République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Analyse**

Par :

Taleb Charifa

Benabassa Fatima

Intitulé

La Méthode de Rothe appliquée sur une équation intégro-différentielle dégénérée

Dirigé par : Dr .Chaoui Abderrazek

Devant le jury

PRESIDENT	Ellaggoune .F	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Chaoui.A	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Guebbaï. H	Univ-Guelma

Session Mai 2013

REMERCIEMENTS

Louange à notre seigneur «ALLAH » qui nous a dotées de la merveilleuse faculté de raisonnement.

Je tiens à exprimer toutes reconnaissances au **Docteur. Chaoui Abderrazek** de m'avoir proposé ce sujet de recherche et d'avoir dirigé mon travail.

Je lui témoigne aussi, ma gratitude pour son soutien, sa grande disponibilité et surtout ses conseils et ses encouragements tout au long de mes recherches.

J'adresse mes vifs remerciements au **Docteur .Ellaggoune Fateh** , pour le grand honneur qu'il me fait en présidant le jury de soutenance.

J'exprime également mes chaleureux remerciements au **Docteur. Guebbaï Hameza**, pour l'honneur qu'ils m'ont fait d'avoir acceptés de faire partie de ce jury.

J'exprime également mon profonde gratitude et je sincères remercie envers ceux quia contribue de prés ou de loin dans le projet, sans oublier mon amis qui nos ont soutenus.

Une grande salutation pour tous les étudiants de la promotion 2012.

Table des matières

1 Introduction **3**

2 Analyse fonctionnelle **5**

2.1 Espace de Lebesgue : . . . 5

2.1.1 Quelque propriété : . . . 5

2.2 Espace de Hilbert . . . 6

2.3 Espace de Sobolev . . . 6

2.3.1 Espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ . . . 7

2.3.2 Espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ . . . 7

2.4 Espace de Boschner . . . 7

2.5 Convergence faible . . . 8

2.6 Les inégalités utilisées : . . . 9

2.6.1 Inégalité de Cauchy- Schwartz : . . . 9

2.6.2 L'ε-inégalité : . . . 9

2.6.3 Inégalité de Gronwall : . . . 9

2.6.4 Inégalité de Poicaré : . . . 10

2.7 Quelque théorèmes utilisées : . . . 10

2.7.1 Théorème de Minty_browder : . . . 11

2.7.2 Classifications mathématiques des EDP du second ordre . . . 12

3 Schéma de discrétisation et estimation a priori **13**

3.1 Position du problème . . . 13

3.2 Hypothèses et schéma de discrétisation . . . 14

3.3 Estimations a priori . . . 16

4 L'existence et l'unicité de la solution **23**

4.1 Résultats de convergence et de l'existence 23

4.2 Unicité de la solution faible 25

Chapitre 1

Introduction

Dans ce travail on ai intéressé à l'application de la méthode de Rothe pour une équation parabolique dégénéré integro-différentielle avec conditions initiales et conditions de Neumann-Dirichlet sur le bord. Ce type des équations modélise le flux d'un liquide dans des milieux poreux. Ces écoulements s'inscrivent dans le cadre des problèmes environnementaux qui suscitent actuellement un grand intérêt. En particulier, l'utilisation durant ces dernières années de matière nucléaire pour la production de l'énergie pose aujourd'hui le problème de stockage des déchets et notamment du stockage couche géologique profonde.

L'opérateur intégral de Volterra (ou l'opérateur mémoire) peut modéliser beaucoup des phénomènes physique, tel que le flux à deux phases dans des milieux élastiques ayant des ports avec mémoire, la loi de Darcy dans ce cas prend la forme

$$q\left(t,x\right) \;=\; -k\left(t,x\right)\nabla p\left(t,x\right)-\int_0^t k\left(t,x\right)\nabla p\left(s,x\right)dx$$

où q dénote le flux volumétrique de l'eau et p est la pression capillaire $[9-10]$.

La méthode de Rothe trouve son origine dans les travaux du mathématicien Allemand E. Rothe en 1930 [18] pour résoudre des équations linéaires paraboliques et unidimensionnelles, elle a été également utilisée et développée dans la résolution des équations paraboliques d'ordre supérieur par O. L. Ladyzenskaja voir $[14-15]$ aussi bien que dans les travaux de K. Rektorys [19] , J. Necar [17] et J. Kacur $[14-15]$ qui a étudié des équations d'évolution non linéaire de type parabolique. Plusieurs autres résultats ont été réalisés en changeant l'ordre des dérivées ou en changeant l'équation et les conditions par exemple l'équation de

Schrödinger [4], l'équation Navier Stokes [16], l'équation de télégraphe [8], ainsi que les problèmes intégro-différentiels de Bahuguna $[1-4]$.

Le schéma de la méthode de Rothe est comme suite :

On divise l'intervalle du temps en n sous intervalles (t_{i-1}, t_i), $i = 1..., n$.où $t_i = ih$ et $h = T/n$.On note par $u_i = u_i(x, ih)$ les approximations de u.

On remplace la dérivée de la fonction $u, \frac{\partial u}{\partial t}$ par $\delta u_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{h}$ pour tout $t = t_i$.

On obtient un système formé de n équations en x où l'inconnu est $u_i(x)$ donc on approxime le problème posé à tout point $t = t_i$, $i = \overline{1, n}$.par un nouveau problème discret.

On détermine les fonctions u^n solutions du système obtenu.

On construit les fonctions de Rothe comme suit :

$$u^n(t) = u_{i-1} + (t - t_{i-1})\,\delta u_i, \qquad t \in [t_{i-1}, t_i] \qquad i = 1, ..., n$$

et les fonctions test correspondantes

$$\bar{u}^n(t) = \begin{cases} u_i & t \in [t_{i-1}, t_i] \\ & \qquad\qquad j = 1, ..., n \\ u_0 & t = 0 \end{cases}$$

Après avoir démontré quelques estimations pour la solution approchée, nous établissons la convergence de la solution approchée $u^{(n)}(t)$ vers la solution du problème posé.

Chapitre 2

Analyse fonctionnelle

2.1 Espace de Lebesgue :

Définition 2.1.1 *Soit p un élément de $[1, +\infty]$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$; on appelle espace de Lebesgue, et on note $L^p(\Omega)$, l'espace vectoriel des fonctions numériques u de Ω dans $\mathbb{C}$, Lebesgue mesurables, vérifiant :*

1. Si $1 \leq p < +\infty$, $\int_\Omega |u(x)|^p \, dx < +\infty$,

2. Si $p = +\infty$, $\sup\limits_{x\in\Omega} ess \, |u(x)| < +\infty$,

où :

$$\sup_{x\in\Omega} ess \, |u(x)| = Inf \{M \backslash |u(x)| \leq M \ p.p\}.$$

2.1.1 Quelque propriété :

a) L'application de $L^p(\Omega)$ dans $\mathbb{R}^+$:

$$u \to \begin{cases} \|u\|_p = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx\right)^{1/p}, & 1 \leq p < +\infty, \\ \\ \|u\|_\infty = \sup\limits_{x\in\Omega} ess \, |u(x)|, & p = +\infty, \end{cases}$$

définit une norme sur $L^p(\Omega)$, norme par laquelle $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach

b) Dual-pour tout réel p dans $[1, +\infty[$, le dual de $L^p(\Omega)$ est isomorphe algébriquement et topologiquement à $L^q(\Omega)$, avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, l'application de dualité est définit par :

$L^p(\Omega) \times L^q(\Omega) \to \mathbb{C}$,

$$(u,v) \to \int_\Omega u(x)v(x)dx,$$

pour tout réel p dans $[1,+\infty[$, le bidual de $L^p(\Omega)$ s'identifie algébriquement et topologiquement à $L^p(\Omega)$

On dit que l'espace $L^p(\Omega)$ est réflexif.

2.2 Espace de Hilbert

Un espace vectoriel normé $(H, \|.\|)$ sur $\mathbb{C}$ (ou $\mathbb{R}$) est de Hilbert si sa norme provient d'un produit scalaire et s'il est complet.

2.3 Espace de Sobolev

Soit: $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq +\infty$.

On définit l'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ par :

$$W^{m,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) : D^\alpha f \ existe \ et \ D^\alpha f \in L^p(\Omega), \forall |\alpha| \leq m\}.$$

On munit les espaces de Sobolev par une structure d'espace normés dont les normes sont définies par :

$$\|f\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega |D^\alpha f(x)|^p \, dx\right)^{1/p} \qquad 1 \leq p < +\infty$$

$$\|f\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_{x\in\Omega} |D^\alpha f(x)| \qquad p = +\infty$$

l'espace $H^m(\Omega)$, munit du produit scalaire$\langle u, v\rangle = \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}$.

Si $P = 2$, $W^{m,2} = H^2$ munit du produit scalaire :

$$\langle u, v\rangle = \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}$$

est un espace de Hilbert.

$H_0^m(\Omega)$ l'adhérence (pour la norme $\|.\|_{H^m(\mathbb{R}^N)}$) du sous espace $D(\Omega)$ dans $H^m(\Omega)$.

2.3.1 Espace de Sobolev $H^1(\Omega)$

On appelle espace de Sobolev d'ordre 1 sur Ω, l'espace :

$$H^1(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega) : \frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), 1 \le i \le n\}.$$

On munit $H^1(\Omega)$ du produit scalaire :

$$(f,g)_{1,\Omega} = \int_\Omega \left(fg + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_i} \right) dx$$

la norme correspondante sera :

$$\|f\|_{1,\Omega} = \sqrt{(f,f)_{1,\Omega}}.$$

2.3.2 Espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$

Soit Ω un ouvert borné régulier de class C^1.
Alors $H_0^1(\Omega)$ est donné par :

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) \quad v\,|_{\partial\Omega} = 0 \text{ sur } \partial\Omega\};$$

2.4 Espace de Boschner

1) $C(I\ ,L^2(\Omega)) = \{f : I \to L^2(\Omega)$ qui associé à $t \to f(t) \in L^2(\Omega)$ continue$\}$ munit de la norme

$$\|f\|_{C(I,L^2(\Omega))} = \max_{t\in I} \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

2) $L^\infty(I, H_0^1(\Omega)) = \{f : I \to H_0^1(\Omega)$ essentiellement bornées$\}$ munit de la norme

$$\|f\|_{L^\infty(I,H_0^1(\Omega))} = \sup_{t\in I} \|f\|_{H_0^1(\Omega)} \qquad p.p.$$

3) $L^2(I, L^2(\Omega)) = \{f : I \to L^2(\Omega)$ à carré intégrable$\}$ munit de la norme :

$$\|f\|_{L^2(I,L^2(\Omega))} = \int \|f\|^2_{L^2(\Omega)}\, dt < \infty.$$

Définition 2.4.1 *Si E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ le dual de E est l'espace $\mathcal{L}(E,\mathbb{k})$ des formes linéaires continues sur $\mathbb{k}$, on le note E' et on munit E' de la norme subordonnée à la norme de E.*

2.5 Convergence faible

Soit E un espace de Banach

Définition 2.5.1 *(x_n) converge faiblement dans E vers x si l'on a :*

$$\lim_{n\to+\infty} \langle x', x_n\rangle = \langle x', x\rangle \implies \lim_{n\to+\infty} \langle x', x_n - x\rangle = 0, \ \forall x' \in E'.$$

avec E' l'espace dual de E.

Notation On note $x_n \to x$ faiblement dans E par : $x_n \rightharpoonup x$.

Remarque 2.5.1 *1. Si $x_n \to x$ fortement ($\|x_n - x\|_E \to 0$) $\implies x_n \rightharpoonup x$ car :*

$$\forall x' \in E' \ : \langle x', x_n - x\rangle \leq \|x'\| \, \|x_n - x\| \to 0$$

2. Si $\dim E = n < \infty$ on a équivalence de deux notions :
$m \geq 1, x^m = (x_1^m, x_2^m, ...x_n^m), \dim E' = n;$
$\{e_1, e_2, ...e_n\}$ *base de* $E \implies \{e_j^*\}_{j=1}^n$ *base dual tq :*

$$e^*_{j(e_i)} = \delta_{ji} = \begin{cases} 1 & i = j \\ \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$x^m \rightharpoonup x = (x_1, x_2, ...x_n) \implies \forall i = \overline{1,n}, x' = e_i^*$
$\langle e_i^*, x^m - x\rangle = x_i^m - x_i \overset{m\to\infty}{\to} 0 \implies \sum_{i=1}^n |x_i^m - x_i| \overset{m\to\infty}{\to} 0$
alors : $\|x^m - x\|_1 \to 0$ *ce qui donne* $\|x^m - x\| \to 0$ *car tout les normes de* E *sont équivalentes.*

Théorème 2.5.1 *Soit E un espace de Banach réflexif et x_n une suite bornée dans E , alors il est possible d'extraire une sous suite de x_n qui converge faiblement dans E.*

Théorème 2.5.2 *(de Riesz)*

E un espace de Hilbert, soit $f \in E'$, il existe un élément unique $u \in E$ tq : $\begin{cases} f(v) = (u, v) \\ \\ \|f\|_* = \|u\| \end{cases} \quad \forall v \in E.$

Remarque 2.5.2 $v_n \rightharpoonup v \iff \forall u \in E : \lim_{n\to\infty} (v_n, u) = (v, u)$

car :

$v_n \rightharpoonup v \iff \forall f \in E' : f(v_n) \to f(v) \overset{\text{théorème de Riesz}}{\iff} f(v_n) = (u, v_n)$

Théorème 2.5.3 *Toute suite bornée dans un espace de Hilbert possède une sous suite faiblement convergente.*

2.6 Les inégalités utilisées :

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

2.6.1 Inégalité de Cauchy- Schwartz :

$\forall u, v \in L^2(\Omega)$:

$$\int_\Omega |u.v \quad dx| \leq \left(\int_\Omega |u|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |v|^2 dx\right)^{1/2}$$

$$\left|\int_\Omega \sum_{i=1}^N u_i v_i dx\right| \leq \left(\int_\Omega \sum_{i=1}^N u_i dx\right)^{1/2} \left(\int_\Omega \sum_{i=1}^N v_i dx\right)^{1/2}.$$

Preuve. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, définissons le trinôme du second degré
$p(\lambda) = (u + \lambda v, u + \lambda v) = \lambda^2 (v, v) + 2\lambda (u, v) + (u, u)$.
Comme $p(\lambda) \geq 0 \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$,nécessairement le discriminant $\Delta = (u, v)^2 - (u, u)(v, v)$ doit être négatif ou nul,
soit $|(u, v)| \leq (u, u)^{\frac{1}{2}} (v, v)^{\frac{1}{2}}$.
Si $\Delta = 0$ alors le polynôme $p(\lambda) = 0$ admet une racine double i.e ils existe $\lambda_1$tq $p(\lambda_2) = 0$ donc u et v colinéaires. □

2.6.2 L'ε-inégalité :

$$|xy| \leq \frac{\varepsilon}{2}x^2 + \frac{1}{2\varepsilon}y^2, \qquad \forall \varepsilon \geq 0 \quad \forall x, y$$

2.6.3 Inégalité de Gronwall :

le cas continu : soient $x(t) \geq 0, h(t), y(t)$ des fonctions intégrable sur $[a, b]$.
Si

$$y(t) \leq h(t) + \int_a^b x(\tau) y(\tau) d\tau \qquad \forall t \in [a, b]$$

alors :

$$y(t) \leq h(t) + \int_0^t \left(h(\tau)x(\tau)\exp(\int_\tau^t x(s)ds) \right) d\tau \qquad \forall t \in [a,b].$$

En particulier si $x(t) \equiv c$ et $h(\tau)$ et croissante

alors :

$$y(t) \leq h(t)\exp(c(t-a)), \quad \forall t \in [a,b]$$

le cas discret : soit $\{a_i\}$une suite des nombres réels positifs tq :

$$a_1 \leq a$$

et

$$a_i \leq bh\sum_{k=1}^{i-1} a_k, \quad \forall i = 2, ...$$

avec a, b et h sont des constantes positives ;

alors :

$$a_i \leq a\exp(b(i-1)h) \qquad , i = 2, ...$$

2.6.4 Inégalité de Poicaré :

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. Alors il existe une constante $c > 0$ telle que :

$$\|u\|_p = \left(\int_\Omega |u|^p \, dx \right)^{1/p} \leq c\left(\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx \right)^{1/p} \qquad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega), \ 1 \leq p \leq +\infty.$$

En particulier l'expression $\|\nabla u\|_p$ est une norme sur $W_0^1(\Omega)$ qui est equivalente à la norme $\|u\|_{W^{1,p}}$ sur $H_0^1(\Omega)$ l'expression $\int_\Omega \nabla u \nabla v$ est un produit scalaire qui induit la norme $\|\nabla u\|_{L^2}$ équivalent à la norme $\|u\|_{H^1}$.

2.7 Quelque théorèmes utilisées :

Théorème 2.7.1 *Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^n$, l'ensemble M des fonctions $f \in L^p(\Omega)$ est précompact ssi M est bornée et équicontinue, c.à.d*

$\forall \varepsilon, \exists\ \delta > 0$ telle que $\forall f \in M$

$$\int_\Omega |f(x+y) - f(x)|^p \, dx \leq \varepsilon \qquad \text{pour } y < \delta.$$

Notons que ce théorème connu sous le nom critère de compacité de Kolmogorov.

2.7.1 Théorème de Minty_browder :

Soit d : $(0,T) \times \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application monotone pour la dernière variable, c.à.d :

$$(d(t,x,z_1) - d(t,x,z_2))(z_1 - z_2) \geq 0 \; pour \; z_1, z_2 \in \mathbb{R}^n$$

et $u_n \rightharpoonup u$ dans $L^p(Q_T)^n$.

$d(t,x,u_n) \rightharpoonup \chi$ dans $L^p(Q_T)^n$.

$$\lim_{n\to\infty} \sup \int_\Omega d(t,x,u_n)\, u_n dx \leq \int_\Omega \chi u dx.$$

Alors : $\chi = d(t,x,u)$.

Formule de Green :

On suppose que Ω est un ouvert borné de frontière $\Gamma = \partial\Omega$ régulière ; alors : $\forall u,\, v \in H^1(\Omega)$ on a :

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_\Gamma u v \gamma_i d\sigma$$

ou γ_i la $i^{\underline{\grave{e}me}}$ composante du vecteur unitaire normale extérieure.

En remarquant $A\Delta u = \operatorname{div}(A\nabla u)$ alors on a :

$$\int_\Omega \nabla.(A\nabla u) = -\int_\Omega A\nabla u \; \nabla v + \int_\Gamma (A\nabla u \; \eta)\, v.$$

Théorèmes de Fubini

Soit f une fonction intégrable sur $(E \times F, A \otimes B, \mu \otimes v)$. Alors ;

$i)$ Pour presque tout $x \in E$, la fonction $y \to f(x,y)$ est dans $L^1(v)$; de plus la fonction $x \to \int_F f(x,y) v dy$, définit μ p.p, est μ intégrable.

$ii)$ Pour presque tout $y \in F$, la fonction $x \to f(x,y)$ est dans $L^1(\mu)$;

de plus la fonction $y \to \int_E f(x,y) \mu dx$, définit v p.p v intégrable.

$iii)$ On a enfin

$$\int_{E\times F} f d\mu \otimes v = \int_E \left[\int_F f(x,y) v dy\right] \mu dx = \int_F \left[\int_E f(x,y) \mu dx\right] v dy.$$

2.7.2 Classifications mathématiques des EDP du second ordre

Ce sont de la forme

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = g(x, y).$$

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y})$$

et A, B, C, ..., F sont les coefficients de l'EDP, ils sont fonction de x et y et peuvent être des constants.

Selon le signe du discriminant

$$\Delta = B^2 - 4AC.$$

Nous obtenons le classement suivant :

1) Si $\Delta < 0$, l'EDP est dite elliptique comme l'équation de Laplace de la forme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

2) Si $\Delta > 0$, l'EDP est dite hyperbolique comme l'équation des ondes.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \delta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

3) Si $\Delta = 0$, l'EDP est dite parabolique comme l'équation de la chaleur.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \delta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \delta > 0.$$

Chapitre 3

Schéma de discrétisation et estimation a priori

3.1 Position du problème

Dans ce mémoire, nous considérons le problème (P) pour une équation parabolique intégro-différentielle dégénéré suivante :

$$\partial_t \beta(u) - \operatorname{div}(A(t,x)\nabla u) + v\nabla u + d(x)u$$

$$= f(t,x,u) + \int_0^t a(t,s) K(u(s,x))ds, \qquad (t,x) \in Q_T$$

avec la condition initiale :

$$u(0,x) = u_0(x), \qquad x \in \Omega$$

et les conditions aux limites :

$$-A\nabla u.\eta = g(t,x,u) \; sur \; I \times \Gamma_N$$

$$u = 0 \qquad sur \; I \times \Gamma_D$$

ou $\beta(u)$ est une fonction non linéaire, $n = 1, 2$ ou 3, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un domaine borné un bord Lipschitzien continu $I = (0,T)$, $Q_T = I \times \Omega$, η est le vecteur normal en chaque point Γ, Γ_N et Γ_D sous des sous-ensembles ouverts Γ avec $\overline{\Gamma} = \overline{\Gamma_N} \cup \overline{\Gamma_D}$, $\Gamma_N \cap \Gamma_D = \phi$ et mesu $\Gamma_D > 0$. Telles équations sont utilisées pour modéliser le flux d'un fluide dans les milieux poreux fissures, comme par exemple l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t}(c+\frac{\rho_b k}{\theta}c^p)-D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}+q\frac{\partial c}{\partial x}=0.$$

Qui modélise l'écoulement d'un fluide incompressible à travers un milieu poreux unidimensionnel où le fluide est contaminé par un soluté dans le cas de réactions d'adsorption au moyen d'équilibre isotherme de Freundlich, ici c est la concentration de fluide, ρ_b la masse volumique du milieu poreux, $\theta>0$ la porosité, D est le coefficient de dispersion, q est la vitesse moyenne du mémoire du fluide et $p\in(0,1)$.

L'opérateur de mémoire est obtenu par la modélisation du flux dans les milieux poreux élastiques. Dans le cas du milieu à mémoire, la loi de Darcy prend la forme :

$$q\left(t,x\right)=-K\left(t,x\right)\nabla p-\int_0^t k\left(t,s\right)\nabla p\left(s,x\right)ds$$

et la loi de Darcy généralisée :

$$v\left(t,x\right)=v_0\left(x\right)+\int_0^t A\left(t-s\right)\left(f-\nabla p\right)\left(s,x\right)ds.$$

3.2 Hypothèses et schéma de discrétisation

On définit l'espace de Hilbert séparable V tel que $H_0^1\left(\Omega\right)\subset V\subset H^1\left(\Omega\right)$ et V^* est son espace dual.

La norme de V est noté $\|.\|_{H^1}$. Soit C une constante positive indépendante de i, j, h et n.

On suppose que les hypothèses suivantes sont vérifiées :

(H_1) β est une fonction croissante continue et Lipschitzienne telle que $h^m\le\beta^{'}\le h^{-m}$, $m\in\left(0,\frac{1}{3}\right)$. Dans le cas dégénéré, nous remplaçons $\beta^{'}$ par $\beta_h^{'}\left(s\right)=\left\{h^m, muni\left(\beta^{'}\left(s\right),h^{-m}\right)\right\}$

(H_2) $f\left(t,x,s\right)$, $g\left(t,x,s\right)$ sont Lipschitziennes continues en t,s i.e $\forall\ t,t^{'}\in I$, $\forall\ s,\ s^{'}\in\mathbb{R}$, on a :

$$\left|f\left(t,x,s\right)-\ f\left(t^{'},x,s^{'}\right)\right|\ \le\ c\left[\left|t-t^{'}\right|\left(\left|s\right|+\left|s^{'}\right|\right)+\left|s-s^{'}\right|\right]$$

$$\left|g\left(t,x,s\right)-g\left(t^{'},x,s^{'}\right)\right|\le c\left[\left|t-t^{'}\right|\left(\left|s\right|+\left|s^{'}\right|\right)+\left|s-s^{'}\right|\right]$$

et satisfait a la condition de croissance $\left|f\left(t,x,\xi\right)\right|\le c\left(1+\left|\xi\right|\right)$.

(H_3) $A(t,x) : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ est une matrice symétrique continue de sorte que

$$\left|A(t,x) - A\left(t',x\right)\right|_{M(n)} \leq c\left|t-t'\right| \qquad \forall t,t' \in I$$

et

$$C_1 |\xi|^2 \leq (A(t,x)\xi,\xi) \leq C_2 |\xi|^2$$

où $M(n)$ est la norme de la matrice et $\xi \in \mathbb{R}^n$.

(H_4) $d(x) > 0$ et $(d\xi,\xi) \geq C|\xi|^2$, $u_0 \in V$.

(H_5) $\nabla v \in L^\infty(\Omega)$, $v.\eta = C \geq 0$ sur Γ_N.

(H_6) $a : I \times I \to \mathbb{R}$ est continue, $k(s) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue et $k(s) \leq c(1+|s|)$.

Définition 3.2.1 *Une solution faible du problème (P) est une fonction satisfaisant :*

1) $\partial_t\beta(u) \in L^2(I,V^*)$, $u(0,x) = u_0$.

2) *Pour tout ce que $\phi \in V$ nous avons*

$$\int_I (\partial_t\beta(u),\phi) + \int_I (v\nabla u,\phi) + \int_I ((u,\phi)) + \int_{I\times\Gamma_N} (g,\phi)$$
$$= \int_I (f,\phi) + \int_I \left(\int_0^t a(t,s)\, k(u(s,x))\, ds, \phi\right) \tag{1}$$

où $((u,\phi)) = (A\nabla u, \nabla\phi) + (d(x)u,\phi)$.

On remarquons le produit $((.,.))$ définit une norme $\|.\|_A$ équivalente $\|.\|_{H^1}$.

On divise l'intervalle I en n sous intervalles de longueur $h = \frac{T}{n}$ et on note $u_i = u(t_i,x)$, $t_i = ih$, $\delta u_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{h}$, $\tilde{u}_i = \int_{I_i} u(t,.)\,dt$, $i = 1,...,n$. Nous mettrons x pour des raisons de simplicité, le problème discrétisé associé est

$$\left(\lambda_{i-1}\left(u_i - u_{i-1}^*\right),\phi\right) + h(v\nabla u_{i-1},\phi) + h((u_i,\phi)) + h(g_i,\phi)_{\Gamma_N}$$
$$= h(f_i,\phi) + h\sum_{j=1}^{i-1} (a_{ij}k(u_j),\phi)\, h \tag{2}$$

où $u_{i-1}^* = \widetilde{u_{i-1}}\left(x - \frac{hv}{\lambda_{i-1}}\right)$, le schéma de relaxation λ_{i-1} est satisfait $\lambda_i = \beta_h'(u_i)$, $g_i = g(t_i,x,u_{i-1})$, $f_i = f(t_i,x,u_{i-1})$ et $\tilde{u} \in H^1(\Omega)$ et est une extension de Nicolskij $u \in H^1(\Omega^*)$, $\Omega^* \supset \overline{\Omega}$ satisfaisant $\|\tilde{u}\|_{H^1(\Omega^*)} \leq c\|u\|_{H^1(\Omega)}$.

3.3 Estimations a priori

Dans cette section on va démontrer quelque estimations a priori .

Lemme 3.3.1 *Les estimations suivantes sont vérifiées de manière uniforme par rapport n, i, j et h :*

$$h^m \sum_{i=1}^{j} h \left\|\delta u_i\right\|^2 \leq C, \left\|u_i\right\|_{H^1} \leq C, \sum_{i=1}^{j} \left\|u_i - u_{i-1}\right\|_{H^1}^2 \leq C, \left\|\beta\left(u_i\right)\right\| \leq C \tag{3}$$

Preuve. On pose $\phi = u_i - u_{i-1}$ dans (2) et en sommant pour $i = 1, ..., j$, nous obtenons :

$$\sum_{i=1}^{j} h\left(\lambda_{i-1}\left(\frac{u_i - u_{i-1}^*}{h}\right), \delta u_i\right) + \sum_{i=1}^{j} h\left(v\nabla u_{i-1}, \delta u_i\right)$$

$$+ \sum_{i=1}^{j} h\left(\left(u_i, u_i - u_{i-1}\right)\right) + \sum_{i=1}^{j} h\left(g_i, \delta u_i\right)_{\Gamma_N}$$

$$= \sum_{i=1}^{j} h\left(f_i, \delta u_i\right) + \sum_{i=1}^{j} h \sum_{j=1}^{i-1} \left(a_{ij} k\left(u_j\right), \delta u_i\right) h. \tag{4}$$

L'égalité (4) est brièvement noté par : $J_1 + J_2 + J_3 + J_4 = J_5 + J_6$, maintenant on va estimer chaque terme à coté :·) $J_1 = \sum_{i=1}^{j} h\left(\lambda_{i-1}\left(\frac{u_i - u_{i-1}^*}{h}\right), \delta u_i\right) \geq \sum_{i=1}^{j} h\beta_h'\left(u_i\right)\left\|\delta u_i\right\|^2 \geq h^m \sum_{i=1}^{j} h \left\|\delta u_i\right\|^2$donc :

$$J_1 \geq h^m \sum_{i=1}^{j} h \left\|\delta u_i\right\|^2 \tag{5}$$

·) $J_2 = \sum_{i=1}^{j} h\left(v\nabla u_{i-1}, \delta u_i\right)$
On utilisant L'$\varepsilon -$ inégalité :

$$\begin{aligned}
\left(v\nabla u_{i-1}, \delta u_i\right) &\leq \frac{1}{2\gamma}\left\|v\nabla u_{i-1}\right\|_{L^2}^2 + \frac{\gamma}{2}\left\|\delta u_i\right\|_{L^2}^2 \\
&\leq \frac{C}{2\gamma}\left\|\nabla u_{i-1}\right\|_{L^2}^2 + \frac{\gamma}{2}\left\|\delta u_i\right\|_{L^2}^2 \\
&\leq \frac{C}{2\gamma}\left\|u_{i-1}\right\|_{H^1}^2 + \frac{\gamma}{2}\left\|\delta u_i\right\|^2
\end{aligned}$$

donc :

$$\left|J_2\right| = \left|\sum_{i=1}^{j} h\left(v\nabla u_{i-1}, \delta u_i\right)\right| \leq C_\gamma \sum_{i=1}^{j} h \left\|u_{i-1}\right\|_{H^1}^2 + \gamma \sum_{i=1}^{j} h \left\|\delta u_i\right\|^2 \tag{6}$$

$\cdot)\ J_3 = \sum_{i=1}^{j} h\left((u_i, u_i - u_{i-1})\right)$
En utilisant :

$$(x, x-y) = \frac{1}{2}\left[\|x\|^2 - \|y\|^2 + \|x-y\|^2\right]$$

$$\begin{aligned} 2J_3 &= 2\sum_{i=1}^{j} h\left((u_i, u_i - u_{i-1})\right) \\ &= \sum_{i=1}^{j} h\left[\|u_i\|_A^2 - \|u_{i-1}\|_A^2 + \|u_i - u_{i-1}\|_A^2\right] \\ &= h\left[\|u_j\|_A^2 - \|u_0\|_A^2 + \sum_{i=1}^{j} \|u_i - u_{i-1}\|_A^2\right] \end{aligned}$$

$$= \|u_j\|_A^2 - \|u_0\|_A^2 + \sum_{i=1}^{j} \|u_i - u_{i-1}\|_A^2 . \tag{7}$$

$\cdot)\ J_4 = \sum_{i=1}^{j} h\left(g_i, \delta u_i\right)_{\Gamma_N}$
On utilisant L'$\varepsilon-$ inégalité :

$$2\left(g_i, \delta u_i\right)_{\Gamma_N} \leq \frac{1}{\varepsilon}\|g_i\|_{\Gamma_N}^2 + \varepsilon\left\|\delta u_i\right\|_{\Gamma_N}^2$$

en choisissant $\varepsilon = 1$, on obtient :

$$\begin{aligned} \left(g_i, \delta u_i\right)_{\Gamma_N} &\leq \frac{1}{2}\left[\|g_i\|_{\Gamma_N}^2 + \|\delta u_i\|_{\Gamma_N}^2\right] \\ &\leq \|g_i\|_{\Gamma_N}^2 + \|\delta u_i\|_{\Gamma_N}^2 \end{aligned}$$

d'après la condition de Neumann :

$$\begin{aligned} \left(g_i, \delta u_i\right)_{\Gamma_N} &\leq \|u_i\|_{\Gamma_N}^2 + \|\delta u_i\|_{\Gamma_N}^2 \\ &\leq \|u_i\|_{\Gamma_N}^2 + \|\delta u_i\|_{\Gamma_N}^2 + \sum_{i=1}^{j} \|u_i - u_{i-1}\|_{\Gamma_N}^2 \end{aligned}$$

pour estimer le terme de bord on utilise l'hypothèse (H_2), alors :

$$\sum_{i=1}^{j} h\left(g_i, \delta u_i\right)_{\Gamma_N} \leq C\left(\|u_i\|_{\Gamma_N}^2 + \sum_{i=1}^{j} \|u_i - u_{i-1}\|_{\Gamma_N}^2 + \sum_{i=1}^{j} h\left\|\delta u_i\right\|_{\Gamma_N}^2\right) \tag{8}$$

en prenant l'inégalité :

$$\|v\|_{\Gamma_N}^2 \leq \varepsilon\left\|\nabla v\right\|^2 + C_\varepsilon\left\|v\right\|^2, \qquad \forall v \in H^1, \varepsilon > 0 \tag{9}$$

et le prolongent $V \hookrightarrow L^2(\Gamma_N)$ en compte, on obtient :

$$J_4 \leq \varepsilon \left(\|u_i\|_{H^1}^2 + \sum_{i=1}^{j} \|u_i - u_{i-1}\|_{H^1}^2 \right) + C. \tag{10}$$

$\cdot$) $J_5 = \sum_{i=1}^{j} h(f_i, \delta u_i)$

$$\begin{aligned}
|J_5| &= \left| \sum_{i=1}^{j} h(f_i, \delta u_i) \right| \\
&\overset{C.S}{\leq} \sum_{i=1}^{j} h \|f_i\|_{L^2} \|\delta u_i\|_{L^2} \\
&\leq C \sum_{i=1}^{j} h \|\delta u_i\|_{L^2} \\
&\overset{\varepsilon.I}{\leq} C \sum_{i=1}^{j} h \left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{2}{\varepsilon} \|\delta u_i\|_{L^2}^2 \right) \\
&\leq \sum_{i=1}^{j} Ch\frac{\varepsilon}{2} + \frac{2}{\varepsilon} C \sum_{i=1}^{j} h \|\delta u_i\|_{L^2}^2 \\
&\leq \left[Cjh\frac{\varepsilon}{2} + \frac{2}{\varepsilon} C \sum_{i=1}^{j} h \|\delta u_i\|_{L^2}^2 \right] \\
&\leq CT\frac{\varepsilon}{2} + \frac{2}{\varepsilon} Ch \sum_{i=1}^{j} \|\delta u_i\|_{L^2}^2 \\
&\leq \max(CT, C) \left[\frac{\varepsilon}{2} + \frac{2}{\varepsilon} h \sum_{i=1}^{j} \|\delta u_i\|_{L^2}^2 \right]
\end{aligned}$$

on obtient :

$$|J_5| = \left| \sum_{i=1}^{j} h(f_i, \delta u_i) \right| \leq C \left(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=1}^{j} h \|\delta u_i\|_{H^1}^2 \right). \tag{11}$$

$\cdot)$ $J_6 = \sum\limits_{i=1}^{j} h \sum\limits_{j=1}^{i-1} (a_{ij}k(u_i), \delta u_i)\, h$.En utilisant l'inégalité de Cauchy -Schwarz, l'inégalité de Young et l'hypothèse (H_6) le terme mémoire peut être estimé comme suit :

$$\begin{aligned}
|J_6| &= \left| \sum_{i=1}^{j} h \sum_{j=1}^{i-1} (a_{ij}k(u_i), \delta u_i)\, h \right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{j} h \sum_{j=1}^{i-1} |(a_{ij}k(u_i), \delta u_i)\, h| \\
&\overset{C.S}{\leq} C \sum_{i=1}^{j} h^2 \sum_{j=1}^{i-1} \|\delta u_i\|_{L^2}^2 \\
&\overset{\varepsilon.I}{\leq} C \sum_{i=1}^{j} h^2 \sum_{j=1}^{i-1} \left(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \|\delta u_i\|_{L^2}^2 \right) \\
&\leq C \sum_{i=1}^{j} h^2 (i-1)\varepsilon + C \sum_{i=1}^{j} \frac{h^2}{\varepsilon} (i-1) \|\delta u_i\|_{L^2}^2 \\
&\leq C \sum_{i=1}^{j} h\varepsilon + C \frac{h}{\varepsilon} \sum_{i=1}^{j} \|\delta u_i\|_{L^2}^2 \\
&\leq C\varepsilon + C \frac{h}{\varepsilon} \sum_{i=1}^{j} \|\delta u_i\|_{L^2}^2 \\
&\leq C \left[\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=1}^{j} h \|\delta u_i\|_{H^1}^2 \right]
\end{aligned}$$

donc :

$$|J_6| = \left| \sum_{i=1}^{j} h \sum_{j=1}^{i-1} (a_{ij}k(u_i), \delta u_i)\, h \right| \leq C \left(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=1}^{j} h \|\delta u_i\|_{H^1}^2 \right). \tag{12}$$

Résumant toute ses considérations, la collecte $(5)-(12)$, choisissons ε, γ suffisamment petite, alors le lemme de Gronwall nous donne la prouve des trois premier inégalité dans (3), pour prouver la dernière estimation dans le lemme (3.3.1), on pose $\phi = \beta(u_i)$ dans l'identité (2) et en sommant sur $i = 1, ..., j$, puis en procédant comme si dessus on obtient l'estimation désirée. □

Soit $\bar{u}^n$ une fonction escalier définie par :

$$\bar{u}^n(t) = \begin{cases} u_i & t \in [t_{i-1}, t_i] \\ u_0 & t = 0 \end{cases} \qquad i = 1, ..., n \tag{13}$$

$$\overline{\beta}^n\left(\bar{u}^n(t)\right)=\begin{cases}\beta\left(u_i\right), & t\in[t_{i-1},t_i]\\ \\ \overline{\beta}^n\left(\overline{u}^n(0)\right)=\beta\left(u_0\right) & t=0\end{cases}\qquad i=1,....,n. \tag{14}$$

Nous définissons la fonction de Rothe sur l'intervalle I par :

$$u^n(t)=u_{i-1}+(t-t_{i-1})\,\delta u_i,\qquad t\in[t_{i-1},t_i]\qquad i=1,...,n \tag{15}$$

$$\beta^n\left(\bar{u}^n(t)\right)=\beta\left(u_{i-1}\right)+\lambda_{i-1}\left(t-t_{i-1}\right)\ \delta u_i\qquad t\in[t_{i-1},t_i]\qquad i=1,...,n \tag{16}$$

$$f^n(t)=\begin{cases}f_i & t\in[t_{i-1},t_i]\\ \\ f_0 & t=0\end{cases}\qquad i=1,...,n \tag{17}$$

$$K^n(t)=\begin{cases}h\sum\limits_{j=1}^{i-1}a_{ij}k\left(u_j\right) & t\in[t_{i-1},t_i]\\ \\ ha_{10}k_0 & t=0\end{cases}\qquad i=1,...,n \tag{18}$$

Lemme 3.3.2 *L'estimation a priori*

$$\left\|\lambda_{i-1}\delta u_i\right\|_*\leq C \tag{19}$$

est satisfaite $1\leq i\leq n$, *ou* $\left\|\lambda_{i-1}\delta u_i\right\|_*=\sup\limits_{\|\phi\|\leq 1,\phi\in V}\left|\left(\lambda_{i-1}\delta u_i,\phi\right)\right|.$

Preuve. *En appliquant le lemme* (3.3.1), *on conclue la preuve*

$$\left|\lambda_{i-1}\delta u_i\right|\leq h^m\left|\left(\delta u_i,\phi\right)\right|$$

est vrai $\forall\phi\in V$

$$\left|\lambda_{i-1}\delta u_i\right|\overset{C.S}{\leq}h^m\left\|\delta u_i\right\|\left\|\phi\right\|$$

$$\Rightarrow\left\|\lambda_{i-1}\delta u_i\right\|_*\leq h^m\left\|\delta u_i\right\|\overset{Lemme(2.3.1)}{\leq}C.$$

□

Corollaire 3.3.1 *D'après le lemme* (3.3.1) *et* (3.3.2) *on déduit les estimations suivantes :*

$a)\max\limits_{t\in I}\left\|\overline{\beta}^n\left(\bar{u}^n(t)\right)\right\|\leq C,$ $b)\ \left\|\partial_t\beta^n\left(\bar{u}^n\right)\right\|_{L^2(I,V^*)}\leq C$

$c)\ \left\|\bar{u}^n\right\|_{L^2(I,V)}\leq C,$ $d)\ \left\|u^n-\bar{u}^n\right\|_{L^2(I,V)}\leq\dfrac{C}{\sqrt{n}}$

$$d)\ \left\|\beta\left(\bar{u}^n\right)-\beta^n\left(\bar{u}^n\right)\right\|_{L^2(I,L^2(\Omega))}\leq\frac{C}{n^{1-2m}}\qquad e)\ \left\|u^n-\bar{u}^n\right\|_{L^2(I,L^2(\Omega))}\leq\frac{C}{n^{1-\frac{m}{2}}}. \tag{20}$$

Preuve. *a)* $\max_{t\in I}\left\|\overline{\beta}^n\left(\bar{u}^n\left(t\right)\right)\right\| \leq C.$

On a :

$$\begin{aligned}\left\|\overline{\beta}^n\left(\bar{u}_i^n\right)\right\| &= \left\|\overline{\beta}^n\left(\bar{u}^n\left(t_i\right)\right)\right\| = \left\|\overline{\beta}^n\left(\bar{u}^n\left(t\right)\right)\right\| \leq C\\ &\Rightarrow \max_{t\in I}\left\|\overline{\beta}^n\left(\bar{u}^n\left(t\right)\right)\right\| \leq C.\end{aligned}$$

b) $\|\partial_t\beta^n\left(\bar{u}^n\right)\|_{L^2(I,V^*)} \leq C.$

On dérive par rapport a t :

$$\partial\beta^n\left(\bar{u}^n\left(t\right)\right) = \lambda_{i-1}\ \delta u_i \qquad t\in\left[t_{i-1},t_i\right],\quad i=1,...,n$$

en appliquant le lemme (3.3.2) on aura :

$$\left\|\partial\beta^n\left(\bar{u}^n\left(t\right)\right)\right\|^2 = \left\|\lambda_{i-1}\ \delta u_i\ \right\|_*^2 \leq C$$

on intègre par rapport a t :

$$\int_0^T \left\|\partial\beta^n\left(\bar{u}^n\left(t\right)\right)\right\|^2 = \int_0^T \left\|\lambda_{i-1}\ \delta u_i\ \right\|_*^2 \leq \int_0^T C$$

on obtient :

$$\|\partial_t\beta^n\left(\bar{u}^n\right)\|_{L^2(I,V^*)} \leq C$$

c) $\|\bar{u}^n\|_{L^2(I,V)} \leq C.$

$$\|\bar{u}^n\| = \|u_i\| \leq C$$

on intègre par rapport à t :

$$\begin{aligned}\int_0^T \left\|\left(\bar{u}^n\left(t\right)\right)\right\|_{L^2(I,V)}^2 &= \int_0^T \left\|u_i\ \right\|_{L^2(I,V)}^2 \leq \int_0^T C\\ &\Rightarrow \|\bar{u}^n\|_{L^2(I,V)} \leq C.\end{aligned}$$

d) $\|u^n-\bar{u}^n\|_{L^2(I,V)} \leq \frac{C}{\sqrt{n}}.$

On a :

$$u^n\left(t\right) = u_{i-1}+\left(t-t_{i-1}\right)\delta u_i, \qquad t\in\left[t_{i-1},t_i\right] \qquad i=1,...,n$$

donc :

$$\begin{aligned}u_{i-1}+\left(t-t_{i-1}\right)\delta u_i-u_i &= -h\left(\frac{u_i-u_{i-1}}{h}\right)+\left(t-t_{i-1}\right)\delta u_i\\ &= -h\delta u_i+\left(t-t_{i-1}\right)\delta u_i\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}
\|u_{i-1} + (t - t_{i-1})\,\delta u_i - u_i\|^2 &= \|-h\delta u_i + (t - t_{i-1})\,\delta u_i\|^2 \\
&= |-h + t - t_{i-1}|^2\,\|\delta u_i\|^2 \\
&\leq 4h^2\,\|\delta u_i\|^2 \\
&\leq \frac{C}{n}
\end{aligned}$$

alors :

$$\|u^n - \bar{u}^n\|_{L^2(I,V)} \leq \frac{C}{\sqrt{n}}.$$

Pour la preuve de ce qui reste on procède comme dans (a), (b), (c), (d). $\square$

Chapitre 4

L'existence et l'unicité de la solution

4.1 Résultats de convergence et de l'existence

Vue aux des estimations (a) et (b) dans la corollaire (3.3.1) et le lemme (1.3) en [11] , il suit qu'il existe $w \in C(I, V^*) \cap L^\infty(I, L^2(\Omega))$, avec $\partial_t w \in L^2(I, V^*)$ et une sous suite $(\beta^{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(\beta^n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\beta^{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} w \text{ dans } C(I, V^*) \qquad ,\overline{\beta}^{n_k}(\overline{u}^{n_k}(t)) \underset{k\to\infty}{\rightharpoonup} w(t) \text{ dans } L^2(\Omega)$$

$$\beta^{n_k}(\overline{u}^{n_k}) \underset{k\to\infty}{\rightharpoonup} w(t) \text{ dans } L^2(\Omega) \qquad ,\partial_t \beta^{n_k} \underset{k\to\infty}{\rightharpoonup} \partial_t w \text{ dans } L^2(I, V^*) \tag{21}$$

le critère de compacité Kolmogorov donne

$$\beta^{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} w(t) \text{ dans } L^2(Q_t) \tag{22}$$

d'autre part à partir de la corollaire (3.3.1), on en déduit que la suite $\{\overline{u}^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément borné dans $L^2(I, V)$, par la suite nous pouvons extraire une sous suite $\{\overline{u}^{n_k}\}_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\overline{u}^{n_k} \underset{k\to\infty}{\rightharpoonup} u \text{ dans } L^2(I, V) \tag{23}$$

d'après le théorème de Minty-Browder on prend $d = \beta(u)$ et $\chi = w$

donc :

$$\beta^{n_k} \underset{k\to\infty}{\rightharpoonup} w(t) = \beta(u)$$

on utilise le théorème de la convergence dominée on trouve :

$$w = \chi = \beta(u).$$

En tenant compte (21) et le théorème de Minty-Browder [6] donne :

$$w = \beta(u) \tag{24}$$

Lemme 4.1.1 *La suite $\{K^n\}_n$ est uniformément borné et possède une sous suite $\{K^{n_k}\}_k$ telle que :*

$$K^{n_k} \underset{k\to\infty}{\rightharpoonup} K \ dans\ L^2(I, L^2(\Omega)) \tag{25}$$

Preuve. *Le preuve est similaire à celle de [2]* □

Lemme 4.1.2 *La propriété suivante est vérifiée :*

$$\partial_t\beta^{n_k}(\bar{u}^{n_k}) \underset{k\to\infty}{\rightharpoonup} \partial_t\beta(u) \ \ dans\ L^2(I, V^*) \tag{26}$$

Preuve. *Par l a corollaire* (3.3.1)*on a :*
$\partial_t\beta^n(\bar{u}^n)$ *est uniformément borné dans V^* et donc une sous suite $\{\partial_t\beta^{n_k}(\bar{u}^{n_k})\}$ telle que :*

$$\partial_t\beta^{n_k}(\bar{u}^{n_k}) \underset{k\to\infty}{\rightharpoonup} \xi \tag{27}$$

avec l'aide du théorème de Fubini, on obtient

$$\left(\beta^{n_k}(\bar{u}^{n_k}) - \beta^{n_k}(u_0), \phi\right) = \int_0^t \left(\partial_t\beta^{n_k}(\bar{u}^{n_k}(s)), \phi\right) ds \tag{28}$$

prenant la limite quand $k \to \infty$, cette dernière donne :

$$\left(\beta(u) - \beta(u_0), \phi\right) = \int_0^t (\xi, \phi)\, ds \tag{29}$$

ce qui implique

$$\left(\beta(u) - \beta(u_0) - \int_0^t \xi(s)\, ds, \phi\right) = 0 \tag{30}$$

sachant que $\phi \in V$ et $V^\perp = \{0_V\}$ alors :

$$\beta(u) - \beta(u_0) = \int_0^t \xi(s)\, ds$$

donc :

$$\partial_t\beta(u) = \xi(t) \quad\ p.p$$

et par suite $\partial_t\beta(u) = \xi$. □

Théorème 4.1.1 La limite u est une solution faible du problème (P) dans le sens de la définition (3.3.1). Si la solution faible u est unique alors la suite originale $\{u^n\}$ converge vers u.

Preuve. *En vertu de (13) – (18), l'identité (2) peut être écrite comme suit*

$$\int_I \left(\partial_t \beta^n \left(\bar{u}^n\right), \phi\right) + \int_I \left(v \nabla \bar{u}^n, \phi\right) + \int_I \left(\left(\bar{u}^n, \phi\right)\right) + \int_I \left(\bar{g}^n, \phi\right)_{\Gamma_N}$$
$$= \int_I \left(f^n, \phi\right) + \int_I \left(K^n, \phi\right), \qquad \forall \phi \in V \tag{31}$$

l'injection $V \hookrightarrow L^2(\Gamma_N)$ implique :

$$\bar{u}^n \longrightarrow u \text{ dans } L^2\left(I, L^2\left(\Gamma_N\right)\right) \text{ i.e. } \bar{g}^n \longrightarrow g \text{ dans } L^2\left(I, L^2\left(\Gamma_N\right)\right) \tag{32}$$

maintenant en remplace n par $n_k \longrightarrow \infty$ dans (31) puis en prenant les lemmes (4.1.1) et (4.1.2) et en considération, il s'ensuit

$$\int_I \left(\partial_t \beta(u), \phi\right) + \int_I \left(v \nabla u, \phi\right) + \int_I \left(\left(u, \phi\right)\right) + \int_I \left(g, \phi\right)_{\Gamma_N}$$
$$= \int_I \left(f, \phi\right) + \int_I \left(Ku, \phi\right), \qquad \forall \phi \in V$$

et par suite u est une solutions faible de (P) au sens de la définition (3.3.1). Comme dans [13] nous pouvons obtenir que l'unicité de la solution implique que la suite original $\{u^n\}_n$ est convergente vers u.

$\square$

4.2 Unicité de la solution faible

Dans cette section nous montrons l'unicité de la solution faible dans le cas $n = 2$, pour cela nous faisons, les hypothèses supplémentaire suivantes :

i)

$$\int_0^t a(t,s)\, k\left(u(s,x)\right) ds = -\int_0^t a(t-s) \triangle u$$

et

$$(-1)^j \partial_t^j a(t) \geq 0, t > 0, j = 0, 1, 2, \partial_t a \neq 0.$$

ii)

$$\left\|\beta(u_1) - \beta(u_2)\right\| \geq c \left\|u_1 - u_2\right\|_{H^1}.$$

iii)

$$v = c(t, x, u)$$

et

$$|c(t, x, z_1) - c(t, x, z_2)| \leq c|z_1 - z_2|.$$

Remarque 4.2.1 *1) L'hypothèse* $(-1)^j \partial_t^j a(t) \geq 0$ *est équivalent à la positivité du noyau a i.e.*

$$\int_0^T \int_0^t a(t-s)\theta(s)\, ds\theta(t)\, dt \geq 0,$$

qui implique la monotonie de l'opérateur de mémoire i.e.

$$\int_I \left(\int_0^t a(t-s) \nabla (u_1(s,x) - u_2(s,x))\, ds, \nabla (u_1(s,x) - u_2(s,x)) \right) dt \geq 0. \quad (33)$$

2) La monotonie de β *implique que :*

$$(\beta(u_1) - \beta(u_2), u_1 - u_2) \geq 0.$$

Théorème 4.2.1 *Selon les hypothèses* $(i)-(ii)$*, le problème* (P) *à une unique solution faible.*

Preuve. On suppose que le problème (P) a deux solution faible u_1, u_2 et posons $\phi = u_1 - u_2$, puis en substituant ϕ sur la partie gauche de l'identité (1), nous obtenons :

$$\int_0^\xi (\beta(u_1) - \beta(u_2), \phi)\, d\tau + \int_0^\xi \int_0^\tau (c(t,x,u_1)\nabla u_1 - c(t,x,u_2)\nabla u_2, \phi)\, dtd\tau$$
$$+ \int_0^\xi \int_0^\tau ((u,\phi))\, dtd\tau + \int_0^\xi \int_0^\tau \left(\int_0^t a(t-s)\nabla\phi ds, \nabla\phi \right) dtd\tau$$
$$= \int_0^\xi \int_0^\tau (f(t,x,u_1) - f(t,x,u_2), \phi)\, dtd\tau \quad (34)$$

la continuité lipschitzienne de β implique :

$$\int_0^\xi (\beta(u_1) - \beta(u_2), \phi)\, d\tau \geq c \int_0^\xi \|\beta(u_1(\tau)) - \beta(u_2(\tau))\|\, d\tau \quad (35)$$

le terme de convection peut être estimée comme suit :

$$\int_0^\tau (c(t,x,u_1)\nabla u_1 - c(t,x,u_2)\nabla u_2, \phi)\, dt$$

$$= \int_0^\tau (c(t,x,u_1)\nabla u, \phi)\, dt + \int_0^\tau ((c(t,x,u_1) - c(t,x,u_2))\nabla u_2, \phi)\, dt$$

$$\leq c\int_0^{\tau}\|\phi\|^2\,dt + c\int_0^{\tau}\|\nabla\phi\|^2\,dt + c\left(\int_0^{\tau}\int_{\Omega}|\phi|^4\,dxdt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{\tau}\|\nabla u\|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}} \tag{36}$$

Sachant que $H^1(\Omega) \underset{continue}{\hookrightarrow} L^4(\Omega)$

$$\left(\int_0^{\tau}\int_{\Omega}|u_1-u_2|^4\,dxdt\right)^{\frac{1}{2}} \leq c\int_0^{\tau}\|u_1-u_2\|^2\,dt + c\int_0^{\tau}\|\nabla(u_1-u_2)\|^2\,dt. \tag{37}$$

En appliquant ces estimations, la monotonie de l'opérateur mémoire, l'ellipticité de A et la continuité lipschitzienne de f et l'équation (34) implique

$$\int_0^{\xi}\|u_1(\tau)-u_2(\tau)\|_{H^1}^2\,d\tau \leq c\int_0^{\xi}\int_0^{\tau}\|u_1(t)-u_2(t)\|_{H^1}^2\,dtd\tau \tag{38}$$

à l'aide du lemme de Gronwall, on obtient :

$$\int_0^{\xi}\|u_1(\tau)-u_2(\tau)\|_{H^1}^2\,d\tau \leq 0$$

ainsi $u_1(\tau) = u_2(\tau)$. □

Bibliographie

[1] **D. Bahaguna, and V. Raghavendra,** Application of Rothe's method to nonlinear Schrödinger type equations, Appl. Anal. 31 :1 (1988), 149-160.

[2] **D. Bahuguna, V. Raghavendra,** Rothe's method to parabolic integrodifferential equation via abstact integrodifferential equation, Appl, anal, 33 (1989) 153-167.

[3] **D. Bahaguna,** Quasilinear integrodifferential equations in Banach spaces, Nonlinear analysis, theory, methods and applications, Vol. 24, N.2, 175-183, (1995) .

[4] **D. Bahaguna, S. Abbas, J. Dabas,** Partial functional differential equation with an integral boundary condition and application to population dynamics, Nonlinear Anal. TMA 69 (2008) 2623 2635.

[5] **L. C. Evans,** Partial Differential Equations. Providence, RI. American Mathematical Society. (1998) .

[6] **A. Fettoum,** Schéma de discrétisation pour une équation dégénéré parabolique non linéaire, setenue en Juin 2012.

[7] **A. Guezane-Lakoud, M. S. Jasmati, A. Chaoui,** Rothe's methode for an integro-differential equation with integral conditions, Nonlinear Analysis. 72 (2010) $1522 - 1530$.

[8] **U. Hornung,** Homogenisation and porous media.New York ; Springer. (1996) .

[9] **N.I. Ionkin,** Solutions of boundary value problem in heat conduction theory with non-local boundary conditions, Differents. Urav. 13 (1977) 294 30

[10] **J. Kacur,** Method of Rothe in evolution equation, Teubner-txte zur Mathematik, Vol, 80, BSB, B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1985.

[11] **J. Kacur, R. Van Keer,** On the numerical solution of semilinear parabolic problems in multicomponent structures with Volterra opertors in the transmission conditions and in the boundary conditions, Z. Angew. Math. Mech. 75 (1995) , no. 2, 91-103.

[12] **P. Knabner, F. Otto,** Solute transport in porous media with equilibrium and non equilibrium multiple-site dosorption. Uniqueness of the solution, Nonlinear Analysis, TMA 42 (3) (2000) 381-403.

[13] **O. A. Ladyženskaya,** Solution of the third boundary value problem for quasilinear parabolic equations, Trudy Mosk. Mat. Obs. 7, 1958.

[14] **O. A. Ladyženskaya,** The boundary value problems of mathematical physics. Springer-Verlags. NewYork. (1985) .

[15] **D. Lauerova,** The Rothe method and time periodic solutions to the Navier-Stokes equations and equations of magneto hydro dynamics, Appl. Math. 35 :2(1990), 89-98.

[16] **J. Necas,** application of Rothe's method to abstract parabolic equations, Czech. Math. J. 24 (1974) , 396-500.

[17] **E. Rothe,** Zweidiar mensionale parabolische Randwertaufgarben als Grenzfall eindi-mensienaler Randwertaufgaben, Math. Ann. 102 (1930), 650-670.

[18] **k. Rektorys,** On application of direct variational methods to the solution of parabolic boundary value problems of arbitrary order in space variables, Czech. Math. J. 21 (1971), 318-339.