'')), m(i'')) \alpha i'' \right\} \alpha i'$$

Alors sur chaque caractéristique γ on a

$$\| \Xi \|_{L^\infty(\gamma)} \leq k \| \Sigma \|_{L^\infty(\omega)} \quad (5.1)$$

où k est une constante qui ne dépend pas de γ .

Deuxième partie On s'intéresse maintenant à la continuité de G_2 .

on a

$$\partial_z \sigma_1(z) = -\frac{1}{\nu} \left[\int_0^\infty K_{ls}(T; m) dm + \int_0^\infty Z_{ls}(m) v_1(m; z) dm \right] \sigma_1(z) + b(z), \\ \partial_z \sigma_2(z) = -\frac{1}{\nu} \left[\int_0^\infty K_{ls}(T; m) dm + \int_0^\infty Z_{ls}(m) v_2(m; z) dm \right] \sigma_2(z) + b(z),$$

en faisant la différence on obtient

$$\begin{aligned}
 \partial_z[\sigma_1(z) - \sigma_2(z)] &= -\frac{1}{\nu} \int_0^{\infty} Z_{ls}(m) v_1(m; z) dm \sigma_1(z) + \frac{1}{\nu} \int_0^{\infty} Z_{ls}(m) v_2(m; z) dm \sigma_2(z) \\
 &= \frac{1}{\nu} \int_0^{\infty} Z_{ls}(m) v_1(m; z) dm \sigma_2(z) - \frac{1}{\nu} \int_0^{\infty} Z_{ls}(m) v_1(m; z) dm \sigma_1(z) + \\
 &+ \frac{1}{\nu} \int_0^{\infty} Z_{ls}(m) v_2(m; z) dm \sigma_2(z) - \frac{1}{\nu} \int_0^{\infty} Z_{ls}(m) v_1(m; z) dm \sigma_1(z) \\
 &= \frac{1}{\nu} \int_0^{\infty} Z_{ls}(m) v_1(m; z) dm (\sigma_2(z) - \sigma_1(z)) \\
 &+ \frac{1}{\nu} \int_0^{\infty} Z_{ls}(m) (v_2(m; z) - v_1(m; z)) dm \sigma_2(z)
 \end{aligned}$$

en posant

$$\Xi = v_2 - v_1, \Sigma = \sigma_2 - \sigma_1$$

la dernière équation devient

$$-\partial_z \Sigma(z) = \frac{1}{\nu} \int_0^{\infty} Z_{ls}(m) v_1(m; z) dm (\Sigma(z)) + \frac{1}{\nu} \int_0^{\infty} Z_{ls}(m) (\Xi(m; z)) dm \sigma_2(z)$$

en résolvant l'équation précédente on aura

$$\begin{aligned}
 \Sigma(z) &= \\
 &= \int_{\bar{z}_0}^z \left[-\frac{1}{\nu} \int_0^{\infty} Z_{ls}(m) \Xi(m; z') dm \sigma_2(z') \right] \exp \left(\int_{\bar{z}_0}^z \frac{1}{\nu} \int_0^{\infty} Z_{ls}(m) v_1(m; z'') dm dz'' \right) dz'
 \end{aligned}$$

alors

$$\|\Sigma\|_{L^\infty(\omega)} \leq k' \|\Xi\|_{L^\infty(\Omega)} \quad (5.2)$$

où k' est une constante.

En combinant les deux inégalités (5.1)-(5.2) et en rappelant que dans l'inégalité (5.1) k ne dépend pas de la caractéristique γ on obtient

$$\|\Sigma\|_{L^\infty(\omega)} \leq k' \|\Xi\|_{L^\infty(\Omega)} \leq k' k \|\bar{\Sigma}\|_{L^\infty(\omega)}$$

ou encore

$$\|\Sigma\|_{L^\infty(\omega)} \leq k'' \|\bar{\Sigma}\|_{L^\infty(\omega)} \quad (5.3)$$

où $k'' = k k'$.

Par conséquent l'opérateur G est continu. \square

Démonstration du théorème 5.1.

On voit que a l'opérateur G est continu d'après le **lemme** 5.2 et la compacité de $G(B)$ est assurée par le **théorème** 5.3. Par conséquent, d'après le **théorème** 5.2) (**théorème de Schauder**) il existe un élément $\bar{\sigma} \in L^\infty(\omega)$ tel que $\bar{\sigma} = G(\bar{\sigma})$, c'est-à-dire $\bar{\sigma}$ satisfait au système (2.2)-(2.4) avec le système modifié (4.6). Ce qui achève la démonstration. \square

En ce qui concerne l'unicité de la solution, nous remarquons que, si la constante k'' figurant dans (5.3) est suffisamment petite, alors la solution est unique.

Proposition 5.1. *Si $k'' < 1$, alors la solution du système (2.2)-(2.4) avec le système modifié (4.6) est unique.*

Démonstration. Nous supposons que le système (2.2)-(2.4) admet deux solutions (σ_1, ν_1) et (σ_2, ν_2) posons

$$\bar{\Sigma} = \sigma_2 - \sigma_1 \text{ et } \bar{\Xi} = \nu_2 - \nu_1$$

en rappelant l'inégalité (5.3)

$$\|\Sigma\|_{L^\infty(\omega)} \leq k'' \|\Sigma\|_{L^\infty(\omega)}$$

On voit immédiatement que si $k'' < 1$ alors

$$\Sigma = 0, \text{ ou } \sigma_2 = \sigma_1$$

par conséquent, de (5.1) on aura

$$\Xi = 0, \text{ ou } \nu_2 = \nu_1$$

d'où l'unicité. □

Chapitre 6

Existence d'une solution de l'équation (non modifiée)

Dans ce chapitre nous allons considérer le système d'équation (2.2)-(2.5) sans modification. En outre sur les fonctions données, nous faisons des hypothèses plus proches de la réalité physique. Plus précisément nous supposons qu'il y a un \bar{z}^* , $\bar{z}_0 < \bar{z}^* < \bar{z}_1$, tel que

$$\begin{aligned} K_{ls}(T(z), m) < \infty & \quad \text{pour} \quad \bar{z}_0 < z < \bar{z}^* \\ \int_0^\infty K_{ls}(T(z), m) dm \rightarrow \infty & \quad \text{pour} \quad z \rightarrow \bar{z}^* \\ b(z) \geq 0 & \quad \forall z \in [\bar{z}_0, \bar{z}_1], \\ b(z) = 0 & \quad \forall z \in [\bar{z}^*, \bar{z}_1] \end{aligned}$$

Comme nous l'avons vu dans le **chapitre 1**, \bar{z}^* devrait correspondre à la hauteur ayant la température $\approx -39^\circ\text{C}$.

En ce qui concerne le coefficient $Z_{ls}(T(z), m)$, pour le moment nous supposons seulement

$$\begin{aligned} Z_{ls}(T(z), m) \text{ continu}, \quad Z_{ls}(T(z), m) > 0, \\ \partial_m Z_{ls}(T(z), m) < 0, \end{aligned}$$

$$\partial_z Z_{ls}(T(z), m) \geq 0.$$

Ces conditions correspondent assez bien aux conditions physiques réelles.

Lemme 6.1. *Quelque soit $v \in L^\infty(\Omega)$, $v \geq 0$, on a*

$$\sigma(z) > 0 \quad \text{pour} \quad \bar{z}_0 < z < \bar{z}^*,$$

$$\sigma(z) = 0 \quad \text{pour} \quad z \geq \bar{z}^*.$$

Démonstration. On rappelle l'expression explicite (3.1) de $\sigma(z)$ obtenue dans la **proposition 3.1**. En substituant dans cette expression les relations suivantes

$$\int_{\bar{z}_0}^z \int_0^\infty K_{ls}(T(z'), m) dm dz' < \infty \quad \text{pour} \quad \bar{z}_0 \leq z < \bar{z}^*,$$

$$\int_{\bar{z}_0}^{\bar{z}^*} \int_0^\infty K_{ls}(T(z'), m) dm dz' = \infty,$$

on obtient

$$\sigma(z) > 0 \quad \text{pour} \quad \bar{z}_0 < z < \bar{z}^*,$$

$$\sigma(z) = 0 \quad \text{pour} \quad z \geq \bar{z}^*.$$

□

D'autre part, pour l'étude de v nous avons besoin d'une analyse approfondie au voisinage de \bar{m}^* où $U(\bar{m}^*) = 0$, pour cela on considère l'intervalle $[\bar{m}^* - \delta, \bar{m}^* + \delta]$ avec $\delta > 0$. Nous nous intéressons dans le cas où la masse \bar{m}^* est suffisamment grande, donc il est naturel de prendre

$$K_{ls}(T; m) = 0 \quad \text{pour} \quad m \in [\bar{m}^* - \delta, \bar{m}^* + \delta]$$

Avec ces considérations, l'équation (4.3) se réduit à

$$\frac{d}{dt}v(m(t), z(t)) = -v(m(t), z(t))m\sigma(z)(\partial_m Z_{ls}(T(z), m)) \quad (6.1)$$

pour $m \in [\bar{m}^* - \delta, \bar{m}^* + \delta]$ D'autre part, de l'équation (2.5) on déduit également que

$$\frac{1}{\frac{dm}{dt}} = \frac{dt}{dm} = \frac{1}{mZ_{ls}(T(z); m)\sigma(z)}$$

Donc en multipliant l'équation (6.1) par $\frac{dt}{dm}$ on obtient

$$\frac{d}{dm}v = -v \frac{\partial_m Z_{ls}}{Z_{ls}} \quad (6.2)$$

Remarque 6.1. En tenant compte de la condition $Z_{ls}(T(z), m) > 0$, La quantité $\frac{\partial_m Z_{ls}}{Z_{ls}}$ est bien définie pourvu que σ est strictement positive.

Pour l'étude de l'équation (6.1), on donne les lemmes suivants

Lemme 6.2. Soit $(m(t), z(t))$ la solution du système d'équations (2.5). Si $\sigma(z(t)) > 0$ pour tout t appartenant à l'intervalle qui définit la solution $(m(t), z(t))$, alors il existe une fonction continue et strictement croissante $t(m)$ définie sur $[\bar{m}^* - \delta, \bar{m}^* + \delta]$, qui est la fonction inverse de $m(t)$.

Démonstration. Supposons que le système d'équations (2.5) admet une solution $(m(t), z(t))$. Pour $\sigma(z(t)) > 0$, le second membre de la seconde équation du (2.5) est strictement positif alors la fonction $m(t)$ est strictement croissante pour tout t , de plus $m(t)$ est continue

car c'est une solution d'une équation différentielle ordinaire. par conséquent, $m(t)$ admet une fonction inverse $t(m)$ qui est également continue et strictement croissante pour tout $m > \bar{m}_0$ et en particulier sur l'intervalle $[\bar{m}^* - \delta, \bar{m}^* + \delta]$. \square

Lemme 6.3. Si $(v(m(t)), z(t))$ est la solution de l'équation (6.2) et si $\sigma(z(t)) > 0$ pour tout t , alors on a pour tout m dans $[\bar{m}^* - \delta, \bar{m}^* + \delta]$

$$v(m) = v(\bar{m}^* - \delta) \exp\left(-\int_{\bar{m}^* - \delta}^m \frac{\partial_{m'} Z_{ls}}{Z_{ls}} dm'\right) \quad (6.3)$$

où $v(\cdot)$ est exprimée par la fonction $t(m)$ construite dans le **lemme 6.2**, avec $v(m) = v(m, z(t(m)))$

Démonstration. En vertu du **lemme 6.2** on peut exprimer v par $t(m)$ ce qui rend l'équation (6.2) une équation différentielle ordinaire facile à résoudre, sa solution est donnée par (6.3). \square

Corollaire 6.1. La solution de (6.2) donnée par (6.3) est uniformément bornée dans l'intervalle $[\bar{m}^* - \delta, \bar{m}^* + \delta]$, c'est à dire

$$|v(\bar{m}^* + \delta) - v(\bar{m}^* - \delta)| \leq C$$

où C ne dépend pas des caractéristiques.

Démonstration. De (6.2) on a

$$v(\bar{m}^* + \delta) - v(\bar{m}^* - \delta) = v(\bar{m}^* - \delta) \left[\exp\left(-\int_{\bar{m}^* - \delta}^{\bar{m}^* + \delta} \frac{\partial_{m'} Z_{ls}}{Z_{ls}} dm'\right) - 1 \right]$$

comme

$$Z_{ls}(m, T) > C_1 > 0 \quad \text{pour tout } m \in [\bar{m}^* - \delta, \bar{m}^* + \delta] \text{ et tout } T$$

et que

$$|\partial_m Z_{ls}(m, T)| \leq C_2 < \infty \quad \text{pour tout } m \in [\bar{m}^* - \delta, \bar{m}^* + \delta] \text{ et tout } T,$$

Alors le second membre de cette équation est bien borné par une constante qui ne dépend pas des caractéristiques. \square

Dans le cas où

$$\inf \sigma(z(t)) = 0$$

où inf est pris pour tout t pour lequel la caractéristique est définie, il y a deux cas

i) $\sup_t m(t) < \bar{m}^*$;

ii) $(m(t), z(t))$ tend vers (\bar{m}^*, \bar{z}^*) , où $\bar{z}^* = \sup\{z \in [\bar{z}_0, \bar{z}_1] \mid \sigma(z) > 0\}$

Dans le cas *i)* la caractéristique est définie jusqu'au point $(m(t), z(t))$ avec $z(t) = \bar{z}_1$ et $(m(t) < \bar{m}_*)$.

Dans le cas *ii)* nous convenons de considérer la caractéristique seulement jusqu'au point (\bar{m}^*, \bar{z}^*) .

Dans tous les cas *i)* et *ii)* on peut définir $v(m(t), z(t))$ sur les caractéristiques précisées ci-dessus.

Corollaire 6.2. *La solution de (6.2) donnée par (6.3) sur les caractéristiques précisées ci-dessus est uniformément bornée dans l'intervalle $[\bar{m}^* - \delta, \sup_t m(t)[$, c'est-à-dire*

$$\sup |v(m) - v(\bar{m}^* - \delta)| \leq C' \quad \forall m \in [\bar{m}^* - \delta, \sup_t m(t)[$$

où C' ne dépend pas des caractéristiques et sup est pris sur chaque caractéristique définie (dans le sens précisé ci-dessus).

Démonstration. Dans les caractéristiques où l'équation (6.2) est valide, on obtient le même résultat de la même manière que le **corollaire 6.1**. \square

Pour montrer l'existence de solution du système d'équations (2.2)-(2.5) (sans modification) on procède de manière analogue au **chapitre 5** mais on devra préciser la définition des caractéristiques sur lesquelles on obtiendra $v(m, z)$

Théorème 6.1. *Le système d'équations (2.2)-(2.5) admet une solution (σ, v) dans la classe $L^\infty(\omega) \times L^\infty(\Omega)$.*

Démonstration. On va suivre le même schéma de la démonstration du **théorème 5.1**. Supposons d'abord que $\sigma \in L^\infty(\omega)$ est donnée et vérifie les relations

$$\sigma(z) > 0 \quad \text{pour} \quad \bar{z}_0 < z < \bar{z}^*,$$

$$\sigma(z) = 0 \quad \text{pour} \quad z \geq \bar{z}^*.$$

Alors, on peut construire les caractéristiques qui sont les solutions de l'équation (2.5) avec les précisions données ci-dessus. On rappelle que sur ces caractéristiques le **lemme 4.1** reste valable.

Or, en vertu des corollaires 6.1 et 6.2 on constate que la solution $v(m, z)$ qui peut être constante comme dans le **lemme 4.1** reste uniformément bornée et donc $v \in L^\infty(\Omega)$ si on pose $v(m, z) = 0$ pour $(m, z) \in \Omega$ par lequel aucune caractéristique passe. Et pour $(m, t) \in \Omega$ par lequel passe une caractéristique qui part de $\{z = \bar{z}_1\}$ (voir les précisions données au début du **chapitre 4**).

Constatés ces faits, on voit aisément que le **théorème 6.1** se démontre de la même manière que le **théorème 5.1**. \square

Remarque 6.2. • Nous avons supposé l'existence du point \bar{z}^* , $\bar{z}_0 < \bar{z}^* < \bar{z}_1$, au dessus duquel $\sigma(z)$ devient nulle. Il est clair que l'on peut démontrer le même résultat sans supposer l'existence d'un tel point \bar{z}^* ; dans ce cas on aura $\sigma(z) > 0$ pour tout $z \in [\bar{z}_0, \bar{z}_1]$ et la démonstration sera plus simple.

• En ce qui concerne l'unicité, elle se fait de manière analogue au chapitre précédent.

Conclusion et perspectives

Nous avons proposé une description d'un phénomène de grêle dans une approximation suffisamment précise et nous avons démontré l'existence d'une solution qui représente la densité des gouttelettes σ et de grêle ν où cette dernière dépend non seulement de la position z mais aussi de la masse m .

La question de l'unicité de solution est étudiée dans un cas particulier, l'examen de cette question dans le cas générale peut être étudié dans le future. En outre, même si l'espace L^∞ est un espace fondamental pour notre problème, la question de régularité de la solution devra être étudiée.

Bibliographie

- [1] H. Belhirech, M. Z. Aissaoui, H. Fujita Yashima : *Equations monodimensionnelles du mouvement de l'air avec la transition de phase de l'eau*, Sci.Tech.Univ.Constantine-A, vol 31(2011),pp. 9-17.
- [2] H. Belhirech, M. Z. Aissaoui, H. Fujita Yashima : *Solution global de l'équation de coagulation des gouttelettes en chute*, A paraître sur Rendiconti del seminario
- [3] H. Fujita Yashima : *Modélisation de la physique des fluides*, cours de l'université de Guelma 2010. Matematico, Universita e politecnico di Torino.
- [4] L. Kantorovitch, G. Akilov : *Analyse fonctionnelle Tome2 Equations fonctionnelles*, Edition Mir, Moscou, .
- [5] M. Merad, H. Belhirech, H. Fujita Yashima : *solution stationnaire de l'équation de coagulation de gouttelette en chute avec le vent horizontal*, Aparaitre sur Ren. Sem. Mat. Univ. Padova.
- [6] M. Merad, M. Z. Aissaoui, H. Fujita Yashima : *solution stationnaire de l'équation de coagulation des gouttelettes avec un vent vertical*, En préparation.
- [7] S.C. Selvaduray, H. Fujita Yashima : *Equazioni del mote dell'aria e transizione di fase dell'acqua nei tre stati : Gassoso, Liquido e Solido*, aparaitre sur Memorie Accas.Sci.Torino, Serie V, vol35 (2011), pp. 37-69.

- [8] T. Trénoguine : *Analyse fonctionnelle*, Edition Mir, Moscou,.

