

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques



Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Master Académique en Mathématiques
Option : **Equations aux Dérivées Partielles**



Par :

Melle. Selmani Wissame

Intitulé

**Modélisation mathématique de la circulation de l'eau
dans les régions désertiques.**

Dirigé par : Dr. ELLAGGOUNE Fateh

Devant le jury

**PRESIDENT
RAPPORTEUR
EXAMINATEUR1**

**Prof. Hizao Fujita Yashima
Dr. Ellaggoune Fateh
Prof. Aissaoui Med Zine**

**Univ-Guelma
Univ-Guelma
Univ-Guelma**

Session Juin 2013

Modélisation mathématique de la circulation
de l'eau
dans les régions désertiques.

Selmani Wissame
Mémoire de master en mathématiques
Université Guelma

28 mai 2013

REMERCIEMENT

Mes premiers remerciements vont à monsieur *Ellaggoune Fateh* qui a accepté de me prendre sous sa direction.

Je suis très sensible à l'honneur que m'a fait monsieur *Hizao Fujita Yachima* en acceptant de présider mon jury de soutenance. Sans ses conseils précieux, sa grande disponibilité et sa patience, ce mémoire n'aurait jamais vu le jour. Je le prie de croire à l'expression de ma très profonde gratitude.

Je tiens à remercier vivement monsieur *Aissaoui.M.Zine*, qui a accepté de faire partie du jury et d'examiner mon mémoire.

Mes sincères remerciements à tous mes enseignants et les responsables dans l'université de Guelma qui m'ont donné la chance d'approfondir mes connaissances et de m'orienter vers plusieurs axes de recherches.

Je remercie également tous les membres du département de Mathématiques et du laboratoire, pour toute l'aide qui m'a été accordée.



DEDICACE

*To my parents, my family and my friends,
for their love, support, and encouragement*



Selmani Wissame





Un mathématicien est une personne qui peut trouver des analogies entre les théorèmes; un meilleur mathématicien est celui qui peut voir des analogies entre les démonstrations. Les très bons mathématiciens sont ceux qui peuvent déceler des analogies entre les théories. Mais on peut supposer que le meilleur des mathématiciens, est celui qui peut voir des analogies entre les analogies.

Stefan Banach



La physique ne nous donne pas seulement l'occasion de résoudre des problèmes; elle nous aide à en trouver les moyens, et cela de deux manières. Elles nous fait pressentir la solution; elle nous suggère des raisonnements.

Henri Poincaré



Dans la vie il n'y a pas de solutions. Il y a des forces en marche : il faut les créer et les solutions suivent.

Antoine de Saint-Exupéry



Table des matières

Résumé	7
Introduction	9
1 Généralités	11
1.1 Les phases d'eau :	11
1.1.1 Le diagramme des phases de l'eau	12
1.2 Les étapes de l'eau	14
1.2.1 L'évaporation	14
1.2.2 La condensation	15
1.2.3 Les précipitations	15
1.2.4 La captation et l'infiltration	15
1.3 La circulation de l'eau	16
1.4 Les régions désertiques	17
2 Position du problème	19
2.1 Domaine	19
2.2 Quantités physiques à considérer	20
2.3 Interprétation physique	21
3 Etude de la solution locale	23
4 Etude de la solution globale	27
5 le comportement asymptotique de la solution	35
5.1 cas des régions arides.	35
5.2 Etude de la convergence de la solution du problème de Cauchy.	41
5.2.1 premier cas $u \rightarrow 0$:	41
5.2.2 deuxième cas $u \nrightarrow 0$:	46
conclusion et perspective	53
Références	55

Résumé

Dans ce mémoire nous proposons un modèle mathématique qui décrit la circulation de l'eau dans les régions désertiques. L'objectif de notre étude est de chercher l'existence et l'unicité de la solution pour le modèle proposé et son comportement asymptotique. Le présent mémoire est organisé de la manière suivante :

Dans le premier chapitre nous présentons un bref rappel sur la transition de phase de l'eau et son cycle ainsi que des concepts et définitions liés à notre travail. Dans le deuxième chapitre nous introduisons le système d'équations que nous allons examiner et présentons l'interprétation physique de ce système et des variables utilisées ; puis dans le troisième et le quatrième chapitre concernent l'essentiel de notre travail à savoir la démonstration de l'existence et l'unicité de la solution locale et globale pour le système proposé. Dans le cinquième chapitre on étudie le comportement asymptotique de la solution de notre système pour une région désertique et nous démontrons la convergence de la solution vers une solution périodique. A la fin , nous considérons le cas d'une région semi-aride où nous démontrons l'existence de la solution ; l'unicité est établie seulement dans un cas particulier.

Introduction

Sur la terre, l'eau est la seule substance qu'on trouve dans ses trois phases : solide, liquide et vapeur d'eau, dans les conditions normales de notre environnement.

Malgré le fait que le pourcentage de vapeur d'eau dans l'atmosphère est faible (0 à 4% de la composition de l'atmosphère), la quantité d'eau est assez grande et elle joue un rôle prépondérant dans le transport d'énergie autour de la planète. L'eau s'évapore, se condense et se précipite continûment dans un cycle infini qui entraîne d'énormes échanges d'énergie. L'énergie thermique enlevée de l'atmosphère par l'évaporation sera restituée à l'atmosphère lors de la condensation de la vapeur d'eau.

La pluie (orage , grêle , ...) est une conséquence de la condensation de la vapeur d'eau dans l'atmosphère et de la formation de gouttelettes qui chutent lorsqu'elles deviennent suffisamment grandes grâce au processus de coagulation. La condensation de H_2O se produit quand la densité de la vapeur est supérieure à la densité de la vapeur saturée, tandis que l'évaporation aura lieu dans le cas contraire. Dans cette transition de phase, la variation de la température joue un rôle essentiel pour la condensation-évaporation.

L'objectif de ce travail est l'étude de la variation des quantités de l'eau liquide et de la vapeur dans une région désertique qui seront déterminées par la condensation de la vapeur d'eau, la précipitation et l'évaporation de la surface de la région considérée, tout en prenant en considération les échanges avec le milieu extérieur et l'entrée et la sortie de l'eau par filtration et écoulement. Précisément, le but est de chercher l'existence et l'unicité de la solution locale et globale et son comportement asymptotique pour l'entrée de la vapeur h_0 petite par rapport au coefficient de sortie de la vapeur h_1 et à la densité de la vapeur saturée $\bar{q}_{vs}(T)$, de plus envoyant notre attention d'étudier le système dans une région semi-aride.

Chapitre 1

Généralités

1.1 Les phases d'eau :

Dans la nature l'eau peut exister sous différentes formes : on parle de différents états ou de différentes phases. Ces états sont :

- (i) **État solide (glace, neige) :** Les solides sont caractérisés par un agencement des atomes très ordonnés et rapprochés. Il est donc très difficile de les comprimer car il y a peu d'espaces entre les atomes. De plus tous les atomes sont liés fortement les uns aux autres, ce qui confère aux solides une forme propre bien déterminée (cristaux).
- (ii) **État liquide (pluie, nuages) :** Les liquides sont caractérisés quant à eux un agencement désordonnés des atomes mais toujours assez rapprochés. Ils sont donc également difficilement compressibles. En revanche, les atomes sont peu liés les uns aux autres et les liquides ne possèdent donc pas de forme propre et peuvent se déformer très facilement.
- (iii) **État gazeux (vapeur d'eau) :** Les gaz sont caractérisés par un agencement des atomes désordonnés et espacés et peuvent ainsi être comprimés facilement. Les atomes ne sont pas liés les uns aux autres et sont très agités. Pour ces raisons, les gaz se répandent librement.

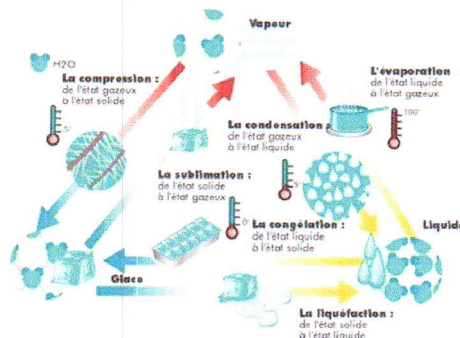


Figure1. les états de l'eau

1.1.1 Le diagramme des phases de l'eau

Nous savons tous que la matière peut exister sous trois états, solide, liquide ou gazeux. La température et la pression sont les deux principaux facteurs qui règlent l'état sous lequel se trouve la matière. Le diagramme qui suit se nomme un diagramme de phases ; c'est celui de l'eau. Il illustre de façon simple les relations entre états de la matière et température-pression.

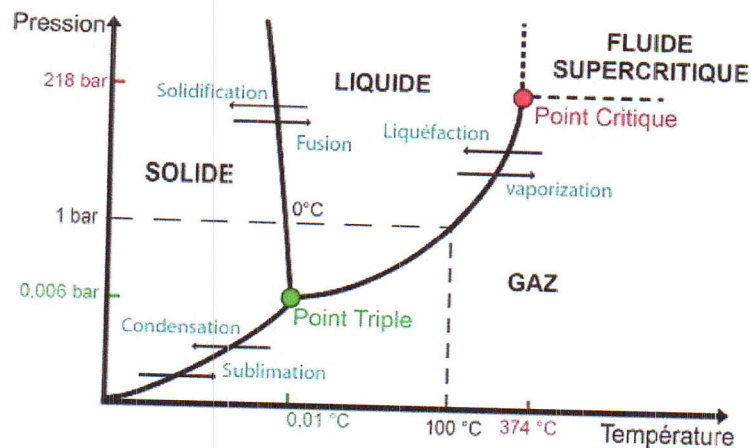


Figure2. Les phases de l'eau

Chacun des points de ce diagramme figure le couple (pression, température) unique (la pression en atmosphère est en ordonnée, la température en abscisse). Le diagramme lui-même, composé de 3 branches qui séparent notre région en trois régions distinctes correspondant aux trois états : solide, liquide et vapeur.

- Par exemple :

(i) À 20°C et une atmosphère de pression, l'eau se présente sous forme liquide.

Si le point représentant un couple (température, pression) se trouve sur une des branches de courbe, l'eau se présente alors à la fois sous les deux états représentés par les régions situées de part et d'autre de la courbe.

(ii) À 100°C et sous une atmosphère de pression, (point marqué sur le graphique) l'eau se présente à la fois sous la forme liquide et vapeur : c'est l'évaporation (l'eau passe de l'état liquide à l'état gazeux) ou la condensation (l'eau passe de l'état gazeux à l'état liquide).

Si on se trouve dans la région de l'état solide en-dessous du point triple et qu'on remarque à droite c'est-à-dire la température augmente sans changer la pression, on constate qu'on passe de l'état gazeux sans passer par l'état liquide. Cette transformation (représentée par le point situé sur la courbe) s'appelle la sublimation.

Il faut préciser que la pression de ce diagramme est la pression de H_2O et donc lorsqu'il s'agit de la vapeur contenue dans l'air on doit considérer la pression partielle correspondante à H_2O vapeur.

On remarque dans ce diagramme deux points singuliers :

1) Le point triple : À la jonction des trois branches à la température et la pression représentées par ce point, l'eau se présente sous les 3 états (solide, liquide et vapeur).

2) Le point critique : La région située au delà à droite de la courbe qui se termine par un point appelé point critique correspondant lui-même à une température et une pression bien précises, est aussi singulière : en effet, dans cette région, on peut passer de l'état liquide à l'état gazeux sans rencontrer de courbe, c'est-à-dire sans changement de phase : le liquide devient gaz (ou le contraire) sans transition. Mais le point critique de H_2O qui correspond à 374°C et 218 bar ne se trouve pas dans notre environnement.

Remarques.

- Le changement de phase ne peut s'obtenir dans le sens **solide** $\rightarrow$ **liquide** ou dans **liquide** $\rightarrow$ **gaz** qu'en fournissant à l'eau une grande quantité d'énergie. Cette énergie, qui se trouve ensuite accumulée dans le liquide (pour la fusion) ou dans le gaz (pour l'évaporation) sous forme latente s'appelle précisément la chaleur latente de fusion et la chaleur latente de vaporisation.

Si on fait repasser l'eau de l'état final à l'état initial, cette énergie est restituée par l'eau au milieu ambiant.

- la chaleur latente de vaporisation (appelée aussi enthalpie de vaporisation) n'est pas constante. Lorsqu'on suit la courbe séparant liquide et gaz, on constate que cette chaleur latente diminue jusqu'à devenir nulle au point critique (ce qui est logique puisque au-delà de ce point critique, on passe d'un état à l'autre sans transition de phase).

- Si on trace une verticale sur le diagramme de phase à l'abscisse -10°C , on remarque d'abord que pour que l'eau soit sous forme vapeur à cette température, il faut que sa pression soit très faible. Or, c'est précisément ce qui se passe dans notre cas. En effet, comme on l'a remarqué précédemment dans le cas d'un mélange de gaz (nous sommes en présence d'air) les pressions de chacun des gaz constituant l'atmosphère s'additionnent pour que leur total soit égal à la pression atmosphérique. Mais chacun des

gaz n'est pas à la pression atmosphérique!. Le diagramme nous indique que la pression de la vapeur reste très faible à -10° , mais n'est pas nulle : l'air froid contient encore une certaine quantité d'humidité.

- Pour la neige : à la différence de la vapeur d'eau mélangée à l'air, sa pression est égale à la pression atmosphérique. Reportons nous au diagramme : à -10° , celui-ci indique que l'eau est sous forme solide, ce qui est conforme à ce qu'on observe pour la neige.
- Enfin, examinons le cas de l'eau du lac (sous la glace de surface). Son cas est simple : elle est à peu près soumise à la pression atmosphérique, (tout comme la neige) et, si elle n'est pas sous forme de glace, c'est que sa température est tout simplement supérieure à 0° .

1.2 Les étapes de l'eau

Le cycle de l'eau est la suite des déplacements de l'eau dans l'atmosphère, à la surface et dans le sous-sol de la Terre. L'eau poursuit un périple perpétuel entre le ciel et la terre, en plusieurs étapes :

1.2.1 L'évaporation

L'évaporation est la transition de phase sous laquelle l'eau liquide se transforme en vapeur dans l'atmosphère. Les océans, les mers, les lacs et les rivières fournissent approximativement 90 % de l'humidité dans notre atmosphère par l'évaporation.

Chauffé par le soleil l'eau de ces derniers va s'évaporer et monter dans l'atmosphère. En effet, les grandes surfaces des océans (plus de 70% de la Terre est recouverte par les océans) permet l'évaporation à grande échelle, les 10% restants proviennent de la transpiration végétale.

La chaleur (énergie), fournie par le soleil, est nécessaire à l'évaporation. L'énergie est utilisée pour détacher les molécules de H_2O de l'eau liquide, ce qui provoque l'évaporation, qui est rapide aux températures élevée plus lente aux températures moins élevées.

Cependant, quand l'humidité relative de l'air est de 100% (un état de saturation), l'évaporation ne peut se réaliser. En outre, l'évaporation diminue la chaleur de l'environnement. Il est bon de préciser que sur l'échelle globale, la quantité d'eau qui s'évapore est identique à la quantité d'eau qui condense, bien que cela varie géographiquement. Seul 10% d'eau évaporée des océans est transportée au-dessus des terres et retombe comme précipitations.

Une fois évaporée, une molécule d'eau passe en moyenne environ 10 jours dans l'air.

1.2.2 La condensation

La condensation est la transition de phase de la vapeur en eau liquide. Elle est importante pour le cycle de l'eau dans l'atmosphère et sur la terre.

Au contact des couches d'air froid de l'atmosphère, la vapeur d'eau se condense en minuscules gouttelettes, qui forment des nuages, qui à leur tour, provoquent la précipitation.

Dans un ciel bleu dégagé, l'eau est présente sous forme de vapeur. Quand la densité de la vapeur atteint (ou dépasse) la densité de la vapeur saturée, les molécules d'eau se lient avec de fines particules de poussière, de sel et de fumée pour former des gouttelettes de pluie, lesquelles forment les nuages. Etant donné que les gouttelettes de pluie s'accumulent et grossissent par condensation de vapeur sur elles et par coagulation (agrégation) entre elles, la précipitation peut se produire.

Les nuages se forment dans l'atmosphère parce que l'air qui contient la vapeur s'élève et refroidissent. Par exemple, lorsque le soleil réchauffe l'air dans le voisinage de la surface de la terre, l'air devient plus léger et s'élève vers le haut où la température est plus froide; comme les températures baissent et par conséquent la densité de la vapeur saturée baisse, la condensation de la vapeur se produit et les nuages peuvent se former.

1.2.3 Les précipitations

La précipitation est le déplacement vers la terre de l'eau des nuages sous forme de pluie, neige fondante, neige ou grêle. C'est le principal chemin par lequel l'eau de l'atmosphère retourne à la terre.

Parmi les précipitations, celle sous forme de pluie constitue une partie dominante. Pour provoquer la précipitation, il faut d'abord que de fines gouttelettes deviennent assez grosses et lourdes pour qu'elles tombent du nuage comme précipitation. Pour produire une seule goutte de pluie, il faut des millions de gouttelettes.

1.2.4 La captation et l'infiltration

La plus grande partie de l'eau ruisselle sur le sol et retourne vers la mer.

Mais pendant ce ruissellement, une partie de l'eau retourne à l'atmosphère par évaporation.

L'eau qui tombe sur la terre sous forme de neige et ne fond pas rapidement s'accumule sous forme de glace sur le sol et alimente les glaciers en altitude et dans les zones polaires.

D'autre part, une quantité considérable d'eau de pluie "ou de neige fondue" s'infiltre ou pénètre dans le sol.

Une partie de cette eau est captée par les racines des arbres et des plantes ; le reste continue à s'écouler plus profondément dans le sol.

1.3 La circulation de l'eau

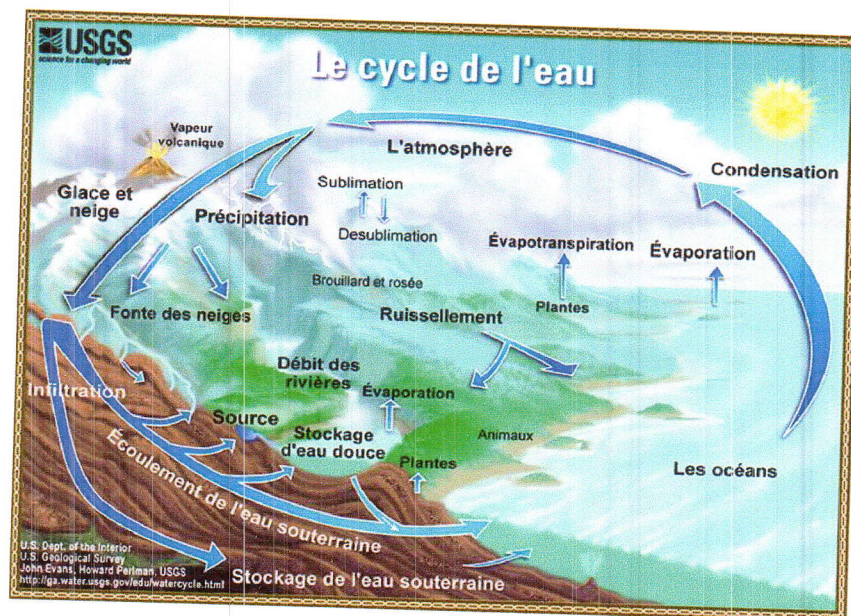


Figure3. Le cycle de l'eau

Le cycle global de l'eau peut être considéré comme un système fermé. L'eau change d'état mais sa quantité globale reste inchangée. Le cycle de l'eau peut être décrit comme suit :

Le soleil réchauffe l'eau des océans ; celle-ci s'évapore dans l'air. Les courants d'air ascendants entraînent la vapeur dans l'atmosphère supérieure, où les températures plus basses provoquent la condensation de la vapeur et donc la formation de nuages. Les courants d'air peuvent entraîner les nuages autour de la terre. Les gouttelettes de nuage se coagulent et se fragmentent, s'amoncellent et retombent en tant que précipitation.

Généralement l'eau des précipitations retourne aux océans directement ou après avoir écoulé sur la surface où dans l'écoulement souterrain. Une partie qui s'infiltre dans le sol, peut retourner vers la surface comme résurgence d'eau souterraine.

Certaines nappes souterraines trouvent une ouverture dans le sol et émergent comme des sources d'eau douce.

L'eau souterraine peu profonde peut être absorbée par les racines des plantes et rejetée dans l'atmosphère via la transpiration des feuilles.

1.4 Les régions désertiques

On estime que les "déserts" couvrent environ un septième de la surface de la terre. Si on y inclut les zones ayant une précipitation assez modeste et une végétation assez rarifiée, on peut estimer que les régions désertiques couvrent 35% de la surface terrestre, par exemple les déserts en Algérie couvrent environ 80% du territoire nationale.

De la carte du monde, on peut apprendre que une bonne partie de déserts, dits déserts subtropicaux, se trouve entre la latitude 15 et 30.

Les régions de désert reçoivent une précipitation annuelle moyenne de moins de 250 millimètres. Le climat des régions désertiques est caractérisé par l'humidité très faible de l'air ainsi que du sol. Ce climat est, dans la majeure partie des cas, secs et très chauds. Pour le contenu de ce chapitre, nous avons consulté [15],[14]

Chapitre 2

Position du problème

Nous proposons un modèle mathématique de la circulation de l'eau dans les régions désertiques. Le système d'équations de ce mouvement relatif à notre modèle est composé de l'équation de la variation de la quantité de vapeur, celle de la variation de la quantité de l'eau liquide et celle de la variation de la température.

2.1 Domaine

Nous considérons une région D de la zone désertique ou d'une zone menacée par la désertification. Pour la commodité du raisonnement mathématique nous supposons que $D \subset \mathbb{R}^2$ et que D est un ensemble ouvert et borné de $\mathbb{R}^2$.

Nous considérons un domaine de dimension 3.

$$A = \{x \in \mathbb{R}^3 / (x_1, x_2) \in D, 0 < x_3 < H\},$$

(2.1.1)

où $\{x_3 = 0\}$ correspond à la surface de la terre (en négligeant la différence des niveaux de la surface du terrain) et H devrait correspondre à la hauteur de l'atmosphère que nous voulons considérer.

Nous considérons également le domaine

$$B = \{x \in \mathbb{R}^3 / (x_1, x_2) \in D, -\varepsilon < x_3 < 0\}.$$

(2.1.2)

Pour que notre modélisation puisse représenter de manière efficace les phénomènes physiques, la région D doit être suffisamment large de sorte que l'air se trouvant dans le domaine A reste dans A pour une

durée permettant le processus d'évaporation et de condensation de H_2O .

2.2 Quantités physiques à considérer

Dans ce model nous considérons la quantité de la vapeur $q(t)$ contenue dans l'air se trouvant dans A à l'instant t et la quantité de l'eau liquide $u(t)$ se trouvant dans $A \cup B$ à l'instant t , ainsi que la température de l'air $T(t)$.

La plupart de l'eau liquide dans $A \cup B$, en général, se trouve dans B ; l'eau liquide se trouve dans A est dans la forme de gouttelettes de nuages ou en cours de la précipitation (pluie ou neige) dans le déplacement, en général, vers la surface de la terre, l'eau liquide dans la forme de gouttelettes se trouvant dans l'air peut s'évaporer très rapidement dans le cas où l'humidité de l'air est inférieure à celle de saturation, tandis que l'eau liquide se trouvant dans B s'évapore plus lentement.

Mais la description séparée de l'évaporation des deux cas rendra assez complexe le système d'équations. En outre en général la quantité de l'eau liquide dans A est beaucoup plus petite que celle dans B .

Pour cette raison dans notre modèle nous considérons la quantité de l'eau liquide totale dans $A \cup B$, sans distinguer celle se trouvant dans A et celle se trouvant dans B .

Quant à la vapeur d'eau, nous pouvons supposer que la quantité de l'eau se trouvant dans B est négligeable.

Le paramètre essentiel pour l'évaporation / condensation de l'eau est la température T .

Elle varie sensiblement par rapport aux lieux x et au temps t , donc en fonction de x et de t , c'est à dire $T = T(x, t)$

Toutefois dans notre modèle où nous considérons la quantité totale $q(t)$ de la vapeur dans A nous préférons considérer la température représentative $T(t)$ qui dépend seulement de t .

En résumant les considérations faites ci-dessus, nous listons les quantités physiques que nous devons considérer dans notre analyse mathématique :

$q(t)$: quantité de la vapeur dans A .

$u(t)$: quantité de l'eau dans $A \cup B$.

$T(t)$: la température.

Nous considérons que la variation de ces quantités est déterminée par les facteurs suivants :

h_0 : entrée de la vapeur des autres régions par le vent.

$-h_1 q(t)$: dispersion (vers les autres régions) de la vapeur par le vent (sortie de A).

$-\gamma u(t)$: filtration vers le sous-terrain.

$\bar{q}_{vs}(T)$: quantité de la vapeur saturée.

$R_s(t)$: la radiation solaire.

$\bar{\sigma} T^4$: la radiation de l'air (selon la loi de Stefan Boltzmann).

2.3 Interprétation physique

D'abord, on sait que la variation de la quantité de la vapeur dans l'air dépend de la condensation et de l'évaporation de H_2O .

En effet, lorsque la "densité" de la vapeur $q(t)$ dépasse la densité de saturation $\bar{q}_{vs}(T)$ il y a la condensation. La quantité de H_2O qui se condense (en unité de temps) est, dans une bonne approximation, proportionnelle à $q - \bar{q}_{vs}(T)$.

Donc, en désignant cette proportionnalité par β , cette quantité peut être exprimée par $\beta[q - \bar{q}_{vs}(T)]^+$.

Lorsque la densité de saturation $\bar{q}_{vs}(T)$ dépasse la "densité" de la vapeur $q(t)$ il y a l'évaporation de l'eau. La quantité de H_2O qui s'évapore (en unité de temps et en unité de l'eau liquide présente) est, dans une bonne approximation, proportionnelle à $[q - \bar{q}_{vs}(T)]^-$.

Donc, en désignant cette proportionnalité par α , cette quantité peut être exprimée par $\alpha[q - \bar{q}_{vs}(T)]^-$.

D'autre part, comme notre région exposée à des facteurs externes, la quantité de la vapeur et la quantité de l'eau se changent.

Par exemple, le vent disperse une quantité de la vapeur aux autres régions, qui peut être exprimée par $h_1 q(t)$, et ramène une autre quantité des autres régions noté h_0 .

De plus, la filtration vers le souterrain $\gamma u(t)$ influe sur le changement de la quantité de l'eau sur la surface.

De plus, comme les nuages sont l'obstacle au réchauffement par la radiation, donc la présence des nuages diminue l'effet thermique de la radiation solaire $R_s(t)$.

D'autre part, l'intensité de la radiation du "corps noir" est définie selon la loi de Planck, par :

$$B[\lambda, T] = \frac{2\pi c^2 h}{\lambda^5} (e^{\frac{ch}{\lambda T}} - 1)^{-1}.$$

Cette fonction B est appelée la fonction de Planck, où λ est la longueur d'onde.

Or, pour l'effet thermique sur l'air, ce qui intervient est la somme de $B[\lambda, T]$ par rapport à λ , c'est-à-dire

$$\int_0^\infty B[\lambda, T] d\lambda = \sigma T^4,$$

qui est connue comme "**la loi de Stefan Boltzmann**";

avec σ est dite la constante de Stefan Boltzmann.

Nous allons maintenant considérer le système d'équations pour la quantité de la vapeur $q(t)$, celle de l'eau liquide $u(t)$ et celle de la température $T(t)$.

$$\begin{cases} \frac{dq(t)}{dt} = -\beta[q(t) - \bar{q}_{vs}(T)]^+ + \alpha[q(t) - \bar{q}_{vs}(T)]^- u(t) + h_0 - h_1 q(t), \\ \frac{du(t)}{dt} = \beta[q(t) - \bar{q}_{vs}(T)]^+ - \alpha[q(t) - \bar{q}_{vs}(T)]^- u(t) - \gamma u(t), \\ \frac{dT}{dt} = R_s(t) \exp(-\varepsilon_1[q(t) - \bar{q}_{vs}(T)]^+) - \bar{\sigma} T^4 \exp(-\varepsilon_2[q(t) - \bar{q}_{vs}(T)]^+); \end{cases} \quad (2.3.1)$$

Ce système d'équations doit être envisagé avec les conditions initiales

$$q(0) = q_0 > 0, u(0) = u_0 > 0, T(0) = T_0 > 0. \quad (2.3.2)$$

Dans (2.3.1),

$[\cdot]^+$ désigne la partie positive, c'est-à-dire : $[x]^+ = \max(x, 0)$,

$[\cdot]^-$ désigne la partie négative, c'est-à-dire : $[x]^- = \max(-x, 0)$.

■



Chapitre 3

Etude de la solution locale

Nous allons considérer le système d'équations différentielles ordinaires que nous avons introduit dans le chapitre précédent, c'est-à-dire le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dq(t)}{dt} = -\beta[q(t) - \bar{q}_{vs}(T)]^+ + \alpha[q(t) - \bar{q}_{vs}(T)]^- u(t) + h_0 - h_1 q(t), \\ \quad \equiv F(q, u, T), \\ \frac{du(t)}{dt} = \beta[q(t) - \bar{q}_{vs}(T)]^+ - \alpha[q(t) - \bar{q}_{vs}(T)]^- u(t) - \gamma u(t), \\ \quad \equiv G(q, u, T), \\ \frac{dT(t)}{dt} = R_s(t) \exp(-\varepsilon_1[q(t) - \bar{q}_{vs}(T)]^+) - \bar{\sigma} T^4 \exp(-\varepsilon_2[q(t) - \bar{q}_{vs}(T)]^+), \\ \quad \equiv H(q, u, T), \end{array} \right. \quad (3.0.1)$$

avec les conditions initiales

$$q(0) = q_0 > 0, \quad u(0) = u_0 > 0, \quad T(0) = T_0 > 0. \quad (3.0.2)$$

Dans ce chapitre on va démontrer l'existence et l'unicité de la solution du système d'équations (3.0.1) avec les conditions (3.0.2).

Commençons par le lemme suivant :

Lemme 3.0.1. *Les fonctions F , G et H définies dans (3.0.1) vérifient localement la condition de Lipschitz, c'est-à-dire :*

Pour tout $M > 0$, il existe une constante L_M telle que :

$$|F(q_1, u_1, T_1) - F(q_2, u_2, T_2)| + |G(q_1, u_1, T_1) - G(q_2, u_2, T_2)| + |H(q_1, u_1, T_1) - H(q_2, u_2, T_2)| \\ \leq L_M(|q_1 - q_2| + |u_1 - u_2| + |T_1 - T_2|).$$

pour $|q_1|, |q_2|, |u_1|, |u_2|, |T_1|, |T_2| \leq M$.

Preuve .

Remarquons que F , G et H sont continues et leurs dérivées localement bornées dans $\mathbb{R}^3 \setminus A$, où $A = \{(q, u, T) \in \mathbb{R}^3 \mid q = \bar{q}_{vs}(T)\}$. On voit aisément que A est une surface régulière dans $\mathbb{R}^3$. On a :

$$\begin{aligned} & \bullet |F(q_1, u_1, T_1) - F(q_2, u_2, T_2)| \\ &= |-\beta[q_1 - \bar{q}_{vs}]^+ + \alpha[q_1 - \bar{q}_{vs}]^- u_1 + h_0(t) - h_1 q_1(t) + \beta[q_2 - \bar{q}_{vs}]^+ - \alpha[q_2 - \bar{q}_{vs}]^- u_2 - h_0(t) + h_1 q_2(t)| \\ &\leq \sup_{|q| \leq M, |u| \leq M, |T| \leq M} \left(\left| \frac{\partial F}{\partial q} \right| + \left| \frac{\partial F}{\partial u} \right| + \left| \frac{\partial F}{\partial T} \right| \right) (|q_1 - q_2| + |u_1 - u_2| + |T_1 - T_2|) \\ &\leq C_f (|q_1 - q_2| + |u_1 - u_2| + |T_1 - T_2|). \end{aligned} \tag{3.0.3}$$

$$\begin{aligned} & \bullet |G(q_1, u_1, T_1) - G(q_2, u_2, T_2)| \\ &= |\beta[q_1 - \bar{q}_{vs}]^+ - \alpha[q_1 - \bar{q}_{vs}]^- u_1 - \gamma u_1(t) - \beta[q_2 - \bar{q}_{vs}]^+ + \alpha[q_2 - \bar{q}_{vs}]^- u_2 + \gamma u_2(t)| \\ &\leq \sup_{|q| \leq M, |u| \leq M, |T| \leq M} \left(\left| \frac{\partial G}{\partial q} \right| + \left| \frac{\partial G}{\partial u} \right| + \left| \frac{\partial G}{\partial T} \right| \right) (|q_1 - q_2| + |u_1 - u_2| + |T_1 - T_2|) \\ &\leq C_g (|q_1 - q_2| + |u_1 - u_2| + |T_1 - T_2|). \end{aligned} \tag{3.0.4}$$

$$\begin{aligned} & \bullet |H(q_1, u_1, T_1) - H(q_2, u_2, T_2)| \\ &= |\exp(-\varepsilon_1[q_1 - \bar{q}_{vs}]^+) R_s(t) - \bar{\sigma} \exp(-\varepsilon_2[q_1 - \bar{q}_{vs}]^+) T_1^4 - \exp(-\varepsilon_1[q_2 - \bar{q}_{vs}]^+) R_s(t) \\ &\quad + \bar{\sigma} \exp(-\varepsilon_2[q_2 - \bar{q}_{vs}]^+) T_2^4| \\ &\leq \sup_{|q| \leq M, |u| \leq M, |T| \leq M} \left(\left| \frac{\partial H}{\partial q} \right| + \left| \frac{\partial H}{\partial u} \right| + \left| \frac{\partial H}{\partial T} \right| \right) (|q_1 - q_2| + |u_1 - u_2| + |T_1 - T_2|) \\ &\leq C_h (|q_1 - q_2| + |u_1 - u_2| + |T_1 - T_2|). \end{aligned} \tag{3.0.5}$$

ou C_f, C_g, C_h sont des constantes qui ne dépendent pas de $q_1, q_2, u_1, u_2, T_1, T_2$ mais dépendent de M .

Il en résulte que les fonctions sont localement lypchitziennes dans $\mathbb{R}^3$, y compris dans le voisinage de A .

En effet, F , G et H sont continues et leurs dérivées sont localement bornées ; en outre A est une surface régulière.

Le lemme est démontré. ■

Pour obtenir l'existence et l'unicité de la solution locale pour notre problème, nous citons le théorème de Cauchy-Lipschitz

Théorème 3.0.1. (de Cauchy-Lipschitz)

Si $f : (t, x) \in I \times \Omega \rightarrow f(t, x) \in \mathbb{R}^n$ est continue et est localement lipchitzienne en x uniformément en t , et si (t_0, x_0) est un point intérieur à $I \times \Omega$, alors il existe $\lambda > 0$ et $\mu > 0$ tel que le problème de Cauchy (3.0.1) ait une solution maximale unique dans $[t_0 - \lambda, t_0 + \mu]$ pour les conditions initiales (3.0.2)

Preuve.(voir[2]) ■

Proposition 3.0.1. *Le système d'équations (3.0.1) avec les conditions initiales (3.0.2) admet une unique solution locale.*

Preuve.

On conclut du théorème de Cauchy lipschitz et le lemme 3.0.1 qu'il existe une unique solution locale du problème (3.0.1) avec les conditions initiales (3.0.2). ■



Reste à démontrer que $q(t)$ et $u(t)$ sont positives.

On suppose maintenant qu'il existe un $t_1' > 0$ tel que :

$$\min(q(t_1'), u(t_1')) \leq 0 \quad (4.0.1)$$

Or, $q(t)$ et $u(t)$ sont par hypothèse la solution des équations différentielles ordinaires et donc elles sont continues.

Donc, pour que (4.0.1) soit réalisée, il faut qu'il y ait un des trois cas cités ci-dessous :

(a) Il existe $t_1 > 0$ tel que : $q(t_1) = 0$,

$$q(t) > 0 \text{ pour } 0 < t < t_1$$

$$u(t) > 0 \text{ pour } 0 < t \leq t_1$$

(b) Il existe $t_1 > 0$ tel que : $u(t_1) = 0$,

$$u(t) > 0 \text{ pour } 0 < t < t_1$$

$$q(t) > 0 \text{ pour } 0 < t \leq t_1$$

(c) Il existe $t_1 > 0$ tel que : $q(t_1) = u(t_1) = 0$,

$$u(t) > 0 \text{ pour } 0 < t < t_1$$

$$q(t) > 0 \text{ pour } 0 < t < t_1$$

On va montrer que chaque hypothèse nous amène à une **contradiction**.

– Supposons d'abord la condition (a). Pour la continuité de $q(t)$, il existe un t_0 , $0 < t_0 < t_1$, tel que

$$q(t_0) = c_0 = \inf_{t \in [t_0, t_1]} \bar{q}_{vs}(T(t)) \text{ et } 0 < q(t) < c_0, \text{ pour } t_0 \leq t < t_1$$

Dans cet intervalle $[t_0, t_1]$ la fonction $q(t)$ vérifie la relation suivante :

$$\begin{aligned} \frac{dq(t)}{dt} &= \alpha[q(t) - \bar{q}_{vs}(T)]^- u(t) + h_0 - h_1 q(t). \\ &\geq h_0 - h_1 q(t). \\ &\geq -h_1 q(t). \end{aligned}$$

Donc d'après le théorème de comparaison pour les équations différentielles ordinaires (4.0.2) on a :

$$q(t) \geq q(t_0) \exp(-h_1(t - t_0)) > 0 \text{ pour } t \geq t_0;$$

Proposition 4.0.2. *Sous les mêmes hypothèses du théorème 4.0.3 on a*

$$q(t) \geq \min\left(\frac{h_0}{\beta + h_1}, q(0)\right), \forall t \geq 0.$$

$$T(t) \geq \min\left(\left(\frac{\inf_t(c_1 R_s(t))}{\bar{\sigma}}\right)^{1/4}, T(0)\right), \forall t \geq 0.$$

preuve.

1). Pour la borne inférieure de $q(t)$, on a

$$-\beta[q(t) - \bar{q}_{vs}(T)]^+ \geq -\beta q(t),$$

$$-h_1 q(t) = -h_1 q(t).$$

En faisant la somme, on obtient l'inégalité suivante

$$-\beta[q(t) - \bar{q}_{vs}(T)]^+ - h_1 q(t) \geq -(\beta + h_1)q(t).$$

Si $q(t) \leq \frac{h_0(1-\varepsilon)}{\beta + h_1}$ avec $0 < \varepsilon < 1$, on aurait :

$$\begin{aligned} \frac{dq(t)}{dt} &\geq -(\beta + h_1)q(t) + h_0 + \alpha[q(t) - \bar{q}_{vs}(T)]^- u(t). \\ &\geq -(1-\varepsilon)h_0 + h_0 + \alpha[q(t) - \bar{q}_{vs}(T)]^- u(t). \\ &\geq \varepsilon h_0 + \alpha[q(t) - \bar{q}_{vs}(T)]^- u(t). \\ &\geq \varepsilon h_0 > 0 \end{aligned}$$

Ce qui prouve que : $q(t) \geq \frac{(1-\varepsilon)h_0}{\beta + h_1}$.

En faisant tendre ε vers 0, on obtient

$$q(t) \geq \min\left(\frac{h_0}{\beta + h_1}, q(0)\right).$$

2). Pour la borne inférieure de $T(t)$, en vertu de (4.0.3), on a :

$$0 < \exp(-\varepsilon_1 \max(Z(0), \frac{h_0}{\lambda})) \leq \exp(-\varepsilon_1 [q(t) - \bar{q}_{vs}(T)]^+) \leq 1.$$

On pose : $c_1 = \exp(-\varepsilon_1 \max(Z(0), \frac{h_0}{\lambda}))$. Alors, on a :

$$0 < c_1 \leq \exp(-\varepsilon_1 [q(t) - \bar{q}_{vs}(T)]^+) \leq 1$$

En utilisant cette inégalité, on déduit de (4.0.4) que :

$$\frac{dT(t)}{dt} \geq c_1 R_s(t) - \bar{\sigma} T^4.$$

Pour obtenir une borne inférieure de $T(t)$ à partir de cette inégalité, on considère l'équation pour $\tilde{T}(t)$:

$$\frac{d\tilde{T}(t)}{dt} = c_1 R_s(t) - \bar{\sigma} \tilde{T}^4.$$

avec la condition initiale

$$\tilde{T}(0) = T(0) = T_0.$$

D'après le théorème de comparaison 4.0.2 on aura $T(t) \geq \tilde{T}(t)$.

D'autre part, on a

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \tilde{T}(t) \geq \left(\frac{\inf_t (c_1 R_s(t))}{\bar{\sigma}} \right)^{1/4}.$$

On en déduit que

$$T(t) \geq \tilde{T}(t) \geq \min \left(T_0, \left(\frac{\inf_t (c_1 R_s(t))}{\bar{\sigma}} \right)^{1/4} \right) < \infty.$$

La proposition est démontrée. ■

Remarque.

Pour $u(t)$ jusqu'à maintenant on ne peut pas trouver une borne inférieure pour la quantité d'eau parce que notre problème concerne le désert, on laisse ça pour le chapitre suivant.

Théorème 4.0.4. Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, et $f : I \times \mathbb{K}^N \rightarrow \mathbb{K}^N$ une application continue et localement Lipschitzienne par rapport à x . Pour $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{K}^N$, soit y la solution maximale du problème de Cauchy suivant,

$$\begin{cases} y' &= f(t, y), \\ y(t_0) &= y_0. \end{cases}$$

Si y est bornée, alors y est une solution globale.

Preuve. (Voir [6]) ■

Maintenant nous sommes en mesure d'affirmer l'existence et l'unicité de la solution $(q(t), u(t), T(t))$ du système d'équation (3.0.1).

Théorème 4.0.5. Le système d'équation (3.0.1) avec la condition initiale $q(0) > 0, u(0) > 0, T(0) > 0$ admet une solution $(q(t), u(t), T(t))$ et une seule sur l'intervalle $[0, +\infty[$ et on a :

$$q(t) > 0, u(t) > 0, T(t) > 0 \quad \forall t \geq 0.$$

$$q(t) \leq C_q < \infty, u(t) \leq C_u < \infty, T(t) \leq C_T < \infty, \quad \forall t \geq 0.$$

(C_q, C_u, C_T : constantes).

Preuve.

Le théorème résulte des théorèmes 4.0.3, 3.0.1, 4.0.2, 4.0.4 et lemme 3.0.1.

■

Chapitre 5

le comportement asymptotique de la solution

5.1 cas des régions arides.

Dans cette partie on va s'intéresser à la solution périodique et au comportement asymptotique de la solution .

Etudions d'abord le cas d'une désertification totale. Si h_0 est relativement petit et $u(t) = 0$, alors il n'est pas difficile de trouver la solution périodique $(q(t), T(t))$. Commençons par le lemme suivant :

Lemme 5.1.1. Si $h_0 < h_1 \bar{q}_{vs} \left(\left(\frac{\inf_t R_s(t)}{\bar{\sigma}} \right)^{1/4} \right)$, alors la solution du système d'équation (3.0.1) avec les conditions initiales :

$$\begin{aligned} q(0) &= \frac{h_0}{h_1}, \\ T(0) &\geq \left(\frac{\inf_t R_s(t)}{\bar{\sigma}} \right)^{1/4}, \\ u(0) &= 0, \end{aligned}$$

vérifie les relations suivantes :

$$\begin{aligned} q(t) &= q(0) = \frac{h_0}{h_1}, \quad \forall t \geq 0, \\ T(t) &\geq \left(\frac{\inf R_s(\cdot)}{\bar{\sigma}} \right)^{1/4}, \quad \forall t \geq 0, \\ u(t) &= 0, \quad \forall t \geq 0. \end{aligned}$$

Preuve.

On remarque que, si $q(t) \leq \bar{q}_{vs}(T(t))$ alors $[q(t) - \bar{q}_{vs}(T(t))]^+ = 0$.

Donc, si $q(t) \leq \bar{q}_{vs}(T(t))$ et $u(t) = 0$, alors l'équation de la vapeur d'eau $q(t)$ devient : $\frac{dq(t)}{dt} = h_0 - h_1 q(t)$. Alors, si $q(t) \leq \bar{q}_{vs}(T(t))$ et $u(t) = 0$, alors $q(t) = \frac{h_0}{h_1}$ (comme solution du problème de Cauchy).

On rappelle que $\bar{q}_{vs}(\cdot)$ est une fonction croissante. On a donc,

$$\frac{h_0}{h_1} < \bar{q}_{vs} \left(\left(\frac{\inf R_s(\cdot)}{\bar{\sigma}} \right)^{1/4} \right) \leq \bar{q}_{vs}(T(0)),$$

où la première inégalité est due à l'hypothèse du lemme, tandis que la deuxième est due à la croissance de la fonction $\bar{q}_{vs}(\cdot)$.

On en déduit qu'il existe un $t_0 > 0$ tel que

$$q(t) \leq \min \left(\bar{q}_{vs} \left(\left(\frac{\inf R_s(t)}{\bar{\sigma}} \right)^{1/4} \right), \quad \forall t \in [0, t_0]. \right.$$

On remarque que dans l'intervalle $[0, t_0]$ l'équation de la quantité d'eau $u(t)$ se réduit à :

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = -\alpha[q(t) - \bar{q}_{vs}(T(t))]^- u(t) - \gamma u(t), \\ u(0) = 0. \end{cases} \quad (5.1.1)$$

Il en résulte que $u(t) = 0$ sera la solution de (5.1.1), dans $[0, t_0]$.

Par conséquent dans $[0, t_0]$ l'équation de la vapeur d'eau $q(t)$ devient :

$$\begin{cases} \frac{dq(t)}{dt} = h_0 - h_1 q(t), \\ q(0) = \frac{h_0}{h_1}; \end{cases} \quad (5.1.2)$$

donc $q(t) = \frac{h_0}{h_1}$ sera la solution de (5.1.2), dans $[0, t_0]$.

Comme $[q(t) - \bar{q}_{vs}(T(t))]^+ = 0$ dans $[0, t_0]$, l'équation de $T(t)$ devient : $\frac{dT(t)}{dt} = R_s(t) - \bar{\sigma} T^4(t)$, ce qui implique d'après le théorème de comparaison 4.0.2 que l'on aura

$$T(t) \geq \left(\frac{\inf R_s(\cdot)}{\bar{\sigma}} \right)^{1/4}, \quad \forall t \in [0, t_0].$$

Cette dernière relation implique entre autres que $t_0 > 0$ peut être choisi indépendamment de la solution $(q(t), T(t))$. De ces considérations on obtient :

$$q(t_0) = \frac{h_0}{h_1}, \quad u(t_0) = 0, \quad T(t_0) \geq \left(\frac{\inf R_s(\cdot)}{\bar{\sigma}} \right)^{1/4}.$$

En repartant de $t = t_0$, par le même raisonnement on peut démontrer que :

$$q(t) = \frac{h_0}{h_1}, \quad \forall t \in [t_0, 2t_0],$$

$$u(t) = 0, \quad \forall t \in [t_0, 2t_0],$$

$$T(t) \geq \left(\frac{\inf_t R_s(\cdot)}{\bar{\sigma}} \right)^{1/4}, \quad \forall t \in [t_0, 2t_0].$$

et d'une manière analogue on peut répéter la même procédure de sorte que l'on peut avoir les résultats précédents jusqu'à l'infini. ■

Lemme 5.1.2. Soit G l'opérateur défini par $G(T_0) = T(2\pi)$ avec la solution $T(t)$ du problème de Cauchy (3.0.1)-(3.0.2). Soient

$$T_0^* = \left(\frac{\inf_t (c_1 R_s(t))}{\bar{\sigma}} \right)^{1/4},$$

$$T_1^* = \left(\frac{\sup_t R_s(t)}{c_2 \bar{\sigma}} \right)^{1/4}.$$

avec $c_1 = \exp(-\varepsilon_1 \max(Z(0), \frac{h_0}{\lambda}))$ et $c_2 = \exp(-\varepsilon_2 \max(Z(0), \frac{h_0}{\lambda}))$.

Si

$$T_0^* \leq T_0 \leq T_1^*$$

alors

$$T_0^* \leq G(T_0) \leq T_1^*.$$

preuve.

Comme nous avons déjà vu dans le chapitre précédent pour la borne inférieure de l'équation de la température, on a :

$$\frac{dT(t)}{dt} \geq c_1 R_s(t) - \bar{\sigma} T^4(t) \geq \inf_t (c_1 R_s(t)) - \bar{\sigma} T^4(t)$$

Considérons le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{T}(t)}{dt} = c_1 R_s(t) - \bar{\sigma} \tilde{T}^4(t), \\ \tilde{T}(0) = T(0) = T_0. \end{cases}$$

Compte tenu de la condition $T_0 \geq T_0^*$, on déduit que

$$\tilde{T}(t) \geq \left(\frac{\inf_t(c_1 R_s(t))}{\bar{\sigma}} \right)^{1/4}.$$

D'autre part, d'après le théorème de comparaison 4.0.2, on a $T(t) \geq \tilde{T}(t)$.

De ces relations on obtient,

$$T(t) \geq \left(\frac{\inf_t(c_1 R_s(t))}{\bar{\sigma}} \right)^{1/4}.$$

D'où

$$T(t) \geq T_0^*, \quad \forall t \geq 0.$$

En particulier,

$$T(2\pi) \geq T_0^*;$$

et donc on a

$$G(T_0) \geq T_0^*.$$

On raisonne d'une manière analogue pour la deuxième inégalité.

En effet, comme nous avons déjà vu dans le chapitre précédent pour la borne supérieure de l'équation de la température, on a :

$$\frac{dT(t)}{dt} \leq R_s(t) - c_2 \bar{\sigma} T^4(t) \leq \sup_t R_s(t) - c_2 \bar{\sigma} T^4(t)$$

Considérons le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{T}(t)}{dt} = R_s(t) - c_2 \bar{\sigma} \tilde{T}^4(t), \\ \tilde{T}(0) = T(0) = T_0. \end{cases}$$

Comme $T_0 \leq \left(\frac{\sup_t R_s(t)}{c_2 \bar{\sigma}} \right)^{1/4}$, on en déduit que

$$\tilde{T}(t) \geq \left(\frac{\sup_t R_s(t)}{c_2 \bar{\sigma}} \right)^{1/4}.$$

D'après le théorème de comparaison 4.0.2, on a $T(t) \leq \tilde{T}(t)$,
on a donc,

$$T(t) \leq \left(\frac{\sup_t R_s(t)}{c_2 \bar{\sigma}} \right)^{1/4}.$$

D'où

$$T(t) \leq T_1^*, \quad \forall t \geq 0.$$

En particulier,

$$T(2\pi) \leq T_0^*,$$

et par définition on aura

$$G(T_0) \leq T_1^*.$$

On conclut que ,

$$T_0^* \leq G(T_0) \leq T_1^*.$$

Le lemme 5.1.2 est démontré. ■

Théorème 5.1.1. *Si l'opérateur G est continu sur $[T_0^*, T_1^*]$, alors il existe $T^{**} \in [T_0^*, T_1^*]$ tel que :*

$$G(T^{**}) = T^{**}.$$

preuve.

C'est un théorème classique d'analyse mathématique. ■

Passons à l'existence et l'unicité de la solution périodique pour les deux équations de la vapeur d'eau et de la température,

Proposition 5.1.1. *Il existe une seule solution périodique $(q(t), T(t))$ et une seule des deux équations :*

$$\frac{dq(t)}{dt} = h_0 - h_1 q(t). \quad (5.1.3)$$

$$\frac{dT(t)}{dt} = R_s(t) - \bar{\sigma} T^4(t). \quad (5.1.4)$$

Preuve.

l'existence de la solution périodique

- On voit immédiatement que $q(t) = \frac{h_0}{h_1}$ est une solution périodique de l'équation (5.1.3).

En effet, $q(t) = \frac{h_0}{h_1}$, est une constante et donc est également périodique;

en outre, $h_0 - h_1 \frac{h_0}{h_1} = 0$, ce qui prouve que la fonction $q(t) = \frac{h_0}{h_1}$ est une solution de (5.1.3).

- Pour trouver une solution périodique de (5.1.4), on considère le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \frac{dT(t)}{dt} = R_s(t) - \bar{\sigma} T^4(t) \\ T(0) = T_0 \end{cases} \quad (5.1.5)$$

On a d'après le lemme 5.1.2, qui est valable même si $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ et donc l'équation de $T(t)$ se réduit à (5.1.4), en utilisant la notation $G(\cdot)$ introduite dans le lemme 5.1.2, on a $G([T_0^*, T_1^*]) \subset [T_0^*, T_1^*]$ et la continuité de G est assurée. Donc d'après le théorème 5.1.1, il existe un élément $T^{**} \in [T_0^*, T_1^*]$ tel que, $G(T^{**}) = T^{**}$. Comme $G(T_0) = T(2\pi)$ et donc $T(0) = T(2\pi) = T^{**}$, la solution de l'équation (5.1.4) avec la condition initiale $T(0) = T^{**}$ nous donne une solution périodique.

l'unicité de la solution périodique

- Pour l'équation de la vapeur; $\frac{dq(t)}{dt} = h_0 - h_1 q(t)$.

Supposons qu'il existe deux solutions périodiques q_1, q_2 c'est à dire

$$\frac{dq_1(t)}{dt} = h_0 - h_1 q_1(t) \text{ et } \frac{dq_2(t)}{dt} = h_0 - h_1 q_2(t).$$

En faisant la soustraction des deux équations précédentes, on aura

$$\frac{d(q_1 - q_2)(t)}{dt} = -h_1 q_1(t) + h_1 q_2(t) = h_1 (q_2(t) - q_1(t)).$$

On pose :

$$q_1 - q_2 = Q(t),$$

on aura une équation différentielle ordinaire de la forme :

$$\frac{dQ(t)}{dt} = -h_1 Q(t).$$

Après avoir intégrer sur $[0, 2\pi]$ on aura $Q(2\pi) = Q(0)e^{-2\pi h_1}$.

Si $Q(0) \neq 0$, on a $Q(0) \neq Q(2\pi)$, c'est-à-dire $q_1(2\pi) - q_2(2\pi) \neq q_1(0) - q_2(0)$, ce qui implique qu'une des deux solutions $q_1(t)$ ou $q_2(t)$ n'est pas périodique. Donc la solution périodique est unique et on a $q(t) = q_1(t) = q_2(t)$.

- Passons maintenant à l'équation de la température et par le même raisonnement on va supposer

qu'il existe deux solutions périodiques différentes $T_1(t)$ et $T_2(t)$ qui vérifient $\frac{dT_1(t)}{dt} = R_s(t) - \bar{\sigma}T_1^4(t)$ et $\frac{dT_2(t)}{dt} = R_s(t) - \bar{\sigma}T_2^4(t)$.

Faisons la différence des deux équations, de sorte qu'on a,

$$\begin{aligned}\frac{d(T_1 - T_2)(t)}{dt} &= -\bar{\sigma}T_1^4 + \bar{\sigma}T_2^4 \\ &= \bar{\sigma}(T_2^4 - T_1^4) \\ &= \bar{\sigma}(T_2^2 - T_1^2)(T_2^2 + T_1^2) \\ &= \bar{\sigma}(T_2 - T_1)(T_2 + T_1)(T_2^2 + T_1^2)\end{aligned}$$

On suppose que $T_1 > T_2$

Alors on a

$$\frac{d(T_1 - T_2)(t)}{(T_2 - T_1)} = \bar{\sigma}[(T_2 + T_1)(T_2^2 + T_1^2)](t).$$

Si on l'intègre sur $[0, 2\pi]$, le deuxième membre de cette équation ne peut pas être égal à 0, ce qui implique qu'une des deux solutions ne doit pas être solution périodique, d'où on conclut que la solution périodique $T(t)$ est unique. ■

5.2 Etude de la convergence de la solution du problème de Cauchy.

Dans cette partie on va étudier la convergence de la solution de notre problème de Cauchy. Pour cela nous considérons deux cas cas où $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0$ et cas où $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) \neq 0$.

5.2.1 premier cas $u \rightarrow 0$:

Comme nous avons démontré précédemment, il existe une solution $(q(t), u(t), T(t))$ et une seule du problème de Cauchy. En outre, on a démontré l'existence et l'unicité de la solution périodique $(q(t), T(t))$

- On considère l'équation de la température,

$$\begin{aligned}\frac{dT(t)}{dt} &= \exp(-\varepsilon_1[q(t) - \bar{q}_{vs}(T)]^+) R_s(t) - \bar{\sigma} \exp(-\varepsilon_2[q(t) - \bar{q}_{vs}(T)]^+) T^4, \\ &= \exp(-\varepsilon_1[q(t) - \bar{q}_{vs}(T)]^+) (R_s(t) - \bar{\sigma} T^4(t)) + (\exp(-\varepsilon_1[q(t) - \bar{q}_{vs}(T)]^+) \\ &\quad - \exp(-\varepsilon_2[q(t) - \bar{q}_{vs}(T)]^+)) \bar{\sigma} T^4(t), \\ &\geq \exp(-\varepsilon_1[q(t) - \bar{q}_{vs}(T)]^+) (R_s(t) - \bar{\sigma} T^4(t)).\end{aligned}$$

d'où

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} T(t) \geq \left(\frac{\inf R_s(\cdot)}{\bar{\sigma}} \right)^{1/4}.$$

On en déduit qu'il existe $t'_\varepsilon > 0$ tel que : $[q(t) - \bar{q}_{vs}(T)]^+ \leq \varepsilon$, pour $\forall t \geq t'_\varepsilon$.

Par le même raisonnement on obtient

pour $\forall t \geq t'_\varepsilon$, on a

$$\frac{dq(t)}{dt} \geq -\beta\varepsilon + h_0 - h_1 q(t),$$

d'où on aura,

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} q(t) \geq \frac{h_0 - \beta\varepsilon}{h_1}.$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on a

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} q(t) \geq \frac{h_0}{h_1}$$

(5.2.2)

On conclut des deux inégalités précédentes (5.2.1) et (5.2.2) que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = \frac{h_0}{h_1}.$$

- Pour la température on a,

$\forall \varepsilon > 0, \exists t''_\varepsilon > 0$, tel que

$$q(t) \leq \frac{h_0}{h_1} + \varepsilon, \quad \forall t \geq t''_\varepsilon.$$

$$T(t) \geq \left(\frac{\inf R_s(\cdot)}{\bar{\sigma}} \right)^{1/4} - \varepsilon, \quad \forall t \geq t''_\varepsilon.$$

Donc pour $t \geq t''_\varepsilon$ on a

$$[q(t) - \bar{q}_{vs}(T)]^+ \leq f(\varepsilon), \quad \forall t \geq t''_\varepsilon,$$

où $f(\varepsilon)$ est une fonction, telle que $f(\varepsilon) \rightarrow 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Rappelons l'équation de la température $T(t)$,

$$\frac{dT(t)}{dt} = \exp(-\varepsilon_1[q(t) - \bar{q}_{vs}(T)]^+) R_s(t) - \bar{\sigma} \exp(-\varepsilon_2[q(t) - \bar{q}_{vs}(T)]^+) T^4 \equiv H.$$

On a :

$$H \leq R_s(t) - \bar{\sigma} \exp(-\varepsilon_2 f(\varepsilon)) T^4(t),$$

d'où ,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} T(t) \leq \left(\frac{\sup R_s(.)}{\bar{\sigma} \exp(-\varepsilon_2 f(\varepsilon))} \right)^{1/4}. \quad (5.2.3)$$

aussi on a

$$H \geq R_s(t) \exp(-\varepsilon_1 f(\varepsilon)) - \bar{\sigma} T^4(t),$$

d'où ,

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} T(t) \geq \left(\frac{\inf(R_s(.) \exp(-\varepsilon_1 f(\varepsilon)))}{\bar{\sigma}} \right)^{1/4}. \quad (5.2.4)$$

De ces deux inégalités (5.2.3) et (5.2.4), en faisant tendre ε vers 0, on peut déduire que :

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} T(t) \leq \left(\frac{\sup R_s(.)}{\bar{\sigma}} \right)^{1/4}.$$

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} T(t) \geq \left(\frac{\inf R_s(.)}{\bar{\sigma}} \right)^{1/4}.$$

Toutefois, dans cette démonstration de la proposition nous n'utiliserons pas cette estimations précises.

Sachant que T_p vérifie l'équation : $\frac{dT_p}{dt} = R_s(t) - \bar{\sigma} T_p^4$.

$$\begin{aligned} \frac{d(T - T_p)}{dt} &\leq \bar{\sigma}(T_p^4 - \exp(-\varepsilon_2 f(\varepsilon)) T^4), \\ &\leq \bar{\sigma}(1 - \exp(-\varepsilon_2 f(\varepsilon)) T_p^4 + \bar{\sigma} \exp(-\varepsilon_2 f(\varepsilon))(T_p^4 - T^4), \\ &\leq \bar{\sigma}(1 - \exp(-\varepsilon_2 f(\varepsilon))) T_p^4 - \bar{\sigma} \exp(-\varepsilon_2 f(\varepsilon))(T_p^2 + T^2)(T_p + T)(T - T_p), \\ &\leq A_\varepsilon - B(T - T_p). \end{aligned}$$

avec

$$A_\varepsilon = \bar{\sigma}(1 - \exp(-\varepsilon_2 f(\varepsilon))) T_p^4,$$

$$B = \bar{\sigma} \exp(-\varepsilon_2 f(\varepsilon))(T_p^2 + T^2)(T_p + T).$$

Il en résulte que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_t (T - T_p) \leq \frac{A_\varepsilon}{B}.$$

D'autre part, on voit que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{A_\varepsilon}{B} = 0.$$

Il en résulte que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup (T - T_p) \leq 0. \quad (5.2.5)$$

De manière analogue, on aura

$$\begin{aligned} \frac{d(T - T_p)}{dt} &\geq R_s(t)(\exp(-\varepsilon_1 f(\varepsilon)) - 1) - \bar{\sigma}(T^4 - T_p^4), \\ &\geq \inf_t R_s(t)(\exp(-\varepsilon_1 f(\varepsilon)) - 1) - \bar{\sigma}(T_p^2 + T^2)(T_p + T)(T - T_p), \\ &\geq C_\varepsilon - D(T - T_p). \end{aligned}$$

avec

$$C_\varepsilon = \inf_t R_s(t)(\exp(-\varepsilon_1 f(\varepsilon)) - 1),$$

$$D = \bar{\sigma}(T_p^2 + T^2)(T_p + T).$$

Il en résulte que,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \inf (T - T_p) \leq \frac{C_\varepsilon}{D}.$$

On voit en outre,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{C_\varepsilon}{D} = 0,$$

On en déduit que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \inf (T - T_p) \leq 0. \quad (5.2.6)$$

des inégalités précédentes (5.2.5) et (5.2.6) on obtient :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (T - T_p) = 0,$$

On a donc

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \max_{0 \leq \tau \leq 2\pi} |T(t + \tau) - T_p(t + \tau)| = 0.$$

■

Remarque 5.2.1. Pour ce cas particulier on conclut que la solution du problème de Cauchy (3.0.1) converge vers la solution périodique T_p , q_p et $u_p = 0$. (la convergence $u(t) \rightarrow 0 = u_p(t)$ est une hypothèse, mais on peut espérer la démontrer.)

5.2.2 deuxième cas $u \not\rightarrow 0$:

tournant maintenant notre attention vers une région semi-aride, on va s'intéresser à chercher l'existence et l'unicité de la solution périodique. On choisit le domaine d'étude $D \subset \mathbb{R}^3$ comme suit :

$$D = \left\{ (q, u, T) \in \mathbb{R}^3, \text{tel que : } \begin{array}{l} \frac{h_0}{\max(\gamma, h_1)} \leq q + u \leq \frac{h_0}{\min(\gamma, h_1)}, \quad q \geq 0, u \geq 0 \\ 0 \leq \left(\frac{\inf(c_1 R_s(t))}{\bar{\sigma}} \right)^{1/4} \leq T \leq \left(\frac{\sup R_s(t)}{c_2 \bar{\sigma}} \right)^{1/4}, \quad c_1, c_2 \text{ des constantes} \end{array} \right\} \quad (5.2.7)$$

où $c_1 = \exp(-\varepsilon_1 \max(Z(0), \frac{h_0}{\lambda}))$ et $c_2 = \exp(-\varepsilon_2 \max(Z(0), \frac{h_0}{\lambda}))$.

Soit $(q, u, T) \in D$. On définit l'opérateur :

$$G : D \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(q, u, T) \rightarrow G(q, u, T)$$

par les relations :

$$G(q, u, T) = (g_1(q, u, T), g_2(q, u, T), g_3(q, u, T))$$

où

$$g_1(q, u, T) = q(2\pi), \quad g_2(q, u, T) = u(2\pi), \quad g_3(q, u, T) = T(2\pi),$$

$(q(t), u(t), T(t))$ étant la solution du problème de Cauchy (3.0.1) avec $q(0) = q$, $u(0) = u$, $T(0) = T$.

Proposition 5.2.2. Si $(q(0), u(0), T(0)) \in D$, alors on a $G(q(0), u(0), T(0)) \in D$.

Remarque 5.2.2. On veut dire par cette proposition que si la condition initiale appartient au domaine D alors la solution après 2π reste dans le domaine D

Preuve.

- On suppose que $(q(0), u(0), T(0)) \in D$ et en faisant la somme des deux équations, celle de la vapeur d'eau et de la quantité d'eau, on a l'équation (4.0.2).

On pose

$$Z(t) = q(t) + u(t), \quad \forall t \geq 0$$

Conformément à l'hypothèse $(q(0), u(0), T(0)) \in D$, on suppose que

$$Z(0) \leq \frac{h_0}{\min(\gamma, h_1)}.$$

On considère le problème de Cauchy pour $\tilde{Z}(t)$

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{Z}(t)}{dt} = h_0 - \min(\gamma, h_1) \tilde{Z}(t), \\ \tilde{Z}(0) = \frac{h_0}{\min(\gamma, h_1)}. \end{cases}$$

On vérifie aisément que la solution de ce problème est

$$\tilde{Z}(t) = \frac{h_0}{\min(\gamma, h_1)}.$$

Donc, d'après le théorème de comparaison 4.0.2, on a

$$Z(t) \leq \tilde{Z}(t) = \frac{h_0}{\min(\gamma, h_1)}, \text{ pour tout } t \geq 0.$$

en particulier on a

$$Z(2\pi) \leq \tilde{Z}(2\pi) = \frac{h_0}{\min(\gamma, h_1)}. \quad (5.2.8)$$

D'autre part, l'hypothèse $(q(0), u(0), T(0)) \in D$ implique aussi que

$$Z(0) \geq \frac{h_0}{\max(\gamma, h_1)}.$$

On considère cette fois le problème de Cauchy pour $\tilde{Z}(t)$

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{Z}(t)}{dt} = h_0 - \max(\gamma, h_1) \tilde{Z}(t), \\ \tilde{Z}(0) = \frac{h_0}{\max(\gamma, h_1)}. \end{cases}$$

On vérifie aisément que la solution de ce problème est

$$\tilde{Z}(t) = \frac{h_0}{\max(\gamma, h_1)}.$$

Donc, d'après le théorème de comparaison 4.0.2, on a

$$Z(t) \geq \tilde{Z}(t) = \frac{h_0}{\max(\gamma, h_1)}, \text{ pour tout } t \geq 0.$$

en particulier on a

$$Z(2\pi) \geq \tilde{Z}(2\pi) = \frac{h_0}{\max(\gamma, h_1)}. \quad (5.2.9)$$

De (5.2.8) et (5.2.9) on obtient

$$\frac{h_0}{\max(\gamma, h_1)} \leq Z(2\pi) \leq \frac{h_0}{\min(\gamma, h_1)}. \quad (5.2.10)$$

- On suppose que $T(0) \leq \left(\frac{\sup R_s(t)}{c_2 \bar{\sigma}} \right)^{1/4}$

On considère le problème de Cauchy pour $\tilde{T}(t)$

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{T}(t)}{dt} = \sup_t R_s(t) - c_2 \bar{\sigma} \tilde{T}^4(t), \\ \tilde{T}(0) = \left(\frac{\sup R_s(t)}{c_2 \bar{\sigma}} \right)^{1/4}. \end{cases}$$

On vérifie aisément que la solution de ce problème est

$$\tilde{T}(t) = \left(\frac{\sup R_s(t)}{c_2 \bar{\sigma}} \right)^{1/4}.$$

Donc, d'après le théorème de comparaison 4.0.2, on a

$$T(t) \leq \tilde{T}(t) = \left(\frac{\sup R_s(t)}{c_2 \bar{\sigma}} \right)^{1/4}, \quad \text{pour tout } t \geq 0,$$

en particulier on a

$$T(2\pi) \leq \tilde{T}(2\pi) = \left(\frac{\sup R_s(t)}{c_2 \bar{\sigma}} \right)^{1/4}. \quad (5.2.11)$$

- On suppose en outre que $T_0 \geq \left(\frac{\inf(c_1 R_s(t))}{\bar{\sigma}} \right)^{1/4}$.

On considère le problème de Cauchy pour $\tilde{T}(t)$

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{T}(t)}{dt} = \inf_t(c_1 R_s(t)) - \bar{\sigma} \tilde{T}^4(t), \\ \tilde{T}(0) = \left(\frac{\inf(c_1 R_s(t))}{\bar{\sigma}} \right)^{1/4}. \end{cases}$$

On vérifie aisément que la solution de ce problème est

$$\tilde{T}(t) = \left(\frac{\inf_t(c_1 R_s(t))}{\bar{\sigma}} \right)^{1/4}$$

Donc, d'après le théorème de comparaison 4.0.2, on a

$$T(t) \geq \tilde{T}(t) = \left(\frac{\inf_t(c_1 R_s(t))}{\bar{\sigma}} \right)^{1/4}, \text{ pour tout } t \geq 0,$$

En particulier on aura

$$\left(\frac{\inf_t(c_1 R_s(t))}{\bar{\sigma}} \right)^{1/4} \leq T(2\pi) \leq \left(\frac{\sup_t R_s(t)}{c_2 \bar{\sigma}} \right)^{1/4}. \quad (5.2.12)$$

Comme $Z(2\pi) = q(2\pi) + u(2\pi)$, d'après (5.2.10) on a

$$\frac{h_0}{\max(\gamma, h_1)} \leq q(2\pi) + u(2\pi) \leq \frac{h_0}{\min(\gamma, h_1)}$$

D'autre part, d'après le théorème 4.0.3, si $q(0) > 0$, $u(0) > 0$, $T(0) > 0$, alors $q(2\pi) > 0$, $u(2\pi) > 0$, $T(2\pi) > 0$.

Il n'est pas difficile de généraliser ce théorème de sorte que si

$q(0) \geq 0$ et $u(0) \geq 0$, (outre $T(0) > 0$), alors $q(2\pi) \geq 0$, $u(2\pi) \geq 0$, $T(2\pi) \geq 0$.

Enfin, en rappelant (5.2.12), on peut conclure que, si $(q(0), u(0), T(0)) \in D$, alors $(q(2\pi), u(2\pi), T(2\pi)) \in D$, c'est-à-dire

$$G(q(0), u(0), T(0)) \in D.$$

La proposition est démontrée. ■

Maintenant on rappelle le théorème de Brower.

Théorème 5.2.1. (théorème de Brower) Soit Ω un ensemble convexe borné et fermé dans $\mathbb{R}^n$. Alors tout opérateur continu A appliquant Ω dans lui-même admet un point fixe dans Ω .

Preuve. (voir [18] page 175) ■

Maintenant nous sommes en mesure de démontrer le résultat suivant.

Proposition 5.2.3. Il existe une solution périodique $(q(t), u(t), T(t))$ du système d'équations (3.0.1).

Preuve.

Comme l'opérateur $G : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ est défini comme la valeur de la solution $(q(t), u(t), T(t))$ à l'instant $t = 2\pi$ du problème de Cauchy (3.0.1) avec les conditions initiales $q(0) = q, u(0) = u, T(0) = T$, compte tenu des conditions de Lipschitz vérifiées dans D par les seconds membres des trois équations du problème de Cauchy (3.0.1), d'après la théorie classique des équations différentielles ordinaires $G : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ est continu.

D'autre part, d'après le lemme 5.1.2, on a $G(D) \subset D$.

Comme en outre D est convexe et compact dans $\mathbb{R}^3$, à l'aide du théorème de Brower 5.2.1 on déduit qu'il existe un élément (q, u, T) de D tel que

$$G(q, u, T) = (q, u, T),$$

ce qui, joint à l'existence et l'unicité de la solution du problème de Cauchy dans l'intervalle $[0, 2\pi]$, implique qu'il existe une solution périodique du système d'équation (3.0.1). La proposition est démontrée. ■

Comme la question de l'unicité de la solution périodique est assez complexe, pour nous approcher de ce problème, nous faisons des considérations sur un cas particulièrement simple.

Proposition 5.2.4. *Si $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ et $h_1 = \gamma > 0$ alors il existe unique solution périodique $(q(t), u(t), T(t))$ du système d'équations (3.0.1)*

Preuve.

On suppose que

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0,$$

$$h_1 = \gamma > 0.$$

Dans ce cas le système d'équations se réduit à

$$\frac{dq(t)}{dt} = -\beta[q(t) - \bar{q}_{vs}(T)]^+ + \alpha[q(t) - \bar{q}_{vs}(T)]^- u(t) + h_0 - \gamma q(t), \quad (5.2.13)$$

$$\frac{du(t)}{dt} = \beta[q(t) - \bar{q}_{vs}(T)]^+ - \alpha[q(t) - \bar{q}_{vs}(T)]^- u(t) - \gamma u(t), \quad (5.2.14)$$

$$\frac{dT(t)}{dt} = R_s(t) - \bar{\sigma} T^4(t). \quad (5.2.15)$$

On remarque que l'équation (5.2.15) ne contient ni $q(t)$ ni $u(t)$. Donc de la même manière que dans le cas où $u(t) = 0$ que nous avons examiné précédemment, on obtient l'unique solution périodique $T(t) = T_p(t)$.

Maintenant examinons $q(t)$ et $u(t)$. Supposons que $(q_1(t), u_1(t))$ et $(q_2(t), u_2(t))$ sont deux solutions périodiques du système d'équations (5.2.13), (5.2.14). En faisant la somme des équations (5.2.13) et (5.2.14), avec $q(t) = q_1(t)$, $u(t) = u_1(t)$ et avec $q(t) = q_2(t)$, $u(t) = u_2(t)$. On a :

$$\frac{d(q_1(t) + u_1(t))}{dt} = h_0 - h_1(q_1(t) + u_1(t)). \quad (5.2.16)$$

$$\frac{d(q_2(t) + u_2(t))}{dt} = h_0 - h_1(q_2(t) + u_2(t)). \quad (5.2.17)$$

Considérons maintenant la différence :

$$Z(t) = q_1(t) + u_1(t) - (q_2(t) + u_2(t)). \quad (5.2.18)$$

En faisant la différence des équations (5.2.16) et (5.2.17). On a

$$\frac{dZ(t)}{dt} = -h_1 Z(t).$$

Comme $h_1 > 0$, la relation $\frac{dZ(t)}{dt} = -h_1 Z(t)$ implique que $Z(t) = 0$.

Cela étant, pour démontrer que $q_1(t) = q_2(t)$, $u_1(t) = u_2(t)$, nous supposons par l'absurde

$$q_1(t) \neq q_2(t) \quad \text{et} \quad u_1(t) \neq u_2(t).$$

Comme $q_1(t) + u_1(t) = q_2(t) + u_2(t)$ (voir (5.2.18) et que $Z(t) = 0$),

si $q_1(0) > q_2(0)$, alors $u_1(0) < u_2(0)$.

On va faire la comparaison entre l'équation (5.2.13) avec $q(t) = q_1(t)$ et $u(t) = u_1(t)$ et la même équation (5.2.13) avec $q(t) = q_2(t)$ et $u(t) = u_2(t)$.

Pour rendre clair notre raisonnement, nous écrivons explicitement les deux égalités

$$\frac{dq_1(t)}{dt} = -\beta[q_1(t) - \bar{q}_{vs}(T)]^+ + \alpha[q_1(t) - \bar{q}_{vs}(T)]^- u_1(t) + h_0 - \gamma q_1(t) \equiv F_1(t) \quad (5.2.19)$$

$$\frac{dq_2(t)}{dt} = -\beta[q_2(t) - \bar{q}_{vs}(T)]^+ + \alpha[q_2(t) - \bar{q}_{vs}(T)]^- u_2(t) + h_0 - \gamma q_2(t) \equiv F_2(t) \quad (5.2.20)$$

Pour $t = 0$, le second membre $F_1(t)$ de (5.2.19) est plus petit que $F_2(t)$, c'est-à-dire

$$F_1(t)|_{t=0} < F_2(t)|_{t=0}.$$

S'il existe un $t_1 \in]0, 2\pi[$ tel que : $q_1(t_1) = q_2(t_1)$, alors $u_1(t_1) = u_2(t_1)$; on aurait en outre

$$q_1(t) = q_2(t), \quad \text{pour } t \geq t_1,$$

$$u_1(t) = u_2(t), \quad \text{pour } t \geq t_1.$$

Cette dernière situation contredit à l'hypothèse de deux solutions périodiques différentes. Donc, la possibilité qui reste est

$$q_1(t) > q_2(t), \quad \forall t \in [0, 2\pi].$$

Dans ce cas en examinant l'équation (5.2.16) et (5.2.17), on voit que

$$\frac{dq_1(t)}{dt} < \frac{dq_2(t)}{dt}, \quad \forall t \in [0, 2\pi]$$

Il en résulterait que :

$$q_1(0) - q_1(2\pi) \neq q_2(0) - q_2(2\pi).$$

ce qui contredit l'hypothèse que $q_1(t)$ et $q_2(t)$ sont deux solutions périodiques avec $q_1(t) > q_2(t)$.

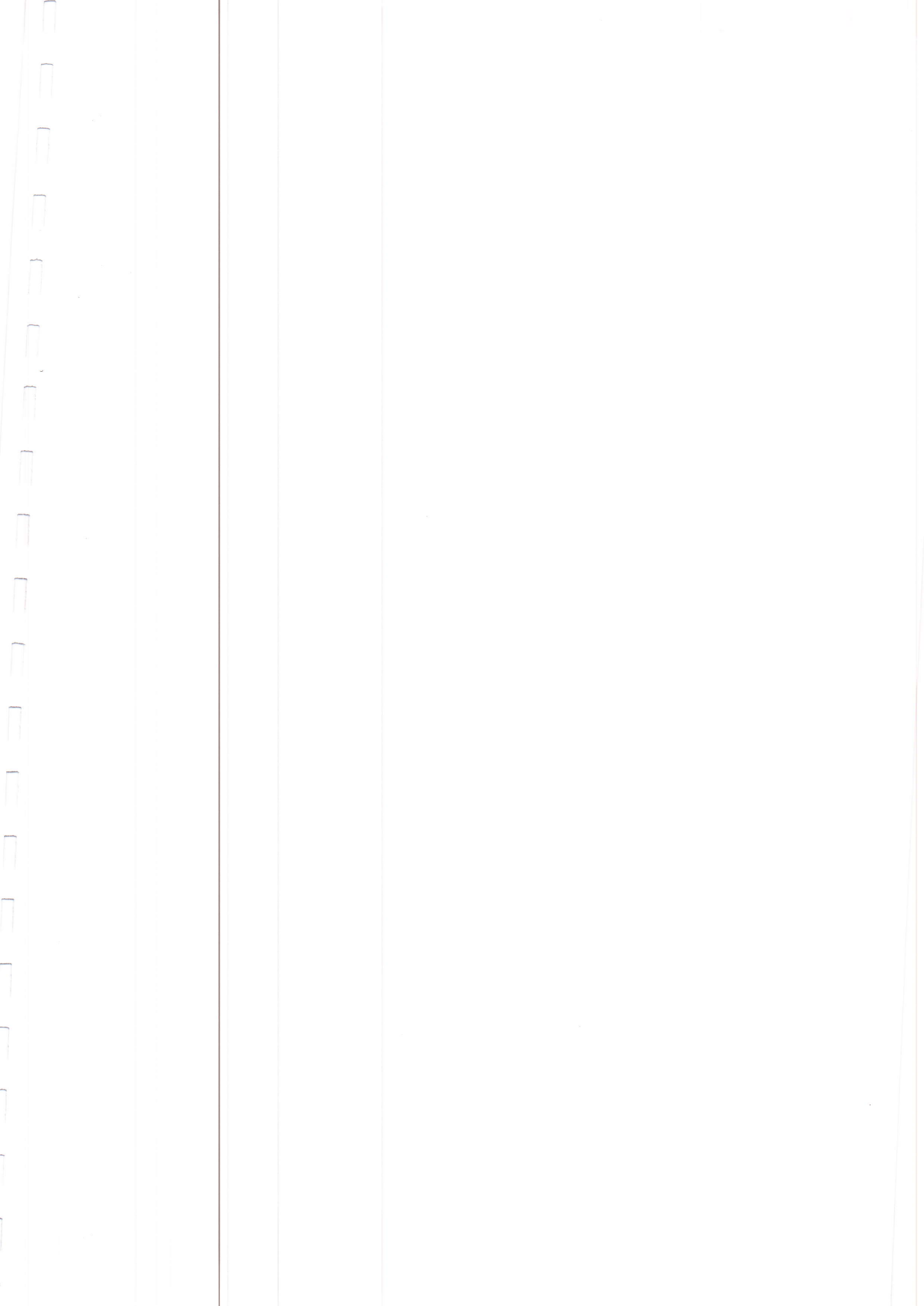
On conclut que dans ce cas particulier ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ et $h_1 = \gamma > 0$) il existe une unique solution périodique $q(t)$, $u(t)$ et $T(t)$ de notre système d'équations (3.0.1).

■

conclusion et perspective

L'Algérie est menacée par l'accélération du phénomène de désertification qui commence à prendre de proportion alarmante suite au réchauffement global de la planète. Une étude approfondie de ce phénomène est plus que nécessaire à travers la construction d'un modèle mathématique, qui régit la circulation de l'eau dans les régions désertiques, puisque la désertification est une conséquence de l'absence ou de la rareté des précipitations. Dans ce mémoire, nous avons modélisé ce phénomène de désertification, nous avons démontré l'existence et l'unicité de la solution locale et globale puis nous avons étudié le comportement asymptotique de la solution de problème de Cauchy considéré dans le cas d'une désertification totale. Pour une condition sur $h_0 < h_1 q_{vs} \left(\left(\frac{\inf R_s(t)}{\bar{\sigma}} \right)^{1/4} \right)$ on a trouvé l'existence et l'unicité d'une solution périodique et dans le cas $u(t)$ tend un zéro la convergence était vers une solution périodique. Ensuite on a étudié un cas d'une région semi-aride; on a trouvé l'existence d'une solution périodique mais l'unicité de cette solution était établie pour un cas particulier ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ et $h_1 = \gamma > 0$).

Comme notre étude était limitée pour h_0 petit, reste de chercher l'existence et l'unicité de la solution périodique dans le cas où $h_0 > h_1 q_{vs} \left(\left(\frac{\inf R_s(t)}{\bar{\sigma}} \right)^{1/4} \right)$ et le cas où $h_0 \geq h_1 q_{vs} \left(\left(\frac{\inf R_s(t)}{\bar{\sigma}} \right)^{1/4} \right)$ avec $u(t) > 0$ et son comportement asymptotique. En plus, tenant compte de la température de la terre que nous n'avons pas considéré dans notre étude.



Références

- [1] Aidoud, H et Boukabou, A. *Mémoire de Master Modélisation mathématique de la circulation de l'eau dans les régions désertiques*
- [2] H. BREZIS, *Analyse fonctionnelle : Théorie et applications*. EDITIONS Amazon.
- [3] Belhireche, H., Aissaoui, M. Z., Fujita Yashima, H. : Equations monodimensionnelles du mouvement de l'air avec la transition de phase de l'eau. Sciences Technologie Univ. Constantine, vol. 31 (2011), pp. 9-17.
- [4] Belhireche, H., Aissaoui, M. Z., Fujita Yashima, H. : Solution globale de l'équation de coagulation des gouttelettes en chute. A paraître sur Rend. Sem. Mat. Univ Poli Torino.
- [5] J. CLAUDE SIKORAV; *cours de calcul différentiel 2, cours de l'école normale supérieure de Lyon*, 2008.
- [6] M. CROUZEIX, A.L.MIGNOT : *Analyse numérique des équations différentielles*. EDITIONS Masson.
- [7] E. AUBRY, *Théorèmes du point fixe et Applications aux équations différentielles*, cours de l'université de Nice-Sophia Antipolis, 2006-2007.
- [8] Fujita Yashima, H. : Modelación matemática del movimiento de la atmósfera con la transición de fase de agua. Rev. Invest. Operac., vol. 34 (2013), pp. 93-104.
- [9] Fujita Yashima, H., Campana, V., Aissaoui, M. Z. : Système d'équations d'un modèle du mouvement de l'air impliquant la transition de phase de l'eau dans l'atmosphère. Ann. Math. Afr., vol. 2 (2011), pp. 66-92.
- [10] F.Korichi, H. Fujita Yashima. Equation stochastiques modélisant la circulation de l'eau dans une région sèche et sa mesure invariante. Manuscrit 2013
- [11] <http://ga.water.usgs.gov/edu/watercyclefrench.html>
- [12] <http://www2.brgm.fr/divers/nappes.htm>
- [13] <http://www.iaea.org/Publications/Magazines/Bulletin/Bull231/French/23106480306-fr.pdf>
- [14] <http://www.ec.gc.ca/eau-water/default.asp?lang=Fr&n=300688DC-1>
- [15] <http://members.unine.ch/philippe.renard/hydrogen/node1.html>

- [16] <http://www.cnrm.meteo.fr/gmapdoc/meshtml/guide-ARP/lien3.html>
- [17] Kikoine, A. K, Kikoine, I. K : Physique moléculaire (traduit en russe). Mir, Moscou, 1979.
- [18] L. KANTROVITCH, G. AKILOV : ANALYSE FONCTIONNELLE Tome 2, traduction française Editions Mir 1981 .
- [19] L. PONTRIAGUINE : EQUATIONS DIFFERENTIELLES ORDINAIRES, traduction française Editions Mir 1975 .
- [20] Merad Meriem . Belhireche, H., Fujita Yashima, H. : Solution stationnaire de l'équation de coagulation des gouttelettes en chute avec un vent horizontal. A paraître sur Rend. Sem. Mat. Univ. Padava.
- [21] Merad Meriem . Aissaoui, M. Z., Fujita Yashima, H. : Solution stationnaire de l'équation de coagulation des gouttelettes avec un vent vertical. En préparation.
- [22] Sheng, P.-X., Mao, J.-T., Li, J.-G., Zhang, A.-C., Sang, J.-G., Pan, N.-X : Physique de l'atmosphère (en chinois). Publ. Univ. Pékin, Pékin, 2003.
- [23] Selvaduray, D. Ascoli : Wellposedness in the Lipschitz class for a system arising from a dynamical model of the atmosphere including water's phase transition. A paraître sur NDEA.