République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Equations aux Dérivées Partielles**

Par :

Melle. ELLAGGOUNE Selma

Intitulé

Solution stationnaire de l'équation de coagulation des gouttelettes en chute avec le vent horizontal

Dirigé par : Dr. AISSAOUI Mohamed Zine

Devant le jury

PRESIDENT	Mr. H. FUJITA YASHIMA	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Mr. M. Z. AISSAOUI	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Mme. S. BADI	Univ-Guelma

Session Juin 2013

Remerciements

Avant d'entamer le sujet de mon travail, je tiens tout d'abord à exprimer mes Sincères remerciements à mon encadreur le Dr **Aissaoui Mohamed zine**: directeur du laboratoire de Mathématiques appliquées et de Modélisation et au Professeur **Hisao Fujita Yashima**, pour le soutien, la grande disponibilité et surtout les conseils qui m'ont donnés tout au long de l'élaboration de ce travail de "recherche"

Je remercie également Mme **Badi Sabrina**, qui a bien voulue accepter de faire partie comme membre du jury.

Aussi, je souhaite adresser mes sincères remerciements aux personnes qui m'ont apporté leur aide et leur soutien pour la réalisation de ce travail et particulièrement Melle **Merad Meriem** et Melle **Belhireche Hanane.**

Selma

Dédicaces

Mes vœux et mes remerciements du fond du cœur à mes parents pour leur contribution et leur soutien durant toutes mes études et qui m'ont toujours aidé et encouragé dans les moments difficiles.

À ma chère Mère

Je tiens à lui témoigner ma profonde gratitude et ma reconnaissance pour les sacrifices qu'elle a consentie en me déchargeant du travail domestique. Elle m'a soutenue et encouragée tout au long de ma scolarisation et pour cela, je la remercie beaucoup.

À mon cher père

Je dédie ce travail avec tous mes remerciements à mon père, qui grâce à son encouragement et son soutien moral, j'ai pu continuer mes études supérieures, et pour cela, je le remercie également beaucoup.

J'adresse également mes sincères remerciements à mes frères et mes sœurs pour leur aide et leur encouragement, surtout mon frère Fateh, Docteur en Mathématique à l'université de Guelma, qui m'a soutenu au cours de mes études.

selma

Solution stationnaire de l'équation de coagulation des gouttelettes en chute avec le vent horizontal

Ellaggoune Selma
Mémoire de master en mathématiques
Université 08 Mai 1945 Guelma

26 mai 2013

Table des matières

Résumé

On considère l'équation décrivant le processus de coagulation des gouttelettes qui tombent dans l'air. L'équation est considérée dans un domaine de dimensions trois et la densité des gouttelettes à l'entrée du domaine est supposée donnée . Dans l'hypothèse que la vitesse de l'air est constante dans la direction horizontale, nous prouvons l'existence et l'unicité de la solution stationnaire : dans la première étape on construit la solution avec les données dans L^1 et dans la deuxième étape on construit la solution dans une condition plus générale avec les données dans L^∞, en utilisant la propriété de cône de dépendence. A la fin, nous allons parler des perspectives de la solution globale des gouttelettes en chute avec un vent horizontal, en donnant une idée basée sur les thechniques développées dans le cas stationnaire avec le vent horizontal et sur la construction de cône de dépendence pour la solution.

Chapitre 1

Introduction

Comme il est bien connu, suite à l'évaporation des eaux des Océans et des eaux des Mers et successivement à la condensation de la vapeur dans l'atmosphère, se forment des nuages, quand les gouttelettes qui forment les nuages deviennent suffisamment denses, se déclenche le phénomène de coagulation des gouttelettes d'eau . A la suite de quoi, les gouttelettes suffisamment grandes tombent sous forme de pluie. L'équation dite équation de Smoluchowski, proposée par Smoluchowski (voir [16]) et Müller (voir [12]), décrit le processus de coagulation ; cependant cette équation dans sa version communément considérée ne tient pas compte de l'effet de la chute des gouttelettes. Malgré que l'équation de Smoluchowski ait été étudiée par plusieurs auteurs (voir [17], [9], [4], [11], [6], etc...), à notre connaissance la description mathématique du processus de coagulation des gouttelettes dans leur déplacement et en particulier le déplacement dû à la force gravitationnelle n'est pas encore bien élucidée.

Dans ce présent travail nous allons considérer des gouttelettes qui, se coagulant avec une certaine probabilité, tombent avec une vitesse qui sera déterminée par la force gravitationnelle, la friction entre ces gouttelettes et l'air ainsi que la vitesse de ce dernier. Les gouttelettes considérées doivent être distribuées selon la masse m de chacune d'elles, tandis que la friction avec l'air, ainsi que la probabilité de coagulation, dépend de la masse m. Ici nous nous limitons à considérer l'état stationnaire avec un vent horizontal constant, en renvoyant l'analyse de cas plus généraux aux études futures.

(Voir le chapitre 7 : perspectives).

Du point de vue technique, nous allons considérer une équation intégro-différentielle pour une fonction inconnue $\sigma = \sigma(m, x, y, z)$ représentant la densité (par rapport au volume de l'air) de l'eau liquide contenue dans les gouttelettes de masse m. Nous considérons σ comme une fonction dépendante de la masse (de la gouttelette) m et de la position $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$; nous supposons que le mouvement de l'air en considération est un vent horizontal dans la direction de l'axe x qui dépend de y, Dans ce qui suit, nous allons démontrer l'existence et l'unicité de la solution de l'équation avec une condition aux limites dans les cas respectivement de l'absence du vent (vitesse du vent nulle) et de la présence du vent (vitesse du vent non nulle). La démonstration s'appuie sur les techniques développées dans le travail [10] qui démontre l'existence et l'unicité de la solution de l'équation stationnaire avec le vent horizontal et le travail [2] qui démontre l'existence et l'unicité de la solution globale de l'équation d'evolution.

Chapitre 2

Position du problème

Désignons par $\sigma(m, x, y, z, t)$ la densité de l'eau liquide contenue dans les gouttelettes de masse m au point $(x, y, z) \in \Omega(\subset \mathbb{R}^3)$ à l'instant $t \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire, la masse de l'eau liquide contenue dans les gouttelettes de masse m qui se trouvent dans l'unité de volume de l'air. Le nombre, au sens purement statistique, des gouttelettes de masse m dans l'unité de volume sera alors donné par

$$\tilde{n}(m, x, y, z, t) = \frac{\sigma(m, x, y, z, t)}{m}.$$

L'équation de Smoluchowski est normalement formulée par rapport au nombre $\tilde{n} = \tilde{n}(m, t)$ de gouttelettes de masse m. Mais nous préférons utiliser la densité σ pour la commodité pour la modélisation générale des phénomènes météorologiques (voir [5], [1], [14]).

Nous allons considérer la densité σ dans le domaine

$$\Omega = \mathbb{R}^2 \times]0, 1[= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 0 < z < 1\}. \tag{2.1}$$

On va considérer également la vitesse des gouttelettes qui se déplacent à cause de la force gravitationnelle et du mouvement de l'air dans lequel elles se trouvent. Comme l'effet de la friction entre les gouttelettes et l'air dépend sensiblement de la masse de chaque gouttelette, la vitesse des gouttelettes doit être en fonction de la masse m. Nous admettons que la vitesse $u = u(m)$ d'une gouttelette de masse m est donnée par

$$u = u(m) = \left(\overline{v}(y), 0, -\frac{g}{\alpha(m)}\right), \tag{2.2}$$

où $\overline{v}(y)$ est une fonction mesurable de $y \in \mathbb{R}$ et g est constante ($g > 0$), tandis que $\alpha(m)$ est une fonction de la masse m ($\alpha(m) > 0$). Si $g, \alpha(m)$ et $\overline{v}(y)$ désignent respectivement l'accélération gravitationnelle, le coefficient de friction entre les gouttelettes et l'air et la vitesse de l'air (dans la direction de l'axe x), la relation (2.2) correspond, dans une bonne approximation, à la vitesse réelle des gouttelettes dans l'atmosphère (voir par exemple [15], [1], [14]). Si nous considérons la variation de $\sigma(m, x, y, z, t)$ due au déplacement avec la vitesse $u(m)$ des gouttelettes et au processus de coagulation, nous aurons

$$\begin{aligned}
&\partial_t \sigma(m, x, y, z, t) + \nabla_{(x,y,z)} \cdot (\sigma(m, x, y, z, t) u(m)) = \\
&= \frac{m}{2} \int_0^m \beta(m - m', m') \sigma(m', x, y, z, t) \sigma(m - m', x, y, z, t) dm' + \\
&\quad - m \int_0^\infty \beta(m, m') \sigma(m, x, y, z, t) \sigma(m', x, y, z, t) dm',
\end{aligned} \tag{2.3}$$

où $\nabla_{(x,y,z)} = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$, tandis que $\beta(m_1, m_2)$ représente la probabilité de rencontre entre une gouttelette de masse m_1 et une gouttelette de masse m_2 (avec la valeur de la probabilité normalisée par rapport à la masse). Pour le déduction de l'équation (2.3) on peut consulter [7], [16]. Si dans l'équation (2.3) on néglige la dépendance de $(x, y, z) \in \Omega$, l'équation sera réduite à l'équation de Smoluchowski (dans une version avec la densité $\sigma(m, t) = m\tilde{n}(m, t)$).

En renvoyant l'étude de l'équation d'évolution (2.3) au dernier chapitre, dans la partie principale du présent travail nous allons nous occuper du cas stationnaire, c'est-à-dire, nous allons considérer l'équation

$$\nabla_{(x,y,z)} \cdot (\sigma(m,x,y,z)u(m)) = \tag{2.4}$$
$$= \frac{m}{2}\int_0^m \beta(m-m',m')\sigma(m',x,y,z)\sigma(m-m',x,y,z)dm' +$$
$$-m\int_0^\infty \beta(m,m')\sigma(m,x,y,z)\sigma(m',x,y,z)dm'$$

avec la condition

$$\sigma(m,x,y,1) = \overline{\sigma}(m,x,y). \tag{2.5}$$

Comme les gouttelettes tombent de $\{z=1\}$ vers $\{z=0\}$ avec la vitesse $u = u(m)$ (voir (2.2)), la condition (2.5) est une condition "initiale" (ou condition d'entrée) pour les gouttelettes qui partent de la position $(x,y,1)$.

On rappelle que dans la Nature, à cause de la courbure très élevée de la surface, les gouttelettes très petites s'évaporent immédiatement (voir par exemple [13], [7]) et que d'autre part les gouttelettes très grandes se fragmentent à cause de la friction avec l'air environnant. Pour cela, nous nous intéressons à la fonction de densité $\sigma(m,x,y,z)$ avec m entre deux extrémités $\overline{m}_a$ et $\overline{m}_A$,

$$0 < \overline{m}_a \leq m \leq \overline{m}_A < \infty.$$

En ce qui concerne la fonction $\alpha(m)$, qui représenterait l'effet de la friction entre les gouttelettes et l'air, dans le présent travail nous supposons que $\alpha(m)$ est une fonction strictement positive et suffisamment régulière (par exemple $\alpha(m) \in C^1(\mathbb{R}_+)$). Il est utile de rappeler que dans l'état normale de l'atmosphère $\alpha(m)$ est une fonction décroissante et ses valeurs varient sensiblement selon les valeurs de m (pour les données expérimentales, voir par exemple [15]). Même si l'effet de la friction (par l'unité de masse) croît rapidement quand m s'approche de 0, compte tenu de l'absence de gouttelettes très petites ($m < \overline{m}_a$), pour éviter le raisonnement inutilement compliqué, nous supposons que

$$\sup_{m \in \mathbb{R}_+} \alpha(m) < \infty.$$

Pour la fonction $\beta(m_1,\ m_2)$ nous supposons que

$$\beta(\cdot,\cdot) \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+), \qquad \beta(m_1, m_2) \geq 0 \ \forall \ (m_1, m_2) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \tag{2.6}$$

$$\beta(m_1, m_2) = \beta(m_2, m_1) \tag{2.7}$$

$$\beta(m_1,\ m_2) = 0 \quad pour\ m_1 + m_2 \geq \overline{m}_A. \tag{2.8}$$

Les conditions (2.6) et (2.7) sont des conditions naturelles de la fonction de probabilité de rencontre de gouttelettes. D'autre part, la condition (2.8) est une approximation motivée par le fait que, comme nous l'avons déjà évoqué, dans l'atmosphère les grandes gouttelettes subissent également le processus de fragmentation, qui contrebalance la croissance de la population de gouttelettes de masse élevée due à la coagulation (cette approximation a été adoptée même dans [5], [1], [14]).

Chapitre 3

Cas de l'absence du mouvement de l'air

Dans le cas où $\overline{v} = 0$, le problème (2.4)–(2.5) se réduit à une famille de problèmes dans le domaine $0 < z < 1$, paramétrisée par $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. En effet, si $\overline{v} = 0$, $u(m)$ se réduit à

$$u(m) = (0, 0, -\frac{g}{\alpha(m)}),$$

ce qui nous permet d'envisager le problème (2.4)–(2.5) séparément pour chaque $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Donc, en posant $\overline{\sigma}(m) = \overline{\sigma}(m, x, y)$ pour chaque $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et en écrivant $\sigma(m, z)$ au lieu de $\sigma(m, x, y, z)$, nous avons à considérer

$$-\partial_z(\sigma(m, z)\frac{g}{\alpha(m)}) = \frac{m}{2}\int_0^m \beta(m-m', m')\sigma(m', z)\sigma(m-m', z)dm' + \qquad (3.1)$$

$$-m\int_0^\infty \beta(m, m')\sigma(m, z)\sigma(m', z)dm',$$

$$\sigma(m, 1) = \overline{\sigma}(m). \qquad (3.2)$$

Comme $\alpha(m)$ ne dépend pas de z, l'équation (3.1) peut être écrite dans la forme

$$\partial_z\sigma(m,z) = -\frac{m\alpha(m)}{2g}\int_0^m \beta(m-m',m')\sigma(m',z)\sigma(m-m',z)dm' + \tag{3.3}$$
$$+\frac{m\alpha(m)}{g}\int_0^\infty \beta(m,m')\sigma(m,z)\sigma(m',z)dm'.$$

Avant de nous occuper de la solution du problème (3.1)–(3.2), rappelons une propriété importante de l'opérateur intégral figurant au second membre de (3.1).

LEMME 3.1. *Soit $\beta(\cdot,\cdot)$ la fonction introduite dans le paragraphe précédent. Alors, quelque soit $\sigma(\cdot) \in L^1(\mathbb{R}_+)$, on a*

$$\int_0^\infty \frac{m}{2}\int_0^m \beta(m-m',m')\sigma(m')\sigma(m-m')dm'dm + \tag{3.4}$$
$$-\int_0^\infty m\int_0^\infty \beta(m,m')\sigma(m)\sigma(m')dm'dm = 0.$$

DÉMONSTRATION. On pose

$$I = \int_0^\infty \frac{m}{2}\int_0^m \beta(m-m',m')\sigma(m')\sigma(m-m')dm'dm +$$
$$-\int_0^\infty m\int_0^\infty \beta(m,m')\sigma(m)\sigma(m')dm'dm.$$

En faisant le changement de variable dans la première intégrale

$$q = m-m', \quad r = m'$$

dont le déterminant Jacobien sera 1, on a

$$I = \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{q+r}{2}\beta(q,r)\sigma(q)\sigma(r)drdq - \int_0^\infty\int_0^\infty m\beta(m,m')\sigma(m)\sigma(m')dm'dm.$$

Comme q, r sont des variables arbitraires, on a :

$$\begin{aligned} I = & \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{m+m'}{2} \beta(m,m')\sigma(m)\sigma(m')dm'dm + \\ & - \int_0^\infty \int_0^\infty m\beta(m,m')\sigma(m)\sigma(m')dm'dm \\ = & \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{m'-m}{2} \beta(m,m')\sigma(m)\sigma(m')dm'dm, \end{aligned} \tag{3.5}$$

donc on a

$$I = -\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{m-m'}{2} \beta(m,m')\sigma(m)\sigma(m')dm'dm.$$

De même, comme m, m' sont des variables arbitraire, on a

$$I = -\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{m'-m}{2} \beta(m',m)\sigma(m')\sigma(m)dmdm'.$$

Grâce à la symétrie de la fonction β et d'après le théorème de Fubini , on a

$$I = -\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{m'-m}{2} \beta(m,m')\sigma(m)\sigma(m')dm'dm,$$

ce qui, joint à (3.5), implique que

$$I = -I \quad \Rightarrow I = 0.$$

Le lemme est démontré. □

L'égalité (3.4) n'est autre que la loi de la conservation de la masse pour l'eau liquide contenue dans les gouttelettes.

Proposition 3.1. *Soit $\overline{\sigma}(\cdot) \in L^1(\mathbb{R}_+)$ avec $\mathrm{supp}(\overline{\sigma}) \subset [\overline{m}_a,\ \overline{m}_A]$. Alors le problème (3.1)–(3.2) admet une unique solution $\sigma \in C([0,\ 1]; L^1(\mathbb{R}_+))$ (c'est-à-dire, l'application $z \mapsto \sigma(\cdot, z)$ est une fonction continue de $[0,1]$ à valeurs dans $L^1(\mathbb{R}_+)$).*

DÉMONSTRATION. Pour résoudre le problème (3.1)–(3.2), on considère $\sigma(\cdot, z)$ comme élément de $L^1(\mathbb{R}_+)$, de sorte que l'équation (3.3) peut être écrite dans la forme

$$\frac{d\sigma}{dz} = F(\sigma), \tag{3.6}$$

où

$$F(\sigma) = F(\sigma)(m) = -\frac{m\alpha(m)}{2g}\int_0^m \beta(m-m',m')\sigma(m')\sigma(m-m')dm' +$$
$$+\frac{m\alpha(m)}{g}\int_0^\infty \beta(m,m')\sigma(m)\sigma(m')dm'.$$

Posons

$$C_\beta = \max[\sup_{0<m'<m<\infty}\frac{m\alpha(m)}{2g}\beta(m-m',m'), \sup_{m,m'\in\mathbb{R}_+}\frac{m\alpha(m)}{g}\beta(m,m')]. \tag{3.7}$$

Alors, en rappelant l'expression de $F(\sigma)$, on a, pour $\sigma_1, \sigma_2 \in L^1(\mathbb{R}_+)$,

$$\|F(\sigma_1) - F(\sigma_2)\|_{L^1(\mathbb{R}_+)} = \int_0^\infty |F(\sigma_1)(m) - F(\sigma_2)(m)|dm \leq \tag{3.8}$$
$$\leq C_\beta \int_0^\infty \int_0^m \left|\sigma_1(m')\sigma_1(m-m') - \sigma_2(m')\sigma_2(m-m')\right|dm'dm +$$
$$+C_\beta \int_0^\infty \int_0^\infty \left|(\sigma_1(m)\sigma_1(m') - \sigma_2(m)\sigma_2(m')\right|dm'dm \leq$$
$$\leq C_\beta \int_0^\infty \int_0^m \left|\sigma_1(m')(\sigma_1(m-m')-\sigma_2(m-m'))+(\sigma_1(m')-\sigma_2(m'))\sigma_2(m-m')\right|dm'dm +$$
$$+C_\beta \int_0^\infty \int_0^\infty \left|(\sigma_1(m)(\sigma_1(m') - \sigma_2(m')) + (\sigma_1(m) - \sigma_2(m))\sigma_2(m')\right|dm'dm \leq$$
$$\leq C_\beta\big(\|\sigma_1 * (|\sigma_1 - \sigma_2|)\|_{L^1} + \|(|\sigma_1 - \sigma_2|) * \sigma_2\|_{L^1}\big) +$$
$$+C_\beta \int_0^\infty (|\sigma_1(m)|\|\sigma_1 - \sigma_2\|_{L^1} + |\sigma_1(m) - \sigma_2(m)|\|\sigma_2\|_{L^1})dm \leq$$
$$\leq C_\beta\big(\|\sigma_1\|_{L^1}\|\sigma_1 - \sigma_2)\|_{L^1} + \|\sigma_1 - \sigma_2\|_{L^1}\|\sigma_2\|_{L^1}\big) +$$

$$+C_\beta(\|\sigma_1-\sigma_2\|_{L^1}\int_0^\infty|\sigma_1(m)|dm+\|\sigma_2\|_{L^1}\int_0^\infty|\sigma_1(m)-\sigma_2(m)|dm)\leq$$
$$\leq 2C_\beta\|\sigma_1-\sigma_2\|_{L^1}(\|\sigma_1\|_{L^1}+\|\sigma_2\|_{L^1})$$

(pour la propriété de la convolution, voir par exemple [3]), ce qui montre que $F(\cdot)$ vérifie localement la condition de Lipchitz dans la topologie de $L^1(\mathbb{R}_+)$. Par conséquent, l'équation (3.5) avec la condition initiale (3.2) admet une solution $\sigma(\cdot,z)$ et une seule dans un intervalle $1-\delta\leq z\leq 1$ avec un $\delta>0$ suffisamment petit.

D'autre part, du lemme 3.1 et de l'équation (3.1) on déduit que

$$\int_0^\infty(\sigma(m,z)\frac{g}{\alpha(m)})dm=\int_0^\infty(\sigma(m,1)\frac{g}{\alpha(m)})dm, \tag{3.9}$$

pourvu que $\sigma(\cdot,z)$ existe. Or, la condition (2.8) et l'hypothèse $\mathrm{supp}(\overline{\sigma})\subset[\overline{m}_a,\ \overline{m}_A]$ impliquent que $\mathrm{supp}(\sigma*z)\subset[\overline{m}_a,\overline{m}_A]$. Donc, de la relation

$$0<c_1\leq\frac{g}{\alpha(m)}\leq c_2<\infty\ \forall m\in[\overline{m}_a,\overline{m}_A]$$

avec deux constantes c_1 et c_2, on déduit que $\|\sigma(\cdot,z)\|_{L^1(\mathbb{R}_+)}$ est uniformément bornée en z (pourvu que $\sigma(\cdot,z)$ existe), ce qui, joint à la condition de Lipschitz locale, nous donne la solution $\sigma(\cdot,z)$ de l'équation (3.5) dans tout l'intervalle $[0,1]$; La proposition est démontrée. □

Chapitre 4

Préliminaires pour le cas général

Pour résoudre l'équation (2.4) avec la condition (2.5) ($\sigma(m, x, y, 1) = \overline{\sigma}(m, x, y)$), nous allons utiliser l'idée de transformer l'équation (2.4) en une équation différentielle ordinaire, comme dans la démonstration de la proposition 3.1, où on a transformé l'équation (3.1) en (3.5). Pour cela, nous introduisons le changement de variables $(m, x, y, z) \mapsto (\tilde{m}, \xi, \tilde{y}, \tilde{z})$ défini par

$$\begin{cases} \tilde{m} = m, \\ \xi = x - \overline{v}(y)\frac{\alpha(m)}{g}(1-z), \\ \tilde{y} = y, \\ \tilde{z} = z. \end{cases}$$

et définissons

$$\tilde{\sigma}(\tilde{m}, \xi, \tilde{y}, \tilde{z}) = \sigma(m, x, y, z) = \sigma(m, \xi + \overline{v}(y)\frac{\alpha(m)}{g}(1-z), y, z).$$

Dans la suite, toutefois, pour éviter la notation lourde, on va écrire simplement m, y et z au lieu de $\tilde{m}$, $\tilde{y}$ et $\tilde{z}$ et encore $\sigma(m, \xi, y, z)$ au lieu de $\tilde{\sigma}(\tilde{m}, \xi, \tilde{y}, \tilde{z})$, ce qui ne cause pas d'équivoque dans le calcul. Comme on peut le constater facilement, dans les coordonnées (m, ξ, y, z) l'équation (2.4) se transforme en

$$\frac{\partial}{\partial z}\sigma(m,\xi,y,z) = \tag{4.1}$$

$$= -\frac{m\alpha(m)}{2g}\int_0^m \beta(m-m',m')\sigma(m',\eta(m,m',\xi,y,z),y,z)\times$$

$$\times\sigma(m-m',\eta(m,m-m',\xi,y,z),y,z)dm'+$$

$$+\frac{m\alpha(m)}{g}\int_0^\infty \beta(m,m')\sigma(m,\xi,y,z)\sigma(m',\eta(m,m',\xi,y,z),y,z)dm',$$

où

$$\eta(m,m',\xi,y,z) = \xi + \overline{v}(y)\frac{\alpha(m)-\alpha(m')}{g}(1-z).$$

Remarque.4.1 Dans l'équation (2.1) ni la dérivée ni l'intégrale par rapport à y ne sont présentés. cette circonstance implique que l'équation pour chaque $y \in \mathbb{R}$ fixé peut être résolue indépendamment de la solution pour les autres y.

En vertu de cette remarque, dans la suite nous considérons l'équations (2.1) pour un $y \in \mathbb{R}$ fixé . et, pour la simplicité de la présentation, nous écrivons $\overline{v}$ au lieu de $\overline{v}(y)$. Pour réformuler l'équation (4.1) en une équation différentielle ordinaire et établir des propriétés utiles de l'opérateur intégral du deuxième membre de cette équation, il nous convient, pour chaque $z \in [0,1]$ fixé, d'introduire la famille de courbes

$$\gamma_\tau = \{(m,\ \xi) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} | \xi = \tau - \overline{v}\frac{\alpha(m)}{g}(1-z)\},\ \tau \in \mathbb{R} \tag{4.2}$$

et de définir une mesure sur ces courbes.

Désignons par $P_{\mathbb{R}_+}$ la projection de γ_τ sur $\mathbb{R}_+$, c'est-à-dire, pour les sous-ensembles A' de γ_τ, on a

$$P_{\mathbb{R}_+}A' = \{m \in \mathbb{R}_+ | \exists(\xi) \quad \text{telque} \quad (m, \xi) \in A'\}.$$

La régularité de la fonction $\xi(m) = \tau - \overline{v}\frac{\alpha(m)}{g}(1-z)$ nous permet de définir les ensembles mesurables de γ_τ et la mesure μ_γ sur γ_τ par les relations suivantes :

i) $A' \subset \gamma_\tau$ est mesurable si et seulement si $P_{\mathbb{R}_+}A'$ est mesurable selon Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$,

ii) $\mu_\gamma(A') = \mu_{L,\mathbb{R}_+}(P_{\mathbb{R}_+}A')$, où $\mu_{L,\mathbb{R}_+}(\cdot)$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$.

Comme les courbes γ_τ, $\tau \in \mathbb{R}$, sont parallèles (c'est-à-dire, définies par la translation de γ_0 par τ dans la direction de ξ, on voit immédiatement que la projection $P_{\mathbb{R}_+}$ et la mesure $\mu_\gamma(\cdot)$ ne dépendent pas de $\tau \in \mathbb{R}$.

La mesure $\mu_\gamma(\cdot)$ étant définie sur les courbes γ_τ, nous allons éclaircir les relations entre $\mu_\gamma(\cdot)$ et la mesure sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. Pour ce faire, on pose

$$\tau(m, \xi) = \xi + \overline{v}\frac{\alpha(m)}{g}(1-z)$$

(c'est-à-dire, $\tau(m, \xi)$ est $\tau \in \mathbb{R}$ tel que $(m, \xi) \in \gamma_\tau$) et on considère la famille $\mathfrak{A}$ des ensembles A ayant la forme

$$A = \{(m,\ \xi) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} | m \in [m_1,\ m_2\ [,\ \tau(m,\ \xi) \in [\tau_1,\ \tau_2\ [\ \} \tag{4.3}$$

avec $0 \leq m_1 \leq m_2 < \infty$, $-\infty < \tau_1 \leq \tau_2 < \infty$. Si on définit la fonction $\tilde{\mu}$: $\mathfrak{A} \to \mathbb{R}_+$ par la relation

$$\tilde{\mu}(A) = (m_2 - m_1)(\tau_2 - \tau_1)$$

pour $A = \{(m, \xi) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} | m \in [m_1, m_2[, \tau(m, \xi) \in [\tau_1, \tau_2[\}$, on constate que, de la même manière que la construction de la mesure de Lebesgue sur

$\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ à partir de la famille des rectangles, le prolongement de $\tilde{\mu}$ définit les ensembles mesurables selon $\tilde{\mu}$ de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ et la mesure sur eux, mesure que nous notons toujours $\tilde{\mu}$, et que $\tilde{\mu}$ coincide avec la mesure de Lebesgue $\mu_{L,\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}}$ sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$; on a en effet

$$\tilde{\mu}(A) = \mu_{L,\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}}(A)$$

pour $A \in \mathfrak{A}$.

Pour les mesures μ_γ et $\tilde{\mu}$ ainsi définies et les mesures de Lebesgue $\mu_{L,\mathbb{R}_+}$, $\mu_{L,\mathbb{R}}$ et $\mu_{L,\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}}$ respectivement sur $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, on a les relations suivantes.

Lemme 4.1. *Soit A un ensemble mesurable (selon Lebesgue) de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. On pose*

$$A_\tau = \{m \in \mathbb{R}_+ | \exists \xi \in \mathbb{R} \quad \textit{tel que} \ (m,\xi) \in \gamma_\tau \cap A\},$$

$$A_m = \{\tau \in \mathbb{R} | \exists \xi \in \mathbb{R} \quad \textit{tel que} \ (m,\xi) \in \gamma_\tau \cap A\}.$$

Alors on a

$$\mu_{L,\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}}(A) = \tilde{\mu}(A) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu_\gamma(A_\tau)d\tau = \int_{\gamma 0} \mu_{L,\mathbb{R}}(A_m)\mu_\gamma(dm) = \int_0^{\infty} \mu_{L,\mathbb{R}}(A_m)dm \tag{4.4}$$

(ici et dans la suite l'élément d'intégration par rapport à la mesure de Lebesgue s'écrit directement dm, $d\tau$ etc... sans utiliser les notations $\mu_{L,\mathbb{R}_+}(dm)$, $\mu_{L,\mathbb{R}}(d\tau)$, $\mu_{L,\mathbb{R}}(d\xi)$ etc...).

Lemme 4.2. *Soit $\sigma(m,\xi) \in L^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$. Alors, pour presque tout $\tau \in \mathbb{R}$ la restriction de $\sigma(m,\xi)$ à γ_τ appartient à $L^1(\gamma_\tau, \mu_\gamma)$.*

LEMME 4.3 *Soit $\sigma(m,\xi) \in L^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$. Alors on a*

$$\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}} \sigma(m,\xi) dm d\xi = \int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}} \sigma(m,\xi) d\tilde{\mu} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (\int_{\gamma_\tau} \sigma(m, \ \xi)\mu_\gamma(dm)) d\tau = \int_{\gamma 0} (\int_{-\infty}^{\infty} \sigma(m, \xi(m,\tau)) d\tau)\mu_\gamma(dm) =$$

$$= \int_0^{\infty} (\int_{-\infty}^{\infty} \sigma(m,\xi) d\xi) dm = \int_{-\infty}^{\infty} (\int_0^{\infty} \sigma(m,\xi) dm) d\xi,$$

où $\xi(m,\tau) = \tau - \overline{v}\frac{\alpha(m)}{g}(1-z)$.

Pour la démonstration des lemmes 4.1, 4.2 et 4.3, il suffit d'effectuer les modifications formelles nécessaires aux démonstrations des théorèmes classiques sur le produit des mesures et de théorème de Fubini (voir par exemple [7]), en tenant compte de la définition formulée ci-dessus des mesures μ_γ et $\tilde{\mu}$.

Maintenant on est en mesure de transformer l'équation (4.1) en une équation différentielle ordinaire. Pour cela on pose

$$\tau(m,\xi,z) = \xi + \overline{v}\frac{\alpha(m)}{g}(1-z), \ \gamma_\tau^{[0,m]} = \gamma_\tau \cap [0,m] \times \mathbb{R}.$$

Cela étant, on peut écrire l'équation (4.1) dans la forme

$$\frac{\partial}{\partial z}\sigma(z) = F_z(\sigma(z)), \ \sigma(z) = \sigma(\cdot,\cdot,\cdot,z), \tag{4.5}$$

avec

$$F_z(\sigma(z)) = F_z(\sigma(z))(m,\xi,y) =$$

$$= -\frac{m\alpha(m)}{2g}\int_{\gamma^{[0,m]}_{\tau(m,\xi,y,z)}} \beta(m-m',m')\sigma(m',\eta',y,z)\sigma(m-m',\eta'',y,z)\mu_\gamma(dm')+$$

$$+\frac{m\alpha(m)}{g}\int_{\gamma_{\tau(m,\xi,y,z)}} \beta(m,m')\sigma(m',\eta',y,z)\sigma(m,\xi,y,z)\mu_\gamma(dm'),$$

où η' et η'' sont tels que

$$(m', \eta') \in \gamma_{T(m,\xi,y,z)}, \ (m - m', \eta'') \in \gamma_{T(m,\xi,y,z)}.$$

L'équation (4.5) doit être envisagée avec la condition (2.5), c'est-à-dire

$$\sigma(1) = \sigma(m, \xi, y, 1) = \overline{\sigma}(m, \xi, y). \tag{4.6}$$

Chapitre 5

Existence et unicité de la solution avec les données dans L^1

Pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution du problème (4.5)–(4.6), nous avons besoin de préciser des conditions sur $\overline{\sigma}(m,\xi,y)$. Nous supposons que

$$\overline{\sigma}(\cdot,\cdot,\cdot) \in L^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2, \tag{5.1}$$

$$\overline{\sigma}(m,\xi,y) \geq 0 \;\; p.p.\; dans \;\; \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2, \tag{5.2}$$

$$supp(\overline{\sigma}) \subset [\overline{m}_a, \overline{m}_A] \times \mathbb{R}^2, \tag{5.3}$$

$$\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^2)} < \frac{1}{M_1(\overline{m}_A - \overline{m}_a)}, \tag{5.4}$$

Où

$$M_1 = \sup_{2\overline{m}_a \leq m \leq \overline{m}_A, \overline{m}_a \leq m' \leq m - \overline{m}_a} \frac{m\alpha(m)}{2g}\beta(m-m',m'). \tag{5.5}$$

Ici $\overline{m}_a$ et $\overline{m}_A (0 < \overline{m}_a < \overline{m}_A < \infty)$ sont les deux nombres que on a introduits dans le chapitre 2. On a alors le résultat suivant.

PROPOSITION 5.1. *Si $\overline{\sigma}(m,\xi)$ satisfait aux conditions (5.1)–(5.4), alors l'équation (4.5) avec la condition (4.6) admet une solution σ et une seule dans la classe*

$$\sigma \in C([0,1]; L^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})) \times L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times [0,1]). \tag{5.6}$$

Pour démontrer la proposition 5.1, commençons par la propriété de la convolution sur les courbes γ_τ.

LEMME 5.1. *Soient f et g deux fonctions appartenant à $L^1(\gamma_\tau, \mu_\gamma)$. On pose*

$$(f *\ g)(m) = \int_{\gamma_\tau} f(m-m')g(m')\mu_\gamma(dm').$$

Alors on a $f * g \in L^1(\gamma_\tau, \mu_\gamma)$ et

$$\|f *\ g\|_{L^1(\gamma_\tau,\mu_\gamma)} \leq \|f\|_{L^1(\gamma_\tau,\mu_\gamma)}\|g\|_{L^1(\gamma_\tau,\mu_\gamma)}.$$

Comme la mesure μ_γ ne dépend pas de τ, le lemme 5.1 est vérifié de la même manière pour tous τ.

DÉMONSTRATION. La mesure μ_γ étant bien définie sur γ_τ (voir les lemmes 4.1, 4.2, 4.3), le lemme se démontre de la même manière (avec des modifications purement formelles) que dans le cas des fonctions sommables par rapport à la mesure de Lebesgue (voir par exemple [2]). □

A la différence du cas $v = 0$ (proposition 3.1) où on a considéré la solution $\sigma(\cdot, z)$ comme fonction de z à valeurs dans $L^1(\mathbb{R}_+)$, pour la proposition 5.1 on a besoin de construire la solution $\sigma(\cdot,\cdot,z)$ comme fonction de z à valeurs dans $L^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$. Pour ce faire, il nous convient d'examiner directement l'approximation successive avec laquelle on construit la solution $\sigma(m,\xi,z)$.

Posons

$$\sigma^{[0]}(m,\xi,z) = \overline{\sigma}(m,\xi) \tag{5.7}$$

et définissons $\sigma^{[n]}$, $n = 1, 2, \cdots$, par les relations

$$\frac{\partial}{\partial z}\sigma^{[n]} = F_z(\sigma^{[n-1]}), \qquad \sigma^{[n]}(m,\xi,1) = \overline{\sigma}(m,\xi), \tag{5.8}$$

où $F_z(\cdot)$ est l'opérateur défini dans (4.5).

LEMME 5.2 *Quelque soit $n \in \mathbb{N}$, $\sigma^{[n]}$ est bien déffinie dans la classe*

$$\sigma^{[n]}(\cdot,\cdot,z) \in L^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}),\ 0 \leq z \leq 1,$$

et on a

$$\mathrm{supp}\,(\sigma^{[n]}(\cdot,\cdot,z)) \subset [\overline{m}_a, \overline{m}_A] \times \mathbb{R} \qquad \text{pour } \ 0 \leq z \leq 1, \tag{5.9}$$

$$\|\sigma^{[n]}(\cdot,\cdot,z)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})} \leq \frac{\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}}{1-(M_1+M_2)(\overline{m}_A-\overline{m}_a)\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}(1-z)} \tag{5.10}$$

pour $\frac{(M_1+M_2)(\overline{m}_A-\overline{m}_a)\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}-1}{(M_1+M_2)(\overline{m}_A-\overline{m}_a)\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}} < z \leq 1$, où

$$M_2 = \sup_{m,m'\in\mathbb{R}_+} \frac{m\alpha(m)}{g}\beta(m,m'). \tag{5.11}$$

DÉMONSTRATION. Remarquons d'abord que, si $\sigma^{[n]}(n \geq 1)$ est bien définie par les relations (5.8) et si $\mathrm{supp}(\sigma^{[n-1]}(\cdot,\cdot,z)) \subset [\overline{m}_a,\ \overline{m}_A] \times \mathbb{R}$ pour $0 \leq z \leq 1$, alors $\sigma^{[n]}$ vérifie la condition (5.9). En effet, la condition (2.8) implique que la première intégrale de l'opérateur $F_z(\cdot)$ (voir (4.5)) s'annule pour $m \geq \overline{m}_A$. D'autre part, si $m < \overline{m}_a$, alors sous le signe d'intégration $\sigma^{[n-1]}(m-m',\cdot,z)$ et $\sigma^{[n-1]}(m',\cdot,z)$ s'annule et donc l'intégrale s'annule. En outre par hypothèse $\sigma^{[n-1]}$ s'annule pour $m < \overline{m}_a$ et $m > \overline{m}_A$, ce qui implique

que même la seconde intégrale de l'opérateur $F_z(\cdot)$ s'annule pour $m < \overline{m}_a$ et $m > \overline{m}_A$. On en déduit (5.9) pour $\sigma^{[n]}$.

Examinons maintenant l'opérateur $F_z(\cdot)$ appliqué à $\sigma^{[n-1]}(\cdot,\cdot,z)$. En supposant que le support de $\sigma^{[n-1]}(\cdot,\cdot,z)$ est contenu dans $[\overline{m}_a,\ \overline{m}_A] \times \mathbb{R}$ et en rappelant (5.5) et (5.11), on a (avec la notation $\eta',\ \eta''$ comme dans (4.5)

$$|\tfrac{m\alpha(m)}{2g} \int_{\gamma^{[0,m]}_{\tau(m,\xi,z)}} \beta(m-m',m')\sigma^{[n-1]}(m',\ \eta',z)\sigma^{[n-1]}(m-m',\eta'',z)\mu_\gamma(dm')| \leq$$

$$\leq M_1(\overline{m}_A - \overline{m}_a)\|\sigma^{[n-1]}(\cdot,\cdot,z)\|^2_{L^\infty(\gamma_{\tau(m,\xi,z)},\mu_\gamma)},$$

$$|\tfrac{m\alpha(m)}{g} \int_{\gamma_{\tau(m,\xi,z)}} \beta(m,m')\sigma^{[n-1]}(m',\eta',z)\sigma^{[n-1]}(m,\xi,z)\mu_\gamma(dm')| \leq$$

$$\leq M_2(\overline{m}_A - \overline{m}_a)\|\sigma^{[n-1]}(\cdot,\cdot,z)\|^2_{L^\infty(\gamma_{\tau(m,\xi,z)};\mu_\gamma)},$$

où M_1 et M_2 sont les constantes définies dans (5.5) et (5.11) respectivement. On en déduit que, pour $\sigma^{[n]}$ définie par

$$\sigma^{[n]}(m,\xi,z) = \overline{\sigma}(m,\xi) - \int_z^1 F_{z'}(\sigma^{[n-1]}(\cdot,\cdot,z'))(m,\ \xi)dz',$$

on a

$$\|\sigma^{[n]}(\cdot,\cdot,z)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})} \leq \tag{5.12}$$

$$\leq \|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})} + (M_1+M_2)(\overline{m}_A - \overline{m}_a)\int_z^1 \|\sigma^{[n-1]}(\cdot,\cdot,z')\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}dz'.$$

En outre, en utilisant le lemme 5.1 et en tenant compte de la condition (2.8), on a

$$\|\tfrac{m\alpha(m)}{2g} \int_{\gamma^{[0,m]}_{\tau}} \beta(m-m',m')\sigma^{[n-1]}(m',\eta',z)\sigma^{[n-1]}(m-m',\eta'',z)\mu_\gamma(dm')\|_{L^1(\gamma_\tau,\mu_\gamma)} +$$

$$+\|\frac{m\alpha(m)}{g}\int_{\gamma_\tau} \beta(m,\ m')^{[n-1]}(m',\ \eta,z)\sigma^{[n-1]}(m,\ \eta,\ z)\mu_\gamma(dm')\|_{L^1(\gamma_\tau,\mu_\gamma)} \leq$$

$$\leq C\|\sigma^{[n-1]}(\cdot,\cdot,z)|_{\gamma_\tau}\|^2_{L^1(\gamma_\tau,\mu_\gamma)},$$

où C est une constante indépendante de z (et η, η' et η'' sont tels que (m,η), (m',η'), $(m-m',\eta'') \in \gamma_\tau$ comme dans (4.5)). Comme on a en outre

$$\|\sigma^{[n-1]}(\cdot,\cdot,z)|_{\gamma_\tau}\|_{L^1(\gamma_\tau,\mu_\gamma)} \leq (\overline{m}_A - \overline{m}_a)\|\sigma^{[n-1]}(\cdot,\cdot,z)|_{\gamma_\tau}\|_{L^\infty(\gamma_\tau,\mu_\gamma)} \leq$$

$$\leq (\overline{m}_A - \overline{m}_a)\|\sigma^{[n-1]}(\cdot,\cdot,z)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}$$

(pour presque tout $\tau \in \mathbb{R}$), à l'aide du lemme 4.3 on en déduit que

$$\|F_z(\sigma^{[n-1]}(\cdot,\cdot,z))\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})} \leq C'\|\sigma^{[n-1]}(\cdot,\cdot,z)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}\|\sigma^{[n-1]}(\cdot,\cdot,z)\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})} \tag{5.13}$$

avec une constante C' indépendante de z.

Définissons une suite de fonctions $y_n(z)$, $0 \leq z \leq 1$, $n \in \mathbb{N}$, par les relations récursives

$$y_0(z) = \|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})} \qquad \text{pour } \ 0 \leq z \leq 1, \tag{5.14}$$

$$y_n(z) = \|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})} + (M_1 + M_2)(\overline{m}_A - \overline{m}_a)\int_z^1 y_{n-1}(z')^2 dz' \tag{5.15}$$

$$\text{pour } \ 0 \leq z \leq 1, \quad n = 1, 2, \cdots .$$

On va démontrer par l'induction mathématique que, quelque soit $n \in \mathbb{N}$, la fonction $\sigma^{[n]}$ est bien définie et vérifie, outre la condition (5.9), les relations

$$\|\sigma^{[n]}(\cdot,\cdot,z)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})} \leq y_n(z), \tag{5.16}$$

$$\sup_{0\leq z\leq 1} \|\sigma^{[n]}(\cdot,\cdot,z)\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})} < \infty. \tag{5.17}$$

En effet, pour $n = 0$, les relations (5.9), (5.16) et (5.17) résultent immédiatement de la définition (5.7) et des hypothèses (5.1) et (5.3).

Supposons maintenant que $\sigma^{[n-1]}$ vérifie les relations (5.9), (5.16) et (5.17) (dans lesquelles on substitue naturellement $n-1$ à la place de n). Nous avons déjà remarqué que, dans ces hypothèse, $\sigma^{[n]}$ vérifie la condition (5.9). D'autre part, comme on le constate facilement, l'inégalité (5.16) résulte de la définition de y_n et de l'inégalité (5.12). Enfin, l'inégalité (5.13), jointe à la définition (5.8) de $\sigma^{[n]}$ et l'hypothèse sur $\sigma^{[n-1]}$, implique que $\sigma^{[n]}$ vérifie également (5.17).

On remarque que la suite $\{y_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$, $0 \leq z \leq 1$, est une suite croissante et est l'approximation successive de la solution $Y(z)$ du problème de Cauchy (pour $z \leq 1$)

$$Y'(z) = -(M_1 + M_2)(\overline{m}_A - \overline{m}_a)Y(z)^2, \qquad Y(1) = \|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}.$$

La fonction $Y(z)$ a la forme explicite

$$Y(z) = \frac{\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}}{1-(M_1+M_2)(\overline{m}_A-\overline{m}_a)\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}(1-z)}$$

pour $\frac{(M_1+M_2)(\overline{m}_A-\overline{m}_a)\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}-1}{(M_1+M_2)(\overline{m}_A-\overline{m}_a)\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}} < z \leq 1$, ce qui nous permet de démontrer que (5.16) implique l'inégalité (5.10). Le lemme est démontré. $\square$

Maintenant nous allons démontrer la proposition 5.1.

Démonstration de la proposition 5.1. Nous allons démontrer avant tout l'existence et l'unicité de la solution dans un intervalle $[1-\delta, 1]$ avec $\delta > 0$ suffisament petit.

Considérons deux fonctions σ_1 et σ_2 appartenant à $L^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ et la différence $F_z(\sigma_1) - F_z(\sigma_2)$. D'après le lemme 4.3 on a

$$\|F_z(\sigma_1) - F_z(\sigma_2)\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}} |F_z(\sigma_1) - F_z(\sigma_2)| dmd\xi = \tag{5.18}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\int_{\gamma_\tau} |F_z(\sigma_1) - F_z(\sigma_2)| \mu_\gamma(dm) \Big) d\tau.$$

Or, on a

$$\int_{\gamma_\tau} |F_z(\sigma_1) - F_z(\sigma_2)| \mu_\gamma(dm) =$$

$$= \int_{\gamma_\tau} \Big| \frac{m\alpha(m)}{2g} \int_{\gamma_\tau^{[0,m]}} Q_1(m,m')\mu_\gamma(dm') - \frac{m\alpha(m)}{g} \int_{\gamma_\tau} Q_2(m,m')\mu_\gamma(dm') \Big| \mu_\gamma(dm),$$

où

$$Q_1(m,m') = \beta(m-m',m')(\sigma_1(m',\eta')\sigma_1(m-m',\eta'') - \sigma_2(m',\eta')\sigma_2(m-m',\eta'')),$$

$$Q_2(m,m') = \beta(m,m')(\sigma_1(m,\eta)\sigma_1(m',\eta') - \sigma_2(m,\eta)\sigma_2(m',\eta')),$$

$$(m,\eta),\ (m',\eta'),\ (m-m',\eta'') \in \gamma_\tau \qquad \text{(comme dans (4.5))}.$$

Donc, en raisonnant de la même manière que dans (3.8) et en appliquant le lemme 5.1, on obtient

$$\int_{\gamma_\tau} |F_z(\sigma_1) - F_z(\sigma_2)| \mu_\gamma(dm) \leq \tag{5.19}$$

$$\leq 2C_\beta \|\sigma_1 - \sigma_2\|_{L^1(\gamma_\tau,\mu_\gamma)} \big(\|\sigma_1\|_{L^1(\gamma_\tau,\mu_\gamma)} + \|\sigma_2\|_{L^1(\gamma_\tau,\mu_\gamma)} \big),$$

où C_β est la constante définie dans (3.7). Encore une fois à l'aide du lemme 4.3, on déduit de (5.18) et (5.19) que

$$\|F_z(\sigma_1) - F_z(\sigma_2)\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})} \leq \tag{5.20}$$

$$\leq 2C_\beta \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathbb{R}} \big(\|\sigma_1\|_{L^1(\gamma_\tau,\mu_\gamma)} + \|\sigma_2\|_{L^1(\gamma_\tau,\mu_\gamma)} \big) \|\sigma_1 - \sigma_2\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}.$$

Maintenant on substitue $\sigma_1 = \sigma^{[n]}$ et $\sigma_2 = \sigma^{[n-1]}$ dans (5.20). Alors en vertu de (5.10) (voir aussi (5.9)) on a

$$\|F_z(\sigma^{[n]}) - F_z(\sigma^{[n-1]})\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})} \leq \Lambda_\sigma(z) \|\sigma^{[n]} - \sigma^{[n-1]}\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}, \tag{5.21}$$

$$\Lambda_\sigma(z) = 4C_\beta(\overline{m}_A - \overline{m}_a)\frac{\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}}{1-(M_1+M_2)(\overline{m}_A - \overline{m}_a)\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}(1-z)}.$$

C'est-à-dire, parmi les fonctions $\sigma^{[n]}$, $n \in \mathbb{N}$, l'opérateur $F_z(\cdot)$ satisfait à la condition de Lipschitz dans l'espace $L^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ avec le coefficient de Lipschitz $\Lambda_\sigma(z)$. Donc, de la même manière que pour la démonstration de l'existence et de l'unicité de la solution locale d'une équation différentielle ordinaire, on peut démontrer qu'il existe un $\delta > 0$ tel que $\sigma^{[n]}$ converge, quand n tend vers l'infini, vers une fonction σ dans la topologie de

$$C([1-\delta, 1]; L^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}))$$

et que la limite σ satisfait, dans l'intervalle $[1-\delta, 1]$, à l'équation (4.5) et à la condition (4.6). On voit aisément que l'unicité de la solution σ dans l'intervalle $[1-\delta, 1]$ se démontre d'une manière analogue à la démonstration du théorème classique.

Une fois obtenue la solution locale σ dans l'intervalle $[1-\delta, 1]$, examinons ses propriétés. Avant tout on remarque que (5.9) pour tout $n \in \mathbb{N}$, implique que la limite de la suite $\sigma^{[n]}$ jouit de la même propriété, c'est-à-dire on a

$$\text{supp}\,(\sigma) \subset [\overline{m}_a, \overline{m}_A] \times \mathbb{R} \times [1-\delta, 1]. \tag{5.22}$$

D'autre part, pourvu que $\sigma \geq 0$, la première intégrale de l'opérateur $F_z(\cdot)$ (voir (4.5)) est négative (≤ 0), tandis que la seconde intégrale de $F_z(\cdot)$ est de la forme

$$\sigma(m, \xi, z)\frac{m\alpha(m)}{g}\int_{\gamma_\tau} \beta(m, m')\sigma(m', \eta(m, m', \xi, z), z)\mu_\gamma(dm').$$

Donc de manière analogue aux cas des équations différentielles ordinaires, on peut démontrer que

$$\sigma \geq 0 \qquad \text{p.p. dans } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times [1-\delta, 1]. \tag{5.23}$$

$$\|\overline{\sigma}_1\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^2)} < \frac{1}{M_1(\overline{m}_A - \overline{m}_a)}, \tag{6.16}$$

M_1 étant la constante indiquée dans la proposition 5.1, alors l'équation (4.5) avec la condition (4.6) admet une solution σ et une seule appartenant à la classe

$$\sigma \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \times [0,1])$$

et σ vérifie les relations

$$\sigma(m,\xi_1,\xi_2,z) \geq 0 \qquad p.p.\ dans\ \ \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \times [0,1],$$

$$\sigma(m,\xi_1,\xi_2,z) = 0 \qquad pour\ \ m \in [0,\overline{m}_a] \cup [\overline{m}_A,\infty[.$$

Démonstration.

Pour démontrer l'existence de la solution stationnaire avec le vent horizontal du problème (4.5), (4.6), on considère une famille d'ensembles mesurable et bornés ω_i, $i \in \mathbb{N}$, définis par

$$\omega_i = \left\{ \begin{array}{c} (m,\xi_1,\xi_2) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 | \overline{m}_a \leq m \leq \overline{m}_A, -i \leq \xi_1 \leq i, \\ -i \leq \xi_2 \leq i \end{array} \right\} \tag{6.17}$$

nous permet de définir un nombre N tel que

$$D_{\omega_i}(1) \subset \left\{ \begin{array}{c} (m,\xi_1,\xi_2) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 | \overline{m}_a \leq m \leq \overline{m}_A, -i-N \leq \xi_1 \leq i+N, \\ -i-1 \leq \xi_2 \leq i+1 \end{array} \right\} \tag{6.18}$$

on considère une fonction $\psi_i \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$; $\psi_i \geq 0$ telle que

$$\psi_i(\xi_1,\xi_2) = \left\{ \begin{array}{lll} 1 & \text{si} & \begin{array}{l} |\xi_1| \leq i+N \\ |\xi_2| \leq i+1 \end{array} \\ 0 & \text{si} & \begin{array}{l} |\xi_1| \geq i+N+1 \\ |\xi_2| \geq i+2 \end{array} \end{array} \right. \tag{6.19}$$

on a évidement

$$D_{\omega_i}(1) \subset \{(m, \xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 | \psi_i(\xi_1, \xi_2) = 1\} \tag{6.20}$$

pour $i \in \mathbb{N}$.

Cela étant, on considère la famille d'équations

$$\partial_z \sigma^{[i]}(m, \xi_1, \xi_2, z) = F(\sigma^{[i]}(z))(m, \xi_1, \xi_2), \qquad i \in \mathbb{N} \tag{6.21}$$

(avec $F(\cdot)$ définie dans (4.5)), complétées par les conditions

$$\sigma^{[i]} = \psi_i \overline{\sigma}_1 \qquad \text{sur} \;\; \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2. \tag{6.22}$$

D'après la proposition 5.1 avec ($\overline{\sigma} = \psi_i \overline{\sigma}_1$) le problème (6.21)–(6.22) admet une unique solution

$$\sigma = \sigma^{[i]} \in C([0,1]; L^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \times [0,1]) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \times [0,1]))$$

telle que

$$\sigma^{[i]} \geq 0 \qquad \text{p.p. dans} \;\; \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \times [0,1],$$

$$\sigma^{[i]}(m, \xi_1, \xi_2, z) = 0 \qquad \text{pour} \;\; m \in [0, \overline{m}_a] \cup [\overline{m}_A, \infty[.$$

D'autre part, d'après la définition des ensembles ω_i (voir (6.17)), on a

$$D[\omega_i] \subset D[\omega_{i'}] \qquad \text{pour} \;\; i \leq i'.$$

Par conséquent, en vertu du lemme 6.1 et de (6.22), on a

$$\sigma^{[i]} = \sigma^{[i']} \qquad \text{p.p. dans} \;\; D[\omega_i] \qquad \text{pour} \;\; i \leq i'.$$

Donc, en définissant σ par

$$\sigma = \begin{cases} \sigma^{[1]} & \text{dans} \quad D[\omega_1] \\ \sigma^{[i]} & \text{dans} \quad D[\omega_i] \backslash D[\omega_{i-1}], i = 2, \cdot, \cdot, \cdot, \end{cases}$$

on a

$$\sigma = \sigma^{[i]} \qquad \text{p.p. dans} \quad D_{\omega_i}(1) \quad \forall i \in \mathbb{N} \backslash \{0\}.$$

Par suite, en vertu de (6.21) on a

$$\partial_z \sigma(m, \xi_1, \xi_2, z) = F(\sigma(z))(m, \xi_1, \xi_2) \qquad \text{dans} \quad D[\omega_i] \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

En outre, en vertu de (6.20) et (6.22), on a

$$\sigma = \sigma^{[i]} = \overline{\sigma}_1 \qquad \text{sur} \quad D_{\omega_i}(1).$$

Donc, en rappelant les relations $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \times [0,1] \subset \underset{i \in \mathbb{N}}{\cup} D[\omega_i]$ et $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \subset \underset{i \in \mathbb{N}}{\cup} D_{\omega_i}(1)$ qui résultent de la définition de ω_i, $D[\omega_i]$, $D_{\omega_i}(1)$, on peut conclure qu'il existe une solution du problème (4.5), (4.6).

Pour démontrer l'unicité de la solution, considérons deux éventuelles solutions σ_1 et σ_2 du problème (4.5), (4.6). Si $\sigma_1 \neq \sigma_2$ sur un ensemble de mesure strictement positive, alors on peut choisir un ensemble mesurable ω tel que $0 < mes\,(\omega) < \infty$ et que $mes\,(\{(m, \xi_1, \xi_2, z) \in D[\omega] \mid \sigma_1 \neq \sigma_2\}) > 0$.

Or comme σ_1 et σ_2 sont des solutions du problème (4.5), (4.6), $\sigma_1 = \sigma_2$ sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \times \{1\}$, en particulier $\sigma_1 = \sigma_2$ sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \times \{1\} \cap D[\omega]$; cette condition entraîne, d'après le lemme 6.1, que $\sigma_1 = \sigma_2$ dans $D[\omega]$, ce qui prouve qu'il n'est pas possible d'avoir deux solutions σ_1 et σ_2 qui se différent sur un ensemble de mesure strictement positive.

L'unicité de la solution est démontrée. $\square$

En retournant aux coordonnées (m, x_1, x_2, z), on peut exprimer le résultat dans la forme suivante.

Théorème 6.2.

Si $\overline{\sigma} \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2)$ satisfait aux conditions

$$\overline{\sigma}(m, x_1, x_2) \geq 0 \qquad p.p \text{ sur } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2,$$

$$\overline{\sigma}(m, x_1, x_2) = 0 \qquad \text{pour } m \in [0, \overline{m}_a] \cup [\overline{m}_A, \infty[,$$

$$\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2)} < \frac{1}{M_1(\overline{m}_A - \overline{m}_a)}.$$

M_1 étant la constante indiquée dans la proposition 5.1, alors l'équation (2.4) *avec la condition* (2.5) *admet unique solution σ et une seule appartennant à la classe*

$$\sigma \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \times [0, 1])$$

et vérifie les relations

$$\sigma\,(m, x_1, x_2, z) \geq 0 \qquad p.p \text{ sur } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \times [0, 1]\,,$$

$$\overline{\sigma}\,(m, x_1, x_2, z) = 0 \qquad \text{pour } m \in [0, \overline{m}_a] \cup [\overline{m}_A, \infty[\,.$$

Démonstration. Rappellons qu'avec le changement de variables $(m, x_1, x_2, z) \mapsto (m, \xi_1, \xi_2, z)$ introduit par (3.1), on a transformé l'équation (2.4) et la condition (2.5) dans (4.5). Donc, si $\widetilde{\sigma}\,(m, \xi_1, \xi_2, z)$ est la solution du problème (4.5), (4.6) dont l'existence et l'unicité ont été démontrées dans le théorème 6.1, alors, en faisant retourner les fonctions dans les coordonnées (m, ξ_1, ξ_2, z), on voit que la fonction

$$\sigma(m, x_1, x_2, z) = \widetilde{\sigma}\left(m, \xi_1 + \overline{v}(y)\frac{\alpha(m)}{g}(1-z), \xi_2, z\right)$$

satisfait à l'equation (2.4) et a la condition (2.5). L'unicité de la solution σ découle de celle de $\widetilde{\sigma}$ démontrée dans le théoréme 6.1.□

Chapitre 7

Perspective : solution globale de l'equation de coagulation en chute avec le vent horizontal

7.1 Position du problème

Considérons le domaine $\mathbb{R}^2 \times [0,1]$, qui représente une région "horizontale" dans laquelle les gouttelettes se déplacent à cause de la force gravitationnelle et avec le vent.

De manière analogue aux cas précédents désignons par $\sigma(m,t,x,y,z)$ la densité de l'eau liquide contenue dans les gouttelettes de masse m au point $(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \times [0,1]$ et à l'instant $t \in \mathbb{R}$. Toujours de manière analogue aux cas stationnaires que nous avons étudiés précédemment, nous supposons que les gouttelettes subissent le processus de coagulation et en même temps se déplacent dans l'air par la force gravitationnelle en subissant également l'effet de frottement avec l'air environnant.

De manière analogue à ce qui précède, nous sommes amenés à l'equation

$$\partial_t \sigma(m,t,x,y,z) + \nabla_{(x,y,z)} \cdot (\sigma(m,t,x,y,z)u(m)) = \tag{7.1}$$

$$= \frac{m}{2}\int_0^m \beta(m-m',m')\sigma(m',t,x,y,z)\sigma(m-m',t,x,y,z)dm' +$$
$$-m\int_0^\infty \beta(m,m')\sigma(m,t,x,y,z)\sigma(m',t,x,y,z)dm',$$

où $\nabla_{(x,y,z)} = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$, tandis que $\beta(m_1, m_2)$ représente la probabilité de rencontre entre une gouttelette de masse m_1 et une gouttelette de masse m_2 et que $u(m)$ désigne la vitesse des gouttelettes de masse m. Comme aux cas stationnaires on suppose que

$$\beta(\cdot,\cdot) \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+), \qquad \beta(m_1,m_2) \geq 0 \;\; \forall \;\; (m_1,m_2) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+,$$

$$\beta(m_1,m_2) = \beta(m_2,m_1).$$

D'autre part, pour la fonction $u(m)$ nous donnons aussi l'expression

$$U = U(m) = \left(\overline{v}(y), 0, -\frac{g}{\alpha(m)}\right), \tag{7.2}$$

où $\overline{v}(y)$ est une fonction de $y \in \mathbb{R}$ et g est constante ($g > 0$), tandis que $\alpha(m)$ est une fonction de la masse m ($\alpha(m) > 0$). Si $g, \alpha(m)$ et $\overline{v}(y)$ désignent respectivement l'accélération gravitationnelle, le coefficient de friction entre les gouttelettes et l'air et la vitesse de l'air.la relation (7.2) correspond, dans une bonne approximation, à la vitesse réelle des gouttelettes dans l'atmosphère (voir par exemple [15], [2], [14]).

De manière analogue aux cas précédents on suppose

$$0 < \overline{m}_a \leq m \leq \overline{m}_A < \infty.$$

$$\sup_{m \in \mathbb{R}_+} \alpha(m) < \infty.$$

$$\beta(m_1,\; m_2) = 0 \quad pour \;\; m_1 + m_2 \geq \overline{m}_A.$$

Pour la commodité de la notation, nous posons

$$\overline{\alpha}_0 = \sup_{m \in \mathbb{R}_+} \alpha(m).$$

Dans la suite, nous allons envisager le problème de trouver une fonction $\sigma(m,t,x,y,z)$, qui vérifie l'équation (7.1) pour

$$(m,t,x,y,z) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \times [0,1],$$

avec la condition aux limites

$$\sigma(m,t,x,y,1) = \overline{\sigma}_1(m,t,x,y), \tag{7.3}$$

et la condition initiale

$$\sigma(m,0,x,y,z) = \overline{\sigma}_0(m,x,y,z). \tag{7.4}$$

On suppose que

$$\overline{\sigma}_1(m,t,x,y) = \overline{\sigma}_0(m,x,y,z)$$

pour $m \in [0, \overline{m}_a] \cup [\overline{m}_A, \infty[$.

7.2 Préliminaires

Pour résoudre l'équation (7.1) avec la condition aux limites et la condition initiale, nous allons la transformer en une équation différentielle ordinaire, en introduisant les variables $(m,t,x,y,z) \mapsto (\tilde{m},\tilde{t},\xi,\tilde{y},\tilde{z})$ par les relations

$$\begin{cases} \tilde{m} = m, \\ \xi = x - \overline{v}(y)\dfrac{\alpha(m)}{g}(1-z), \\ \tilde{y} = y, \\ \tilde{z} = z, \\ \tilde{t} = t + \dfrac{1-z}{u(m)}, \end{cases}$$

où $u(m)$ est une composante "verticale" donc $u(m) = -\dfrac{g}{\alpha(m)}$,
nous définissons

$$\tilde{\sigma}(\tilde{m}, \tilde{t}, \xi, \tilde{y}, \tilde{z}) = \sigma(m, t, x, y, z) = \sigma(m, \tilde{t} + -\frac{\alpha(m)}{g}(1-z), \xi + \overline{v}(y)\frac{\alpha(m)}{g}(1-z), y, z).$$

Pour éviter la notation lourde, on va écrire simplement m, x, y et z au lieu de $\tilde{m}$, ξ, $\tilde{y}$ et $\tilde{z}$ et encore $\sigma(m, \tilde{t}, \xi, y, z)$ au lieu de $\tilde{\sigma}(\tilde{m}, \tilde{t}, \xi, \tilde{y}, \tilde{z})$, ce qui ne cause pas d'équivoque dans le calcul.

On constate que dans les coordonnées $(m, \tilde{t}, \xi, y, z)$ l'équation (7.1) se transforme en

$$\frac{\partial}{\partial z}\sigma\left(m, \tilde{t}, \xi, y, z\right) = \tag{7.5}$$

$$= \frac{m}{2u\left(m\right)} \int_0^m \beta\left(m - m', m'\right) \sigma\left(m', \tilde{t}^*\left(m, m', \tilde{t}, \xi, y, z\right), \eta\left(m, m', \xi, y, z\right) y, z\right) \times$$
$$\times \sigma\left(m - m', \tilde{t}^*\left(m, m - m', \tilde{t}, \xi, y, z\right), \eta\left(m, m - m', \xi, y, z\right) y, z\right) dm' +$$
$$- \frac{m}{u\left(m\right)} \int_0^\infty \beta\left(m, m'\right) \sigma(m, \tilde{t}, \xi, y, z) \sigma\left(m', \tilde{t}^*\left(m, m', \tilde{t}, \xi, y, z\right), \eta\left(m, m', \xi, y, z\right) y, z\right) dm'$$

$$\begin{cases} \tilde{t}^*\left(m, m', \tilde{t}, \xi, y, z\right) = \tilde{t} - \frac{1-z}{u(m)} + \frac{1-z}{u(m')}, \\ \eta\left(m, m', \xi, y, z\right) = \xi + \overline{v}\left(y\right) \frac{\alpha(m')}{g}\left(1 - z\right). \end{cases}$$

De manière analogue aux cas précédents nous allons réformuler l'équation (7.5) en une équation différentielle ordinaire à valeur dans un espace de Banach, nous introduisons pour chaque $z \in [0, 1]$ fixé, la famille de courbes

$$\gamma_{\tau,\xi} = \gamma_{\tau,\xi,y,z} = \left\{ \begin{array}{c} \left(m, \tilde{t}, \eta\right) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \,/\, \tilde{t} = \tau + \frac{1-z}{u(m)}, \\ \eta = \xi + \overline{v}\left(y\right) \frac{\alpha(m)}{g}\left(1 - z\right), \tau \in \mathbb{R} \end{array} \right\},$$

on pose

$$\tau\left(m, \tilde{t}, z\right) = \tilde{t} - \frac{1-z}{u(m)}, \quad \gamma^{[0,m]}_{\tau,\xi\left(m,\tilde{t},z\right)} = \gamma_{\tau,\xi\left(m,\tilde{t},z\right)} \cap [0, m] \times \mathbb{R}^2$$

$\xi\left(m,\tilde{t},y,z\right)=\eta-\overline{v}\left(y\right)\frac{\alpha(m)}{g}\left(1-z\right).$

Cela étant, on peut écrire l'équation (7.5) dans la forme

$$\frac{\partial}{\partial z}\sigma(z)=F_z(\sigma(z)),\ \ \sigma(z)=\sigma(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,z), \tag{7.6}$$

avec

$$F_z(\sigma(z))=F_z(\sigma(z))(m,\tilde{t},\xi,y)= \tag{7.7}$$
$$=\frac{m}{2u(m)}\int_{\gamma^{[0,m]}_{\tau,\xi(m,\tilde{t},\xi,y,z)}}\beta(m-m',m')\sigma(m',\tilde{t}',\eta,y,z)\sigma(m-m',\tilde{t}'',\eta'',y,z)\mu_\gamma(dm')+$$
$$-\frac{m}{u(m)}\int_{\gamma_{\tau,\xi(m,\tilde{t},\xi,y,z)}}\beta(m,m')\sigma(m',\tilde{t}',\eta,y,z)\sigma(m,\tilde{t},\xi,y,z)\mu_\gamma(dm'),$$

où η' et η'' et $\tilde{t}'$ et $\tilde{t}''$ sont définis par les relations

$$(m',\tilde{t}',\eta')\in\gamma_{\tau,\xi(m,\tilde{t},\xi,y,z)},\ \ (m-m',\tilde{t}'',\eta'')\in\gamma^{[0,m]}_{\tau,\xi(m,\tilde{t},\xi,y,z)}.$$

Analoguement, les conditions aux limites et les conditions initiales se transforment en

$$\sigma\left(m,\tilde{t},\xi,y,1\right)=\overline{\sigma}_1^*\left(m,\tilde{t},\xi,y\right), \tag{7.8}$$
$$\sigma\left(m,\frac{1-z}{u\left(m\right)},\xi,y,z\right)=\overline{\sigma}_0^*\left(m,\xi,y,z\right), \tag{7.9}$$

oú $\overline{\sigma}_0^*$ et $\overline{\sigma}_1^*$ sont les fonctions obtenues de $\overline{\sigma}_0$ et $\overline{\sigma}_1$ par le changement de variables introduit ci-dessus

7.3 La solution avec la condition d'entrée de classe L^1

Pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution globale du problème (7.6)–(7.8), nous précissons d'abord que le domaine dans lequel nous allons considérer l'équation (7.6) est

$$\Omega = \bigcup_{\tau>0,\xi\in\mathbb{R},y\in\mathbb{R},0<z<1} \gamma_{\tau,\xi,y,z} = \left\{ \left(m,\tilde{t},\xi,y,z\right) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3 \times]0,1[\,/\, \tilde{t} > \tfrac{1-z}{u(m)}, \right\}, \tag{7.10}$$

on pose

$$\Gamma_a = \left\{ \left(m,\tilde{t},\xi,y,z\right) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3 \times [0,1] \,/\, \tilde{t} = \tfrac{1-z}{u(m)}, \right\},$$

$$\Gamma_b = \{z=1\} \cap \overline{\Omega}$$

les conditions (7.7)–(7.8) peuvent être écrite dans la forme

$$\sigma = \overline{\sigma}_1^* \quad \text{sur } \Gamma_b, \qquad \sigma = \overline{\sigma}_0^* \quad \text{sur } \Gamma_a, \tag{7.11}$$

Avant d'étudier le cas général du problème (7.6)–(7.9), nous allons examiner le cas où la donnée $\overline{\sigma}_1^*$ appartient à $L^1(\Gamma_b)$. Donc ce cas on a la proposition suivante.

Proposition 7.1.

Soient $\overline{\sigma}_{(a)} \in L^1(\Gamma_a) \cap L^\infty(\Gamma_a)$ et $\overline{\sigma}_{(b)} \in L^1(\Gamma_b) \cap L^\infty(\Gamma_b)$ telles que

$$\overline{\sigma}_{(a)}(m,\tilde{t},\xi,y,z) \geq 0 \qquad p.p.\ sur \quad \Gamma_a,$$

$$\overline{\sigma}_{(b)}(m,\tilde{t},\xi) \geq 0 \qquad p.p.\ sur \quad \Gamma_b,$$

$$\overline{\sigma}_{(a)}(m,\tilde{t},\xi,y,z) = 0, \overline{\sigma}_{(b)}(m,\tilde{t},\xi) = 0 \qquad pour \quad m \in [0,\overline{m}_a] \cup [\overline{m}_A,\infty[.$$

Si

$$\max(\|\overline{\sigma}_{(a)}\|_{L^\infty(\Gamma_a)}, \|\overline{\sigma}_{(b)}\|_{L^\infty(\Gamma_b)}) < \frac{1}{M_1(\overline{m}_A - \overline{m}_a)},$$

$$M_1 = \sup_{2\overline{m}_a \leq m \leq \overline{m}_A, \overline{m}_a \leq m' \leq m - \overline{m}_a} \frac{m\alpha(m)}{2g} \beta(m-m',m'),$$

alors il existe une solution σ et une seule de l'équation (7.6) *satisfaisant aux conditions*

$$\sigma = \overline{\sigma}_{(b)} \qquad sur \ \ \Gamma_b, \sigma = \overline{\sigma}_{(a)} \qquad sur \ \ \Gamma_a, \tag{7.12}$$

solution appartenant à la classe

$$\sigma \in C([0,1]; L^1(\Omega_z) \cap L^\infty(\Omega)), \tag{7.13}$$

où

$$\Omega_z = \{(m, \tilde{t}, \xi, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3 / \tilde{t} > \frac{1-z}{u(m)}\}. \tag{7.14}$$

DÉMONSTRATION. On considère le domaine

$$\Omega_\infty = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3 \times]0,1[,$$

avec la condition d'entrée sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3 \times \{1\}$. Donc, pour démontrer la proposition, il nous suffit de transformer le problème (7.6)–(7.12) Pour ce faire, introduisons d'abord, pour chaque point $(m, \tilde{t}, \xi, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3$ le nombre $\zeta_1(m, \tilde{t}) \in [0,1]$ défini par la relation

$$\zeta_1(m, \tilde{t}) = \begin{cases} \max(0, 1 + \frac{\tilde{t}}{\alpha(m)} g) & \text{si } \tilde{t} \leq 0, \\ 1 & \text{si } \tilde{t} > 0. \end{cases} \tag{7.15}$$

On remarque que

$$\Omega = \{(m, \tilde{t}, \xi, y, \ z) \in \Omega_\infty | 0 < z < \zeta_1(m, \tilde{t})\},$$

$$(m, \tilde{t}, \xi, y, \ \zeta_1(m, \tilde{t})) \in \Gamma_b \cup \Gamma_a \ \forall (m, \tilde{t}, \xi, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3, \ \tilde{t} \geq -\frac{\alpha(m)}{g}.$$

Prolongeons par 0 sur $\Omega_\infty \backslash \Omega$ la fonction $F_z(\sigma(z))(m, \tilde{t}, \xi, y)$ définie dans (7.7) ; plus précisément on pose

$$\tilde{F}_z(\sigma(z))(m, \tilde{t}, \xi, y) = \begin{cases} F_z(\sigma(z))(m, \tilde{t}, \xi, y) & \text{si } 0 \leq z \leq \zeta_1(m, \tilde{t}), \\ 0 & \text{si } \zeta_1(m, \tilde{t}) < z \leq 1. \end{cases} \tag{7.16}$$

On pose en outre

$$\overline{\sigma}_{(a,b)}(m,\tilde{t},\xi,y) = \begin{cases} \overline{\sigma}_{(a)}(m,\tilde{t},\xi,y\ \zeta_1(m,\tilde{t})) & \text{si } -\frac{\alpha(m)}{g} \leq \tilde{t} \leq 0, \\ \overline{\sigma}_{(b)}(m,\tilde{t},\xi,y) & \text{si } \tilde{t} > 0, \\ 0 & \text{si } \tilde{t} < -\frac{\alpha(m)}{g}. \end{cases} \quad (7.17)$$

Cela étant, on considère l'équation

$$\frac{\partial}{\partial z}\tilde{\sigma}(z) = \tilde{F}_z(\tilde{\sigma}(z)),\ \tilde{\sigma}(z) = \tilde{\sigma}(\cdot,\ \cdot,\cdot,\ \cdot,\ z)\ dans\ \Omega_\infty, \quad (7.18)$$

avec la condition

$$\tilde{\sigma}(m,\tilde{t},\xi,y,\ 1) = \overline{\sigma}_{(a,b)}(m,\tilde{t},\xi,y)\ dans\ \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3, \quad (7.19)$$

ou, en forme intégrale,

$$\tilde{\sigma}(m,\tilde{t},\xi,y\ z) = \overline{\sigma}_{(a,b)}(m,\tilde{t},\xi,y) - \int_z^1 \tilde{F}_{z'}(\tilde{\sigma}(z'))(m,\tilde{t},\xi,y)dz'. \quad (7.20)$$

En vertu de (7.16) et (7.17), il résulte de (7.20) que

$$\tilde{\sigma}(m,\tilde{t},\xi,y,\ \zeta_1(m,\tilde{t})) = \overline{\sigma}_{(a)}(m,\tilde{t},\xi,y,\ \zeta_1(m,\tilde{t}))\ si\ -\frac{\alpha(m)}{g} \leq \tilde{t} \leq 0,$$

$$\tilde{\sigma}(m,\tilde{t},\xi,y,\ \zeta_1(m,\tilde{t})) = \tilde{\sigma}(m,\tilde{t},\xi,y,\ 1) = \overline{\sigma}_{(b)}(m,\tilde{t},\xi,y)\ si\ \tilde{t} > 0,$$

c'est-à-dire

$$\tilde{\sigma} = \overline{\sigma}_{(b)}\ sur\ \Gamma_b,\ \tilde{\sigma} = \overline{\sigma}_{(a)}\ sur\ \Gamma_a. \quad (7.21)$$

De la sorte, si $\tilde{\sigma}(m,\tilde{t},\xi,y,\ z)$ vérifie (7.20), alors $\tilde{\sigma}(m,\tilde{t},\xi,y,\ z)$ vérifie également

$$\tilde{\sigma}(m,\tilde{t},\xi,y,\ z) = \overline{\sigma}_{(a)}(m,\tilde{t},\xi,y,\ \zeta_1(m,\tilde{t})) - \int_z^{\zeta_1(m,\tilde{t})} \tilde{F}_{z'}(\tilde{\sigma}(z'))(m,\tilde{t},\xi,y)dz' \quad (7.22)$$

pour $-\dfrac{\alpha(m)}{g} \leq \tilde{t} \leq 0, \qquad 0 \leq z \leq \zeta_1(m, \tilde{t}),$

$$\tilde{\sigma}(m, \tilde{t}, \xi, y, \ z) = \overline{\sigma}_{(b)}(m, \tilde{t}, \xi, y) - \int_z^1 \tilde{F}_{z'}(\tilde{\sigma}(z'))(m, \tilde{t}, \xi, y)dz' \ \text{ pour } \ \tilde{t} > 0. \tag{7.23}$$

On déduit de (7.21), (7.22) et (7.23) que , si $\tilde{\sigma}(m, \tilde{t}, \xi, y, z)$ vérifie alors la restriction $\sigma = \tilde{\sigma}|_{\Omega}$ de $\tilde{\sigma}$ sur Ω vérifie (7.6)–(7.12). pour appliquer la proposition 5.1 du cas stationnaire au problème (7.20) nous rappellons que l'opérateur $\tilde{F}_z(\tilde{\sigma}(z))$ ne diffère pas de l'opérateur $F_z(\sigma(z))$ que par la proposition 5.1 du cas stationnaire par la relation

$$\tilde{F}_z(\tilde{\sigma}(z))(m, \tilde{t}, \xi, y) = 0 \qquad \text{dans } \ \Omega_\infty \backslash \Omega,$$

ils sont du même type que dans Ω. Nous remarquons aussi que chaque courbe $\gamma_{\tau,\xi,y,z}$ appartient entièrement à Ω ou entièrement à $\Omega_\infty\backslash\Omega$ ou bien entièrement à l'interface $\overline{\Omega} \cap \overline{\Omega_\infty\backslash\Omega}$, que on a utilisées dans la démonstration du la proposition 5.1 au cas stationnaire.

Rappelons les conditions sur $\overline{\sigma}_{(a,b)}$, et la définition (7.17), qui implique entre autres

$$\|\overline{\sigma}_{(a,b)}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})} = \max(\|\overline{\sigma}_{(a)}\|_{L^\infty(\Gamma_a)}, \ \|\overline{\sigma}_{(b)}\|_{L^\infty(\Gamma_b)}),$$

nous pouvons transformer les conditions pour $\overline{\sigma}_{(a)}$ et $\overline{\sigma}_{(b)}$ de la proposition 7.1 qui devient pour $\overline{\sigma}_{(a,b)}$ sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$

$$\overline{\sigma}_{(a,b)}(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot) \in L^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3), \tag{7.24}$$

$$\overline{\sigma}_{(a,b)}(m, \tilde{t}, \xi, y) \geq 0 \qquad \text{p.p. dans } \ \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3,$$

$$\operatorname{supp}(\overline{\sigma}_{(a,b)}) \subset [\overline{m}_a, \ \overline{m}_A] \times \mathbb{R}^3,$$

$$\|\overline{\sigma}_{(a,b)}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^3)} < \frac{1}{M_1(\overline{m}_A - \overline{m}_a)}. \tag{7.25}$$

Comme les conditions (7.24) et (7.25) comme les conditions que celles du la proposition 5.1 de cas stationnaire, alors il existe une solution $\tilde{\sigma}$ et une seule du problème (7.20) vérifiant

$$\tilde{\sigma} \in C([0,1]; L^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3)) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3 \times [0,1]).$$

Comme nous l'avons remarqué en haut, la restriction $\sigma = \tilde{\sigma}|_\Omega$ vérifie (7.6) et (7.9) . La proposition est démontrée. □

7.4 L'idée de l'existence et l'unicité de la solution globale dans le temps avec le vent horizontal

De manière analogue aux cas précedent, et pour arriver à l'existence et l'unicité de la solution globale avec le vent horizontal dans le cas général, on peut utiliser la propriétes de "cône de dépendence" et le théorème d'existence du chapitre précedent.
On renvoit ce problème à des études futures.

Bibliographie

[1] Belhireche, H., Aissaoui, M. Z., Fujita Yashima, H. : Equations monodimensionnelles du mouvement de l'air avec la transition de phase de l'eau. *Sci. Techn. Univ. Constantine* - A, vol. **31** (2011), pp. 9–17.

[2] Belhireche, H., Aissaoui, M. Z., Fujita Yashima, H. : Solution globale de l'équation de coagulation des gouttelettes en chute. A parître sur *Rend. Sem. Mat. univ. Polit. Torino.*

[3] Brezis, H. : *Analyse fonctionelle (Théorie et applications)*, Masson, 1987.

[4] Escobedo, M., Mischler, S., Perthame, B. : Gelation in coagulation and fragmentation models. *Comm. Math. Phys.*, vol. **231** (2002), pp. 157–188.

[5] Escobedo, M., Velazquez, J.J.L. : On the fundamental solution of a linearized homogeneous coagulation equation. *Comm. Math. Phys.*, vol. **297** (2010), pp. 759–816.

[6] Escobedo, M., Mischler, S., Rodriguez Ricard, M. : On self-similarity and stationary problem for fragmentation and coagulation models. *Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. Non Linéaire*, vol. **22** (2005), pp. 99–125.

[7] Fujita Yashima, H., Campana, V., Aissaoui, M. Z. : Système d'équations d'un modèle du mouvement de l'air impliquant la transition de phase de l'eau dans l'atmosphère. *Ann. Math. Afr.*, vol. **2** (2011), pp. 66–92.

[8] Kikoïne, A. K., Kikoïne, I. K. : *Physique moléculaire* (traduit du russe). Mir, Moscou, 1979.

[9] Kolmogorov, A. N., Fomine, S. V. : *Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionelle* (traduit du russe). Mir, Moscou, 1974.

[10] Merad, M. , Belhireche, H., Fujita Yashima, H. : Solution stationnaire de l'équation de coagulation de gouttelettes en chute avec le vent horizontal. A parître sur *Rend. Sem. Mat. univ. Padova.*

[11] Mischler, S. : Contributions à l'étude mathématique de quelques modèles issus de la physique hors équilibre. *Thèse d'habilitation*, Univ. Versailles Saint-Quentin, 2001.

[12] Mischler, S., Rodriguez Ricard, M. : Existence globale pour l'équation de Smoluchowski continue non homogène et comportement asymptotique des solutions. *C. R. Acad. Sci. Paris*, Sér. I, Math., vol. **336** (2003), pp. 407–412.

[13] Müller, H. : Zur allgemeinen Theorie der raschen Koagulation. *Kolloid-chem. Beib.*, vol. **27** (1928), pp. 223–250.

[14] Niethammer, B., Velazquez, J.J.L. : Optimal bounds for self-similar solutions to coagulation equations with multiplicative kernel. A paraître sur *Commun. PDE.*

[15] Prodi, F., Battaglia, A. : *Meteorologia - Parte II, Microfisica.* Grafica Pucci, Roma, 2004. (voir aussi le site :

http ://www.meteo.uni-bonn.de/mitarbeiter/battaglia/teaching.html).

[16] Selvaduray, S., Fujita Yashima, H. : Equazioni del moto dell'aria con la transizione di fase dell'acqua nei tre stati : gassoso, liquido e solido. A paraître sur *Memorie Accad. Sci. Torino.*

[17] Sheng, P.-X., Mao, J.-T., Li, J.-G., Zhang, A.-C., Sang, J.-G., Pan, N.-X. : *Physique de l'atmosphère* (en chinois). Publ. Univ. Pékin, Pékin, 2003.

[18] Smoluchowski, M. : Drei Vorträge über Diffusion, Brownische Bewegung und Koagulation von Kolloidteilchen. *Phys. Zeits.*, vol. **17** (1916), pp. 557–585.

[19] Voloshtchuk, V. M. : *Théorie cinétique de coagulation* (en russe). Gidrometeoizdat, Leningrad, 1984.