

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche  
Scientifique

11/510.078

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique  
et des Sciences de la Matière  
Département de Mathématiques



**Mémoire**

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de  
**Master Académique en Mathématiques**  
Option : **Probabilités et Applications**



Par :

M<sup>elle</sup> ACHOURI Somia et M<sup>elle</sup> NAIDJA Halima

**Intitulé**

**Méthodes de Monte-Carlo appliquée à la finance**

Dirigé par : Mr. KERBOUA Mourad

Devant le jury

**PRESIDENT  
RAPPORTEUR  
EXAMINATEUR1**

**Mr. BOUHADJAR.S  
Mr. KERBOUA.M  
Mr. BENCHAAABANE.A**

**Univ-Guelma  
Univ-Guelma  
Univ-Guelma**

**Session Juin 2013**

# Remerciement

*Nous remercions d'abord le bon dieu, pour le courage qu'il nous' a donné pour surmonter toutes les difficultés durant nos années d'étude.*

*Nous remercions nos parents pour leurs contributions, leurs soutiens et leurs patiences.*

*Nous faillirons à la tradition si nous n'exprimons pas ici notre, gratitude envers tous ceux qui ont collaborés de près ou de loin à l'exécution de ce mémoire :*

*Nous remercions très vivement notre encadreur :*

***Mourad Karboua***

*Pour nos avoir conseillés, guidés et dirigés notre travail qu'elle retrouve ici l'expression de notre sincère reconnaissance et notre profonde gratitude pour votre aide précieuse, assistance et claire lors de l'élaboration de ce travail.*

*Nous exprimons également nos chaleureux remerciements au Mr A. Ben Chaabane et au Mr S. Bouhadjar , pour l'honneur qu'ils nous ont fait d'avoir accepté de faire partie de ce jury.*

*Nous adressons également nos remerciements, à tous nos enseignants.*

# Table des matières

---

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
1.1	Présentation . . . . .	3
1.2	Rappels sur les méthodes de Monte Carlo . . . . .	5
1.3	Notations . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Méthodes de discrétisation d'EDS</b>	<b>9</b>
2.1	Simulation du mouvement Brownien . . . . .	9
2.1.1	Simulation récursive . . . . .	10
2.2	Discrétisation d'EDS . . . . .	11
2.2.1	Modèle de Black-Scholes . . . . .	12
2.2.2	Le schéma de discrétisation d'Euler . . . . .	12
2.2.3	Exemples . . . . .	14
2.2.4	Le schéma de discrétisation de Milshtein . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Réduction de la variance</b>	<b>18</b>
3.1	Fonctions d'importance . . . . .	18
3.1.1	Généralités . . . . .	18
3.1.2	Exemple 1. . . . .	21
3.1.3	Exemple 2. Exemple en Finance . . . . .	22
3.1.4	Théorème de Girsanov et fonctions d'importance pour les diffusions . . . . .	23
3.2	Variables antithétiques . . . . .	25
3.2.1	Un exemple en finance . . . . .	26
3.3	Variables de contrôles . . . . .	26
3.3.1	Exemple 1. . . . .	27

3.3.2	Exemple 2. Un exemple en finance . . . . .	28
<b>4</b>	<b>Calcul des sensibilités</b>	<b>29</b>
4.1	Rappels sur les sensibilités . . . . .	29
4.2	Approche par différences finies . . . . .	30
4.3	Amélioration des techniques pour Monte Carlo . . . . .	31
4.3.1	Notion de processus tangent . . . . .	31
4.3.2	Applications aux calculs de couverture . . . . .	33
<b>5</b>	<b>Annexes</b>	<b>36</b>
5.1	Annexe A : Mouvement Brownien, Intégrale stochastique et diffusions . . . . .	36
5.1.1	Mouvement Brownien . . . . .	36
5.1.2	Intégrales stochastiques et diffusions . . . . .	38
5.2	Annexe B : Évaluation des prix d'options européennes . . . . .	42
5.2.1	Options européennes . . . . .	42
5.2.2	Modèle de Black et Scholes . . . . .	44
5.3	Annexe C : Table de la loi normale centrée réduite . . . . .	49

# Introduction

---

## 1.1 Présentation

En tant qu'objet mathématique, les équations différentielles stochastiques doivent leur essor au mathématicien japonais Kiyoshi Itô qui a posé les jalons théoriques de l'intégrale stochastique et des règles de calcul y afférant. Leur utilisation en tant qu'outil mathématique pour la modélisation en finance s'est largement répandue ces dernières décennies, notamment depuis le fameux modèle de Black & Scholes. Dans ce dernier, sous la probabilité risque neutre, unique en l'occurrence, le prix  $(S_t)_{t \geq 0}$  d'une action cotée en bourse suit une EDS linéaire à coefficients constants :

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

$\sigma$  et  $r$  représentant respectivement la volatilité et le taux d'intérêt sans risque et  $(W_t)_{t \geq 0}$  désignant un mouvement Brownien réel.

Outre la complétude, un des avantages de ce modèle, et ce qui explique en bonne partie le succès qu'il a rencontré, est le fait que l'on dispose d'une solution explicite pour le prix sous la probabilité risque neutre, à savoir  $S_t = S_0 e^{\sigma W_t + (r - \frac{\sigma^2}{2})t}$ , permettant de mener à bien plusieurs calculs importants en pratique : calcul des prix d'options européennes (Call, Put, . . .), des sensibilités de ces prix par rapport aux paramètres (les grecques), des prix de certaines options exotiques (options barrières, option lookback, . . .), etc. Toutefois, le modèle de Black & Scholes n'est pas exempt de critiques et il est avéré depuis longtemps que les hypothèses sous-jacentes à ce dernier ne sont pas en adéquation avec les marchés financiers, surtout la constance de la volatilité. D'où l'émergence de nouveaux modèles, beaucoup plus réalistes, comme les modèles à volatilité stochastiques, où la volatilité est supposée suivre une EDS autonome éventuellement corrélée avec celle qui gouverne le cours de l'action, ou encore les modèles à volatilité locale, où la volatilité est fonction du temps et du cours de l'action. Malheureusement, il est alors rare de tomber sur des EDS qui admettent des solutions explicites, ce qui justifie le besoin de recourir aux méthodes numériques.

Plus généralement, il arrive souvent, en finance comme en d'autres domaines d'applications des mathématiques, que l'on cherche à calculer des quantités qui s'écrivent sous la forme

$$\mathbb{E} [f(X_t)_{t \in [0, T]}]$$

où  $f$  est une fonctionnelle donnée et le processus  $(X_t)_{t \in [0, T]}$  est la solution d'une EDS que l'on ne sait pas résoudre explicitement. Pour un probabiliste, qui dit espérance dit méthodes de Monte-carlo (le **Chapitre 1** est consacré à des généralités sur ces méthodes).

Ces méthodes nécessitent de savoir simuler l'EDS du sous-jacent. Souvent, il faut recourir à des schémas numériques, ce sera l'objet du **chapitre 2**. De plus, même cette discrétisation effectuée, il peut s'avérer que la méthode ne soit pas efficace, par exemple lorsque la variance est trop élevée. Les méthodes de réduction de variance permettent d'éviter ce genre de difficulté (voir **chapitre 3**).

Enfin, la finance pose d'autres problèmes nettement plus ardues et qui sont encore aujourd'hui l'objet de développement constant :

- L'évaluation du prix n'est pas le plus important et même un prix ne sert à rien si on ne donne pas une stratégie.
- L'évaluation des grecques (les dérivées du prix par rapport au point initial ou à la volatilité) est un problème complexe du au fait qu'il s'agit d'une différentielle (voir chapitre 4).

## 1.2 Rappels sur les méthodes de Monte Carlo

Dans cette partie nous récapitulons brièvement les résultats fondamentaux relatifs aux méthodes de Monte-Carlo. Ces techniques de simulation se basent principalement sur deux grands résultats de probabilité : la loi forte des grands nombres fournit le résultat de convergence ; le théorème centrale limite, plus précis, permet d'évaluer la vitesse de convergence.

**THÉORÈME 1.2.1 (la loi forte des grands nombres).** Soit une suite de variables aléatoires indépendantes  $Z_i; i \geq 1$  suivant toute la même loi que  $Z$ . Alors si  $\mathbb{E}(|Z|) < +\infty$ , on a pour presque tout  $\omega$  :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} (Z_1(\omega) + Z_2(\omega) + \dots + Z_n(\omega)) = \mathbb{E}(Z).$$

Il suffit alors de considérer des trajectoires indépendantes distribuées suivant la même loi que notre processus d'Itô  $X : (\tilde{X}_i)_{1 \leq i \leq n}$  partent donc de  $x$ . Le principe de base des méthodes de monte-Carlo consiste alors à considérer l'estimateur convergent  $J_{n,f}$  de l'espérance du prix sous la probabilité risque neutre :

$$J_{n,f} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( e^{-\int_0^T r(s, \tilde{X}_i) ds} f \left( \tilde{X}_{i,t_1}, \tilde{X}_{i,t_2}, \dots, \tilde{X}_{i,t_m} \right) \right) \xrightarrow[p.s.]{} P(x)$$

désormais on notera dans ce paragraphe,  $h(x) = e^{-\int_0^T r(s, \tilde{X}_i) ds} f \left( \tilde{X}_{i,t_1}, \tilde{X}_{i,t_2}, \dots, \tilde{X}_{i,t_m} \right)$  pour alléger les notations.

**THÉORÈME 1.2.2 (Théorème de la Limite Centrale).** Soit une suite de variables aléatoires indépendantes  $Z_i; i \geq 1$  suivant toute la même loi que  $Z$ . Alors si  $\mathbb{E}(Z^2) < +\infty$ , et en notant  $\sigma^2$  sa variance on a

$$\text{Erreur} = \varepsilon_n = \frac{1}{n} (Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n) - \mathbb{E}(Z)$$

$$\sqrt{\frac{n}{\text{var}}} \varepsilon_n \xrightarrow{\text{loi}} G$$

où  $G$  est une variable aléatoire suivant une loi gaussienne centrée réduite.

**Intervalle de confiance.** A partir de ce résultat, on introduit la méthode classique d'évaluation des erreurs basées sur des intervalles de confiance. L'intervalle  $IC(\alpha)$  que l'on souhaite expliciter est centrée autour de notre estimateur  $J_{n,f}$  et tel que le prix  $P(x)$  appartienne à  $IC(\alpha)$  avec la probabilité  $1 - \alpha$  :

$$\mathbb{P}(P(x) \in IC(\alpha)) = 1 - \alpha$$

D'après le théorème centrale limite, on a lorsque le moment d'ordre 2 de  $h(X)$  est fini :

$$\sqrt{n}(J_{n,f} - P(x)) \xrightarrow{\text{loi}} \mathcal{N}(0, \text{var}(h(X)))$$

Pour  $n$  suffisamment grand, on assimile la distribution de l'estimateur  $J_{n,f}$  à celle d'une loi  $\mathcal{N}(P(x), \text{var}(h(X)/n))$ . Cette approximation permet d'écrire  $IC(\alpha)$  sous la forme :

$$IC(\alpha) = \left[ J_{n,f} - \sqrt{\frac{\text{var}(h(X))}{n}} \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right), J_{n,f} + \sqrt{\frac{\text{var}(h(X))}{n}} \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \right]$$

Où  $\Phi$  désigne la fonction de répartition de la loi normal standard. L'approximation réalisée ici induit une première erreur : si les queues de la véritable distribution de notre estimateur sont plus épaisses que celles d'une loi normal, on surestime l'efficacité de notre méthode et vice et versa dans le queues de distribution plus fines. De plus, à ce stade, la variance  $h(x)$  est à priori inconnue, mais on peut l'estimer a partir de l'échantillon déjà simulé à l'aide de l'estimateur suivant  $V_{n,f}$  de la variance :

$$V_{n,f} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n nh(x_i)^2 - \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n nh(x_i) \right)^2$$

On obtient finalement l'expression suivante de l'intervalle de confiance :

$$IC(\alpha) = \left[ J_{n,f} - \sqrt{\frac{V_{n,f}}{n}} \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right), J_{n,f} + \sqrt{\frac{V_{n,f}}{n}} \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \right]$$

En plus de l'approximation faite de la variance, il faut noter que généralement les estimateurs  $J_{n,f}$  et  $V_{n,f}$  sont généralement corrélés ce qui peut encore entraîner des erreurs d'estimations de l'intervalle de confiance.

Si les intervalles de confiance restent des outils de contrôles imparfaits, ils ont le mérite de donner une idée de la précision de la méthode, ce qui n'est pas le cas avec des méthodes d'arbres ou la résolution d'EDP. Notons également que la vitesse de convergence de la méthode dépend à la fois du nombre de simulation mais également de la variance de l'estimateur. En diminuant la variance de l'estimateur, on accélère la convergence. cette idée est à l'origine de méthode de réduction de variance utilisées dans le cadre de simulation de Monte-Carlo. Les trois principales méthodes sont celle des variables de contrôle, des variables antithétiques et des fonctions d'importances.

### 1.3 Notations

Dans la suite on notera  $S_t$  la solution de l'équation différentielle stochastique,  $X_t$  la solution d'une équation différentielle stochastique générale.

On commence par introduire quelques notations. On identifiera un élément  $x$  de  $\mathbb{R}^d$  au vecteur colonne associé de coordonnées  $x^j$ ,  $j = 1, \dots, d$ . On notera  $I_d$  la matrice identité de  $\mathbb{M}^d$  et  $e_d$  le vecteur unité de  $\mathbb{R}^d$ . La norme euclidienne sur  $\mathbb{R}^d$  ou  $\mathbb{M}^d$  sera notée  $\|\cdot\|$ . Pour un élément  $a$  de  $\mathbb{M}^d$ , on notera  $a^i$  le vecteur ligne correspondant à sa  $i$ -ème ligne et  $a^j$  le vecteur colonne correspondant à sa  $j$ -ème colonne. La transposée de  $a \in \mathbb{M}^d$  sera notée  $a^*$ . Pour un ensemble de point  $(x^i)_{i=1}^d$ , on notera  $Vect[(x^i)_{i=1}^d]$  le vecteur colonne de composantes  $x_i$ . Pour  $x \in \mathbb{R}^d$ , on notera  $diag[x]$  la matrice diagonale de  $\mathbb{M}^d$  dont les éléments diagonaux sont les  $x^i$ .

Pour une fonction  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$ , on notera  $\nabla f$  sa matrice Jacobienne, i.e.

$$(\nabla f)^{ij} = \partial f^i / \partial x^j.$$

Si  $f : (\mathbb{R}^d)^k \mapsto \mathbb{R}^n$ , on notera  $\nabla_{\ell} f$ , la matrice Jacobienne obtenue en dérivant par rapport à sa  $\ell$ -ème composante vectorielle, i.e.  $(\nabla_{\ell} f(x_1, \dots, x_k))^{ij} = \partial f^i(x_1, \dots, x_k) / \partial x_{\ell}^j$ . On écrira parfois simplement  $\nabla_{x_{\ell}} f$ . On notera  $C_p^k$  (resp.  $C_b^k$ ) l'ensemble des fonctions  $C^k$  à croissance polynômiale (resp. bornées) dont les dérivées sont également à croissance polynômiale (resp. bornées). Lorsque la fonction est seulement définie sur  $A$ , on notera  $C^k(A)$ ,  $C_p^k(A)$  et  $C_b^k(A)$ .  $\mathcal{N}(m, \Sigma)$  désignera la loi normale de moyenne  $m$  et de matrice de variance-covariance  $\Sigma$ . On notera souvent par  $C > 0$  une constante générique qui peut changer de valeur d'une ligne à l'autre.

# Méthodes de discrétisation d'EDS

---

Le but de ce chapitre est de décrire les méthodes utilisées pour la simulation trajectorielle d'un processus donné. Cette simulation est nécessaire lorsque l'on veut calculer une option dépendant de la trajectoire (options asiatiques, barrières, etc...) dont le prix peut s'écrire :

$$\mathbb{E}[f(X_s, s \leq T)],$$

où  $f$  est la fonctionnelle du processus  $X$ .

## 2.1 Simulation du mouvement Brownien

Rappelons la définition et quelques propriétés du mouvement Brownien.

**DÉFINITION 2.1.1** *Un processus stochastique  $W : [0, +\infty[ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est un mouvement Brownien (standard) si*

- (i)  $W_0 = 0$ .
- (ii) Pour tout  $s \leq t$ ,  $W_t - W_s$  suit une loi gaussienne  $\mathcal{N}(0, t - s)$ .
- (iii) Pour tout  $n \geq 1$  et tout  $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n$ , les accroissements  $(W_{t_{i+1}} - W_{t_i} : 0 \leq i \leq n - 1)$  sont indépendants.

On en déduit immédiatement que pour tout instant  $t \geq 0$ ,  $W_t$  suit une loi gaussienne  $\mathcal{N}(0, t)$  et que pour tout couple d'instant  $s, t \geq 0$ ,

$$\mathbb{E}(W_s W_t) = \text{Cov}(W_s, W_t) = s \wedge t,$$

tandis que pour tout  $T > 0$  :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \left( \frac{W_{(i+1)T}}{n} - \frac{W_{iT}}{n} \right)^2 = T \text{ dans } L^2.$$

Les trajectoires de  $(W_t, t \geq 0)$  sont presque sûrement continues, c'est à dire qu'il existe un ensemble négligeable  $N$  tel que pour tout  $\omega \notin N$ , la fonction  $t \rightarrow W_t(\omega)$  est continue mais presque sûrement les trajectoires  $t \rightarrow W_t(\omega)$  ne sont dérivables en aucun point. (On en fait le résultat plus précis suivant : presque sûrement les trajectoires de  $(W_t, t \geq 0)$  sont Höldériennes d'ordre  $\alpha < \frac{1}{2}$ , mais ne sont pas Höldériennes d'ordre  $\frac{1}{2}$ .)

### 2.1.1 Simulation récursive

On considère  $(W_t, 0 \leq t \leq 1)$  un mouvement Brownien défini sur  $[0, 1]$ . Soit  $0 < t_1 < \dots < t_n = 1$  une subdivision de l'intervalle  $[0, 1]$ . On cherche à simuler une trajectoire du mouvement Brownien en les points de la subdivision, c'est-à-dire que l'on cherche la loi du processus discret  $(W_{t_i}, i = 0 \dots n)$ .

**PROPOSITION 2.1.1** Soit  $(G_i)_{i=1 \dots n}$  une suite i.i.d selon la loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ . On définit

$$X_0 = 0, \quad X_i = \sum_{j=1}^i \sqrt{t_j - t_{j-1}} G_j \quad \text{pour } i > 0.$$

Les vecteurs  $(W_{t_0}, \dots, W_{t_n})$  et  $(X_0, \dots, X_n)$  sont égaux en loi.

*Démonstration.* Il suffit de montrer que  $(X_1, \dots, X_n)$  est un vecteur Gaussien centré tel que  $Cov(X_i, X_l) = t_i \wedge t_l$ . Le vecteur  $(X_1, \dots, X_n)$  est une transformation linéaire du vecteur  $(G_1, \dots, G_n)$  qui est un vecteur gaussien car ses composantes sont des gaussiennes indépendantes. De plus, les  $G_i$  sont centrées donc  $(X_1, \dots, X_n)$  est un vecteur gaussien centré. Calculons la covariance.

$$\begin{aligned} Cov(X_i, X_l) &= Cov\left(\sum_{j=1}^i \sqrt{t_j - t_{j-1}} G_j, \sum_{j=1}^l \sqrt{t_j - t_{j-1}} G_j\right) \\ &\quad \text{par indépendances des } G_i \\ &= \sum_{j=1}^{i \wedge l} \sqrt{t_j - t_{j-1}} Cov(G_j, G_j) \\ &= t_i \wedge t_l \end{aligned}$$

Notons bien que cette méthode de simulation n'engendre pas d'erreur de discrétisation sur le processus discret, contrairement à ce que l'on observe sur d'autres processus.

## 2.2 Discrétisation d'EDS

La base des méthodes de Monte-Carlo en finance est la capacité à simuler l'évolution des processus de prix. On commence donc par s'intéresser aux méthodes de simulation d'une diffusion de la forme :

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t, \quad X_0 = x \in \mathbb{R}^d. \quad (2.1)$$

Ici,  $X$  modélise l'évolution de  $d$  sous-jacents sur le marché (actions par exemples) et  $W$  est un mouvement brownien standard  $d$ -dimensionnel sur un espace de probabilité filtré complet  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . On suppose que  $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_t, t \in [0, T]\}$  est la filtration naturelle complétée de  $W$ .

En général, on supposera que  $\sigma$  et  $b$  sont lipschitziennes, i.e. qu'il existe  $K > 0$  tel que

$$|\sigma(x) - \sigma(y)| + |b(x) - b(y)| \leq K|x - y|, \quad \text{pour tout } x, y \in \mathbb{R}^d. \quad (2.2)$$

Cette hypothèse garantit l'existence d'une solution forte à (2.1).

### 2.2.1 Modèle de Black-Scholes

Dans le modèle de Black-Scholes, la dynamique du prix sous la probabilité risque neutre s'écrit

$$dX_t = \tau X_t dt + \text{diag}[X_t] \sigma dW_t, \quad X_0 \in \mathbb{R}^d, \quad (2.3)$$

où  $\tau \in \mathbb{R}_+$  est le taux sans risque et  $\sigma \in \mathbb{M}^d$  est la matrice de volatilité (supposée inversible pour assurer la complétude du marché). Ce système se ré-écrit sous la forme :

$$dX_t^i = \tau X_t^i dt + X_t^i \sigma^i dW_t, \quad X_0^i \in \mathbb{R}^d, \quad i = 1, \dots, d \quad (2.4)$$

dont la solution est

$$X_t^i = X_0^i \exp \left\{ \left( \tau - \frac{1}{2} |\sigma^i|^2 \right) t + \sigma^i W_t \right\}, \quad i = 1, \dots, d$$

Pour simuler  $X_t$ , il suffit donc de simuler la valeur de  $W$  en  $t$ . Les  $W_t^i, i = 1, \dots, d$ , étant indépendants et de même loi  $\mathcal{N}(0, t)$ , il suffit donc de simuler  $d$  variables aléatoires indépendantes de loi  $\mathcal{N}(0, t)$ .

### 2.2.2 Le schéma de discrétisation d'Euler

La simulation du processus  $X$  dans le modèle de Black-Scholes est "exacte" dans la mesure où, à  $t$  donné, on peut simuler exactement dans la loi de  $X_t$ . Cela est possible grâce à la forme particulièrement simple de (2.4).

En général, la solution de (2.1) n'a pas une forme aussi simple et l'on est obligé de recourir à une approximation de  $X$  qui correspond à une discrétisation en temps de l'équation (2.1).

On se donne une subdivision de  $[0, T]$

$$\pi^n = (t_0, \dots, t_k, \dots, t_n) \quad \text{avec} \quad t_k = kT/n.$$

On notera  $\Delta^n t = T/n$  et  $\Delta^n W_{k+1} = W_{t_{k+1}} - W_{t_k}$ . L'idée de la discrétisation d'Euler est très simple. Pour tout  $k = 1, \dots, n$ , on a :

$$\begin{aligned} X_{t_k} &= X_{t_{k-1}} + \int_{t_{k-1}}^{t_k} b(X_s) ds + \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sigma(X_s) dW_s \\ &\simeq X_{t_{k-1}} + b(X_{t_{k-1}}) \Delta^n t + \sigma(X_{t_{k-1}}) \Delta^n W_k \end{aligned}$$

ce qui conduit à la construction du schéma

$$\begin{cases} \bar{X}_0^n = X_0 \\ \bar{X}_{t_k}^n = \bar{X}_{t_{k-1}}^n + b(\bar{X}_{t_{k-1}}^n) \Delta^n t + \sigma(\bar{X}_{t_{k-1}}^n) \Delta^n W_k, \quad k = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (2.5)$$

C'est l'équivalent stochastique du schéma d'Euler utilisé pour les équations différentielles ordinaires.

La simulation de  $\bar{X}_n$  se ramène à la simulation des accroissements de  $W$ , où  $\Delta^n W_k \sim \mathcal{N}(0, \Delta^n t I_d)$  pour tout  $i = 1, \dots, n$ .

On introduit maintenant un schéma d'Euler "continu" de ce schéma discret

$$\bar{X}_t^n = \bar{X}_{t_k}^n + b(\bar{X}_{t_k}^n) (t - t_k) + \sigma(\bar{X}_{t_k}^n) (W_t - W_{t_k}), \quad \text{pour } t \in [t_{k-1}, t_k]$$

ce que l'on peut réécrire sous forme intégrale

$$\bar{X}_t^n = X_0 + \int_0^t b(\bar{X}_{t_s}^n) ds + \int_0^t \sigma(\bar{X}_{t_s}^n) dW_s. \quad (2.6)$$

On donne les résultats de convergence connus pour le schéma d'Euler

**THÉORÈME 2.2.1** (Convergence forte). *Sous l'hypothèse (2.2), pour tout  $p \geq 1$*

$$\mathbb{E} \left[ \sup_{t \leq T} |\bar{X}_t^n - X_t|^{2p} \right] \leq \frac{C}{n^p}$$

De plus, pour tous  $\alpha < 1/2$ , presque sûrement

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha \sup_{t \leq T} |\bar{X}_t^n - X_t| = 0.$$

En pratique, ce qui intéresse surtout les praticiens c'est la convergence du prix "discrétisé" vers le vrai prix, i.e. la convergence de  $\mathbb{E}g(\bar{X}_T^n) - \mathbb{E}g(X_T)$  vers 0. C'est la convergence faible.

**THÉORÈME 2.2.2** *Si  $b, \sigma \in C_b^4$  et  $g \in C_p^4$ , alors*

$$|\mathbb{E} [g(\bar{X}_T^n) - g(X_T)]| \leq C/n.$$

Ce résultat est dû à [20].

Nous utilisons le Théorème de Feynman-Kac, pour la démonstration de ce théorème. Le théorème précédent donne une vitesse de convergence faible en  $1/n$ . Evidemment, l'hypothèse  $g \in C_p^4$  n'est pas très satisfaisante car généralement non vérifiée en finance. Le résultat précédent peut être amélioré de la manière suivante.

**Solution.** Le schéma d'Euler  $X_{kh}^n$  du processus  $X_t$  s'écrit

$$\bar{X}_{(k+1)h}^n = \bar{X}_{kh}^n (1 + ch) + \sigma(W_{(k+1)h} - W_{kh})$$

Ainsi

$$\bar{X}_{kh}^n = (1 + ch)^k x + \sigma \sum_{i=1}^k (1 + ch)^{k-i} (W_{ih} - W_{(i-1)h}).$$

Pour  $t \in [kh, (k+1)h]$ , la version en temps continu du schéma d'Euler s'écrit

$$\begin{aligned} \bar{X}_t^n &= (1 + c(t - kh))(1 + ch)^k x + \sigma(W_t - W_{kh}) \\ &+ \sigma \sum_{i=1}^k (1 + c(t - kh))(1 + ch)^{k-i} (W_{ih} - W_{(i-1)h}). \end{aligned}$$

On sait que  $X_t$  s'écrit

$$X_t = xe^{ct} + \sigma \int_0^t e^{c(t-u)} dW_u.$$

On peut donc calculer la différence  $|\bar{X}_t^n - X_t|$  pour  $t \in [kh, (k+1)h]$ .

$$\begin{aligned} |\bar{X}_t^n - X_t| &\leq x |(1 + c(t - kh))(1 + ch)^k - e^{ct}| + \\ &\sigma \left| \int_0^t (1 + c(t - kh))(1 + ch)^{(k-i)} \mathbf{1}_{\{i \leq u < i+1 \leq k\}} - e^{c(t-u)} dW_u \right| \end{aligned}$$

d'où en prenant l'espérance du carré

$$\begin{aligned} \mathbb{E} |\bar{X}_t^n - X_t|^2 &\leq 2x^2 |(1 + c(t - kh))(1 + ch)^k - e^{ct}|^2 + \\ &2\sigma^2 \int_0^t ((1 + c(t - kh))(1 + ch)^{(k-i)} \mathbf{1}_{\{i \leq u < i+1 \leq k\}} - e^{c(t-u)})^2 du \end{aligned}$$

Remarquons que  $(1 + c(t - kh))(1 + ch)^{(k-i)} \mathbf{1}_{\{i \leq u < i+1 \leq k\}}$  peut se réécrire

$(1 + c(t - \lfloor \frac{t}{h} \rfloor h))(1 + ch)^{\lfloor \frac{t-u}{h} \rfloor}$ . De plus  $\lfloor \frac{t-u}{h} \rfloor = \frac{t-u}{h} + \epsilon$  où  $\epsilon < 1$ . Un développement limité au premier ordre permet de trouver

$$\begin{aligned} (1 + c(t - \lfloor \frac{t}{h} \rfloor h))(1 + ch)^{\lfloor \frac{t-u}{h} \rfloor} &= (1 + \mathcal{O}(h)) e^{c(\frac{t-u}{h} + \epsilon)(ch + \mathcal{O}(h^2))} \\ &= e^{c(t-u)} (1 + \mathcal{O}(h)). \end{aligned}$$

On montre ainsi que  $\mathbb{E} |\bar{X}_t^n - X_t|^2 = \mathcal{O}(h^2)$ .

### 2.2.4 Le schéma de discrétisation de Milshtein

Dans la présentation du schéma d'Euler, on a utilisé l'approximation

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} \sigma(X_s) dW_s \sim \sigma(X_{t_{k-1}}) (W_{t_k} - W_{t_{k-1}})$$

mais on aurait pu utiliser une approximation d'ordre supérieur. Pour fixer les idées, on se place en dimension 1 et on suppose que  $b = 0$ . Alors, pour  $s \in (t_{k-1}, t_k]$

$$\begin{aligned} \sigma(X_s) &= \sigma \left( X_{t_{k-1}} + \int_{t_{k-1}}^s a(X_t) dW_t \right) \\ &\sim \sigma \left( X_{t_{k-1}} + \sigma(X_{t_{k-1}}) (W_s - W_{t_{k-1}}) \right) \end{aligned}$$

utilisons une formule de Taylor à l'ordre 1

$$\sim \sigma(X_{t_{k-1}}) + \sigma'(X_{t_{k-1}}) \sigma(X_{t_{k-1}}) (W_s - W_{t_{k-1}})$$

On utilise maintenant la formule d'Itô appliquée à  $(W_s - W_{t_{k-1}})^2$ , on obtient

$$(W_{t_k} - W_{t_{k-1}})^2 = 2 \int_{t_{k-1}}^{t_k} (W_s - W_{t_{k-1}}) dW_s + \int_{t_{k-1}}^{t_k} ds;$$

on en déduit que

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} \sigma(X_s) dW_s \sim \sigma(X_{t_{k-1}}) (W_{t_k} - W_{t_{k-1}}) + \frac{1}{2} \sigma'(X_{t_{k-1}}) \sigma(X_{t_{k-1}}) \left[ (W_{t_k} - W_{t_{k-1}})^2 - \Delta^n t \right]$$

Le terme de dérive  $b$  ayant une contribution inférieure dans l'erreur d'approximation par rapport au terme de diffusion, il n'est pas nécessaire de le corriger. Pour  $d = 1$ , on obtient donc le schéma d'approximation suivant :

$$\begin{cases} \tilde{X}_0^n &= X_0 \\ \tilde{X}_{t_k}^n &= \tilde{X}_{t_{k-1}}^n + b \left( \tilde{X}_{t_{k-1}}^n \right) \Delta^n t + \sigma \left( \tilde{X}_{t_{k-1}}^n \right) (W_{t_k} - W_{t_{k-1}}) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sigma' \left( \tilde{X}_{t_{k-1}}^n \right) \sigma \left( \tilde{X}_{t_{k-1}}^n \right) \left[ (W_{t_k} - W_{t_{k-1}})^2 - \Delta^n t \right], \quad k = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (2.8)$$

Le schéma défini par (2.8) est connu sous le nom de schéma de Milshtein.

**Exemple 1.** Dans le modèle de Black-Scholes en dimension 1, définie par

$$\begin{cases} dX_t &= X_t (\tau dt + \sigma dW_t), \\ X_0 &= x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Le schéma de Mil'shtein s'écrit

$$\begin{cases} \tilde{X}_0^n &= X_0 \\ \tilde{X}_{t_k}^n &= \tilde{X}_{t_{k-1}}^n \left\{ 1 + (\tau - \sigma^2/2) \Delta^n t + \sigma (W_{t_k} - W_{t_{k-1}}) + \frac{1}{2} \sigma^2 (W_{t_k} - W_{t_{k-1}})^2 \right\}. \end{cases}$$

En dimension  $d$  quelconque, le même raisonnement conduit à considérer le schéma suivant :

$$\begin{cases} \tilde{X}_0^n &= X_0 \\ \tilde{X}_{t_k}^n &= \tilde{X}_{t_{k-1}}^n + b(\tilde{X}_{t_{k-1}}^n) \Delta^n t + \sigma(\tilde{X}_{t_{k-1}}^n) (W_{t_k} - W_{t_{k-1}}) \\ &+ \sum_{j,l}^d (\nabla \sigma^j \sigma^l) (\tilde{X}_{t_{k-1}}^n) \int_{t_{k-1}}^{t_k} (W_s^j - W_{t_{k-1}}^j) dW_s^l, \quad k = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (2.9)$$

Avec quelques hypothèses sur la régularité des coefficients  $\sigma$  et  $b$ , on peut annoncer des résultats quant à la convergence forte du schéma.

**THÉORÈME 2.2.4 (Convergence forte).** *Supposons que  $\sigma$  et  $b$  sont deux fonctions continûment dérivables de dérivées 1<sup>ère</sup> et 2<sup>de</sup> bornées, alors*

$$\forall p \geq 1, \quad \max_{k \leq n} \mathbb{E} \left[ \left| \tilde{X}_{t_k}^n - X_{t_k} \right|^{2p} \right] \leq \frac{C}{n^{2p}}$$

De plus, pour tous  $\alpha < 1$ , presque sûrement

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha \max_{k \leq n} \left| \tilde{X}_{t_k}^n - X_{t_k} \right| = 0.$$

**THÉORÈME 2.2.5 (Convergence faible).** *Si on suppose que  $g$ ,  $\sigma$  et  $b$  sont des fonctions  $C^4$  à dérivées bornées jusqu'à l'ordre 4 et si de plus  $g$  est à croissance polynomiale, alors*

$$\left| \mathbb{E} \left( g(\tilde{X}_T^n) \right) - \mathbb{E} \left( g(X_T) \right) \right| \leq \frac{C_T(g)}{n}$$

où  $C_T(g)$  est une constante dépendant de  $T$  et de  $g$ .

# Réduction de la variance

---

Nous avons vu que l'erreur due à une méthode de Monte Carlo pour le calcul de  $\mathbb{E}[g(S_T)]$  est liée soit à la discrétisation du processus  $S_T$  soit à l'approximation de l'espérance par une moyenne trajectorielle. Nous avons également observé que dans certains cas de payoff, il était possible de réduire considérablement l'erreur de discrétisation. Dans ce chapitre nous allons nous intéresser au deuxième type d'erreur.

## 3.1 Fonctions d'importance

### 3.1.1 Généralités

Dans ce chapitre, nous cherchons à estimer une intégrale  $I$  par méthode de monte-carlo de la façon la plus précise possible. On suppose dans toute la suite que :

$$I = \mathbb{E}(g(X)),$$

avec  $g(X)$  de carré intégrable

La méthode de fonction d'importance consiste à changer la loi de simulation dans le but de réduire la variance et écrire l'intégrale  $I$  sous la forme

$$I = \int_{\mathbb{R}} g(x)f(x)dx = \mathbb{E} \left( \frac{g(Y)f(Y)}{\tilde{f}(Y)} \right)$$

tel que  $Y$  est une variable aléatoire de densité  $\tilde{f}(x)$  on  $\mathbb{R}$ .

Soit  $\tilde{f}$  une autre densité telle que  $\tilde{f}(x) > 0$  et  $\int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(x) dx = 1$ . Alors on peut écrire  $\mathbb{E}(g(X))$  comme

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{\mathbb{R}} \frac{g(x)f(x)}{\tilde{f}(x)} \tilde{f}(x) dx = \mathbb{E} \left( \frac{g(Y)f(Y)}{\tilde{f}(Y)} \right),$$

On suppose choisi  $\tilde{f}(Y)$  de sorte que  $Z = g(Y)f(Y)/\tilde{f}(Y) \in L^2(\Omega)$ , l'algorithme sera alors plus efficace si  $\text{Var}(Z) < \text{Var}(g(X))$ .

Si  $g(x) > 0$ , un calcul simple montre que si  $\tilde{f}(x) = g(x)f(x)/\mathbb{E}(g(X))$  alors

$\text{Var}(Z) = 0$ ! Bien sur ce résultat théorique n'a pas d'applications pratiques car il repose sur la connaissance de  $\mathbb{E}(g(X))$ , qui est ce que l'on veut calculer.

**PROPOSITION 3.1.1** *Tel que  $Y$  est une variable aléatoire de densité  $\tilde{f}(x)$ , supposons que  $\tilde{f}(x) > 0$  si  $g(x) \neq 0$  et que*

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{g^2(x)f^2(x)}{\tilde{f}(x)} dx < \infty$$

*Rappelons que sous ces hypothèses,  $Z = g(Y)f(Y)/\tilde{f}(Y)$  est de carré intégrable. De plus, si*

$$\int_{\mathbb{R}} |g(x)f(x)| dx \neq 0$$

*Alors, la fonction  $\tilde{f}(x)$  minimisant la variance de  $Z$  est définie par :*

$$\tilde{f}(x) = \frac{|g(x)f(x)|}{\int_{\mathbb{U}} |g(x)f(x)| dx}, \quad x \in \mathbb{R}^d$$

**REMARQUE 3.1.1** *Rappelons que si  $\mathbb{E}(g(X)) = 0$ , alors :  $g(X) = 0$  presque sur sur  $U$  et donc  $I = 0$ .*

*Démonstration.* Nous avons que

$$\text{var}(Z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{g^2(x)f^2(x)}{\tilde{f}(x)} dx - I^2$$

D'après l'inégalité de Jensen

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{g^2(x)f^2(x)}{\tilde{f}(x)} dx = \mathbb{E} \left( \frac{g^2(x)f^2(x)}{\tilde{f}^2(x)} \right) \geq \left[ \mathbb{E} \left( \frac{|g(x)f(x)|}{\tilde{f}(x)} \right) \right]^2 = \left( \int_{\mathbb{R}} |g(x)f(x)| dx \right)^2$$

Par conséquent, quel que soit le choix de  $\tilde{f}(x)$

$$\text{Var}(Z) \geq \left( \int_{\mathbb{R}} |g(x)f(x)| dx \right)^2 - I^2$$

Alors, la variance de  $Z$  est minimale si l'on choisit la fonction  $\tilde{f}(x)$  définie par

$$\tilde{f}(x) = \frac{|g(x)f(x)|}{\int |g(x)f(x)| dx}, x \in \mathbb{R}^d$$

En effet, pour ce choix,

$$\text{Var}(Z) = \left( \int_{\mathbb{R}} |g(x)f(x)| dx \right)^2 - I^2$$

Il est utopique de penser utiliser la densité  $\tilde{f}(x)$  définie par

$$\tilde{f}(x) = \frac{|g(x)f(x)|}{\int_{\mathbb{U}} |g(x)f(x)| dx}, x \in \mathbb{R}^d$$

En effet l'intégrale  $I = \int g(x)f(x)dx$  n'étant pas connue, il y a peu de chances que l'on connaisse la valeur de l'intégrale  $\int g(x)f(x)dx$ , en particulier, si  $g$  est positive, la variance de  $Z = g(x)/\tilde{f}(x)$  est minimisée par le choix

$$\tilde{f}(x) = \frac{|g(x)f(x)|}{\int |g(x)f(x)| dx}, x \in \mathbb{R}^d$$

choix qui dépend de la quantité à estimer  $I$  noter que dans ce cas,  $\text{var}(Z) = 0$

### THÉORÈME 3.1.1 (Rubinstein)

La densité  $\tilde{f}(x)$  qui minimise la variance est :  $\tilde{f}(x) = \frac{|g(x)f(x)|}{\int |g(x)f(x)| dx}$

REMARQUE 3.1.2 Si  $Y \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  alors :  $\mathbb{P}(y \leq \mu) = \frac{1}{2}$ .

Avant d'avoir donné des exemples d'utilisation de cette méthode, on donne l'application de la méthode de Monte Carlo pour évaluer deux quantités importantes en finance (Call/Put).

Pour une variable aléatoire  $G$  gaussienne  $\mathcal{N}(0, 1)$ ,  $\Phi(t) = \int_{-\infty}^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2}) dx$ , et des constantes  $\beta > 0$  (de l'ordre de 1) et  $K > 0$ , le call (prix d'une option d'achat) est donné par la formule de Black et Sholes :

$$C = \mathbb{E}((e^{\beta G} - K)_+) = e^{\frac{\beta^2}{2}} \Phi\left(\beta - \frac{\ln(K)}{\beta}\right) - K \Phi\left(-\frac{\ln(K)}{\beta}\right);$$

Pour  $\beta = K = 1$ , on a la valeur «exacte»  $C = 0.887$ . De plus,  $Var((e^G - 1)_+) \sim 4.16$ , d'où  $\sigma_C \sim 2.04$ .

Le *put* (prix d'une option de vente) est

$$P = \mathbb{E}((K - e^{\beta G})_+) = K\Phi\left(\frac{\ln(K)}{\beta}\right) - e^{\frac{\beta^2}{2}}\Phi\left(\frac{\ln(K)}{\beta} - \beta\right).$$

De nouveau pour  $\beta = K = 1$ , on a la valeur «exacte»  $P = 0.238$ , tandis que  $Var((1 - e^G)_+) \sim 0.0885$ , d'où  $\sigma_P \sim 0.297$ . Ceci entraîne que, suivant la taille de l'échantillon, la demi-longueur de l'intervalle de confiance à 95% de  $C$  ou de  $P$  est

$n$	$1.96 \frac{\sigma_C}{\sqrt{n}}$	$1.96 \frac{\sigma_P}{\sqrt{n}}$
$10^2$	0.400	$5.8 \times 10^{-2}$
$10^3$	0.126	$1.8 \times 10^{-2}$
$10^4$	0.040	$6 \times 10^{-3}$

L'intervalle de confiance du *call* est donc environ 7 fois plus grand que celui du *put* et l'approximation du *put* est donc bien meilleure. Puisque

$$C - P = \mathbb{E}(e^{\beta G} - K) = e^{\frac{\beta^2}{2}} - K,$$

on a donc intérêt à calculer le *put*  $P$  par la méthode de Monte-Carlo pour en déduire le *call*  $C$ .

### 3.1.2 Exemple 1.

On cherche tout d'abord à calculer  $\int_0^1 \cos(\frac{\pi x}{2}) dx$ , ce qui correspond à la fonction  $g(x) = \cos(\frac{\pi x}{2})$  et à la densité  $f$  d'une variable aléatoire  $U$  de loi uniforme  $\mathcal{U}([0, 1])$ . La variance de  $g(U)$  est

$$Var(g(U)) = \int_0^1 \cos^2(\frac{\pi x}{2}) dx - \left(\int_0^1 \cos(\frac{\pi x}{2}) dx\right)^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \sim 9.47 \times 10^{-2}.$$

On remplace la loi de  $\mathcal{U}([0, 1])$  par une fonction  $\tilde{f}$  telle que le produit  $fg$  soit proche de  $\tilde{f}$ .

Puisque  $f$  est constante et que l'on sait simuler une variable aléatoire de densité polynomiale, on prend pour densité  $\tilde{f}$  une fonction polynôme paire de degré deux, positive sur  $[0, 1]$  et qui vaut 1 en 0 et 0 en 1 ; comme  $\int_0^1 (1-x^2)dx = \frac{2}{3}$  on pose  $\tilde{f}(x) = \frac{3}{2}(1-x^2)\mathbf{1}_{[0,1]}(x)$ . Si  $Y$  a pour densité  $\tilde{f}$ , la variable aléatoire  $Z = \frac{2 \cos(\frac{\pi Y}{2})}{3(1-Y^2)}$  a pour espérance  $\mathbb{E}(g(X)) = \frac{2}{\pi}$  et :

$$\text{Var}(Z) = \frac{2}{3} \int_0^1 \frac{\cos^2(\frac{\pi x}{2})}{(1-x^2)} dx - \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \sim 9.91 \times 10^{-4}$$

On voit que  $\text{Var}(Z) < \text{Var}(g(U))$ .

### 3.1.3 Exemple 2. Exemple en Finance

Supposons que le processus  $S$  obéit à l'équation de Black et Scholes à 1 dimension

$$dS_t = \tau S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad (3.1)$$

Supposons que l'on veuille évaluer un *Put* avec  $K = 1$ . Pour  $\beta$  désigne quelconque,

$$P = \mathbb{E}[(1 - e^{\beta G})_+] = \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{\beta x})_+ \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx.$$

Clairement,  $1 - e^{\beta x} \geq 0$  si et seulement si  $x < 0$  pour  $\beta > 0$  (resp.  $x > 0$  si  $\beta < 0$ ) et le changement de variable  $y = x^2$  montre que pour tout  $\beta \neq 0$  :

$$P = \int_0^{+\infty} \frac{(1 - e^{\beta\sqrt{y}})_+ + (1 - e^{-\beta\sqrt{y}})_+}{\sqrt{2\pi y}} + \frac{1}{2} e^{-\frac{y}{2}} dy.$$

La fonction  $\tilde{f}(y) = \frac{1}{2} e^{-\frac{y}{2}} \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(y)$  est la densité d'une variable aléatoire  $Y$  de loi exponentielle de paramètre  $\frac{1}{2}$  et on a alors :

$$P = \mathbb{E} \left( \frac{(1 - e^{\beta\sqrt{Y}})_+ + (1 - e^{-\beta\sqrt{Y}})_+}{\sqrt{2\pi Y}} \right)$$

Le tableau des précisions que l'on obtient pour le *put* avec  $\beta = 1$  et la valeur exacte 0.23842 est :

$n$	$1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
$10^2$	$1.05 \times 10^{-2}$
$10^3$	$4 \times 10^{-3}$
$10^4$	$10^{-3}$

On voit que pour 10000 tirages, l'erreur relative est environ divisée par 6.

On peut aussi directement calculer le call  $C = \mathbb{E}((e^{\beta G} - K)_+)$  en utilisant la fonction d'importance. On fixe  $m \in \mathbb{R}$  et on pose  $\tilde{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{(x-m)^2}{2})$ ;  $\tilde{f}$  est la densité d'une variable aléatoire  $Y = G + m$  de loi  $\mathcal{N}(m, 1)$ . Un calcul facile montre que si  $G$  suit une loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ , pour toute fonction borélienne  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  positive ou bornée,

$$\mathbb{E}[\phi(G)] = \mathbb{E}\left[\phi(G+m)e^{-mG-\frac{m^2}{2}}\right] = \mathbb{E}\left[\phi(G+m)e^{-m(G+m)+\frac{m^2}{2}}\right].$$

Il faut donc pour chaque fonction  $\phi$  déterminer une valeur de  $m$  telle que la variance de  $X_m = \phi(G+m)e^{-m(G+m)+\frac{m^2}{2}}$  soit minimale, en tout cas inférieure à celle de  $\phi(G)$ .

Posons par exemple  $\phi(x) = (\exp(\beta x) - K)_+$  avec  $\beta, K > 0$  et notons  $\sigma_m^2$  la variance de  $X_m$  dans ce cas; alors :

$$\begin{aligned}\sigma_m^2 &= \mathbb{E}\left(\left(e^{\beta(G+m)} - K\right)_+^2 e^{-2m(G+m)+m^2}\right) - \mathbb{E}\left(\left(e^{\beta G} - K\right)_+\right)^2 \\ &= \int_{\frac{\ln(K)}{\beta}}^{+\infty} (e^{\beta y} - K)^2 e^{-my+\frac{m^2}{2}} \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dy - \mathbb{E}\left(\left(e^{\beta G} - K\right)_+\right)^2.\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\frac{\partial}{\partial m} (\sigma_m^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\ln(K)}{\beta}}^{+\infty} (e^{\beta y} - K)^2 (m - y) e^{-my+\frac{m^2}{2}-\frac{y^2}{2}} dy;$$

donc pour  $m \leq m_0 = \frac{\ln(K)}{\beta}$ ,  $\frac{\partial}{\partial m} (\sigma_m^2) \leq 0$ . On prend donc comme fonction  $\tilde{f}$  la densité de  $G + m_0$ .

### 3.1.4 Théorème de Girsanov et fonctions d'importance pour les diffusions

**THÉORÈME 3.1.2** *Suivant la méthode de Newton [14], nous allons montrer que sous des hypothèses peu contraignantes, la variance peut être annulée.*

**PROPOSITION 3.1.2** *Soit  $Z$  une variable aléatoire telle que  $Z = \psi(W_s, 0 \leq s \leq T)$ ,  $\mathbb{E}(Z^2) < +\infty$  et  $\mathbb{P}(Z \geq \epsilon) = 1$ , pour un  $\epsilon > 0$ .*

*Il existe un unique processus  $(H_t, 0 \leq t \leq T)$  tel que*

$$Z = \mathbb{E}(Z) + \int_0^T H_s dW_s.$$

On pose  $h_t$

$$h_t = -\frac{H_t}{\mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_t)},$$

Soit

$$L_T = \exp\left(-\int_0^T H_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^T |h_s|^2 ds\right).$$

Alors  $\mathbb{E}(L_T) = 1$  et

$$\mathbb{E}(Z) = \tilde{\mathbb{E}}(L_T^{-1}Z)$$

$$\tilde{\mathbb{P}}(L_T^{-1}Z = \mathbb{E}(Z)) = 1.$$

**REMARQUE 3.1.3** Cela signifie que sous  $\tilde{\mathbb{P}}$ , la variable aléatoire  $L_T^{-1}Z$  a une variance nulle, i.e. qu'elle est constante p.s.

*Démonstration.* Soit  $\phi_t = \frac{\mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_t)}{\mathbb{E}(Z)}$ . On a

$$\phi_t = 1 + \int_0^t \frac{H_s}{\mathbb{E}(Z)} dW_s = 1 - \int_0^t \phi_s h_s dW_s.$$

Cela implique que p.s. sous  $\mathbb{P}$ , et sous  $\tilde{\mathbb{P}}$

$$\phi_t = \exp\left(-\int_0^t H_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t |h_s|^2 ds\right) = L_T.$$

Mais, comme  $Z$  est une variable aléatoire  $\mathcal{F}_T$ -mesurable,  $\phi_T = Z/\mathbb{E}(Z)$ .

Bien entendu, le problème reste difficile car il s'agit maintenant de calculer  $h$ .

Supposons que le prix du sous-jacent peut être modélisé par une diffusion  $X_t$ . Le prix d'une option européenne est alors :

$$\mathbb{E}[e^{-\tau T} g(X_T)].$$

où  $g$  est une fonction continue et positive et  $(X_t, t \geq 0)$  une diffusion solution de

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t, \quad X_0 = x. \quad (3.2)$$

Soit  $u$  la fonction définie par  $u(t, x) = \mathbb{E}_x(e^{-\tau(T-t)} g(X_{T-t}))$  ( $x$  est le point de départ de la diffusion). Il est connu que  $u$  est solution du problème EDP suivant :

$$\begin{cases} u(T, x) & = f(x), \text{ pour } x \in \mathbb{R}^n, \\ \left(\frac{\partial u}{\partial t} + Au - \tau u\right) & = 0, \text{ pour } (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

où  $A$  est le générateur infinitésimal de la diffusion  $(X_t, t \geq 0)$ .

Si on pose  $Z = e^{-\tau T} u(T, X_T)$  et

$$H_t = e^{-\tau t} \frac{\partial u}{\partial x}(t, X_t) \sigma(X_t),$$

alors d'après la formule d'Itô, on a

$$e^{-\tau T} u(T, X_T) = u(0, x) + \int_0^T H_t dW_t = \mathbb{E}[Z] + \int_0^T H_t dW_t.$$

Le processus  $h$  sera alors défini par :

$$h_t = -\frac{H_t}{\mathbb{E}[Z|\mathcal{F}_t]} = -\frac{\frac{\partial u}{\partial x}(t, X_t) \sigma(X_t)}{u(t, X_t)}.$$

La connaissance d'une approximation de  $u$  (par des méthodes liées aux EDP par exemple) permet de calculer  $h$  (voir [17] pour des approximations de  $u$  par des grandes déviations).

### 3.2 Variables antithétiques

Le principe de cette méthode de contrôle est d'utiliser des propriétés de symétrie de la loi simulée pour réduire la variance. Dans le cas de la finance on doit souvent calculer  $M = \mathbb{E}[\phi(G)]$  où  $G$  est une gaussienne centrée. Or on sait que  $G \stackrel{\text{loi}}{=} -G$ . Donc, un estimateur de  $M = \mathbb{E}[\phi(G)]$  est

$$\bar{M}_n = \frac{1}{2n} (\phi(G_1) + \phi(-G_1) + \dots + \phi(G_n) + \phi(-G_n)).$$

où  $G_1, \dots, G_n$  sont  $n$  réalisations de la loi de  $G$ . Si on note  $M_n = \frac{1}{n} (\phi(G_1) + \dots + \phi(G_n))$  l'estimateur Monte Carlo classique, on obtient

$$\begin{aligned} \text{Var}(M_{2n}) &= \frac{1}{4n^2} \text{Var} \left( \sum_{i=1}^{2n} \phi(G_i) \right) \\ &\stackrel{G_i \text{ indépendantes}}{=} \frac{1}{4n^2} \sum_{i=1}^{2n} \text{Var}(\phi(G_i)) \\ &\stackrel{G_i \text{ de même loi}}{=} \frac{1}{2n} \text{Var}(\phi(G_1)). \end{aligned}$$

La variance de l'estimateur  $\bar{M}_n$  est

$$\begin{aligned} \text{Var}(\bar{M}_{2n}) &= \frac{1}{4n^2} \text{Var} \left( \sum_{i=1}^n (\phi(G_i) + \phi(-G_i)) \right) \\ &\stackrel{G_i \text{ indépendantes}}{=} \frac{1}{4n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}(\phi(G_i) + \phi(-G_i)) \\ &\stackrel{G_i \text{ de même loi}}{=} \frac{1}{4n} (\text{Var}(\phi(G_1)) + \text{Var}(\phi(-G_1))) + 2 * \text{Cov}(\phi(G_1), \phi(-G_1)) \\ &\stackrel{G_1 \stackrel{\text{loi}}{=} -G_1}{=} \frac{1}{2n} (\text{Var}(\phi(G_1)) + \text{Cov}(\phi(G_1), \phi(-G_1))) \end{aligned}$$

On conclut que  $\text{Var}(\bar{M}_{2n}) \leq \text{Var}(M_{2n})$  si et seulement si  $\text{Cov}(\phi(G_1), \phi(-G_1)) \leq 0$ . Or, on dispose du théorème :

**THÉORÈME 3.2.1** Soit  $G$  une variable aléatoire,  $T$  une transformation décroissante de  $\mathbb{R}$  telle que  $T(G) \stackrel{\text{loi}}{=} G$ , et  $\phi$  une fonction monotone alors

$$\text{Cov}(\phi(G), \phi(T(G))) \leq 0,$$

avec inégalité si  $\phi$  est strictement monotone sur un domaine de mesure non nulle.

### 3.2.1 Un exemple en finance

Considérons le cas du *put* dans le modèle de Black et Scholes.

On cherche à calculer  $\mathbb{E}[\phi(G)]$  où  $\phi(x) = (K - e^{\beta x})_+$  et  $G$  est une variable aléatoire gaussienne centrée réduite.  $\phi$  est croissante si  $\beta < 0$  et décroissante si  $\beta > 0$ , la transformation  $T(x) = -x$  est décroissante.

Vu le théorème 3.2.1, On en déduit que  $\frac{1}{2} [(K - e^{\beta G})_+ + (K - e^{-\beta G})_+]$  a une variance inférieure à celle de  $(K - e^{\beta G})_+$ .

### 3.3 Variables de contrôles

Supposons que l'on cherche à calculer  $\mathbb{E}[X]$  où  $X$  est une variable aléatoire donnée.

Les méthodes de variables de contrôles consistent à trouver une variable  $Y$  et une constante  $C$  telle que  $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) + C$  et

$$\text{Var}(Y) < \text{Var}(X).$$

On cherche donc à écrire  $\mathbb{E}(f(X))$  sous la forme :

$$\mathbb{E}(f(X)) = \mathbb{E}(f(X) - h(X)) + \mathbb{E}(h(X))$$

dans le cas où  $\mathbb{E}(h(X))$  peut être calculé explicitement et  $Var(f(X) - h(X))$  est inférieure à  $Var(f(X))$ . On calcule alors  $\mathbb{E}(f(X) - h(X))$  par la méthode de Monte Carlo.

### 3.3.1 Exemple 1.

On cherche à calculer  $\int_0^1 e^x dx$ , comme  $e^x \sim 1 + x$  près de 0, on écrit

$$\int_0^1 e^x dx = \int_0^1 (e^x - x - 1) dx + \frac{3}{2}.$$

Si  $U$  suit une loi  $\mathcal{U}([0, 1])$ , la variance de  $e^U$  vaut  $\frac{1}{2}(e^2 - 1) - (e - 1)^2 \sim 0.242$  tandis que la variance de  $e^U - 1 - U$  vaut  $\frac{1}{2}e^2 - 2e + \frac{11}{6} - (e - \frac{5}{2})^2 \sim 0.0436$ ; elle donc divisée par 5 environ.

**THÉORÈME 3.3.1** Soit  $b$  et  $\sigma$  deux fonctions lipschitziennes. Soit  $(X_t, t \geq 0)$  l'unique solution de

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t, \quad X_0 = x.$$

On note  $A$  le générateur infinitésimal de cette diffusion

$$Af(x) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{j=1}^n b_j(x) \frac{\partial f}{\partial x_j}(x),$$

où  $a_{ij}(x) = \sum_{k=1}^p \sigma_{ik}(x)\sigma_{jk}(x)$ .

Supposons que  $u$  est une fonction  $C^{1,2}$  avec des dérivées bornées en  $x$  et qu'elle est solution de l'EDP

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + Au - \tau u \right) & = f(x), \quad (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n, \\ u(T, x) & = g(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (3.3)$$

Alors si  $Z = g(X_T) - \int_0^T f(X_s)ds$  et  $Y = \int_0^T \frac{\partial u}{\partial x}(s, X_s)\sigma(s, X_s)dW_s$ , on a

$$\mathbb{E}(Z) = Z - Y.$$

Cela signifie que la variable aléatoire  $Y$  est un contrôle parfait de  $Z$ .

*Démonstration.* Grâce à la formule d'Itô, on a

$$du(t, X_t) = \left( \frac{\partial u}{\partial t} + Au \right) (t, X_t) dt + \frac{\partial u}{\partial x}(t, X_t) \sigma(s, X_s) dW_t.$$

Maintenant, en intégrant entre 0 et  $T$ , en prenant l'espérance et en utilisant le fait que  $u$  soit solution de (3.3), on obtient

$$u(0, x) = Z - Y = \mathbb{E}(Z).$$

### 3.3.2 Exemple 2. Un exemple en finance

*Parité Call/Put* On suppose que  $(S_t, t \geq 0)$  suit une diffusion log-normale

$$dS_t = S_t(\tau dt + \sigma dW_t), \quad S_0 = x.$$

On note  $C$  le prix du *Call* Européen

$$C = \mathbb{E} \left( e^{-\tau T} (S_T - K)_+ \right),$$

et  $P$  le prix du *Put* Européen

$$P = \mathbb{E} \left( e^{-\tau T} (K - S_T)_+ \right).$$

Il existe une relation qui lie le prix du *Call* et du *Put* et qui ne dépend pas du modèle. Cette relation peut s'établir par des stratégies d'arbitrage :

$$C - P = \mathbb{E} \left( e^{-\tau T} (K - S_T) \right) = x - Ke^{-\tau T}.$$

Cette formule peut également être utilisée pour réduire la variance :

$$C = \mathbb{E} \left( e^{-\tau T} (K - S_T)_+ \right) + x - Ke^{-\tau T}.$$

Le calcul du *Call* est alors déduit du calcul du *Put*. Or la fonction de Payoff du *Put* étant bornée, on peut s'attendre à une variance plus faible.

# Calcul des sensibilités

---

Les sensibilités ou variations du portefeuille par rapport aux paramètres sont importantes en finance. En effet, ce sont ces calculs qui vont permettre au vendeur d'une option de se couvrir. Par ailleurs, nous avons vu que la connaissance du delta permettait de mettre en oeuvre des techniques de réduction de variance.

## 4.1 Rappels sur les sensibilités

Soit  $X_T$  un actif sous jacent uni-dimensionnel solution de  $dX_t = \tau X_t dt + \sigma(t, X_t) dW_t$ , où  $\sigma$  est une fonction. On suppose que l'on cherche à calculer les sensibilités d'une option de payoff  $g(X_t, 0 \leq t \leq T)$  par Monte Carlo. Si  $X_0 = x$ , on note  $u(t, x) = \mathbb{E}[g(X_s, 0 \leq s \leq T)]$ .

Les sensibilités que nous allons abordées ici sont :

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial x} \mathbb{E} [e^{-\tau T} g(X_s, 0 \leq s \leq T)]$$

$$\Gamma = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathbb{E} [e^{-\tau T} g(X_s, 0 \leq s \leq T)]$$

Le  $\Delta$  est la couverture. Il représente la quantité d'actif risqué que l'on doit détenir pour répliquer l'option. Le  $\Gamma$  est la dérivée du  $\Delta$  et doit rester faible sinon cela signifie que le nombre d'interventions sera trop élevé.

## 4.2 Approche par différences finies

L'approche la plus simple pour calculer les Grecques (sensibilités) est de voir que, par exemple,  $\Delta = \frac{\partial u}{\partial x}(0, x)$ . Donc, une méthode simple d'approximation sera :

$$\begin{aligned}\Delta &= \frac{\partial u}{\partial x}(0, x) \sim \frac{1}{2\epsilon}(u(0, x + \epsilon) - u(0, x - \epsilon)) = \tilde{\Delta} \\ \Gamma &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, x) \sim \frac{1}{2\epsilon}(\tilde{\Delta}(0, x + \epsilon) - \tilde{\Delta}(0, x - \epsilon)) = \tilde{\Gamma}\end{aligned}$$

Il existe deux possibilités de simulation de ces accroissements :

1. On utilise  $N$  simulations pour estimer une approximation  $\hat{u}(0, x + \epsilon)$  de  $u(0, x + \epsilon)$  et  $N$  autres (indépendantes) pour estimer  $\hat{u}(0, x - \epsilon)$  approximation de  $u(0, x - \epsilon)$ .

Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned}\text{Var}\left(\frac{\hat{u}(0, x + \epsilon) - \hat{u}(0, x - \epsilon)}{2\epsilon}\right) &= \frac{1}{4\epsilon^2}(\text{Var}(\hat{u}(0, x + \epsilon)) + \text{Var}(\hat{u}(0, x - \epsilon))) \\ &\sim \frac{1}{4\epsilon^2}\left(\frac{\text{Var}(g(X_T^x))}{N} + \frac{\text{Var}(g(X_T^x))}{N}\right) \\ &= \frac{1}{2N\epsilon^2}(\text{Var}(g(X_T^x)))\end{aligned}$$

2. On simule  $N$  trajectoires du Brownien et on construit  $X^{x+\epsilon}$  et  $X^{x-\epsilon}$  avec les mêmes trajectoires. Dans ce cas

$$\begin{aligned}\text{Var}\left(\frac{\hat{u}(0, x + \epsilon) - \hat{u}(0, x - \epsilon)}{2\epsilon}\right) &= \frac{1}{N}\text{Var}\left(\frac{g(X_T^{x+\epsilon}) - g(X_T^{x-\epsilon})}{2\epsilon}\right) \\ &\sim \frac{1}{N}\text{Var}(g'(X_T^x)).\end{aligned}$$

Si  $\epsilon$  est petit et  $g$  régulière, la seconde méthode sera en général préférable à la première.

Cette méthode est très simple à mettre en oeuvre mais le choix du  $\epsilon$  n'est pas évident.

Si  $\epsilon$  est trop petit, la variance de l'estimateur peut être très grande, c'est le cas si le payoff est très irrégulier. Si  $\epsilon$  est trop grand, l'approximation des dérivées est mauvaise. Les vitesses de convergence de ces méthodes ont été étudiées par [5],[6] et [13].

## 4.3 Amélioration des techniques pour Monte Carlo

### 4.3.1 Notion de processus tangent

Nous nous plaçons dans un cadre général. Soit  $X_t$  une diffusion  $d$ -dimensionnelle solution de l'équation

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t, \quad X_0 = x,$$

où  $W$  est un Brownien  $r$  dimensionnel,  $b : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$  et  $\sigma : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^{d \times r}$ . On étudie la fonction qui à  $x \rightarrow X_t(x)$ , à  $\omega$  fixé.

**THÉORÈME 4.3.1** *Si  $b$  et  $\sigma$  sont deux fonctions  $C_b^\infty$ , alors pour tout  $t \in [0, T]$  l'application  $x \rightarrow X_t(x)$  est presque sûrement  $C^\infty$  et l'équation d'Itô satisfaite par  $\frac{\partial X_t^i(x)}{\partial x^j}$  s'obtient par différentiation sous les intégrales :*

$$\frac{\partial X_t^i(x)}{\partial x^j} = \sum_{k=1}^d \int_0^t \frac{\partial b^i}{\partial x^k}(X_s) \frac{\partial X_s^k(x)}{\partial x^j} ds + \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^r \int_0^t \frac{\partial \sigma^{i,l}}{\partial x^k}(X_s) \frac{\partial X_s^k(x)}{\partial x^j} dW_s^l,$$

que l'on peut écrire :

$$\nabla X_t(x) = \int_0^t \nabla b(X_s(x)) \times \nabla X_s(x) ds + \sum_{l=1}^r \int_0^t \nabla \sigma^l(X_s(x)) \times \nabla X_s(x) dW_s^l,$$

où  $\sigma^l$  est la  $l^{\text{ème}}$  colonne de  $\sigma$ .

**REMARQUE 4.3.1** *On peut différentier le processus  $X$  indéfiniment par rapport à  $x$ , dès que les fonctions  $b$  et  $\sigma$  sont assez régulières.*

**DÉFINITION 4.3.1** *Le processus tangent  $(Y_t)_{t \geq 0}$  est le processus (matriciel) dérivée première de  $(X_t(x))_{t \geq 0}$  par rapport à  $x$*

$$Y_t = \frac{\partial X_t(x)}{\partial x}.$$

En dimension 1, il satisfait l'équation différentielle stochastique :

$$\begin{aligned} X_t &= x + \int_0^t b(X_s) ds + \int_0^t \sigma(X_s) dW_s \\ Y_t &= 1 + \int_0^t b'(X_s) Y_s ds + \int_0^t \sigma'(X_s) Y_s dW_s \end{aligned} \quad (4.1)$$

**REMARQUE 4.3.2** En dimension 1, l'équation dont le processus tangent est solution a une forme explicite :

$$Y_t = \exp \left( \int_0^t \left( b'(X_s) - \frac{\sigma^2}{2}(X_s) \right) ds + \int_0^t \sigma'(X_s) dW_s \right).$$

*Démonstration.* On considère tout d'abord

$$\begin{aligned} Z_t &= \log \left( \exp \left( \int_0^t \left( b'(X_s) - \frac{\sigma^2}{2}(X_s) \right) ds + \int_0^t \sigma'(X_s) dW_s \right) \right) \\ &= \int_0^t \left( b'(X_s) - \frac{\sigma^2}{2}(X_s) \right) ds + \int_0^t \sigma'(X_s) dW_s \end{aligned}$$

Donc  $dZ_t = \left( b'(X_t) - \frac{\sigma^2}{2}(X_t) \right) dt + \sigma'(X_t) dW_t$ . De plus, en appliquant la formule d'Itô à  $\log(Y_t)$ , on a

$$\begin{aligned} d(\log(Y_t)) &= \frac{dY_t}{Y_t} - \frac{1}{2Y_t^2} d\langle Y, Y \rangle_t \\ &= \int_0^t b'(X_s) ds + \int_0^t \sigma'(X_s) dW_s - \int_0^t \frac{\sigma^2}{2}(X_s) ds = dZ_t \end{aligned}$$

Comme  $Z_0 = 0 = \log(Y_0)$  on conclut que  $Y_t = \exp(Z_t)$ .

**Exemple 1.** On considère le modèle de Black et Scholes, i.e.  $b(x) = \tau x$  et  $\sigma(x) = \sigma x$ .

Alors on sait que

$$X_t = x \exp \left( (\tau - \sigma^2/2)t + \sigma W_t \right).$$

On voit alors clairement que

$$Y_t = \frac{\partial}{\partial x} X_t(x) = \exp \left( (\tau - \sigma^2/2)t + \sigma W_t \right) = \frac{X_t(x)}{x}.$$

**Exemple 2.** On considère le processus d'Ornstein-Uhlenbeck, i.e.  $b(x) = -cx$  et  $\sigma(x) = \sigma$ .

Alors on sait que

$$X_t = x e^{-ct} + \int_0^t e^{-c(t-s)} dW_s.$$

On voit alors clairement que

$$Y_t = \frac{\partial}{\partial x} X_t(x) = e^{-ct} \quad dY_t = -cY_t dt.$$

**REMARQUE 4.3.3** On peut également définir le processus dérivé,  $\frac{\partial \bar{X}_t^n(x)}{\partial x}$ , du schéma d'Euler  $\bar{X}_t^n(x)$  de  $X_t(x)$ . Il est obtenu par récurrence

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{X}_0^n(x)}{\partial x} &= 1 \\ \frac{\partial \bar{X}_t^n(x)}{\partial x} &= \frac{\partial \bar{X}_{t-1}^n(x)}{\partial x} + b'(\bar{X}_{t-1}^n(x)) \frac{\partial \bar{X}_{t-1}^n(x)}{\partial x} dt \\ &\quad + \sigma'(\bar{X}_{t-1}^n(x)) \frac{\partial \bar{X}_{t-1}^n(x)}{\partial x} (W_t - W_{t-1}) \end{aligned} \quad (4.2)$$

L'équation (4.1) peut être vue comme limite de (4.2) quand le pas de temps tend vers 0,  $\frac{\partial \bar{X}_t^n(x)}{\partial x}$  coïncide avec le schéma d'Euler de  $\frac{\partial}{\partial x} X_t(x)$ .

Pour des développements plus approfondis sur ces notions, nous renvoyons à [15].

### 4.3.2 Applications aux calculs de couverture

Les applications se font essentiellement grâce à la proposition suivante :

**PROPOSITION 4.3.1** Soit  $g$  une fonction  $C_b^1$ , et  $X_t$  une diffusion vérifiant les hypothèses du théorème 4.3.1. Alors,

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathbb{E}[g(X_T)] = \mathbb{E} \left[ g'(X_T) \frac{\partial X_t(x)}{\partial x} \right].$$

La démonstration utilise le théorème de Lebesgue.

Muni de cet outil pour dériver sous l'espérance, on peut maintenant calculer les sensibilités.

Dans la suite, nous supposons que  $X_T$  suit le modèle de Black et Scholes (i.e.

$$b(x) = \tau x \text{ et } \sigma(x) = \sigma x).$$

L'idée générale est d'écrire les sensibilités sous la forme  $\mathbb{E}[e^{-\tau T} g(X_T) Z_T]$  où  $Z_T$  est une variable aléatoire que l'on déterminera.

**PROPOSITION 4.3.2** Lorsque  $X_t$  suit le modèle de Black Scholes, pour toute fonction  $g \in C_b^1$  on a

$$\begin{aligned} \Delta &= \mathbb{E} \left[ e^{-\tau T} g(X_T) \frac{W_T}{x\sigma T} \right] \\ \Delta &= \mathbb{E} \left[ e^{-\tau T} g'(X_T) \frac{X_T}{x} \right] \end{aligned}$$

La première équation s'obtient sans hypothèses sur  $g$ .

*Démonstration.* La deuxième équation s'obtient immédiatement à partir de la proposition 4.3.1 et du fait que dans le modèle de Black Scholes,  $X_t/x = Y_t$ .

La première équation va utiliser un calcul direct. Pour éviter de dériver la fonction nous allons utiliser une intégration par parties contre la loi du Brownien.

On note  $p_x(z)$  la densité de la loi de  $X_T$ . Cette fonction est régulière par rapport à  $x$ .

De plus, on a

$$\mathbb{E} \left( e^{-\tau T} g(X_T(x)) \right) = e^{-\tau T} \int g(z) p_x(z) dz,$$

On dérive maintenant sous l'intégrale (théorème de Lebesgue)

$$H = e^{-\tau T} \int g(z) \frac{\partial p_x(z)}{\partial x} dz = \mathbb{E} \left( e^{-\tau T} g(X_T(x)) \frac{\frac{\partial p_x(X_T(x))}{\partial x}}{p_x(X_T(x))} \right);$$

ou

$$H = \mathbb{E} \left( e^{-\tau T} g(X_T(x)) \frac{\partial \log(p_x)}{\partial x}(X_T(x)) \right).$$

Dans le cas de Black Scholes, la densité de la loi de  $X_T$  est donnée par

$$p_x(z) = \frac{1}{z\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} \exp -\frac{1}{2\sigma^2 T} \left( \log\left(\frac{z}{x}\right) - \left(\tau - \frac{1}{2}\sigma^2\right) T \right)^2.$$

Ainsi;

$$\frac{\partial \log(p_x)}{\partial x}(z) = \frac{1}{x\sigma^2 T} \left( \log\left(\frac{z}{x}\right) - \left(\tau - \frac{1}{2}\sigma^2\right) T \right);$$

et donc,

$$\frac{\partial \log(p_x)}{\partial x}(X_T(x)) = \frac{W_T}{x\sigma T}.$$

On conclut que

$$\Delta = \mathbb{E} \left[ e^{-\tau T} g(X_T) \frac{W_T}{x\sigma T} \right].$$

On peut également trouver des résultats pour le  $\Gamma$ .

**PROPOSITION 4.3.3** Lorsque  $X_t$  suit le modèle de Black Scholes, pour toute fonction  $g \in C_b^1$  on a

$$\Gamma = \mathbb{E} \left[ e^{-\tau T} \left( g'(X_T) \frac{W_T X_T}{x^2 \sigma T} - g(X_T) \frac{W_T}{x^2 \sigma T} \right) \right] \quad (4.3)$$

$$\Gamma = \mathbb{E} \left[ e^{-\tau T} \frac{g(X_T)}{x^2 \sigma T} \left( \frac{W_T^2}{\sigma T} - W_T - \frac{1}{\sigma} \right) \right] \quad (4.4)$$

L'égalité (4.4) est valable sans hypothèses de régularité sur  $g$  (borélienne bornée).

# Conclusion

---

Les méthodes de Monte Carlo permettent de résoudre numériquement le calcul d'intégrales multiples suivant une approche probabiliste. Appliquées à la finance, ces méthodes permettent de calculer les prix des produits dérivés complexes, qu'on ne peut pas expliciter de façon analytique.

# Annexes

---

## 5.1 Annexe A : Mouvement Brownien, Intégrale stochastique et diffusions

### 5.1.1 Mouvement Brownien

Rappelons la définition et quelques propriétés du mouvement Brownien.

**DÉFINITION 5.1.1** *Un processus stochastique  $W : [0, +\infty[ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est un mouvement Brownien (standard) si*

- (i)  $W_0 = 0$ .
- (ii) Pour tout  $s \leq t$ ,  $W_t - W_s$  suit une loi gaussienne  $\mathcal{N}(0, t - s)$ .
- (iii) Pour tout  $n \geq 1$  et tout  $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n$ , les accroissements  $(W_{t_{i+1}} - W_{t_i} : 0 \leq i \leq n - 1)$  sont indépendants.

On en déduit immédiatement que pour tout instant  $t \geq 0$ ,  $W_t$  suit une loi gaussienne  $\mathcal{N}(0, t)$  et que pour tout couple d'instants  $s, t \geq 0$ ,

$$\mathbb{E}(W_s W_t) = \text{Cov}(W_s, W_t) = s \wedge t, \quad (5.1)$$

tandis que pour tout  $T > 0$  :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \left( \frac{W_{(i+1)T}}{n} - \frac{W_{iT}}{n} \right)^2 = T \text{ dans } L^2. \quad (5.2)$$

Les trajectoires de  $(W_t, t \geq 0)$  sont presque sûrement continues, c'est à dire qu'il existe un ensemble négligeable  $N$  tel que pour tout  $\omega \notin N$ , la fonction  $t \rightarrow W_t(\omega)$  est continue mais presque sûrement les trajectoires  $t \rightarrow W_t(\omega)$  ne sont dérivables en aucun point. (On en fait le résultat plus précis suivant : presque sûrement les trajectoires de  $(W_t, t \geq 0)$  sont Höldériennes d'ordre  $\alpha < \frac{1}{2}$ , mais ne sont pas Höldériennes d'ordre  $\frac{1}{2}$ .)

Le mouvement Brownien  $(W_t, t \geq 0)$  est un processus à accroissements indépendants, (c'est la propriété (iii) de la Définition 4.1.1), stationnaires (c'est à dire que pour tout  $s, t \geq 0$ , les variables aléatoires  $W_{s+t} - W_t$  et  $W_s - W_0$  ont la même loi) et gaussien (c'est à dire que pour  $0 \leq t_1 < \dots < t_n$ , le vecteur  $(W_{t_1}, \dots, W_{t_n})$  est gaussien). Il existe de très nombreuses caractérisations du mouvement Brownien ; nous en signalons deux :

**PROPOSITION 5.1.1** (i) Soit  $(X_t, t \geq 0)$  un processus continu, à accroissements indépendants stationnaires. Alors il existe des constantes  $\tau$  et  $\sigma$  telles que pour tout  $t \geq 0$ ,  $X_t - X_0 = \tau t + \sigma W_t$ , où  $(W_t, t \geq 0)$  est un mouvement Brownien.

(ii) Un processus gaussien centré continu  $(X_t, t \geq 0)$  tel que  $\text{Cov}(X_s, X_t) = s \wedge t$  est un mouvement Brownien.

Rappelons la définition suivante de martingale.

**DÉFINITION 5.1.2** Soit  $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$  une filtration, c'est à dire une suite croissante de tribus et  $(M_t, t \geq 0)$  un processus stochastique à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ . Le processus  $(M_t)$  est une  $(\mathcal{F}_t)$  martingale si :

(i)  $M_t$  est  $\mathcal{F}_t$  mesurable pour tout  $t \geq 0$ .

(ii)  $\mathbb{E}|M_t| < +\infty$  pour tout  $t \geq 0$ .

(iii) Pour tout  $0 \leq s \leq t < +\infty$ ,  $\mathbb{E}(M_t | \mathcal{F}_s) = M_s$ .

La proposition suivante montre que le Brownien est une martingale pour sa filtration naturelle.

**PROPOSITION 5.1.2** Soit  $(W_t, t \geq 0)$  un mouvement Brownien standard réel et pour tout  $t \geq 0$  notons  $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s, 0 \leq s \leq t)$ .

- (i)  $(W_t, t \geq 0)$  est une  $(\mathcal{F}_t)$  martingale.  
(ii)  $(W_t^2 - t, t \geq 0)$  est une  $(\mathcal{F}_t)$  martingale.  
(iii) Pour tout  $\lambda > 0$ ,  $(\exp(\lambda W_t - \frac{\lambda^2 t}{2}), t \geq 0)$  est une  $(\mathcal{F}_t)$  martingale.

**DÉFINITION 5.1.3** Un Brownien standard  $r$ -dimensionnel est un processus

$W : [0, +\infty[ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^r$  tel que si  $W_t = (W_t^1, \dots, W_t^r)$ ,

les processus  $(W_t^i, t \geq 0)$ ,  $1 \leq i \leq r$  sont des Browniens standards réels indépendants.

### 5.1.2 Intégrales stochastiques et diffusions

Dans toute cette sous section, nous noterons  $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s, 0 \leq s \leq t)$ , la filtration d'un Brownien standard de dimension  $r$ .

**DÉFINITION 5.1.4** (1) Fixons  $T > 0$  et notons  $\mathcal{L}_T^2$  l'ensemble des processus

$X : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tels que :

(i)  $X : [0, t] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est mesurable pour  $B[0, t] \otimes \mathcal{F}_t$  pour tout  $t \in [0, T]$ ;  $X_t$  est donc  $\mathcal{F}_t$ -mesurable.

(ii)  $\|X\|_{\mathcal{L}} = \int_0^T \mathbb{E}|X_t|^2 dt < +\infty$

L'ensemble  $\mathcal{L}_T^2$  muni de la norme  $\|X\|_{\mathcal{L}}$  est un espace de Banach.

(2) Notons  $\mathcal{S}_T^2$  l'ensemble des processus simples, c'est à dire des processus tels qu'il existe des instants  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_p = T$  et des variables aléatoires  $(x_i, 1 \leq i \leq p)$  telles que  $x_i$  est  $\mathcal{F}_{t_i}$ -mesurable et de carré intégrable pour tout  $i \in \{0, \dots, p-1\}$  et :

$$X_t = \sum_{i=0}^{p-1} x_i \mathbf{1}_{]t_i, t_{i+1}]}(t).$$

Alors  $\mathcal{S}_T^2$  est un sous-ensemble dense de  $\mathcal{L}_T^2$ .

On définit l'intégrale stochastique d'un processus simple  $X_t = \sum_{i=0}^{p-1} x_i \mathbf{1}_{]t_i, t_{i+1}]}(t)$  par rapport à un mouvement Brownien standard de dimension 1 comme suit pour  $t \in ]t_k, t_{k+1}]$ ,  $0 \leq k \leq p-1$  :

$$\int_0^t X_s dW_s = \sum_{i=0}^{k-1} x_i (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) + x_k (W_t - W_{t_k}).$$

De plus on a l'isométrie suivante pour tout  $X \in \mathcal{S}_T^2$  :

$$\mathbb{E} \left( \left| \int_0^t X_s dW_s \right|^2 \right) = \int_0^t \mathbb{E}(X_s^2) ds. \quad (5.3)$$

On en déduit que si une suite de processus simple  $(X(n)_t, n \geq 1)$  converge vers  $X \in \mathcal{L}_T^2$  pour la norme  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^2}$ , alors la suite  $(\int_0^t X(n)_s dW_s, n \geq 1)$  est de Cauchy dans  $L^2(\Omega)$ ; on note de nouveau  $\int_0^t X_s dW_s$  sa limite et l'isométrie (5.3) s'étend à  $X \in \mathcal{L}_T^2$ .

Enfin, si on note  $\mathcal{A}_T^2$  l'ensemble des processus  $X : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tels que la condition (i) de la définition 5.1.4 est satisfaite mais la condition (ii) est remplacée par :

(ii')  $\int_0^T |X_t(\omega)|^2 dt < +\infty$  p.s. pour tout  $t \in [0, T]$ .

L'intégrale stochastique  $\int_0^t X_s dW_s$  s'étend de façon unique à des processus  $X \in \mathcal{A}_T^2$  et définit un processus  $(\int_0^t X_s dW_s, t \in [0, T])$  qui est  $F_t$ -adapté et presque sûrement continu.

Cependant, pour  $X \in \mathcal{L}_T^2$ , le processus  $(\int_0^t X_s dW_s, 0 \leq t \leq T)$  est une  $(\mathcal{F}_t)$  martingale, alors que cette propriété n'est plus nécessairement vraie si  $X \in \mathcal{A}_T^2$ .

Soit enfin  $(W_t = (W_t^1, \dots, W_t^r), t \in [0, T])$  un Brownien standard de dimension  $r$  et  $X = (X^{i,j}, 1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq r) : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{rd}$  un processus à valeurs dans  $\mathbb{R}^{rd}$  dont toutes les composantes  $(X_t^{i,j}, t \in [0, T])$  appartiennent à  $\mathcal{A}_T^2$ . Alors pour tout  $t \in [0, T]$ ,

$$\int_0^t X_s dW_s = \left( \sum_{k=1}^r \int_0^t X_s^{i,k} dW_s^k, 1 \leq i \leq d \right) \in \mathbb{R}^d.$$

Si les composantes de  $X$  appartiennent à  $\mathcal{L}_T^2$ , l'isométrie s'écrit pour tout  $i \in \{1, \dots, d\}$  et  $t \in [0, T]$  :

$$\mathbb{E} \left( \left| \sum_{k=1}^r \int_0^t X_s^{i,k} dW_s^k \right|^2 \right) = \int_0^t \sum_{k=1}^r \mathbb{E} \left( |X_s^{i,k}|^2 \right) ds. \quad (5.4)$$

Rappelons enfin l'inégalité suivante de Burkholder-Davies-Gundy qui généralise l'isométrie à un espace  $L^p$  quelconque avec  $p \in [2, +\infty[$ :

**PROPOSITION 5.1.3** Pour tout  $p \in [1, +\infty[$  il existe une constante  $C_p > 0$  telle que pour tout processus adapté de carré intégrable  $X : [0, T] \otimes \Omega \rightarrow \mathbb{R}^r$  :

$$\mathbb{E} \left( \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t \sum_{k=1}^r X_s^k dW_s^k \right|^{2p} \right) \leq C_p \mathbb{E} \left( \left| \int_0^T \sum_{k=1}^r |X_s^k|^2 ds \right|^p \right)$$

Le résultat suivant assure l'existence et l'unicité de solutions fortes d'équations différentielles stochastiques (qui sont des processus de diffusion).

**THÉORÈME 5.1.1** Soit  $W$  un Brownien standard de dimension  $r$  pour la filtration  $(\mathcal{F}_t)$ ,  $\sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{rd}$  et  $b : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  des fonctions mesurables pour les tribus produit de boréliens pour lesquelles il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout  $t \in [0, T]$ ,  $x, y \in \mathbb{R}^d$  : (i) (condition de Lipschitz)

$$|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| + |b(t, x) - b(t, y)| \leq C|x - y|, \quad (5.5)$$

(ii) (restriction sur la croissance)

$$|\sigma(t, x)| + |b(t, x)| \leq C(1 + |x|). \quad (5.6)$$

Alors pour tout  $x \in \mathbb{R}^d$  l'équation différentielle stochastique

$$X_t = x + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s + \int_0^t b(s, X_s) ds \quad (5.7)$$

a une unique solution trajectorielle  $(X_t, t \in [0, T])$  adaptée à la filtration  $(\mathcal{F}_t)$  à trajectoires presque sûrement continues, et telle que pour tout  $p \in [1, +\infty[$  il existe une constante  $C_p$  telle que pour tout  $h > 0$  :

$$\mathbb{E} \left( \sup_{t \in [0, T]} |X_t|^p \right) \leq C_p(1 + |x|^p), \quad (5.8)$$

$$\sup_{t \in [0, T]} E(|X_{t+h} - X_t|^{2p}) \leq C_p(1 + |x|^{2p})h^p. \quad (5.9)$$

Ce théorème est montré par exemple en utilisant un schéma de Picard, l'inégalité de Burkholder-Davies-Gundy, ainsi que le lemme de Gronwall :

**LEMME 5.1.1** Soit  $\lambda, \nu : [0, +\infty[ \rightarrow [0, +\infty[$  des fonctions telles que  $\nu$  est bornée et  $\lambda$  est continue, et soit  $C > 0$  une constante telle que pour tout  $t \in [0, T]$  :

$$\nu(t) \leq C + \int_0^t \lambda(s)\nu(s)ds.$$

Alors pour tout  $t \in [0, T]$  :

$$\nu(t) \leq C \exp \left( \int_0^t \lambda(s)ds \right).$$

**THÉORÈME 5.1.2** (Formule d'Itô) Soit  $\sigma$  et  $b$  des fonctions satisfaisant les conditions (5.5) et (5.6) du Théorème 5.1.1 et  $f : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $f(t, x)$  dérivable par rapport à  $t$  et deux fois différentiable par rapport à  $x = (x_1, \dots, x_d)$  et dont les dérivées partielles sont continues ; alors

$$f(t, X_t) = f(0, x) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(s, X_s) ds + \sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^r \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(s, X_s) \sigma_k^i(s, X_s) dW_s^k + \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(s, X_s) b^i(s, X_s) ds + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(s, X_s) (\sigma \sigma^*)^{i,j}(s, X_s) ds. \quad (5.10)$$

## 5.2 Annexe B : Évaluation des prix d'options européennes

Une option est un engagement entre un acheteur et un vendeur. Il existe beaucoup d'options différentes mais les plus anciennes et les plus simples sont les options d'achat (*call*) et les options de vente (*put*). Il existe, par ailleurs, deux manières d'envisager les options par rapport à leur date d'exercice : les options *américaines* pour lesquelles les droits peuvent être exercés, au gré de l'acheteur, avant l'échéance, et les options européennes qui ne sont exerçables qu'à l'échéance.

### 5.2.1 Options européennes

**DÉFINITION 5.2.1 1.** *L'option d'achat (call) européenne donne le droit (et non l'obligation) d'acheter à une date convenue  $T$  une certaine quantité d'un actif financier à un prix déterminé  $K$ .*

**2.** *L'option de vente (put) européenne donne le droit (et non l'obligation) de vendre à une date convenue  $T$  une certaine quantité d'un actif financier à un prix déterminé  $K$ .*

**3.** *La date fixée  $T$  s'appelle la **maturité** ou la **date d'exercice**.*

**4.** *Le prix déterminé  $K$  s'appelle le **prix d'exercice** (strike price).*

L'actif sous-jacent, c'est-à-dire celui sur lequel porte l'option, peut être, par exemple, une action, une devise ou une obligation.

Une question centrale est le prix du contrat, prix sur lesquelles deux parties (acheteur et vendeur) doivent se mettre d'accord.

Dans toute la suite,  $S_t$  est le prix de l'actif sous-jacent à l'option à l'instant  $t \in [0, T]$ .

Par ailleurs,  $C_t$  (respectivement  $P_t$ ) est le prix à l'instant  $t$  d'un call (respectivement d'un put). Les prix  $C_t$  et  $P_t$  dépendent bien sûr de l'évolution du prix de l'actif sous-jacent, de la date d'exercice  $T$  et du prix d'exercice  $K$ .

#### Description d'un Call

Le problème d'un call peut être, par exemple, le suivant : au temps  $t = 0$ , j'achète le droit d'obtenir à l'instant  $T$  une action au prix  $K = 100$ .

**Première situation :** Si, à la maturité  $T$ ,  $S_T = 200$  alors j'exerce mon droit et j'achète l'action au prix  $K = 100$ . Le gain immédiat (payoff) est  $200 - 100$ .

**Deuxième situation :** Si, à la maturité,  $S_T = 50$ , alors je n'exerce pas mon droit et le gain immédiat est nul.

De manière générale, le payoff (flux reçu à l'instant  $t$  par le propriétaire de l'option) est donc

$$\max(S_T - K, 0) = (S_T - K)_+.$$

Pour connaître le gain global de l'acheteur (propriétaire de l'option), il faut bien sûr retrancher le prix de l'option qui a été versé à l'instant  $t = 0$ , c'est-à-dire  $C_0$ . Comme les sommes versées et perçues ne sont pas échangées au même instant, il faut tenir compte d'un facteur de renormalisation lié au rendement d'un actif sans risque. Ce rendement est noté  $\tau$ . Ainsi le gain moyen global considéré à l'instant  $t = 0$  est égal à

$$\mathbb{E}_{S_0} (e^{-\tau T} (S_T - K)_+) - C_0.$$

Si le marché est équilibré et qu'il n'y a pas d'arbitrage, le prix exact de l'option est donné par

$$C_0 = \mathbb{E}_{S_0} (e^{-\tau T} (S_T - K)_+).$$

Tout ceci suppose évidemment qu'il n'y a pas de frais supplémentaires ou de dividendes et qu'il n'y a pas de limitation sur la gestion des actifs (pas de limitation de vente ou d'achat). Notons que  $C_0$  est déterministe dès que la valeur initiale  $S_0$  de l'actif l'est.

De manière plus générale, le prix à l'instant  $t \in [0, T]$  d'un call est donné par

$$C_t = \mathbb{E}_{S_0} (e^{-\tau(T-t)} (S_T - K)_+ | \mathcal{F}_t)$$

où  $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$  est la filtration engendrée par le processus  $(S_t)_{t \in [0, T]}$ . Si l'on suppose de plus que le prix  $(S_t)_{t \in [0, T]}$  est un processus de Markov, le prix à l'instant  $t$  d'un call est alors

$$C_t = \mathbb{E}_{S_t} (e^{-\tau(T-t)} (S_{T-t} - K)_+),$$

Remarquons que  $C_t$  est une variable aléatoire  $\mathcal{F}_t$ -mesurable.

### Description d'un put

Le raisonnement lié à la description d'une option de vente est évidemment à l'opposé de celui de l'option d'achat. Ainsi, si au temps  $t = 0$  on achète le droit de vendre un actif au prix  $K$  à l'instant  $T$  alors on réagira à l'échéance de la façon suivante :

- si le prix de l'actif  $S_T$  est supérieur à  $K$ , alors on n'exerce pas son droit et le gain instantané est nul,
- si le prix de l'actif  $S_T$  est inférieur à  $K$ , alors on exerce son droit et le gain instantané est  $K - S_T$ .

La fonction payoff d'un put est alors donnée par

$$\max(K - S_T, 0) = (K - S_T)_+.$$

Le prix de l'option est déterminé de la même façon que dans le cas d'un call. Si le marché est équilibré et sans opportunité d'arbitrage, le prix d'un put à l'instant  $t$  est

$$P_t = \mathbb{E}_{S_0} (e^{-\tau(T-t)}(K - S_T)_+ | \mathcal{F}_t)$$

où  $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$  est la filtration engendrée par le processus  $(S_t)_{t \in [0, T]}$  et  $\tau$  est le rendement de l'actif sans risque.

Si l'on suppose de plus que le prix  $(S_t)_{t \in [0, T]}$  est un processus de Markov, le prix à l'instant  $t$  d'un put est alors

$$P_t = \mathbb{E}_{S_t} (e^{-\tau(T-t)}(K - S_{T-t})_+).$$

### 5.2.2 Modèle de Black et Scholes

#### Définition du modèle

Pour pouvoir calculer ou estimer le prix des options, il faut évidemment construire un modèle pour le prix de l'actif  $(S_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ . Les prix des divers actifs sur un marché sont des processus aléatoires définis sur l'espace de probabilité filtré

$$\left( \Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}, \mathbb{P} \right)$$

où  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est la filtration naturelle d'un mouvement brownien  $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  standard (sous  $\mathbb{P}$ ).

On peut dans un premier temps imaginer que le prix  $(S_t)_{t \in [0, T]}$  d'un actif satisfait une équation du type

$$dS_t = \mu dt + \sigma dB_t.$$

Mais, la solution de cette équation différentielle stochastique prend des valeurs négatives, ce qui n'est pas cohérent pour modéliser un prix ! Par ailleurs,  $\sigma$  qui représente la variance des accroissements est constante alors qu'en pratique on observe que, lorsque le prix d'un actif augmente, la variabilité augmente également.

Le **modèle de Black et Scholes** suppose que le logarithme de  $S_t$  satisfait l'E.D.S

$$d \log(S_t) = a dt + \sigma dB_t.$$

En appliquant la formule d'Itô à la fonction exponentielle, on constate que

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dB_t), \quad (5.11)$$

où  $\mu = a + \sigma^2/2$ . Ainsi, le prix  $(S_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est un brownien géométrique donné par

$$S_t = \exp \left[ \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma B_t \right] = \exp[at + \sigma B_t].$$

**REMARQUE 5.2.1** La filtration engendrée par  $(S_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est en fait la filtration naturelle du mouvement brownien  $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ . Par ailleurs,  $(S_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est bien un processus de Markov.

On note  $S_t^0$  la valeur en  $t$  d'un actif sans risque (capitalisation à la banque) avec rendement  $\tau$ . Alors,

$$dS_t^0 = \tau S_t^0 dt.$$

Si  $\sigma = 0$ , un raisonnement d'arbitrage permet de montrer que  $\mu = \tau$ . Dans le cas général (a priori  $\sigma \neq 0$ ), il existe une probabilité  $\mathbb{Q}$  équivalente à la probabilité historique  $\mathbb{P}$  (probabilité qui nous a permis de modéliser le prix de l'actif risqué) sous

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t)$$

avec  $(W_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est un mouvement brownien standard sous  $\mathbb{Q}$ . Ainsi, pour tout  $t \in [0, T]$ ,

$$S_t = \exp \left[ \left( \tau - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t \right].$$

La probabilité  $\mathbb{Q}$  est appelée **probabilité risque-neutre** ou **mesure martingale**. Le théorème de Girsanov permet sa construction ainsi que celle de  $(W_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ .

**PROPOSITION 5.2.1** Pour tout  $t \in [0, T]$ , notons

$$L_t = \exp \left( -\frac{\mu - \tau}{\sigma} B_t - \frac{(\mu - \tau)^2}{\sigma^2} t \right).$$

Alors,  $(L_t)_{t \in [0, T]}$  est une martingale par rapport à la filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ , i.e que

(i) pour tout  $t$ ,  $L_t$  est  $\mathcal{F}_t$ -mesurable intégrable,

(ii) et pour tout  $s < t$ ,  $\mathbb{E}(L_t | \mathcal{F}_s) = L_s$ .

Par ailleurs, sous la probabilité  $\mathbb{Q}$  de densité  $L_T$  par rapport à  $\mathbb{P}$ , le processus  $W$  défini par

$$\forall t \in [0, T], W_t = B_t + \frac{\mu - \tau}{\sigma} t$$

est un mouvement brownien standard.

**REMARQUE 5.2.2** Les filtrations engendrées par  $(B_t)_{t \in [0, T]}$ ,  $(W_t)_{t \in [0, T]}$  ou  $(S_t)_{t \in [0, T]}$  sont les mêmes.

**REMARQUE 5.2.3** Notons que

$$dW_t = dB_t + \frac{\mu - \tau}{\sigma} dt$$

et donc que  $S$  vérifie bien l'E.D.S. suivante

$$dS_t = S_t(\tau dt + \sigma dW_t).$$

**PROPOSITION 5.2.2** Sous la probabilité risque-neutre  $\mathbb{Q}$  définie par la proposition 5.2.1, le prix actualisé  $\tilde{S}$  défini par

$$\forall t \in [0, T], \tilde{S}_t = S_t e^{-\tau t}$$

est une  $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ -martingale.

**REMARQUE 5.2.4**  $W$  et  $\mathbb{Q}$  sont tels que

$$d\tilde{S}_t = \tilde{S}_t \sigma dW_t.$$

### Relation de parité des options Call-Put pour les options européennes

En utilisant le modèle de Black et Scholes présenté précédemment pour définir le prix de l'actif, on obtient une formule qui relie les prix des options européennes d'achat et de vente.

**PROPOSITION 5.2.3** Pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,

$$C_t - P_t = S_t - Ke^{-\tau(T-t)}.$$

*Démonstration.*

On considère la différence Call-Put

$$\begin{aligned} C_t - P_t &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left( e^{-\tau(T-t)} ((S_T - K)_+ - (K - S_T)_+) \mid \mathcal{F}_t \right) \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left( e^{-\tau(T-t)} ((S_T - K)_+ - (S_T - K)_-) \mid \mathcal{F}_t \right) \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left( e^{-\tau(T-t)} (S_T - K) \mid \mathcal{F}_t \right) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} (S_T e^{-\tau(T-t)} \mid \mathcal{F}_t) - Ke^{-\tau(T-t)}. \end{aligned}$$

Puisque le prix actualisé est une martingale sous  $\mathbb{Q}$ ,

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} (S_T e^{-\tau(T-t)} \mid \mathcal{F}_t) = S_t e^{-\tau t}.$$

Ainsi, on en déduit

$$C_t - P_t = S_t - Ke^{-\tau(T-t)}.$$

Cette relation est très utile dans la pratique puisqu'elle permet de n'estimer qu'une des deux valeurs et de retrouver l'autre sans difficulté.

### Formule de Black-Scholes et Merton

La formule qui est présentée dans ce paragraphe permet de calculer explicitement la valeur d'une option d'achat européenne. Scholes et Merton ont reçu le prix Nobel pour cette découverte.

**PROPOSITION 5.2.4** Pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,

$$C_t = S_t \Phi(d_1) - Ke^{-\tau(T-t)} \Phi(d_2),$$

où

$$\begin{cases} d_1 &= \frac{\log(S_t/K) + (\tau + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\ d_2 &= \frac{\log(S_t/K) + (\tau + \sigma^{-2}/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \end{cases}$$

et où  $\Phi$  est la fonction de répartition d'une loi gaussienne centrée réduite, c'est-à-dire que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du.$$

À partir de cette formule et de la relation de parité Call-Put, on peut déduire une formule explicite du prix d'un put.

### 5.3 Annexe C : Table de la loi normale centrée réduite

Fonction de répartition de la loi normale réduite :  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$

x	0.0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.	0.5	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861

# Bibliographie

---

- [1] N. BOULEAU ET D. LEPINGLE. Numerical methods for stochastic processes, Wiley Series in Probability and Mathematical statistics 1994.
- [2] F. COMETS ET T. MEYRE. Calcul stochastique et modèles de diffusion. Dunod, 2006.
- [3] O. FAURE. Simulation du Mouvement Brownien et des Diffusions. PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1992.
- [4] P. GLASSERMAN. Monte Carlo methods in financial engineering. Springer, 2003.
- [5] PAUL GLASSERMAN AND DAVID D. YAO. Some guidelines and guarantees for common random numbers. Manage. Sci., 38(6) :884–908, 1992.
- [6] P. W. GLYNN. Optimization of stochastic systems via simulation. In Proceedings of the 1989 Winter simulation Conference, pages 90–105. San Diego, Society for Computer Simulation, 1989.
- [7] P. JACKEL. Monte-Carlo methods in finance, Wiley Finance Series, Wiley, 2002.

- [8] I. KARATZAS ET S.E. SHREVE. *Methods of mathematical finance, Applications of Mathematics, Stochastic Modelling and Applied Probability*, 39, Springer-Verlag, New York, 1999.
- [9] I. KARATZAS ET S.E. SHREVE. *Brownian Motion and Stochastic Calculus. Graduate Texts in Mathematics*, 113, Springer-Verlag, New York, 1998.
- [10] P.E. KLOEDEN AND E. PLATEN. *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. Springer Verlag, 1992.
- [11] D. LAMBERTON AND B. LAPEYRE. *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*. Ellipses Édition Marketing, Paris, second edition, 1997. ISBN2-7298-4782-0.
- [12] B. LAPEYRE AND E. PARDOUX AND R. SENTIS. *Méthodes de Monte-Carlo pour les équations de transport et diffusion*. Springer-Verlag, 1998.
- [13] P. L'ECUYER AND G. PERRON. On the convergence rates of ipa and fdc derivatives estimators. *Oper. Res.*, 42 :643–656, 1994.
- [14] N.J. NEWTON. Variance reduction for simulated diffusions. *SIAM J. Appl. Math.*, 54(6) :1780–1805, 1994.
- [15] P. PROTTER. *Stochastic Integration and Differential Equations*. Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [16] D. REVUZ AND M. YOR. *Continuous Martingales and Brownian Motion*. Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- [17] L. C. G. (ED.) ROGERS AND AL., EDITORS. *Monte Carlo methods for stochastic volatility models*. Cambridge University Press., 1997.
- [18] R. Y. RUBINSTEIN. *Simulation and the Monte Carlo Method*. John Wiley and Sons, 1981.
- [19] D. TALAY. Simulation and numerical analysis of stochastic differential systems : a review. In P. Krée and W. Wedig, editors, *Probabilistic Methods in Applied Physics*, volume 451 of *Lecture Notes in Physics*, chapter 3, pages 54–96. Springer-Verlag, 1995.

- [20] D. TALAY. Discrétisation d'une équation différentielle stochastique et calcul approché d'espérances de fonctionnelles de la solution, *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 20, 141-179, 1986.
- [21] D. TALAY AND L. TUBARO. Expansion of the global error for numerical schemes solving stochastic differential equations. *Stochastic Anal. Appl.*, 8(4) :483-509(1991), 1990. ISSN 0736-2994.