République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **équations aux dérivées partielles**

Par :

Debbabi Fatma

Ferdes Kawther

Intitulé

Méthodes des perturbations pour résoudre des systèmes différentielles

Dirigé par : **Yacine Bouatia**

Devant le jury

PRESIDENT	N.Sellami	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Y. Bouatia	Univ-Guelma
EXAMINATEUR1	D.Bellaouar	Univ-Guelma

Session Juin 2013

Remerciement

Merci Dieu Tout-Puissant qui nous a inspiré la patience et la force pour réaliser cette étude.

En préambule à ce mémoire, nous souhaitions adresser nos remerciements les plus sincères aux personnes qui nous a apporté leur aide et qui a contribué à l'élaboration de ce mémoire ainsi qu'à la réussite de ces formidables années universitaires.

Nous tiens à remercier sincèrement à notre encadreur Monsieur Bouatia Yacine qui a dirigé notre travail par ces conseils bénéfiques, pour son soutien et sa patience.

Nous tiens à exprimer notre reconnaissance envers le jury, qui a eu la gentillesse de lire et examiner ce travail.

Nous n'oublie pas nos parents pour leur contribution, leur soutien et leur patience.

Nos remerciements à tous ceux qui ont supervisé le cours de ce travail, directement et indirectement.

Table des matières

Résumé

Dans ce travail de mémoire, nous nous intéressons a une technique qui dite méthode de perturbation qui permet de déterminer une solution approximative d'une équation différentielle ordinaire non linéaire, nous nous limitons à des équations différentielles d'ordre 2 du type :

$$\begin{cases} L(y, \dot{y}, \ddot{y}) = \varepsilon f(\dot{y}, \ddot{y}) \\ 0 < \varepsilon << 1 \end{cases}$$

Nous expliciterons des méthodes de perturbation régulière ainsi que la méthode de la moyenne qui est l'une des méthodes de perturbation singulière .

Abstract

In this work of memory we investigate a technique can be used to find an approximate solution of a system of differential equation.

We will explain methods of regular and singular perturbations.

In this work we focus on a technique called perturbation method which allows to determine an approximate solution of a ordinary non linear differential equation, we restrict ourselves to differential equations of order 2 of the type :

$$\begin{cases} L\left(y, \dot{y}, \ddot{y}\right) = \varepsilon f\left(\dot{y}, \ddot{y}\right) \\ 0 < \varepsilon << 1 \end{cases}$$

We explicit regular perturbation method and method of en moyenne as well as that is one of the singular singular methods.

0.1 Introduction

Depuis Isaac Newton , les équations différentielles jouent un rôle essentiel pour la modélisation de systèmes physiques, mécaniques, chimiques, biologiques ou économiques et une part prépondérante des phénomènes modélisés par les mathématiques le sont par des équations différentielles.
Les équations différentielles sont apparues dès le début du calcul différentiel ($16^{\text{ème}} - 17^{\text{ème}}$ siecle), avec diverse motivations, géométrique ou mécaniques. Elles sont particulièrement importantes pour la description des mouvements, ou des systèmes dynamiques.

Le premier objectif de ce cours est l'études des systèmes dynamiques, c'est à dire l'étude qualitative des équations différentielles ordinaires. Le terme « système dynamique » est apparu au début du XXème siècle entre la publication du traité fondateur de Poincaré « Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste » (cf. [Poincaré])3 en 1892, et celle, en 1927, de la monographie de Birkhoff (cf. [Birkhoff]) justement intitulée « Dynamical systems ». On cesse alors de mettre l'accent sur les méthodes explicites de résolution, dont Poincaré avait montré qu'elles ne permettaient pas de comprendre les systèmes les plus intéressants.
La théorie des perturbation a été utilisée dès le début du XVIIe siècle par les astronomes pour les besoins de la mécanique céleste.
La méthode a par ailleurs été abondamment utilisée au XXe siècle pour les besoins de la physique quantique, d'abord en mécanique quantique non relativiste, puis en théorie quantique des champs perturbative.
Notre mémoire est l'étude des méthode des perturbations des équations différentielles, elle comporte trois chapitre :
L'ouvrage commence par des rappels sur les notions générales concernant les outils de base de la théorie des systèmes différentiels qui comporte plusieurs notions importantes (points critiques, linéarisation, ensembles limites, cycles limites...), et systèmes dynamiques.
Dans le second chapitre Nous introduisons la théorie des perturbations régulières, qui permet, connaissant les solutions d'une équation, de comprendre les solutions des équations

voisines et l'appliquer sur l'équation :

$$L(y, \dot{y}, \ddot{y}) = \varepsilon f(\dot{y}, \ddot{y}).$$

Nous introduisons aussi les méthodes singulières, et parmit ces méthodes, nous esquissons l'étude de méthode de la moyenne.

Enfin l'objet de chapitre trois est d'expliquer évidement la méthode de la moyenne pour l'étude des cycles limites d'un centre linéaire perturbé.

Nous commençons par le théorème de cas général et nous étudions un exemple par sa méthode.

Chapitre 1

Notions préliminaires

Résumé

Dans ce chapitre, nous rappelons des notions générales. Nous commençons par définir le système d'équation différentielle, les systèmes dynamiques, les points d'équilibres et le système linéarisé d'un système non linéaire au voisinage d'un point d'équilibre. Ensuite nous représentons les types des points singuliers. Ensuite nous introduisons le portrait de phase et la notion d'un cycle limite et l'amplitude d'un cycle limite d'un système planaire. Enfin nous introduisons les différentes notions de la stabilité des solutions d'un tel système différentiel et en passe à l'étude de la stabilité des cycles limites.

1.1 Système d'équation différentielle

1.1.1 Notion fondamentales et définitions

Un système d'équations différentielles ordinaires

$$F_k\left(t, y_1, \dot{y}_1 \cdots y_1^{(k_1)}, y_2, \dot{y}_2, \cdots, y_2^{(k_2)}, \cdots, y_n, \dot{y}_n, \cdots, y_n^{(k_n)}\right) = 0 \qquad (1.1)$$

résolu par rapport aux dérivées $k = \overline{1, n}$ d'ordre le plus élevé $y_1^{(k_1)}, y_2^{k_2}, \cdots, y_n^{k_n}$, s'appelle système canonique, on l'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} y_1^{(k_1)} = f_1\left(t, y_1, \dot{y}_1, ..., y_1^{(k-1)}, y_2, ..., y_2^{(k_2-1)}, ..., y_n, \cdots, y_n^{(k_n-1)}\right) \\ y_2^{(k_2)} = f_2\left(t, y_1, \dot{y}_1, ..., y_1^{(k-1)}, y_2, ..., y_2^{(k_2-1)}, ..., y_n, \cdots, y_n^{(k_n-1)}\right) \\ \ldots \\ y_n^{(k_n)} = f_n\left(t, y_1, \dot{y}_1, ..., y_1^{(k-1)}, y_2, ..., y_2^{(k_2-1)}, ..., y_n, \cdots, y_n^{(k_n-1)}\right) \end{cases} . \qquad (1.2)$$

On appelle ordre du système (1.2) le nombre $p = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$

Exemple 1.1.

Un système d'équations du premier ordre

$$\frac{dy_k}{dt} = f_k\left(t, y_1, y_2, \cdots, y_n\right), \quad k = \overline{1, n}, \qquad (1.3)$$

où t la variable indépendante et $y_1, y_2, \cdots, y_n$ sont les fonctions inconnues de t, s'appelle système normal, l'ordre du système (1.3) est "n".

Remarque 1.1.

1/ On dit que deux systèmes sont équivalents s'ils possèdent les même solutions.

2/ Tout système canonique (1.2) peut le ramène au système normale (1.3) (équivalent) et l'ordre de ses deux systèmes sera le même.

Exemple 1.2.

Ramener au système normale le système différentielle suivant :

$$\begin{cases} \ddot{x} - y = 0 \\ t^3\dot{y} - 2x = 0 \end{cases} \quad \xrightarrow{\text{système canonique}} \quad \begin{cases} \ddot{x} = y \\ \dot{y} = \frac{2x}{t^3} \end{cases}$$

d'ordre 2+1=3.

Soit $y_1 = x$, $y_2 = \dot{x}$, $y_3 = y$; le système normal d'ordre 3 équivalent est :

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = y_3 \\ \dot{y}_3 = \frac{2y_1}{t^3} \end{cases}$$

Remarque 1.2.

Toute équation différentielle et tout système canonique se transforme toujours en un système normal équivalent (ont les mêmes solutions).

1.1.2 Forme d'un système linéaire

Tout système linéaire s'écrit sous la forme :

$$\dot{y}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\, y_j + b_i(t), \quad 1 \leq i \leq n$$

ceci est équivalent à

$$\dot{y} = A(t)\, y + B(t) \tag{1.4}$$

où $A(t) = (a_{ij}(t))$, $1 \leq i \leq n$ et $B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$.

(1.4) s'appelle système différentielle linéaire à coefficient non constante et avec second membre.

Le système homogène associe à (1.4) est

$$\dot{y} = A(t)\,y, \quad B(t) = 0$$

Exemple 1.3.
Le système

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = y_3 \\ \vdots \\ \dot{y}_n = f(t) - a_n(t)\,y_n - \cdots - a_1(t)\,y_1 \end{cases}$$

s'écrit sous forme matricielle comme suit

$$\dot{y} = A(t)\,y + B(t)$$

avec

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_1(t) & -a_2(t) & \cdots & \cdots & \cdots & -a_n(t) \end{pmatrix} \text{ et } B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$$

1.1.3 Matrice solution d'un système linéaire homogène

Soit la matrice $M = (M_1 M_2 \cdots M_n)$ ayant les colonnes $M_1, M_2, \cdots, M_n$.

Supposons que $\dot{M} = A(t)\, M$ alors

$$\begin{cases} \dot{M}_1 = A(t)\, M_1 \\ \dot{M}_2 = A(t)\, M_2 \\ \quad\vdots \\ \dot{M}_n = A(t)\, M_n \end{cases}$$

dans ce cas M s'appelle matrice solution du système $\dot{y} = A(t)\, y$

matrice solution $\Longleftrightarrow$ ses colonne est une solution

Exemple 1.4.

Soit le système planaire

$$\begin{cases} \dot{y} = z \\ \dot{z} = -y \end{cases} \Longleftrightarrow \dot{Y} = AY$$

$$Y = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}, \; \dot{Y} = \begin{pmatrix} \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}, \; A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice solution.

L'équation différentielle équivalente est : $\ddot{y} = \dot{z} = -y \Longrightarrow \ddot{y} + y = 0$,

sa solution général est :

$$y = y(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x), \; c_1, c_2 \text{ constantes}$$

soit

$$M_1 = \begin{pmatrix} \sin(x) \\ \cos(x) \end{pmatrix}$$

M_1 vérifie le système $\dot{y} = Ay$ car :

$$\dot{M}_1 = \begin{pmatrix} \cos(x) \\ -\sin(x) \end{pmatrix}$$

$$AM_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin(x) \\ \cos(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(x) \\ -\sin(x) \end{pmatrix} \Longrightarrow \dot{M}_1 = AM_1$$

de même pour $\dot{M}_2 = \begin{pmatrix} \cos(x) \\ -\sin(x) \end{pmatrix}$ dans ce cas $M = (M_1 M_2)$

$$= \begin{pmatrix} \sin(x) & \cos(x) \\ \cos(x) & -\sin(x) \end{pmatrix}$$

est une solution pour le système $\dot{y} = Ay$

1.1.4 Forme des solutions d'un système linéaire homogène

Notion de matrice fondamentale.

Définition 1.1.

Si $\Phi(t)$ est une matrice carré ayant pour tout $t \in I$ un déterminant non nul et si $\Phi(t)$ est solution homogène de $\dot{y} = Ay$ c'est -à- dire

$$\dot{\Phi}(t) = A(t)\,\Phi(t)$$

alors $\Phi(t)$ est appelée matrice fondamentale du système $\dot{y} = Ay$

Remarque 1.3.

Les n colonnes de la matrice fondamentale $\Phi(t)$ $(n \times n)$ sont linéairement indépendant et forme alors un système fondamental de solution pour le système

$$\dot{y} = Ay$$

théorème 1.1.

Si $\Phi(t)$ est une matrice fondamentale du système différentielle $\dot{y} = Ay$ et si k est une matrice constante non singulière $(\det k \neq 0)$ alors $\Psi(t) = \Phi(t)\,k$ est aussi matrice fondamentale du même système.

1.1.5 Système différentielle linéaire à coefficient non constants.

existence et unicité des solutions.

Considérons le problème de cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} = A(t)\, y + B(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{1.5}$$

Où $A(t)$, $B(t)$ sont continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, $t_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$.

Théorème 1.2.

Soit $A : I \to M(n \times n; \mathbb{R})$

$B : I \to \mathbb{R}^n$ continue pour tout $t_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$, le problème de cauchy (1.5) admet une unique solution $y(t)$ dans I.

Solution générale d'un système homogène

Soit $\Phi(t)$ une matrice fondamentale du système

$$\dot{y} = Ay \tag{*}$$

la solution générale de (*) est

$$y(t) = \Phi(t)\, c$$

Où, c est un vecteur constante.

Si on considère la condition initiale

$$y(t_0) = y_0$$

alors l'unique solution de (*) vérifiant cette condition initiale est

$$y(t) = \Phi(t)\,\Phi^{-1}(t_0)y_0$$

Système différentielle linéaire non homogène

Considérons le système :

$$\dot{y} = A(t)\,y + B(t) \tag{**}$$

avec $A(t)$, $B(t)$ continues sur un intervalle I de R.

Comme le cas scalaire on peut écrire la solution générale de (**) comme la somme d'une solution particulière de (**) et la solution générale du système homogène associe

$$\dot{y} = A(t)\,y$$

La méthode de la variation de la constante s'applique aussi les systèmes linéaires.

Théorème 1.3.

La solution générale de (**) est

$$y(t) = y_{GH}(t) + y_p(t)$$

Où $y_p(t)$ est un solution particulière de (*), $y_{GH}(t)$ est la solution générale de

$$\dot{y} = A(t)\,y$$

Soit le système

$$\dot{y} = A(t)\,y + B(t) \tag{**}$$

La solution générale de (**) est :

Théorème 1.4.

$$y(t) = c\Phi(t) + y(t) = \Phi(t) \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s) B(s) ds$$

Où $\Phi(t)$ est une matrice fondamentale du

$$y' = A(t) y$$

Si on considèrent la condition initiale

$$y(t_0) = y_0$$

alors l'unique solution de (**) vérifiant cette condition initiale est :

$$y(t) = \Phi(t) \Phi^{-1}(t_0) y_0 + \Phi(t) \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s) B(s) ds$$

1.2 Systèmes dynamiques, points critiques

Définition 1.2.

Un système dynamique sur $\mathbb{R}^n$ est une application : $U \colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ définie sur tout $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$, telle que :

1/ $U(\cdot, x) : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est continue.

2/ $U(t, \cdot) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est continue.

3/ $U(0, x) = x$.

4/ $U(t+s, x) = U(t, U(s, x))$ pour t, $s \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Soit le système linéaire :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}^+, \ x_0 \in \mathbb{R}^n \tag{1.6}$$

où A est une matrice constante. La solution de (1.6) est :

$$x(t) = e^{tA}x_0$$

Le système (1.6) engendre un système dynamique, car l'application :

$$U : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

qui à tout $t \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{R}^n$ associe :

$$U(t, x) = e^{tA}x \tag{1.7}$$

vérifie les quatre propriétés précédentes.

Définition 1.3.

Soit le système non linéaire

$$\dot{x} = f(x), x \in E \tag{1.8}$$

E un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f\colon E \to \mathbb{R}^n$ est un champ de vecteurs sur E et soit x_0 un point critique de (1.8)

Définition 1.4.

Le système

$$\dot{x} = Ax$$

où

$$A = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)\right)_{i,j=\overline{1,n}} = Df(x_0)$$

est appelé **linéarisation** du système (1.8) en x_0, ou le système linéaire du système (1.8).

Si $n = 2$: Le système linéarisé du système (1.8) s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x1}(x_0) & \frac{\partial f1}{\partial x2}(x_0) \\ \frac{\partial f2}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f2}{\partial x2}(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Définition 1.5.

Un point critique x_0 de (1.8) est dit hyperbolique si aucune des valeurs propres de $A = Df(x_0)$ n'a de partie réelle nulle

Remarque 1.4.

Un point d'équilibre hyperbolique est soit asymptotiquement stable soit instable.

1.2.1 Classification des points d'équilibre

Cas des systèmes linéaires

Soit donné le système différentiel linéaire à coefficients constantes dans $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{11}x + a_{12}y \\ \dot{y} = a_{21}x + a_{22}y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \dot{X} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} X$$

$$\Leftrightarrow \dot{X} = AX, \text{ où } \det A \neq 0$$

Le point $(0,0)$ est le point critique.

Pour étudier le type du point critique $(0,0)$, il faut établir l'équation caractéristique :

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

et cherchons les racines λ_1, λ_2.

Les cas suivantes peuvent se présenter :

1- Valeurs propres de A sont réelles.

Si : $\lambda_1 \neq \lambda_2$, dans ce cas la matrice A diagonalisable.

Après un changement de base, on peut supposer :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

et le système se réduit à

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda_1 x \\ \dot{y} = \lambda_2 y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \\ y(t) = c_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases}$$

La solution générale de ce système est :

Les orbites sont les courbes: $y = c\,|x|^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$, $c \in \mathbb{R}$ et la droite $x = 0$

Nous distingunons deux sous cas :

a) λ_1, λ_2 de même signe :

$\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 > 0$: $(0,0)$ est un noeud impropre instable.

$\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 < 0$: $(0,0)$ est un noeud impropre asymptotiquement stable.

b) λ_1, λ_2 de signe opposés : on dit que $(0,0)$ est un point selle (col) qui est toujours instable

Si $\lambda_1 = \lambda_2$: deux cas sont possibles :

a) A est diagonalisable.

alors A est en fait diagonale, la solution générale :

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \\ y(t) = c_2 e^{\lambda_1 t} \end{cases}$$

Les orbites sont les courbes: $y = cx$, $c \in \mathbb{R}$ et $x = 0$

dit que $(0,0)$ est un noeud propre.

$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$, $(0,0)$ est un noeud propre asymptotiquement stable.

$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$, $(0,0)$ est un noeud propre instable.

b) A est non diagonalisable.

alors il existe une base dans laquelle, la matrice A et le système s'écrive :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 1 & \lambda_1 \end{pmatrix}, \begin{cases} \dot{x} = \lambda_1 x \\ \dot{y} = x + \lambda_1 y \end{cases}$$

La solution générale de système est :

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \\ y(t) = (c_2 + c_1 t) e^{\lambda_1 t} \end{cases}$$

et $(0,0)$ est appelé noeud exceptionnel :

asymptotiquement stable si

$$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$$

et instable si

$$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$$

2- Les valeurs propres de A sont complexes.

$\lambda_1 = p + iq$, $\lambda_2 = p - iq$

1) si $p > 0$, $q \neq 0 \Longrightarrow (0,0)$ est un foyer instable.

2) si $p < 0, q \neq 0 \Longrightarrow (0,0)$ est un foyer asymptotiquement stable.

3) si $p = 0, q \neq 0 \Longrightarrow (0,0)$ est un centre qui est toujours stable.

Cas des systèmes non linéaires

Considérons maintenant le système non-linéaire :

$$\dot{x} = f(x), \; x = (x_1, \ldots, x_n), \; f = (f_1, \ldots, f_n) \tag{1.9}$$

Définition 1.7.

Un point critique x_0 de (1.9) est appelé puits si toutes les valeurs propres de la matrice

$A = Df(x_0)$ ont des parties réelles négatives ; Il est appelé source si toutes les valeurs propres de la matrice $A = Df(x_0)$ ont des parties réelles positives ; Il est appelé selle s'il est hyperbolique et si $A = Df(x_0)$ a au moins une valeur propre avec une partie réelle positive et au moins une valeur propre avec une partie réelle négative.
Deux systèmes planaires :

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.9}$$

et

$$\dot{x} = g(x) \tag{1.10}$$

définis sur deux ouverts U et V respectivement, sont topologiquement équivalents s'il existe un homéomorphisme

$$h : U \to V$$

tel que h transforme les orbites de (1.9) en celles de (1.10) et préserve le sens du mouvement.

Theorème 1.5. (Hartman-Grobman).
Si x_0 est un point d'équilibre hyperbolique de (1.9), alors il existe un voisinage de ce point dans le quelle système

$$\dot{x} = f(x)$$

est topologiquement équivalent à son linéarisé

$$\dot{x} = Ax$$

1.2.2 Portrait de phase et cycles limites

Portrait de phase

Définition 1.8.
On trace sur un portrait de phase quelques orbites remarquables, et l'orientation du champ de vecteurs dans quelques zones.

On peut tracer le portrait de phase sans résoudre explicitement l'équation, et ceci permet d'avoir des informations importantes sur le comportement qualitatif des solutions.

On considère le système planaire (plan) :

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases} \tag{a}$$

où P et Q sont des polynômes en x et y.

Les solutions de (a) sont représentées dans le plan x, y par des courbes appelées orbites, les points critiques de ce système sont des solutions constantes.

La figure complète des orbites du système (a) ainsi que les points critiques représentés dans le plan x, y s'appelle portrait de phase, et le plan x, y est appelé plan de phase.

Définition 1.9.

Une solution périodique du système (a) est une solution telle que :

$$(x(t+T), y(t+T)) = (x(t), y(t)), \text{ pour } T > 0$$

A toute solution périodique correspond une orbite fermée dans l'espace des phases.

Définition 1.10.

Nous ne considérons que des systèmes différentielles autonomes

$\dfrac{dx}{dt} = f(x(t))$, où f est une fonction de classe C^1 d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$

Cycles limites.

Définition 1.11.

Un cycle limite du système (a) est une trajectoire fermée isolée, c'est à dire qu'on ne peut pas trouver une autre orbite fermée dans son voisinage.

Une trajectoire fermée est une orbite (i.e. les solutions $t \to x(t)$) non réduite à un point qui revient à la condition initiale après un certain temps. Isolée signifie que les trajectoires voisines ne sont pas fermées elles spirales autour du cycle limite en s'en éloignant ou s'en approchant.

Si toute les trajectoires voisines s'approchent du cycle limite le cycle est dit stable ou attractif, sinon, il est dit instable ou dans des rares cas, semi-stable.

Les cycles limites sont des phénomènes non linéaires. Ils ne peuvent apparaître dans des systèmes linéaires.

Bien sûr un système linéaire $\dot{x} = Ax$ peut avoir une orbite fermée mais elle ne sera pas isolée. En effet si $x(t)$ est une solution périodique non constante, $\alpha x(t)$ aussi, donc $x(t)$ est entouré d'orbites fermées non réduites à un point.

Définition 1.12.

L'amplitude d'un cycle limite est la valeur maximale de la variable x sur le cycle limite. Dans un tel système, l'amplitude d'une oscillation linéaire est entièrement déterminée par les conditions initiales.

Définition 1.13

Soit $\gamma(x_0)$ l'orbite qui correspond à la solution $\pi(x_0, 0) = x_0$, c'est à dire que :

$$\gamma(x_0) = \{\pi(x_0, t) : t \in \mathbb{R}\}$$

Soit

$$\gamma^+(x_0) = \{\pi(x_0, t) : t \geq 0\}$$

et

$$\gamma^-(x_0) = \{\pi(x_0, t) : t \leq 0\}$$

Un point $y \in \mathbb{R}^n$ est appelé point limite positif de l'orbite $\gamma(x_0)$ correspondant à la solution $\pi(x_0, t)$ s'il existe une suite $t_n \to +\infty$, tel que les points

$$\pi(x_0, t_n) \to y \text{ quand } n \to +\infty$$

Un point $y \in \mathbb{R}^n$ est appelé point limite négatif de l'orbite $\gamma(x_0)$ correspondant à la solution $\pi(x_0, t)$ s'il existe une suite $t_n \to -\infty$, tel que les points

$$\pi(x_0, t_n) \to y \text{ quand } n \to +\infty$$

Définition 1.14.

L'ensemble des points limites positifs d'un orbite $\gamma(x_0)$ s'appelle ensemble limite w de $\gamma(x_0)$, on le note aussi

$$A^+(x_0) = \{y : \exists (t_n) \to +\infty / \pi(x_0, t_n) \to y \text{ quand } n \to +\infty\}$$

et L'ensemble des points limites négatif d'un orbite $\gamma(x_0)$ s'appelle ensemble limite α de $\gamma(x_0)$, on le note aussi

$$A^-(x_0) = \{y : \exists (t_n) \to -\infty / \pi(x_0, t_n) \to y \text{ quand } n \to +\infty\}$$

Existence des cycles limites des systèmes planaires

Théorème 1.6. (Poincarè-Bendixon)

Soit A une région fermée bornée du plan (x, y), on suppose que $\gamma^+(x_0)$ du système

$$\begin{cases} \dot{x} = p(x, y) \\ \dot{y} = q(x, y) \end{cases} \tag{1.11}$$

se trouve à l'intérieure de A, alors $\gamma^+(x_0)$ est :

soit une orbite périodique, soit qu'elle tende vers une orbite périodique, soit qu'elle tende vers un point d'équilibre.

Critère de Bendixon.

Soit le système planaire

$$\dot{x} = f(x), \text{ avec } f = (p, q)^T, \ et\ X = (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \tag{1.12}$$

Soit $f \in C^1(E)$ où E est une région simplement connexe dans $\mathbb{R}^2$, si la divergence du champ de vecteur f (notée ∇f) est non identiquement zéro et ne change pas de signe dans E, alors le système (1.12) n'a aucune orbite fermée entièrement contenu dans E.

Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = y = f(x,y) \\ \dot{y} = -q(x) - p(x)y = g(x,y) \end{cases}, \text{ avec } p(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

On a :

$$\nabla(f,g) = 0 + (-p(x)) = -p(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

donc, ce système n'admet aucune orbite fermée.

1.2.3 théorie de la stabilité

Définition 1.15.

On appelle point d'équilibre, ou point fixe, ou point stationnaire tout point x^* tel que $f(x^*) = 0$.

Dans le cas linéaire

$$f(x) = Ax$$

les points d'équilibres sont les x tels que $Ax = 0$ (et 0 est donc toujours un point d'équilibre).

Définition 1.16.

Soit le système differentiel non linéaire et non autonome : la variable indépendante t, apparait explicitement dans l'expression de f :

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(t,x), \ t \in \mathbb{R}^+, \ x \in \mathbb{R}^n \tag{1.12}$$

On suppose que f satisfait les conditions du théorème d'existence et d'unicité du solution.

Une solution $\phi(t)$ du système (1.12) vérifiant

$$\phi(t_0) = \phi_0$$

est dite stable si $\forall\varepsilon > 0, \exists\sigma > 0$, tel que pour toute solution $x(t)$ de (1.12) vérifiant $x(t_0) = x_0$, on a :

$$\|x(t_0) - \phi(t_0)\| < \sigma \Longrightarrow \|x(t) - \phi(t)\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0.$$

Si de plus on a :

$$\lim_{t\to\infty} \|x(t) - \phi(t)\| = 0$$

la solution $\phi(t)$ est dite asymptotiquement stable.

La solution $\phi(t)$ est dite instable si pour $\sigma > 0$ aussi petit que l'on veut, l'inégalité :

$$\|x(t) - \phi(t)\| < \varepsilon$$

n'est pas vérifiée pour au moins une solution $x(t)$.

Remarque 1.5.

L'étude de la stabilité de la solution : $\phi(t)$ de (1.12) vérifiant

$$\phi(t_0) = \phi_0$$

peut être ramenée à celle de la solution nulle d'un système analogue au système (1.12).

En effet :

Soit $\phi(t)$ solution de (1.12) :

$$\dot{\phi} = f(t, \phi) = \frac{d\phi}{dt}.$$

Posons

$$y(t) = x(t) - \phi(t)$$

$y(t)$ est une nouvelle fonction inconnue.

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= \dot{y} = \frac{dx}{dt} - \frac{d\phi}{dt} = f(t, y(t) + \phi(t)) - f(t, \phi) \\ &= g(t, y) \end{aligned} \qquad (*)$$

On voit que $y = 0$ est solution de $(*)$:

pour $y = 0$: $\frac{dy}{dt} = 0 = f(t, \phi) - f(t, \phi) = 0$

Définition 1.17.

La solution $\phi(t) = 0$ de (1.12) $(\phi(t_0) = 0)$ est stable si : $\forall \varepsilon > 0, \exists \sigma > 0$, pour toute solution $x(t)$ de (1.12) tel que :

$$x(t_0) = x_0$$

on a

$$\|x(t_0)\| < \sigma \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \forall t, t_0.$$

Exemple 1.5.

Montrons que la solution du problème :

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{dx}{dt} = -y \\ \dot{y} = \frac{dy}{dt} = x \end{cases} ; \; x(0) = y(0) = 0$$

est stable.

Solution :

On a besoin de connaître $\phi(t)$ qui vérifie :

$$\phi(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix}$$

et

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

tel que :

$$X(0) = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

On résoudre le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \dot{X} = AX$$

les valeurs propres de A sont : $\lambda = \pm\, i$

pour $\lambda_1 = i$

$$\begin{aligned} (A - \lambda_1 I)\, w_1 &= 0 \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{cases} -ix - y = 0 \\ x - iy = 0 \end{cases} \Rightarrow x = iy \end{aligned}$$

$$w_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

La solution générale de $\dot{X} = AX$ est :

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = P \exp\left[t \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] P^{-1} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \cos t - c_2 \sin t \\ c_1 \sin t + c_2 \cos t \end{pmatrix}, \; c_1, c_2 \; constantes$$

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x(0) = c_1 = 0 \\ y(0) = c_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \phi(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ nulle}$$

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x(0) = c_1 = x_0 \\ y(0) = c_2 = y_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \cos t - y_0 \sin t \\ x_0 \sin t + y_0 \cos t \end{pmatrix}.$$

On va montrer que la solution nulle $\phi(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est stable $\phi(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \sigma > 0$, tel que pour toute solution $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ qui vérifie :

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} :$$

$$\left\| \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right\| < \sigma \Rightarrow \left\| \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \right\| < \varepsilon, \; \forall t, t_0.$$

on a :

$$\left\| \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} x_0 \cos t - y_0 \sin t \\ x_0 \sin t + y_0 \cos t \end{pmatrix} \right\|.$$

$$\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\| = |x_1| + |x_2|,$$

d'où

$$\begin{aligned}
\left\|\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}\right\| &= |x(t)| + |y(t)| = |x_0 \cos t - y_0 \sin t| + |x_0 \sin t + y_0 \cos t| \\
&< |x_0| + |y_0| + |x_0| + |y_0| \\
&< 2\left\|\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}\right\| < \varepsilon
\end{aligned}$$

il suffit de prendre $\sigma = \frac{\varepsilon}{2}$ d'où $\phi(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est stable.

Est-ce que cette stabilité est asymptotique

non, car :

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} \left\|\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}\right\|^2 &= \lim_{t\to\infty} \left[x^2(t) + y^2(t)\right] \\
&= \lim_{t\to\infty} \left[(x_0 \cos t - y_0 \sin t)^2 + (x_0 \sin t + y_0 \cos t)^2\right] \\
&= x_0^2 + y_0^2 \neq 0.
\end{aligned}$$

Stabilité des cycles limites

Soit Γ un cycle limite

Γ est stable si $A^+(x_0) = \Gamma$, pour tout x dans un voisinage de Γ ceci signifie que les trajectoires voisines sont attirées par le cycle limite.

Γ est instable si $A^-(x_0) = \Gamma$, pour tout x dans un voisinage de Γ ceci signifie que les trajectoires voisines sont refoulées par le cycle limite.

Γ est semi stable si les trajectoires sont attirées d'un côté et refoulées de l'autre côté.

Chapitre 2

Méthode de perturbation

2.1 Introduction au méthode de perturbation

La théorie de perturbation est une méthode mathématique générale qui permet de trouver une solution approchée d'une équation mathématique (E_ε) dépendante d'un paramètre ε lorsque la solution de l'équation (E_0), correspondant à la valeur $\varepsilon = 0$, est connue exactement. L'équation mathématique (E_ε) peut être une équation algébrique, une équation différentielle,...La méthode consiste à chercher la solution approchée de l'équation (E_ε) sous la forme d'un développement en série des puissances du paramètre ε, cette solution approchée étant supposée être une approximation d'autant meilleure de la solution exacte, mais inconnue, que la valeur absolue du paramètre ε est plus "petite" ($\varepsilon << 1$). Dans ce chapitre on va considérer les équations (E_ε) comme étant des équations differentielles. On va appliquer la théorie de perturbation pour résoudre des équations differentielles non linéaires du second ordre sous la forme

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y + \varepsilon f\left(y, \frac{dy}{dt}\right) = 0 \qquad ((E_\varepsilon))$$

où ε est un petit paramètre et f est une fonction analytique non linéaire de y et $\frac{dy}{dt}$. Pour bien comprendre le principe de cette méthode, on considère cet

Exemple 2.1

Soit le problème à valeur initiale

$$\frac{dy_\varepsilon}{dt} + y_\varepsilon = \varepsilon, \quad y_\varepsilon(0) = 1.$$

Sa solution est :

$$y_\varepsilon(t) = \varepsilon + (1-\varepsilon)\exp(-t).$$

La solution du problème non perturbé

$$\frac{dy}{dt} + y = 0, \quad y(0) = 1$$

est :

$$y(t) = \exp(-t)$$

et la différence entre la solution du problème non perturbé et problème perturbé est :

$$|y_\varepsilon(t) - y(t)| = |\varepsilon - \varepsilon\exp(-t)| = \varepsilon\,|1-\exp(-t)| \leq \varepsilon, \ \forall t \geq 0.$$

On remarque que la solution approchée tends vers la solution exacte.

Exemple 2.2

On a une autre situation pour le problème

$$\frac{dy_\varepsilon}{dt} - y_\varepsilon = \varepsilon, \quad y_\varepsilon(0) = 1$$

La solution est :

$$y_\varepsilon(t) = -\varepsilon + (1+\varepsilon)\exp(t)$$

Le problème non perturbé :

$$\frac{dy}{dt} - y = 0, \quad y(0) = 1$$

a la solution :

$$y(t) = \exp(t)$$

$$|y_\varepsilon(t) - y(t)| = \varepsilon\,|1 - \exp(t)|$$

Sur l'intervalle $0 \leq t \leq 1$, l'erreur est de l'ordre de ε. Ce n'est pas le cas pour $t > 1$ où la différence croît sans être bornée.

Solution périodique.

On dit que $y(t)$ est une solution périodique pour l'équation

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y + \varepsilon f\left(y, \frac{dy}{dt}\right) = 0$$

s'il existe un constante positif $T > 0$ qui vérifie :

$$y(T) = y(0) \tag{2.1}$$

on qualifie le période le plus petit T vérifiant (2.1)

Remarque 2.1

Les multiples de la périodicité est aussi une période.

2.2 Méthode de perturbation régulière

Définition 2.1

Supposons que on a le problème (E_ε) avec un petit paramètre $0 < \varepsilon << 1$ et la solution $y(\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$.

Si

$$\lim_{\varepsilon \to 0} y(\varepsilon) = y(0)$$

alors on dit que le problème (E_ε) est régulier.

Soit l'équation différentielle du second ordre, non linéaire, perturbée, contenant un petit paramètre $0 < \varepsilon << 1$ suivante :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y + \varepsilon f\left(y, \frac{dy}{dt}\right) = 0 \tag{2.2}$$

On suppose qu'une solution de l'équation (2.2) peut-être écrite sous la forme d'un développement en série des puissances du paramètre ε comme suit :

$$y = y_0(t) + \varepsilon y_1(t) + \varepsilon^2 y_2(t) + \cdots + \varepsilon^n y_n(t) + \cdots \tag{2.3}$$

où les coefficients des puissances du paramètre ε sont des fonctions de la variable indépendante t.

On justifie l'équation (2.3) par le premier résultat trouvé par Poincaré et qui montre que si une équation différentielle contienne des termes avec un paramètre, alors la solution est une fonction analytique de ce paramètre. Ainsi, si ε est suffisamment petit, les séries qui sont trouvées par l'équation (2.3) converge. Les fonctions y_n sont trouvées par substitution de l'équation (2.3) dans l'équation différentielle (2.2) et qu'on détermine récursivement en résolvant un ensemble infini d'équations différentielles linéaire non homogène.

Ceci est l'avantage majeur de cette méthode car elle permet de remplacer l'équation différentielle non linéaire (2.2) par un système d'équations différentielles linéaires.

Nous introduisons l'idée de base de la théorie de perturbation régulière par l'exemple suivant :

Exemple 2.3

Soit un système qui est modelé initialement par l'équation :

$$\dot{y} + 2y = 0, \quad y(0) = 1$$

Ce système après perturbation est devenu :

$$\dot{y} + 2y + \varepsilon y^2 = 0, \quad y(0) = \cosh\varepsilon \tag{2.4}$$

où ε est le paramètre de perturbation $0 < \varepsilon << 1$.

On cherche la solution :

$$y(t, \varepsilon) = y_0(t) + \varepsilon y_1(t) + \varepsilon^2 y_2(t) + \cdots \tag{2.5}$$

En substituant (2.5) dans (2.4), on obtient :

$$(\dot{y}_0 + 2y_0) + \varepsilon(\dot{y}_1 + 2y_1 + y_0^2) + \varepsilon^2(\dot{y}_2 + 2y_2 + 2y_0y_1) + \cdots = 0$$

$$\begin{aligned} y(0) + \varepsilon y_1(0) + \varepsilon^2 y_2(0) + \cdots &= \cosh\varepsilon \\ &= 1 + \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^4}{24} + \cdots \end{aligned}$$

En regroupant les termes de même puissance de ε, on a le système suivant :

à l'ordre ε^0 :

$$\dot{y}_0 + 2y_0 = 0, \quad y_0(0) = 1$$

à l'ordre ε^1 :

$$\dot{y}_1 + 2y_1 = -y_0^2, \quad y_1(0) = 0$$

à l'ordre ε^2 :

$$\dot{y}_2 + 2y_2 = -2y_0y_1, \quad y_2(0) = \frac{1}{2}$$

On trouve en résolvant une à une ces dernières équations :

$$y_0(t) = \exp(-2t),$$

$$y_1(t) = \frac{1}{2}(\exp(-4t) - \exp(-2t)),$$

$$y_2(t) = \frac{1}{4}(3\exp(-2t) + \exp(-6t) - 2\exp(-4t))$$

La solution est :

$$y(t) = e^{(-2t)} + \frac{\varepsilon}{2}(e^{(-4t)} - e^{(-2t)}) + \frac{\varepsilon^2}{4}\left(3e^{(-2t)} + e^{(-6t)} - 2e^{(-4t)}\right) + \cdots$$

On voit que le coefficient de chaque ε^n est borné et comme $0 < \varepsilon << 1$ la contribution du $(n+1)^{ème}$ terme est petite comparée au $n^{ème}$. En vu de cela, nous pouvons tronquer le développement après le second terme et considérer ceci comme une solution approximative de l'équation (2.4).

Remarque 2.2

Si nous obtenons $y_1(t) = 0$ dans le développement on utilise $y_0(t) + \varepsilon^2 y_2(t)$ comme solution approximative, plus généralement si :

$$y_1(t) = \cdots = y_{n-1}(t) = 0;$$

alors la solution approximative est :

$$y_0(t) = \varepsilon^n y_n(t).$$

Notons que le développement de perturbation remplace l'équation (2.4) qui est non linéaire par un système d'équation linéaire non homogènes. Ceci est l'un des avantages majeur de cet approche car il n'y a pas de méthode générale pour résoudre les équations différentielles non linéaire.

Cette technique faite pour une équation peut-être utilisée pour chercher une solution approximative d'un système d'équations.

2.3 Méthode de perturbation singulière

En la théorie de la perturbation un problème de perturbation singulière est un problème contenant un petit paramètre qui ne peut pas être approximatif par mettre le paramètre à valeur nul. C'est en contraste à un problème de perturbation régulière pour laquelle approximation peut-être obtenue par simplement mettre le petit paramètre à zéro. La théorie de la perturbation singulière est un riche des domaines pour les mathématiciens. Dans cette partie nous allons introduit : la méthode de la moyenne.

2.3.1 Méthode de la moyenne

La méthode de la moyenne donne n'importe quelle solution et non seulement les solutions périodiques. Cette méthode s'applique aux équations de la forme :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y + \varepsilon f\left(y, \frac{dy}{dt}\right) = 0, \quad 0 < \varepsilon << 1. \tag{2.6}$$

Pour $\varepsilon = 0$, la solution générale est :

$$y(t) = A\sin(\omega t + \Phi) \tag{2.7}$$

où A et Φ sont des constantes. La méthode de la moyenne consiste à poser :

$$\begin{cases} y(t) = A(t)\sin(\omega t + \Phi(t)) \\ \dot{y}(t) = A(t)\,\omega\cos(\omega t + \Phi(t)) \end{cases} \tag{2.8}$$

où $A(t)$ et $\Phi(t)$ varient lentement avec le temps et

$$x = \dot{y}$$

d'où

$$\dot{x} = -\omega^2 y - \varepsilon f(y, x) \tag{2.9}$$

nous cherchons une solution sous la forme :

$$\begin{cases} y(t) = A(t)\sin(\omega t + \Phi(t)) \\ x(t) = A(t)\,\omega\cos(\omega t + \Phi(t)) \end{cases} \tag{2.10}$$

or

$$x = \dot{y}$$

d'où

$$A(t)\,\omega\cos(\omega t + \Phi(t)) = \dot{A}(t)\sin(\omega t + \Phi(t)) + A(t)\left(\omega + \dot{\Phi}(t)\right)\cos(\omega t + \Phi(t))$$

ainsi

$$\dot{A}(t)\sin(\omega t + \Phi(t)) + A(t)\,\dot{\Phi}(t)\cos(\omega t + \Phi(t)) = 0 \tag{2.11}$$

substituons (2.10) dans (2.9), on aura :

$$\begin{array}{l}\dot{A}(t)\,\omega\cos(\omega t + \Phi(t)) - A(t)\,\omega\left(\omega + \dot{\Phi}(t)\right)\sin(\omega t + \Phi(t)) = \\ -\omega^2 A(t)\sin(\omega t + \Phi(t)) - \varepsilon f(y, x)\end{array}$$

En résolvant l'équation précédente et l'équation (2.11), on obtient :

$$\begin{cases} \dot{A}(t) = \frac{-\varepsilon}{2}\cos(\omega t + \Phi(t))\, f\left(A(t)\sin(\omega t + \Phi(t)),\, A(t)\,\omega\cos(\omega t + \Phi(t))\right) \\ \dot{\Phi}(t) = \frac{\varepsilon}{A(t)\omega}\sin(\omega t + \Phi(t))\, f\left(A(t)\sin(\omega t + \Phi(t)),\, A(t)\,\omega\cos(\omega t + \Phi(t))\right) \end{cases} \tag{2.12}$$

La méthode de la moyenne consiste à remplacer $\dot{A}(t)$ et $\dot{\Phi}(t)$ dans (2.12) par leurs valeurs moyenne sur une période $\frac{2\pi}{\omega}$.

$A(t)$ et $\Phi(t)$ sont considérés comme des constantes en prenant la moyenne. Ce procédé connu comme méthode de la moyenne conduit à :

$$\begin{cases} \dot{A}(t) = \frac{-\varepsilon}{2\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos(\omega t + \Phi)\, f\left(A\sin(\omega t + \Phi),\, A\omega\cos(\omega t + \Phi)\right) dt \\ \dot{\Phi}(t) = \frac{\varepsilon}{2\pi A}\displaystyle\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin(\omega t + \Phi)\, f\left(A\sin(\omega t + \Phi),\, A\omega\cos(\omega t + \Phi)\right) dt \end{cases}$$

posons $\theta = \omega t + \Phi$, on obtient :

$$\begin{cases} \dot{A} = \frac{-\varepsilon}{2\pi\omega} \int\limits_0^{2\pi} \cos\theta f\left(A\sin\theta, A\omega\cos\theta\right) d\theta \\ \dot{\Phi} = \frac{\varepsilon}{2\pi A\omega} \int\limits_0^{2\pi} \sin\theta f\left(A\sin\theta, A\omega\cos\theta\right) d\theta \end{cases} \tag{2.13}$$

Les équations exactes de (2.11) sont remplacées par les équations approximatives de (2.13). Une fois les intégrales trouvées, on aura à résoudre des équations différentielles du $1^{ère}$ ordre pour $A(t)$ et $\Phi(t)$. On a les formules qui peuvent être trouvées par intégration par partie

$$I_{m,n} = \int\limits_0^{2\pi} \sin^m(y)\cos^n(y)\,dy$$

$$I_{m,n} = \frac{m-1}{m+n} I_{m-2,n} \tag{2.14}$$

$$I_{m,n} = \frac{n-1}{m+n} I_{m,n-2} \tag{2.15}$$

Les équations (2.14) et (2.15) sont utilisées jusqu'a ce qu'on arrive à :

$$I_{0,0} = 2\pi$$

$$I_{m,n} \neq 0$$

seulement pour m et n pairs.

Exemple 2.4

Appliquons la méthode de la moyenne à l'équation de Van der pol :

$$\ddot{y} + y - \varepsilon\left(1 - y^2\right)\dot{y} = 0$$

où

$$f(y, \dot{y}) = -\left(1 - y^2\right)\dot{y}$$

et

$$\omega = 1$$

Le système (2.13) devient :

$$f\left(A\sin\theta, A\cos\theta\right) = -\left(1 - A^2\sin^2\theta\right)A\cos\theta$$

$$\begin{cases} \dot{A} = \frac{-\varepsilon}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} A(1 - A^2\sin^2\theta)\cos^2\theta d\theta \\ \dot{\Phi} = \frac{\varepsilon}{2\pi A}\int\limits_0^{2\pi} A(1 - A^2\sin^2\theta)\cos\theta\sin\theta d\theta \end{cases}$$

alors

$$\begin{aligned} \dot{A}\left(t\right) &= \frac{\varepsilon A}{2\pi}\left(I_{0,2} - A^2 I_{2,2}\right) \\ \dot{A}\left(t\right) &= \frac{\varepsilon A}{2\pi}\left(\frac{1}{2}2\pi - A^2\frac{1}{4}\frac{1}{2}2\pi\right) \\ \dot{A}\left(t\right) &= \frac{\varepsilon}{8}A\left(4 - A^2\right) \\ &\Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{\varepsilon}{8}A\left(4 - A^2\right) \\ &\Rightarrow \int\frac{dA}{A\left(2 - A\right)\left(2 + A\right)} = \frac{\varepsilon}{8}\int dt. \end{aligned}$$

Après les calculs, on obtient :

$$\ln\left[\frac{A^2}{c\left(4 - A^2\right)}\right] = \varepsilon t.$$

Supposons que $A\left(0\right) = A_0$ ce implique que : $c = \frac{A_0^2}{4 - A_0^2}$

$$\Rightarrow A^2(t) = \frac{\frac{4A_0^2}{4 - A_0^2}e^{\varepsilon t}}{1 + \left(\frac{A_0^2}{4 - A_0^2}\right)e^{\varepsilon t}}$$

d'où

$$A(t) = \frac{2}{\sqrt{(\frac{4}{A_0^2}-1)e^{-\varepsilon t}+1}}$$

Notons que $A(t) \to 2$ quand $t \to \infty$ est indépendamment de A_0

$$\dot{\Phi}(t) = \frac{-\varepsilon}{2\pi}\left(I_{1,1} - A^2 I_{3,1}\right) = 0$$

Ce implique que :

$$\Phi(t) = \Phi_0 = \Phi(0) = const$$

La solution approximative est :

$$y(t) = A\sin\left(t + \Phi\right)$$

c.à.d

$$y(t) = \frac{2\sin\left(t+\Phi_0\right)}{\sqrt{(\frac{4}{A_0^2}-1)e^{\varepsilon t}+1}}$$

Si $A = 2$, on a la solution :

$$y(t) = 2\sin\left(t + \Phi_0\right)$$

c'est une solution périodique de période $T = 2\pi$.

2.4 Avantages et inconvénients de chaque méthode.

2.4.1 Méthode de perturbation régulière.

Le principal avantage de l'application de la méthode de perturbation régulière pour obtenir des solutions approchée de l'équation

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y + \varepsilon f\left(y, \frac{dy}{dt}\right) = 0$$

est que la technique est simple à appliquer.

En outre, la méthode nous permet d'obtenir des expansion uniformément valables pour les solutions périodique.

Le calcul des approximations d'ordre supérieur peut être compliqué.

2.4.2 Méthode de perturbation singulière (Méthode de la moyenne).

La méthode de la moyenne présente trois avantages majeurs :

Le calcul en première approximation se réduit à l'intégration de deux intégrales définies pour les dérivés de l'amplitude et la phase.

L'amplitude et la phase peuvent être obtenus, en général, en utilisant des techniques d'intégration élémentaires du calcul.

Si les cycles limites (cycle limite est une solution périodique isolée) et points limites existent pour une équation différentielle non linéaire donné, la méthode nous permet de les déterminer.

En outre, nous pouvons obtenir le comportement du système à mesure qu'elle s'approche de ces cycles limites et les points.

L'inconvénient majeur de cette méthode est que les calculs d'ordre supérieur sont longs et compliqués.

Chapitre 3

Méthode de la moyenne.

Résumé.

Nous introduisons l'étude des cycles limites de quelques systèmes différentiels en utilisant la méthode de la moyenne

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon P(x;y) \\ \dot{y} = x + \varepsilon Q(x;y) \end{cases}, \quad 0 < |\varepsilon| << 1 \tag{3.1}$$

où P et Q sont des polynômes. Nous avons calculé l'amplitude et la période des cycles limites de quelques classes d'équations différentiels dans les cas où $(\varepsilon \to 0)$.

3.1 Théorème 3.1.

Considérons les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x} = \varepsilon F(t,x) + \varepsilon^2 G(t,x,\varepsilon) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{3.2}$$

et

$$\begin{cases} \dot{y} = \varepsilon f^0(y) \\ y(0) = x_0 \end{cases}$$

où x, y, $x_0 \in D$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $t \in [0, \infty)$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, F et G sont périodiques de période T par rapport à la variable t , et $f_0(y)$ est la fonction moyenne de $F(t, y)$ en ce qui concerne t c-à-d :

$$f^0(y) = \frac{1}{T}\int_0^T F(t, y)dt$$

on suppose :

(i) $F, \partial F/\partial x, \partial^2 F/\partial x^2, G$ et $\partial G/\partial X$ sont définies, continues et bornées par une constante indépendante de ε dans

$[0, \infty) \times D$ et $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$.

(ii) T est une constante indépendante de ε.

(iii) $y(t)$ appartient à D sur le temps échelle $1/\varepsilon$.

Alors les propriétés suivantes sont vérifiées.

(a) sur le temps échelle $1/\varepsilon$ on a

$$x(t) - y(t) = O(\varepsilon), \text{ quand } \varepsilon \to 0$$

(b) si p est un point d'équilibre du système moyenne (3.2),tel que

$$\left[\frac{\partial f^0}{\partial y}\right]_{y=p} \neq 0 \tag{3.3}$$

Alors il existe une solution T périodique $\Phi(t, \varepsilon)$ de l'équation (3,1) proche de p tel que

$$\Phi(t, \varepsilon) \to p, \text{ quand } \varepsilon \to 0.$$

(c) si (3,3) est négatif, alors la solution périodique correspondante de $\Phi(t, \varepsilon)$ de l'équation (3,2) dans l'espace (t, x) est asymptotiquement stable pour ε suffisamment petit. si (3,3) est positif, alors c'est instable.

3.2 Forme générale.

Soit l'équation :

$$\ddot{x} + \varepsilon f(x)\dot{x} + x = 0$$

qui équivalente à le système

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - \varepsilon f(x) y \end{cases}$$

qui équivalente aussi à le système

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \varepsilon F(x) \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

où f est une fonction pair et

$$F(x) = \int_0^x f(s)\, ds$$

En posant

$$x = r\cos\theta, \;\; y = r\sin\theta$$

on obtient

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \cos\theta\dot{x} + \sin\theta\dot{y} \\ &= \cos\theta r\sin\theta - \sin\theta\left(r\cos\theta + \varepsilon r\sin\theta f(r\cos\theta)\right) \\ &= -\varepsilon r\sin^2\theta f(r\cos\theta) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &\dot{\theta} = \widehat{\arctan\left(\tfrac{y}{x}\right)}^{\cdot} = \tfrac{1}{r}\left(\cos\theta\dot{y} - \sin\theta\dot{x}\right) \\ &= \tfrac{1}{r}\left(-\cos\theta\left(r\cos\theta + \varepsilon r\sin\theta f(r\cos\theta)\right) - \sin\theta\left(r\sin\theta\right)\right) \\ &= -1 - \varepsilon\cos\theta\sin\theta f(r\cos\theta) \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} &\tfrac{\dot{r}}{\dot{\theta}} = \tfrac{\varepsilon r\sin^2\theta f(r\cos\theta)}{-1-\varepsilon\cos\theta\sin\theta f(r\cos\theta)} \\ &\tfrac{dr}{d\theta} = \underbrace{\varepsilon r\sin^2\theta f(r\cos\theta)}_{=F(\theta,r)} + \varepsilon^2 G(\theta, r, \varepsilon) \end{aligned}$$

Exemple 3.1.

Soit l'équation suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon x\left(x^4 - x^2 + 1\right) \\ \dot{y} = x + \varepsilon y\left(y^4 + \frac{43}{108}y^2 - \frac{139}{144}\right) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\dot{r} &= \cos\theta\dot{x} + \sin\theta\dot{y} \\
&= \cos\theta\left(-r\sin\theta + \varepsilon r\cos\theta\left(r^4\cos^4\theta - r^2\cos^2\theta + 1\right)\right) \\
&+ \sin\theta\left(r\cos\theta + \varepsilon r\sin\theta\left(r^4\sin^4\theta + \tfrac{43}{108}r^2\sin^2\theta - \tfrac{139}{144}\right)\right) \\
&= \varepsilon\left(r^5\left(\cos^6\theta + \sin^6\theta\right) + r^3\left(-\cos^4\theta + \tfrac{43}{108}\sin^4\theta\right) + r\left(\cos^2\theta - \tfrac{139}{144}\sin^2\theta\right)\right)
\end{aligned}$$

$$\dot{r} = \varepsilon r\left(r^4\left(\cos^6\theta + \sin^6\theta\right) + r^2\left(-\cos^4\theta + \frac{43}{108}\sin^4\theta\right) + \left(\cos^2\theta - \frac{139}{144}\sin^2\theta\right)\right)$$

et

$$\begin{aligned}
\dot{\theta} &= \widehat{\arctan\left(\tfrac{y}{x}\right)}^{\cdot} = \tfrac{1}{r}\left(\cos\theta\dot{y} - \sin\theta\dot{x}\right) \\
&= \tfrac{1}{r}\cos\theta\left[r\cos\theta + \varepsilon r\sin\theta\left(r^4\sin^4\theta + \tfrac{43}{108}r^2\sin^2\theta - \tfrac{139}{144}\right)\right] \\
&- \tfrac{1}{r}\sin\theta\left[-r\sin\theta + \varepsilon r\cos\theta\left(r^4\cos^4\theta - r^2\cos^2\theta + 1\right)\right]
\end{aligned}$$

$$\dot{\theta} = 1 + \varepsilon\cos\theta\sin\theta\left(r^4\sin^4\theta - r^4\cos^4\theta + \frac{43}{108}r^2\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta - \frac{139}{144} - 1\right)$$

Donc

$$\begin{aligned}
\frac{\dot{r}}{\dot{\theta}} &= \frac{dr}{d\theta} = \frac{\varepsilon r\left(r^4\left(\cos^6\theta + \sin^6\theta\right) + r^2\left(-\cos^4\theta + \frac{43}{108}\sin^4\theta\right) + \left(\cos^2\theta - \frac{139}{144}\sin^2\theta\right)\right)}{1 + \varepsilon\cos\theta\sin\theta\left(r^4\sin^4\theta - r^4\cos^4\theta + \frac{43}{108}r^2\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta - \frac{139}{144} - 1\right)} \\
&= \underbrace{\varepsilon r\left(r^4\left(\cos^6\theta + \sin^6\theta\right) + r^2\left(-\cos^4\theta + \frac{43}{108}\sin^4\theta\right) + \left(\cos^2\theta - \frac{139}{144}\sin^2\theta\right)\right)}_{=F(\theta,r)} + \varepsilon^2 G(\varepsilon,\theta,r)
\end{aligned}$$

D'où

$$f^0(r) = \tfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\theta, r)\, d\theta$$

$$f^0(r) = \tfrac{1}{2\pi} r \int_0^{2\pi} \left[r^4(\cos^6\theta + \sin^6\theta) + r^2\left(-\cos^4\theta + \tfrac{43}{108}\sin^4\theta\right)\right] d\theta$$

$$+\tfrac{1}{2\pi} r \int_0^{2\pi} \left(\cos^2\theta - \tfrac{139}{144}\sin^2\theta\right) d\theta$$

$$= r\left(r^4 - \tfrac{13}{36}r^2 + \tfrac{1}{36}\right)$$

Alors :

$$\begin{aligned} f^0(r) &= 0 \Rightarrow \frac{5}{8} r\left(r^4 - \frac{13}{36}r^2 + \frac{1}{36}\right) = 0 \\ &\Rightarrow r_1 = \frac{1}{2}, r_2 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Donc il existe deux cycles limites d'amplitude $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$.

On a :

$$\left[\frac{\partial f^0}{\partial r}\right]_{r=\frac{1}{2}} = \frac{5}{8}\left[5r^4 - \frac{13}{12}r^2 + \frac{1}{36}\right]_{r=\frac{1}{2}} = \frac{25}{576} \text{ (positif)}$$

Donc le cycle limite d'amplitude $\frac{1}{2}$ est instable.

$$\left[\frac{\partial f^0}{\partial r}\right]_{r=\frac{1}{3}} = \frac{5}{8}\left[5r^4 - \frac{13}{12}r^2 + \frac{1}{36}\right]_{r=\frac{1}{3}} = -\frac{25}{1296} \text{ (négatif)}$$

Donc le cycle limite d'amplitude $\frac{1}{3}$ est stable.

Conclusion

Au cours de notre étude sur la méthode de perturbation on trouve que le bute de cette méthode est d'étudier le comportement d'un système non linéaire en l'approchant par un système linéaire.

Un problème de perturbation peut être divisé en deux catégories. Il sont :

- la méthode de perturbation régulière ;
- la méthode de la moyenne qui est l'une des méthodes singulières.

En parcourant ces méthodes, on aperçoit que la méthode de perturbation régulière nous donne une solution différente (une solution trés lointaines de la réalité).

Ce qui fait que les méthodes singulières sont beaucoup meilleures comparées à celle de la méthode régulière :

La méthode de la moyenne nous donne toutes les solutions possibles.

Bibliographie

[1] **Y. Bouattia and A. Makhlouf,** Limit cycles of generalized Liénard systems. AIP Conference Proceedings, Volume 1124, pp. 60-70 (2009).

[2] **Y. Bouattia and A. Makhlouf,** Limit cycles of quartic and quintic polynomial differential systems via the averaging theory, Ann. of Dif. Eqs.27 :1(2011) ; 70-85.

[3] **John Hubbard Beverly West**,"Equations différentielles et systèmes dynamiques"(1999).

[4] **Charles- Michel Marles**, Systèmes dynamique. une introduction.

[5] **Hinch EJ**, Perturbation Method. Ccombridge Texts in Applied Mathematics, Cambridge University pres, (1991),ISBN 0-521-37897-4.

[6] **ALIH.NAYEF**, Perturbation Methods. John Wiley and sons (New york- 1973), réédité dans la collection : Wiley classics Library,(2000),ISBN 0-471-39917-5.

[7] **DONALD R.SMITH**, Singular Perturbation : An Introduction with Applications, Cambridge University Press,(1985), ISBN 0-521-30042.

[8] **L.Perko**, Differential Equation and Dynamical system.

[9] **Franck Jerdrzeje wski** : Introduction aux méthode numérique, Deuxième édition. CEA Saclay-INSTN/UERTI, 91191 Gif-sur- y vette cedex.

[10] **E.A.Codding et N.Levinson** : Teory of ordinary differential equations, chapitre 3 et 13,14,15 (1987).

[11] **W.D.Lakin et D.A.Sanchez** : Topics in ordinary differential equations,chapitre 4,Ed.Douer.

[12] Cours de 1^{ere} Année Magistère : option Systèmes Dynamiques et Equations Différentielles (2000-2001).

[13] **Emmanuel Moulay** : Stabilité des équations différentielles ordinaires, Cours de Master.