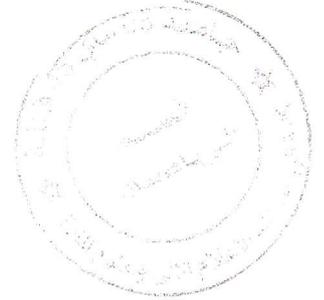


République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique

M1510.072

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques



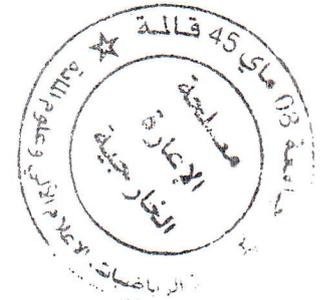
Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Master Académique en Mathématiques

Option : E.D.P (Analyse)

Par :

Boudib Hanene



Intitulé

Cycles limites des systèmes « Prédateur-Proie »

Dirigé par : Nabil Sellami

Devant le jury

N.Boussetila
Y.Bouatia

Univ-Guelma
Univ-Guelma

Session Juin 2013

REMERCIEMENT

Avant tous je remercie allah qui m'éclairé mon chemin et qui ma donné la force pour réaliser ce travail.

Toute gratitude à mon encadreur :SELLEMI Nabil ;

Tous les membres de jury : pour avoir accepter d'examiner ce travail.

Je remercie tous les enseignants qui nous ont beaucoup encouragé depuis le début de nos premier cycle d'étude jusqu'à la 2^{ème} Master.

Enfin, je sincère gratitude à tous mes amies de l'E.D.P et de la Probabilité et tous ceux qui me contribué de près ou de loin à la réalisation de cette mémoire.

HANENE

DEDICACE

Je dédie ce fruit de fin d'étude à la science

A mes très chers parents :

A toi Maman, le soleil de ma vie et le symbole de tendresse et du courage.

A toi papa, pour m'avoir toujours encouragé et insister de poursuivre mes études.

«Allah vous miséricorde maman et t'habite le royaume de cieux »

et

« Allah vous garde papa »

A ma chère sœur : ANISSA

A mon marie : SALIM

A l'épouse de mon père : HASSINA

A toutes mes amies : Sassia, Hassiba, Djazira, Souhila, Ahlem, Fatima, Kawther,

A toute ma famille : grand et petit

A tous ceux qui je les aime et tous ceux qui m'aiment.

Table des matières

1	Notions préliminaires	6
1.1	Théorème d'existence et d'unicité de la solution	7
1.2	Notions sur la stabilité :	8
1.3	Etude qualitative	10
1.3.1	Points critiques	10
1.3.2	Portrait de phase	10
1.3.3	Linéarisation d'un système différentiel non linéaire	11
1.3.4	Types des points critiques et la stabilité	12
1.3.5	Ensembles limites	14
1.3.6	Orbites périodiques, cycles limites	15
2	Equations de Lotka-Volterra	16
2.1	Les équations	17
2.2	Signification physique des équations	17
2.2.1	Proies	17
2.2.2	Prédateurs	18
2.3	Solution de l'équation	18
2.4	Dynamique du système	19
2.4.1	Equilibres de la population	19
2.4.2	Stabilité des points fixes	19

3	Systèmes "prédateur-proie" de type de Gause généralisés	21
3.1	L'unicité des cycles limites des systèmes de Liénard dépendant d'un paramètre	23
3.2	Transformation des systèmes "prédateur-proie" au système de Liénard . .	28
3.3	Etude de cycles limites	30

Introduction

Dans la théorie qualitative des équations différentielles un des plus importants problèmes est l'étude des cycles limites, leur existence, leurs nombres et leur stabilité. On rappelle qu'un cycle limite d'une équation différentielle ordinaire est une solution périodique isolée dans le sens que dans un petit voisinage de ce cycle on ne trouve pas d'autres solutions périodiques. Les solutions voisines spiralent en approchant ou en éloignant le cycle limite. Les cycles limites ont été introduits pour la première fois par H. Poincaré en 1881.

Dans les années 1920, le statisticien Alfred Lotka et le mathématicien Vito Volterra élaborent un modèle qui décrit la dynamique de systèmes écologiques où cohabitent un prédateur et sa proie. De façon emblématique, il est souvent appliqué aux lynx et aux lièvres des neiges dont les recensements précis ont été établis par la Compagnie de la baie d'Hudson au 19^{ème} siècle. Ce modèle est constitué d'une équation différentielle qui traduit l'évolution des populations de chaque animal. Ainsi, quand les lynx sont nombreux, la population de lièvres décroît, ce qui entraîne la diminution du nombre de lynx (ils ont moins à manger), puis l'augmentation de celui de lièvres, libérés de la pression des prédateurs... Ce type d'équations n'est pas réservé à la biologie et il est également pertinent notamment en physique : au début du 20^{ème} siècle, Balthazar Van der Pol [13] décrit de cette façon les oscillations d'un circuit électrique doté d'une lampe dont la résistance dépend de l'intensité du courant qui y passe.

Dans les deux exemples, à mesure que le temps croît, le comportement du système a tendance à devenir périodique. Graphiquement, les courbes qui représentent les solutions s'approchent d'un cycle : on parle de cycle limite. Rigoureusement, le modèle de Lotka-Volterra n'admet un cycle limite que dans une version modifiée par l'écologiste canadien Crawford Holling. D'autres systèmes, plus complexes, peuvent avoir plusieurs cycles limites. Le comportement asymptotique sera encore périodique, mais la convergence aura lieu vers tel ou tel cycle limite selon la position initiale. Il est important de pouvoir déterminer le nombre de ces cycles limites.

Cette question est au cœur de la seconde partie du 16^{ème} problème de Hilbert qui se

concentre sur les équations différentielles polynomiales dans le plan. On peut formuler le problème ainsi : connaissant le degré n d'une équation différentielle dans le plan, peut-on estimer le nombre de ses cycles limites ? Ce problème n'est pas encore résolu.

Ces dernières années, les recherches se sont orientées vers le système de Liénard en essayant de répondre au 16^{ème} problème de Hilbert.

Dans ce mémoire, on s'intéresse à l'étude des cycles limites d'un système «Prédateur-Proie» du type Gause généralisé en les transformant en système de Liénard généralisé.

Notre mémoire comporte trois chapitres :

Le premier chapitre est un rappel des notions préliminaires concernant les outils de base de la théorie des systèmes dynamiques et de l'étude qualitative des équations différentielles ordinaires. Nous commençons par citer le théorème d'existence et d'unicité d'une solution d'un système différentiel non linéaire, on définit ensuite les différentes notions de stabilité des solutions d'un tel système et on passe à l'étude qualitative des systèmes différentiels qui comporte plusieurs notions importantes (Points critiques, linéarisation, ensembles limites, cycles limite...).

Dans le deuxième chapitre, on étudie le système de Lotka-Volterra. On commence par décrire les équations du système ensuite on donne la signification physique et la solution de l'équation et on passe à l'étude de la dynamique du système.

Le dernier chapitre est consacré à l'étude des systèmes "Prédateur-Proie" de type de Gause généralisés. On étudie l'existence, l'unicité ou le nombre de cycles limites de ce type de systèmes en les transformant en systèmes de Liénard généralisés et on utilise les résultats et les théorèmes connus sur les cycles limites de ce type de systèmes.

Résumé

Dans ce mémoire, on étudie les cycles limites des systèmes «Prédateur-Proie». On commence par le premier modèle de Lotka-Volterra qui ne possède pas de cycle limite. Ensuite on passe à l'étude d'un autre modèle plus générale qui est le modèle de Gause généralisé. Pour ce dernier, on le transforme en un système de Liénard généralisé ensuite on applique quelques résultats concernant les cycles limites de ce type de systèmes.

Chapitre 1

Notions préliminaires

Résumé

Ce chapitre est un rappel des notions préliminaires concernant les outils de base de la théorie des systèmes dynamiques et de l'étude qualitative des équations différentielles ordinaires. Nous commençons par citer le théorème d'existence et d'unicité d'une solution d'un système différentiel non linéaire, on définit ensuite les différentes notions de stabilité des solutions d'un tel système et on passe à l'étude qualitative des systèmes différentiels qui comporte plusieurs notions importantes (Points critiques, linéarisation, ensembles limites, cycles limites...).

Soit $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ on note x_1, x_2, \dots, x_n les coordonnées de x . Dans tout ce mémoire, la variable est représentée par la lettre t , en particulier on dérive par rapport à t , ($\dot{x} = \frac{dx(t)}{dt}$).

1.1 Théorème d'existence et d'unicité de la solution

On suppose que E est un ouvert de \mathbb{R}^n , soit le système autonome :

$$\dot{x} = f(x), x \in E \tag{1.1}$$

où $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un champ de vecteurs sur E .

Une solution du système (1.1) est une fonction dérivable

$$t \mapsto x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)),$$

définie d'un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ dans E , qui vérifie (1.1) pour tout $t \in I$.

L'image d'une solution est appelée une orbite. Une orbite est tangente en chacun de ces points au champ de vecteurs f . Le domaine E est appelé l'espace des phases.

Soit $x_0 \in E$. Le problème de Cauchy consiste en la détermination des solutions du système (1.1) satisfaisant la condition initiale $x(0) = x_0$.

Théorème 1.1 : (Existence et unicité de la solution)

Soit E un ouvert de \mathbb{R}^n contenant x_0 et supposons que $f \in C^1(E)$. Alors il existe $a > 0$ telle que le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

a une solution unique $x(t)$ sur l'intervalle $[-a, a]$.

Preuve : voir [2]

1.2 Notions sur la stabilité :

Soit le système autonome (1.1), on suppose que f satisfait les conditions d'existence et d'unicité des solutions.

Définition 1.1 Une solution $\varphi(t)$ du système (1.1) est dite stable si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, tel que pour toute solution $x(t)$ de (1.1) on a

$$\|x(t_0) - \varphi(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - \varphi(t)\| < \varepsilon, \forall t > t_0.$$

Si de plus on a $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - \varphi(t)\| = 0$, la solution $\varphi(t)$ est dite asymptotiquement stable.

Définition 1.2 La solution $\varphi(t) = 0$ du système (1.1) est dite stable si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, telle que pour toute solution $x(t)$ de (1.1) on a

$$\|x(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \forall t > t_0.$$

Exemple 1.1.

Montrons que la solution du problème suivant est stable :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x \\ x(0) = y(0) = 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

Solution :

On a besoin de connaître $\varphi(t)$ qui vérifie $\varphi(0) = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X(t)$ tel que $X(0) = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$. Le système (1.2) est écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Les solutions de ce système sont

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \cos t - c_2 \sin t \\ c_1 \sin t + c_2 \cos t \end{pmatrix}$$

$x(0) = y(0) = 0$, alors

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \cos 0 - c_2 \sin 0 \\ c_1 \sin 0 + c_2 \cos 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc $c_1 = c_2 = 0$ et la solution de (1.2) est :

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On va montrer que la solution $\varphi(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est stable.

Soit $X(t)$ solution de (1.2) tel que $X(0) = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, En obtient

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_0 \cos t - y_0 \sin t \\ x_0 \sin t + y_0 \cos t \end{pmatrix}.$$

On a

$$\begin{aligned} \| X(t) \| &= \left\| \begin{pmatrix} x_0 \cos t - y_0 \sin t \\ x_0 \sin t + y_0 \cos t \end{pmatrix} \right\| \\ &= |x_0 \cos t - y_0 \sin t| + |x_0 \sin t + y_0 \cos t| \\ &< |x_0| + |y_0| + |x_0| + |y_0| \\ &< 2 \left\| \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right\| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Donc $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \frac{\varepsilon}{2} > 0$ telle que $\|X(0)\| < \delta \Rightarrow X(t) < \varepsilon, \forall t > 0$. Donc la solution $\varphi(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est stable.

1.3 Etude qualitative

1.3.1 Points critiques

Définition 1.3 Tout point $a \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$f(a) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

s'appelle point critique du système (1.1); (point d'équilibre, point de repos, point stationnaire).

Le point critique est une solution réduite à un point (constante).

1.3.2 Portrait de phase

On considère le système planaire :

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases} \quad (1.4)$$

où P et Q sont des polynômes en x et y .

Les solutions du système (1.4) sont représentées dans le plan (x, y) par des courbes appelées : orbites.

Les points critiques de ce système sont les solutions constantes.

La figure complète des orbites du système (1.4) ainsi que les points critiques représentés dans le plan (x, y) s'appelle portrait de phase, et le plan (x, y) est appelé plan de phase.

1.3.3 Linéarisation d'un système différentiel non linéaire

Soit le système (1.1) et soit x_0 un point critique de (1.1)

Définition 1.4 Le système

$$\dot{x} = Ax$$

où $A = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) \right)_{i,j=1,n} = Df(x_0)$ est appelé linéarisation du système (1.1) en x_0 , ou le système linéarisé du système (1.1).

Si $n = 2$, Le système linéarisé du système (1.1) s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Définition 1.5 Un point critique x_0 de (1.1) est dit hyperbolique si aucune des valeurs propres de $A = Df(x_0)$ n'a de partie réelle nulle.

Remarque :

Un point d'équilibre hyperbolique est soit asymptotiquement stable soit instable.

Définition 1.6 Deux systèmes planaires :

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.5}$$

et

$$\dot{x} = g(x) \tag{1.6}$$

définis sur U et V respectivement, sont topologiquement équivalents s'il existe un homéomorphisme $h : U \rightarrow V$ tel que h transforme les orbites de (1.5) en celles de (1.6) et préserve le sens du mouvement.

Théorème 1.1 (Hartman-Grobman) : Si x_0 est un point d'équilibre hyperbolique de (1.1), alors il existe un voisinage de ce point dans lequel le système $\dot{x} = f(x)$ est topologiquement équivalent à son linéarisé $\dot{x} = Df(x_0).x$.

1.3.4 Types des points critiques et la stabilité

Soit donné le système différentiel linéaire homogène à coefficients constants dans \mathbb{R}^2

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{11}x + a_{12}y \\ \dot{y} = a_{21}x + a_{22}y \end{cases} \quad (1.7)$$

où

$$\dot{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}_A X, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \text{avec } \det(A) \neq 0.$$

Le point $(0,0)$ est le point critique, et pour étudier le type de cet point, il faut établir l'équation caractéristique :

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$$

et chercher les racines λ_1, λ_2 .

Les cas suivants peuvent se présenter

a) Les valeurs propres de A sont réelles

♣ Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$: dans ce cas la matrice A est diagonalisable, après un changement de base, on peut supposer que

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

et le système (1.7) se réduit à

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda_1 x \\ \dot{y} = \lambda_2 y \end{cases}$$

La solution générale de ce système est

$$\begin{cases} x(t) = c_1 \exp(\lambda_1 t) \\ y(t) = c_2 \exp(\lambda_2 t) \end{cases}$$

Les orbites sont les courbes : $y = c | x |^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$, $c \in \mathbb{R}$.

*Si λ_1, λ_2 sont de même signe : le point $(0,0)$ est un noeud impropre ;

$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$: le point $(0,0)$ est un noeud impropre instable.

$\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$: le point $(0,0)$ est un noeud impropre asymptotiquement stable.

*Si λ_1, λ_2 sont de signe opposés : on dit que le point $(0,0)$ est un point selle (col) qui est toujours instable.

♣ Si $\lambda_1 = \lambda_2$: deux cas sont possibles

• A est diagonalisable : la solution générale est :

$$\begin{cases} x(t) = c_1 \exp(\lambda_1 t) \\ y(t) = c_2 \exp(\lambda_1 t) \end{cases}$$

Les orbites sont les courbes : $y = cx$, $x \in \mathbb{R}$, on dit que $(0,0)$ est noeud propre.

$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$: le point $(0,0)$ est un noeud propre asymptotiquement stable.

$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$: le point $(0,0)$ est un noeud propre instable.

• A est non diagonalisable : Alors, il existe une base dans laquelle la matrice A et le système s'écrivent :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 1 & \lambda_1 \end{pmatrix}, \begin{cases} \dot{x} = \lambda_1 \cdot x \\ \dot{y} = x + \lambda_1 \cdot y \end{cases}$$

La solution générale du système :

$$\begin{cases} x(t) = c_1 \exp(\lambda_1 t) \\ y(t) = (c_2 + c_1 t) \exp(\lambda_1 t) \end{cases}$$

$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$: le point critique $(0,0)$ est appelé noeud exceptionnel stable.

$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$: le point critique $(0,0)$ est appelé noeud exceptionnel instable.

b) Les valeurs propres de A sont complexes :

λ_1, λ_2 deux valeurs propres complexes de A telles que : $\lambda_1 = p + iq$ et $\lambda_2 = p - iq$ avec $p, q \in \mathbb{R}$.

*Si $p > 0, q \neq 0$: le point $(0,0)$ est un foyer instable.

*Si $p < 0, q \neq 0$: le point $(0,0)$ est un foyer asymptotiquement stable.

*Si $p = 0, q \neq 0$: le point $(0,0)$ est un centre qui est toujours stable.

1.3.5 Ensembles limites

Soit le système autonome (1.1), où $f \in C^1(E)$, E est un ouvert de \mathbb{R}^n .

Définition 1.7 On appelle orbite ou trajectoire de (1.1) passant par $x_0 \in E$, l'ensemble de \mathbb{R}^n défini par :

$$\Gamma_{x_0} = \{x \in E / x = \varphi(t, x_0), t \in \mathbb{R}\} = \Gamma_{x_0}^+ \cup \Gamma_{x_0}^-$$

avec

$$\Gamma_{x_0}^+ = \{x \in E / x = \varphi(t, x_0), t \geq 0\} \text{ et } \Gamma_{x_0}^- = \{x \in E / x = \varphi(t, x_0), t < 0\},$$

où $\varphi(t, x_0)$ est solution de (1.1).

Définition 1.8 Un point $p \in E$ est un point ω -limite de trajectoire Γ_x du système (1.1) s'il existe une suite $t_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ telle que : $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t_n, x) = p$.

De même, un point $q \in E$ est un point α -limite de trajectoire Γ_x du système (1.1) s'il existe une suite $t_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$ telle que : $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t_n, x) = q$.

L'ensemble de tous les points ω -limite de la trajectoire Γ est appelé ensemble ω -limite de Γ . On le note par $\omega(\Gamma)$.

L'ensemble de tous les points α -limite de la trajectoire Γ est appelé ensemble α -limite de Γ . On le désigne par $\alpha(\Gamma)$.

L'ensemble de tous les points limites de Γ : $\alpha(\Gamma) \cup \omega(\Gamma)$ est appelé l'ensemble limite de Γ .

1.3.6 Orbites périodiques, cycles limites

Définition 1.9 On appelle solution périodique ou cycle toute solution $x = \varphi(t)$ de l'équation (1.1) telle qu'il existe un nombre T tel que $\varphi(t + T) = \varphi(t)$.

Une solution périodique de (1.1) correspond à une orbite (courbe) fermée dans l'espace des phases.

Définition 1.10 (Cycle limite) Un cycle limite est une solution périodique isolée, c'est à dire qu'on ne peut pas trouver une autre orbite fermée dans son voisinage.

Définition 1.11 γ est un cycle limite s'il est un cycle de (1.1) qui est un ensemble ω -limite ou α -limite de quelques trajectoires de (1.1) autre que γ .

γ est un cycle limite hyperbolique si :

$$\int_0^T \nabla \cdot f(\gamma(t)) dt \neq 0$$

où $\nabla \cdot f(\gamma(t))$ est la divergence de f en γ .

γ est un cycle limite stable si

$$\int_0^T \nabla \cdot f(\gamma(t)) dt < 0.$$

γ est un cycle limite instable si

$$\int_0^T \nabla \cdot f(\gamma(t)) dt > 0.$$

Théorème 1.2 (Poincaré-Bendixson) : Soit A une région fermée bornée du plan xoy . On suppose qu'une orbite $\gamma^+(x_0)$ du système (1.1) se trouve à l'intérieur de A ; alors $\gamma^+(x_0)$ est soit une orbite périodique; ou bien tend vers une orbite périodique; ou bien tend vers un point d'équilibre.

Chapitre 2

Equations de Lotka-Volterra

Résumé

En mathématiques, les équations de Lotka-Volterra, que l'on désigne aussi sous le terme "modèle proie-prédateur", sont un couple d'équations différentielles non-linéaires du premier ordre, et sont couramment utilisées pour décrire la dynamique de systèmes biologiques dans lesquels un prédateur et sa proie interagissent. Elles ont été proposées indépendamment par Alfred James Lotka en 1925 et Vito Volterra en 1926.

Ce système d'équations est classiquement utilisé comme modèle pour la dynamique du lynx et du lièvre des neiges, pour laquelle de nombreuses données de terrain ont été collectées sur les populations des deux espèces par la Compagnie de la baie d'Hudson au XIX^e siècle. Il a aussi été employé par John Allan Hobson pour décrire les relations entre les neurones cholinergiques responsables du sommeil paradoxal et les neurones aminergiques liées à l'état de veille.

La présence des proies et de leurs prédateurs sur un territoire, selon leur reproduction et leur mortalité.

2.1 Les équations

Elles s'écrivent fréquemment :

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = x(t)(\alpha - \beta y(t)) \\ \frac{dy(t)}{dt} = -y(t)(\delta - \gamma x(t)) \end{cases} \quad (2.1)$$

où

$x(t)$: est l'effectif des proies ;

$y(t)$: est l'effectif des prédateurs ;

$\frac{dx(t)}{dt}$ et $\frac{dy(t)}{dt}$ représentent la variation des populations au cours du temps.

Les paramètres suivants caractérisent les interactions entre les deux espèces :

α : Taux de reproduction des proies en l'absence de prédateurs

β : Taux de mortalité des proies due aux prédateurs

δ : Taux de mortalité des prédateurs en l'absence de proies

γ : Taux de reproduction des prédateurs en fonction des proies mangées

2.2 Signification physique des équations

Une fois développées, les équations prennent une forme utile pour une interprétation physique.

2.2.1 Proies

L'équation de la proie devient :

$$\frac{dx(t)}{dt} = \alpha x(t) - \beta x(t)y(t) \quad (2.2)$$

Les proies sont supposées avoir une source illimitée de nourriture et se reproduire exponentiellement si elles ne sont soumises à aucune prédation ; cette croissance exponentielle est représentée dans l'équation ci-dessus par le terme $\alpha x(t)$. Le taux de prédation sur les

proies est supposé proportionnel à la fréquence de rencontre entre les prédateurs et les proies, il est représenté ci-dessus par $\beta x(t)y(t)$. Si l'un des termes $x(t)$ ou $y(t)$ est nul, alors il ne peut y avoir aucune prédation.

Avec ces deux termes, l'équation peut alors être interprétée comme : la variation du nombre de proies est donnée par sa propre croissance moins le taux de prédation qui leur est appliqué.

2.2.2 Prédateurs

L'équation du prédateur devient :

$$\frac{dy(t)}{dt} = \gamma x(t)y(t) - \delta y(t) \quad (2.3)$$

Dans cette équation, $\gamma x(t)y(t)$ représente la croissance de la population prédatrice. (Notons la similarité avec le taux de prédation ; cependant, une constante différente est utilisée car la vitesse à laquelle la population des prédateurs augmente n'est pas nécessairement égale à celle à laquelle il consomme la proie).

De plus, $\delta y(t)$ représente la mort naturelle des prédateurs ; c'est une décroissance exponentielle.

L'équation représente donc la variation de la population de prédateurs en tant que croissance de cette population, diminuée du nombre de morts naturelles.

2.3 Solution de l'équation

On prouve que pour une condition initiale au temps t_0 qui vérifie $x(t_0) > 0$ et $y(t_0) > 0$, l'unique solution maximale est définie pour tout réel t , et vérifie :

$$\forall t \in \mathbb{R}, x(t) > 0, y(t) > 0$$

la fonction $F : (x, y) \rightarrow \beta y + \gamma x - \alpha \ln(y) - \delta \ln(x)$ est alors une intégrale première du

mouvement : $t \rightarrow F(x(t), y(t))$ est constante.

Les solutions maximales sont alors périodiques, et leur trajectoire est fermée bornée.

2.4 Dynamique du système

Dans le modèle utilisé, les prédateurs prospèrent lorsque les proies sont nombreuses, mais finissent par épuiser leurs ressources et déclinent.

Lorsque la population de prédateur a suffisamment diminué, les proies profitant du répit se reproduisent et leur population augmente de nouveau.

Cette dynamique se poursuit en un cycle de croissance et déclin.

2.4.1 Equilibres de la population

Un état d'équilibre de la population est observé quand aucune des deux population en présence n'évolue, c'est-à-dire quand les dérivées correspondantes sont nulles, ce qui se traduit par le système d'équation :

$$\begin{cases} x(t)(\alpha - \beta y(t)) = 0 \\ -y(t)(\delta - \gamma x(t)) = 0 \end{cases}$$

qui a pour solution

$$\{y(t) = 0, x(t) = 0\} \text{ et } \left\{y(t) = \frac{\alpha}{\beta}, x(t) = \frac{\delta}{\gamma}\right\}$$

La première solution correspond à une extinction définitive des deux espèces, la seconde à des valeurs pour les deux populations, dépendant des quatre paramètres α, β, δ et γ , qui restent stables indéfiniment.

2.4.2 Stabilité des points fixes

La stabilité des points fixes peut être déterminée par une linéarisation du système. La matrice jacobienne du système est :

$$J(x(t), y(t)) = \begin{pmatrix} \alpha - \beta y(t) & -\beta x(t) \\ \gamma y(t) & \gamma x(t) - \delta \end{pmatrix}.$$

Premier point fixe

Au premier point fixe $(0,0)$, cette matrice prend la valeur

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\delta \end{pmatrix}$$

qui a pour valeurs propres

$$\lambda_1 = \alpha, \lambda_2 = -\delta.$$

Ces valeurs propres sont toujours de signes opposés, ce qui montre que ce point fixe est un point selle. Ce n'est donc pas un point fixe stable, ce qui montre en particulier que, suivant ce modèle, l'extinction des deux espèces en jeu est difficile à obtenir.

Second point fixe

En évaluant la matrice jacobienne en le second point fixe, la valeur suivante est obtenue :

$$J\left(\frac{\delta}{\gamma}, \frac{\alpha}{\beta}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\beta\delta}{\gamma} \\ \frac{\alpha\gamma}{\beta} & 0 \end{pmatrix}$$

et elle a pour valeurs propres :

$$\lambda_1 = i\sqrt{\alpha\delta}, \lambda_2 = -i\sqrt{\alpha\delta}.$$

Ce point fixe est donc un centre, ce qui signifie que les populations de proies et prédateurs oscillent autour de leurs valeurs en ce point fixe.

Chapitre 3

Systemes "prédateur-proie" de type de Gause généralisés

Résumé

Ce chapitre est consacré à l'étude des systèmes "Prédateur-Proie" de type de Gause généralisés. On étudie l'existence, l'unicité ou le nombre de cycles limites de type de systèmes en les transformant en systèmes de Liénard généralisés et on utilise les résultats et les théorèmes connus sur les cycles limites de ce type de systèmes.

L'existence et le nombre des cycles limites est l'un des problèmes les plus délicats apparentés aux modèles "Prédateur-proie" bidimensionnels. Comme on a déjà vu dans le chapitre précédent l'un des premiers exemples des systèmes biologiques qui modélise l'interaction entre prédateur et proie est le système de "Lotka-volterra" donné par :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy \\ \frac{dy}{dt} = -\delta y + \gamma xy \end{cases} \quad (3.1)$$

Le système (3.1) possède une famille de solutions périodiques, mais pas de cycle limite. Pour cela Gause en 1934 [6] a donné une généralisation au système (3.1) :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x - p(x)y \\ \frac{dy}{dt} = y[-\delta + \gamma p(x)] \end{cases} \quad (3.2)$$

où $p(x)$: le taux de capture des proies par les prédateurs, avec $p(0) = 0$ et $p'(x) > 0$ pour tout $x > 0$.

Une généralisation de (3.2) a été examinée par Levin en 1977 [8] :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x - p(x)y \\ \frac{dy}{dt} = y[-q(y) + \gamma p(x)] \end{cases} \quad (3.3)$$

où $q(y)$: le taux de mortalité des prédateurs, avec : $q(0) = 0$, $q'(y) > 0$ pour tout $y > 0$.

Une autre généralisation de (3.2) a été suggérée par Freedman en 1980 [5] :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha g(x) - p(x)y \\ \frac{dy}{dt} = y[-\delta + h(x)] \end{cases} \quad (3.4)$$

Le taux de croissance des proies $g(x)$ satisfait : $g(0) > 0$, $g'(x) < 0$ pour tout $x > 0$.

Un exemple célèbre des systèmes du type (3.4) est donné par Rosenzweig et McArthur en 1963 [9] :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x(1 - bx) - p(x)y \\ \frac{dy}{dt} = y[-\delta + dp(x)] \end{cases} \quad (3.5)$$

où a, b, c, d et δ sont des positives et $p(x) = \frac{x}{c+x}$. L'unicité du cycle limite du système (3.5) a été prouvée par Cheng Kuosheng en 1981 [10]. Une preuve plus simple a été donnée par Kuang et Freedman [4]. Dans le système (3.5), $p(x) = \frac{x}{c+x}$ a été suggéré par le biologiste Holling en 1959 [11]. En fait, en se basant sur des données du champ réel, il a supposé que $p(x)$ doit être bornée aussi que monotonement croissante.

La fonction $p(x) = \frac{x}{c+x}$ a été référée comme taux de capture (functional response) du type Holling II. Pour $p(x) = \frac{x^2}{c+x^2}$ on dit taux de capture (functional response) du type Holling III. L'existence et l'unicité des cycles limites du système (3.5) avec $p(x)$ du type Holling III ont été prouvées par Chen et Zhang [12].

Un type plus général de $p(x)$ a été introduit par Kazarinoff et Van dan Driessche [13] $p(x) = \frac{x^n}{c+x^n}$, $c > 0$, $n \geq 1$. Ils ont étudié l'existence des cycles limites.

On va étudier le nombre des cycles limites pour un système du type de Gause généralisé qui contient les deux systèmes (3.3) et (3.4) avec $h(x) = p(x)$:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha\varphi(x) - p(x)y \\ \frac{dy}{dt} = y[-c_0 + p(x)] \end{cases} \quad (3.6)$$

Notons que $\gamma = 1$.

On va essayer de trouver les conditions les plus générales sur les fonctions $\varphi(x)$ et $p(x)$ pour lesquelles l'unicité des cycles limites est garantie.

Le taux de croissance $\varphi(x)$ satisfait $\varphi(0) > 0$ et $\varphi'(x) < 0$, $\forall x > 0$.

En fait, si $\varphi'(x)$ change son signe alors plus qu'un cycle limite peut y apparaitre.

Le taux de capture $p(x)$ satisfait $p(0) = 0$, $p'(x) > 0$, $\forall x > 0$.

3.1 L'unicité des cycles limites des systèmes de Liénard dépendant d'un paramètre

On va citer quelques théorèmes et résultats concernant l'unicité des cycles limites des systèmes de Liénard généralisés du type :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \psi(y) - \int_{x_0}^x f(\tau) d\tau \\ \frac{dy}{dt} = -g(x) \end{cases} \quad (3.7)$$

Théorème 3.1 Soient $f(x)$, $g(x)$ deux fonctions continûment différentiables sur l'intervalle $]r_1, r_2[$, $r_1 < r_2$, et soit $\psi(y)$ une fonction continûment différentiable sur \mathbb{R} . Le système (3.6) où :

i) $\frac{d\psi}{dy} > 0$.

ii) $x_0 \in]r_1, r_2[$ est la valeur unique vérifiant :

$$(x - x_0)g(x) > 0, \text{ pour } x \neq x_0, \text{ et } g(x_0) = 0.$$

iii) $f(x_0) \frac{d}{dx} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) < 0$, pour $x \neq x_0$.

a au plus un cycle limite dans la bande $r_1 < x < r_2$, et s'il existe, alors il est hyperbolique.

Remarque 3.1 Si $f(x)$ a exactement une racine, l'intervalle sur lequel (iii) doit être vérifiée, est plus petit que $]r_1, r_2[$.

Lemme 3.1

Si $f(x)$ a exactement une racine $x = x_1$ sur l'intervalle $r_1 < x < r_2$, la condition (iii) du théorème 3.1 a besoin d'être satisfaite seulement sur l'intervalle $r_1 < x < x_1$ et $x_0 < x < r_2$, si $x_1 < x_0$, ou sur l'intervalle $r_1 < x < x_0$ et $x_1 < x < r_2$, si $x_1 > x_0$, pour donner les mêmes conclusions du théorème 3.1. ■

Pour les systèmes de Liénard du type (3.7) dépendant d'un paramètre dans lesquels un cycle limite unique apparaît, l'application du théorème 3.1 pose des problèmes en général. Supposons que le système dépend d'un paramètre λ , alors pour un certain $\lambda = \lambda_0$, une bifurcation de Hopf se produit et un cycle limite unique apparaît pour $\lambda > \lambda_0$. Pour $\lambda < \lambda_0$ on a pas du cycle limite. Le théorème 3.1 sera applicable seulement pour le cas $\lambda > \lambda_0$ pour prouver l'unicité du cycle limite. Si $\lambda < \lambda_0$, la fonction $\frac{f(x)}{g(x)}$ ne serait pas monotone en général, ce qui contredit la condition (iii) du théorème 3.1. Dans ce cas on utilise le critère de Dulac pour prouver la non existence des cycles limites.

Lemme 3.2 (Critère de Dulac)

Considérons le système autonome

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \end{cases} \quad (3.8)$$

s'il existe une fonction $B(x, y)$ continûment différentiable dans une région simplement connexe G telle que $\text{div}(BP, BQ)$ a un signe constant et n'est pas identiquement nulle sur n'importe quelle sous région de G , alors le système (3.7) n'a pas de trajectoire fermée dans G .

Donc, pour prouver l'unicité des cycles limites dans les systèmes de Liénard dépendant d'un paramètre, on combine le théorème 3.1 avec le lemme 3.2. Souvent, il est utile de choisir la fonction de Dulac $B(x, y) = \exp(-cy)$.

Lemme 3.3

Supposons que le système (3.7) satisfait les conditions suivantes sur l'intervalle $r_1 < x < r_2$:

(i) $\frac{d\psi}{dy} > 0$.

(ii) $x_0 \in]r_1, r_2[$ est l'unique valeur vérifiant $(x - x_0)g(x) > 0$, pour $x \neq x_0$, et $g(x_0) = 0$,
et

(iii)' Il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) - cg(x)$ n'a pas de racine,

ou

(iii)'' Pour tout $c \in \mathbb{R}$, $f(x) - cg(x)$ n'a pas de racine multiple et $f(x_0) \neq 0$.

Alors (3.6) a au plus un cycle limite dans la bande $r_1 < x < r_2$ et s'il existe il est hyperbolique.

Dans le cas (iii)' on a pas de cycle limite.

Preuve :

Considérons la fonction de Dulac $B(x, y) = \exp(-cy)$, et posons

$$P(x, y) = \psi(y) - \int_{x_0}^x f(\tau) d\tau$$

$$Q(x, y) = -g(x)$$

alors

$$\operatorname{div}(BP, BQ) = \frac{\partial(BP)}{\partial x} + \frac{\partial(BQ)}{\partial y} = B(x, y)(-f(x) + cg(x))$$

s'il existe une valeur de c telle que $(-f(x) + cg(x))$ ne change pas de signe (iii)' alors on a pas de cycle limite.

La condition (iii)" est équivalente à la condition (iii) du théorème 3.1. Supposons qu'il y a une valeur de $x = x^*$ telle que $x^* \neq x_0$ pour laquelle la condition (iii) du théorème 3.1 n'est pas vérifiée; c-à-d

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)_{x=x^*} &= \left(\frac{\frac{df(x)}{dx}g(x) - \frac{dg(x)}{dx}f(x)}{g^2(x)} \right)_{x=x^*} = 0 \\ &\iff f'(x^*)g(x^*) - f(x^*)g'(x^*) = 0 \\ &\iff \frac{f'(x^*)}{g'(x^*)} = \frac{f(x^*)}{g(x^*)} = c \end{aligned}$$

d'où $f(x) - cg(x)$ a une racine multiple. Donc en absence des racines multiples, il suit d'après le théorème 3.1 qu'il existe au plus un cycle limite. ■

Théorème 3.2

S'il existe une fonction deux fois différentiable $S(x)$, avec $S(x) > 0$ pour $r_1 < x < r_2$, telle que $f(x) = f_1(x)S(x)$ et $g(x) = g_1(x)S(x)$, et si l'on a :

(i) $\frac{d^2}{dx^2}g_1(x) \leq 0$, $g_1(x_a) = g_1(x_b) = 0$, $r_1 < x_a < x_b = r_2$.

(ii) $f_1(r_1) \leq 0$.

(iii)' $\frac{d^2}{dx^2}f_1(x) \geq 0$.

ou

(iii)" Il existe un unique $x_c \in]r_1, r_2[$ tel que :

(a) $\frac{d}{dx}f_1(x)_{x=r_1} < 0$.

(b) $\frac{d^2}{dx^2}f_1(x) \leq 0$, pour $r_1 < x < x_c$.

(c) $\frac{d^2}{dx^2}f_1(x) \geq 0$, pour $x_c < x < r_2$.

(iv) $\frac{d\psi}{dy} > 0$.

Alors les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ satisfont les conditions des lemmes 3.1 et 3.3. Le système (3.7) a au plus un cycle limite dans la bande $r_1 < x < r_2$, et s'il existe il est hyperbolique.

Preuve :(voir [1])

Lemme 3.4

Définissons $S(x)$ comme dans le théorème 3.2, si $g_1(x)$ (resp $f_1(x)$) est linéaire en x , et $f''_1(x) \neq 0$ (resp $g''_1(x) \neq 0$) sur l'intervalle $r_1 < x < r_2$ et $\psi(y)$ satisfait la condition (iv) du théorème 3.2, alors le système (3.7) possède au plus un cycle limite dans la bande $r_1 < x < r_2$ et s'il existe il est hyperbolique.

Remarque 3.2

Dans le cas où $g_1(x)$ est linéaire en x , on peut choisir $r_2 = +\infty$.

Parfois, il est utile de faire un changement de variable dans $f(x) - cg(x)$ pour vérifier les conditions du théorème 3.2 ou du lemme 3.4.

Lemme 3.5

Si les conditions du théorème 3.2 ou du lemme 3.4 sont satisfaites avec $x = k(u)$, où toutes les dérivées sont par rapport à u au lieu de x , tous les intervalles pour x sont remplacés par les intervalles correspondants pour u et $k'(u) \neq 0$ pour $k^{-1}(r_1) < u < k^{-1}(r_2)$, alors le système (3.7) a au plus un cycle limite dans la bande $r_1 < x < r_2$ et s'il existe il est hyperbolique.

Preuve :

Le changement $x = k(u)$ dans le système (3.7), conduit à un système de Liénard dans lequel :

$$\frac{f_{now}(u)}{g_{now}(u)} = \frac{f(k(u))}{g(k(u))}$$

3.2 Transformation des systèmes "prédateur-proie" au système de Liénard

On va transformer le système "prédateur-proie" suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x\varphi(x) - p(x)y \\ \frac{dy}{dt} = y[-c_0 + p(x)] \end{cases}, \quad x > 0, y > 0 \quad (3.9)$$

au système de Liénard.

Lemme 3.6

Le système (3.9) avec $p(x) = cx$, $c > 0$, $\varphi'(x) < 0$, ne possède pas de solution périodique.

Preuve :

On a

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x\varphi(x) - cxy = P(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = y[-c_0 + cx] = Q(x, y) \end{cases}, \quad x > 0, y > 0.$$

Prenons la fonction de Dulac $B(x, y) = \frac{1}{xy}$, $x > 0$, $y > 0$.

$$\operatorname{div}(BP, BQ) = \frac{\partial(BP)}{\partial x} + \frac{\partial(BQ)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{y} \varphi(x) - c \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{c_0}{x} + c \right) = \frac{1}{y} \varphi'(x).$$

On a $\varphi'(x) < 0$, donc $\operatorname{div}(BP, BQ) < 0$, $\forall x > 0$, $\forall y > 0$. Alors, d'après le lemme 3.2, le système n'a pas de solution périodique.

Considérons le système

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x\varphi(x) - p(x)y \\ \frac{dy}{dt} = y[-c_0 + p(x)] \end{cases}$$

Comme $p(x) \neq 0$, $\forall x > 0$, on peut appliquer le changement des variables $\frac{dt}{d\tau} = -\frac{1}{p(x)}$ et $y = \exp y_1$. Le nouveau système prend la forme du système de Liénard :

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = \exp y_1 - \frac{x\varphi(x)}{p(x)} \\ \frac{dy_1}{d\tau} = \frac{c_0 - p(x)}{p(x)} \end{cases} \quad (3.10)$$

Lemme 3.7

Le système "prédateur-proie" (3.9) avec $\psi(y) = c_0$, $c_0 > 0$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x\varphi(x) - p(x)y \\ \frac{dy}{dt} = y[-c_0 + p(x)] \end{cases}$$

peut être transformé au système de Liénard (3.7) avec :

$$\psi(y) = \exp y - \frac{x_0\varphi(x_0)}{p(x_0)} \quad (3.11)$$

$$f(x) = f_1(x)S(x) \text{ et } g(x) = g_1(x)S(x)$$

$$f_1(x) = (x\varphi(x))'p(x) - p'(x)x\varphi(x)$$

$$g_1(x) = p(x)(-c_0 + p(x))$$

$$S(x) = \frac{1}{p^2(x)}$$

où x_0 est un zéro de $g(x)$.

Clairement $\psi(y)$ satisfait (iv) du théorème 3.2.

Preuve :

Considérons le système (3.11)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \exp y - \frac{x\varphi(x)}{p(x)} \\ \frac{dy}{dt} = \frac{c_0 - p(x)}{p(x)} \end{cases}$$

et montrons qu'il est écrit sous la forme de (3.7). On a

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \exp y - \int_{x_0}^x \left(\frac{s\varphi(s)}{p(s)} \right)' ds - \frac{x_0\varphi(x_0)}{p(x_0)} \\
&= \exp y - \frac{x_0\varphi(x_0)}{p(x_0)} - \int_{x_0}^x \frac{1}{p^2(s)} [(s\varphi(s))'p(s) - p'(s)s\varphi(s)] ds \\
&= \psi(y) - \int_{x_0}^x f_1(s)S(s) ds = \psi(y) - \int_{x_0}^x f_1(s) ds \\
\frac{dy}{dt} &= - \left(\frac{p(x) - c_0}{p(x)} \right) = - \frac{p(x)(p(x) - c_0)}{p^2(x)} = -g_1(x)S(x) = -g_1(x).
\end{aligned}$$

3.3 Etude de cycles limites

On considère le système

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x\varphi(x) - p(x)y \\ \frac{dy}{dt} = y(-c_0 + p(x)) \end{cases}, \quad c_0 > 0 \quad (3.12)$$

Lemme 3.8

Si $\varphi(x) = a_0 \in \mathbb{R}^+$, $p(0) = 0$ et $p''(x) < 0$ pour tout $x > 0$, alors le système (3.12) n'a pas d'orbites fermées.

Preuve :

On a le système

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_0x - p(x)y = P(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = y(-c_0 + p(x)) = Q(x, y) \end{cases}$$

Prenons la fonction de Dulac $B(x, y) = \frac{1}{xy}$

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(BP, BQ) &= \frac{\partial}{\partial x}(BP) + \frac{\partial}{\partial y}(BQ) \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{a_0}{y} - \frac{p(x)}{x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{p(x) - c_0}{x} \right) \\
&= \frac{p(x) - xp'(x)}{x^2}, \quad \forall x > 0. \\
&= \frac{p(x) - xp'(x)}{x^2}, \quad \forall x > 0.
\end{aligned}$$

Soit

$$h(x) = p(x) - xp'(x)$$

alors

$$h'(x) = -xp''(x) > 0$$

donc $h(x)$ est croissante et on a

$$h(0) = p(0) = 0$$

alors

$$h(x) > 0, \forall x > 0$$

D'où

$$\text{div}(BP, BQ) > 0, \forall x > 0,$$

et d'après le lemme (3.3) on n'a pas de solution périodique. ■

Pour le cas général de $p(x)$ il est difficile de connaître le nombre des cycles limites. On suppose toujours que $p(0) = 0$, $p'(x) > 0$ et $p(x)$ est uniformément bornée. Dans la suite de cette section, on considère

$$p(x) = \frac{x^n}{b_0 + x^n}, \quad n \in \mathbb{R}^+, \quad b_0 > 0 \quad (3.13)$$

Notons que n ici peut ne pas être entier. Si $n = 1$, $n = 2$, $p(x)$ est de type Holling II et III respectivement. Pour le choix de $\varphi(x)$, on suppose que $\varphi(0) \geq 0$, $\varphi'(x) < 0$.

On tirera les conditions pour lesquelles le système (3.13), a au plus un cycle limite. Après des changements de variables en x , y et t , on peut supposer que $b_0 = 1$.

D'après le lemme 3.7, pour prouver l'unicité des cycles limites en utilisant le théorème 3.2 ou le lemme 3.3, on a besoin de voir le comportement des fonctions $f_1(x)$ et $g_1(x)$

mentionnées dans le lemme 3.7

$$\begin{cases} f_1(x) = (x\varphi(x))'p(x) - p'(x)x\varphi(x) \\ g_1(x) = p(x)(-c_0 + p(x)) \end{cases}$$

où $p(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$. Multiplions $f_1(x)$ et $g_1(x)$ par $\frac{1+x^n}{p(x)}$, on trouve

$$\begin{cases} f_1(x) = (\varphi(x) + x\varphi'(x))(1+x^n) - n\varphi(x) \\ g_1(x) = (1-c_0)x^n - c_0 \end{cases} \quad (3.14)$$

ceci ne va pas influencer le résultat, d'après le lemme 3.3 et le théorème 3.2. Une simple conséquence de (3.14) est le théorème suivant :

Théorème 3.3

Le système (3.9) avec $\varphi(x) = k > 0$, $\psi(y) = c_0 > 0$ et $p(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$ n'a pas de cycle limite.

Preuve :

$$\begin{aligned} f_1(x) - cg_1(x) &= (\varphi(x) + x\varphi'(x))(1+x^n) - n\varphi(x) - c((1-c_0)x^n - c_0) \\ &= k(1+x^n - n) - c((1-c_0)x^n - c_0) \\ &= k + kx^n - kn - cx^n + cc_0x^n + cc_0 \\ &= (k - c + cc_0)x^n + k - kn + cc_0. \end{aligned}$$

Pour $c = \frac{k}{1-c_0}$, $f_1(x) - cg_1(x)$ a un signe fixe, donc d'après le lemme 3.3 on n'a pas de cycle limite.

Remarque 3.3

Dans ce cas, pour $n > 1$, $p'(x)$ change son signe, donc elle n'est pas contenue dans le lemme 3.8.

Substituons $x^n = u$ dans $f_1(x)$ et $g_1(x)$:

$$\begin{cases} f_1(x(u)) = \left[\varphi(x(u)) + u^{\frac{1}{n}}\varphi'(x(u)) \right] (1+u) - n\varphi(x(u)) \\ g_1(x(u)) = (1-c_0)u - c_0. \end{cases}$$

Remarquons que $g_1(x(u))$ est linéaire en u . L'unicité des cycles limites suit d'après le lemme 3.4, si l'on peut prouver que $\frac{d^2 f_1(x(u))}{du^2}$ a un signe fixe. Dans la suite, on note $\frac{d}{dx}$ par ('). On a

$$u = x^n \Leftrightarrow x = u^{\frac{1}{n}} \Rightarrow dx = \frac{1}{n} u^{\frac{1}{n}-1} du \Rightarrow \frac{dx}{du} = \frac{1}{n} u^{\frac{1}{n}-1}$$

d'où

$$\frac{d}{du} = \frac{1}{n} u^{\frac{1}{n}-1} \frac{d}{dx}$$

$$\begin{aligned} \frac{df_1}{du} &= \frac{1}{n} u^{\frac{1}{n}-1} \frac{df_1}{dx} \\ &= \frac{1}{n} u^{\frac{1}{n}-1} [(\varphi(x) + x\varphi'(x))(1 + x^n) - n\varphi(x)] \\ &= \frac{1}{n} u^{\frac{1}{n}-1} [(2\varphi'(x) + x\varphi''(x))(1 + x^n) - nx^{n-1}(\varphi(x) + x\varphi'(x)) - n\varphi'(x)] \\ &= \frac{1}{n} u^{\frac{1}{n}-1} [\varphi''(x)(x + x^{n+1}) + \varphi'(x)(2 + 2x^n + nx^n - n) + nx^{n-1}\varphi(x)] \end{aligned}$$

$$\frac{d^2 f_1}{du^2} = \frac{d}{du} \left(\frac{1}{n} u^{\frac{1}{n}-1} \right) \frac{df_1}{dx} + \left(\frac{1}{n} u^{\frac{1}{n}-1} \right)^2 \frac{d^2 f_1}{dx^2} \quad (*)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} \left(\frac{1}{n} u^{\frac{1}{n}-1} \right) \frac{df_1}{dx} &= \frac{1}{n} \frac{d}{du} \left(u^{\frac{1}{n}-1} \right) \frac{df_1}{dx} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} - 1 \right) u^{\frac{1}{n}-2} \frac{df_1}{dx} \\ &= \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} - 1 \right) u^{\frac{1}{n}-2} [\varphi''(x)(x + x^{n+1}) + \varphi'(x)(2 + n)x^n + 2 - n] \\ &\quad + \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} - 1 \right) u^{\frac{1}{n}-2} [nu^{1-\frac{1}{n}}\varphi(x)] \\ &= \frac{1}{n} \varphi''(x) \left(u^{\frac{2}{n}-2} + u^{\frac{2}{n}-1} \right) \left(\frac{1}{n} - 1 \right) \\ &\quad + \varphi'(x) \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n} \right) \left((2 - n)u^{\frac{1}{n}-2} + (2 + n)u^{\frac{1}{n}-1} \right) + \left(\frac{1}{n} - 1 \right) u^{-1}\varphi(x). \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} \left(u^{\frac{1}{n}-1} \right) \frac{df_1}{dx} &= \frac{1}{n} \varphi'''(x) \left(\left(\frac{1}{n} - 1 \right) u^{\frac{2}{n}-2} + \left(\frac{1}{n} - 1 \right) u^{\frac{2}{n}-1} \right) \\ &+ \varphi'(x) \left(\left(1 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2} \right) u^{\frac{1}{n}-2} + \left(\frac{2}{n^2} - \frac{1}{n} - 1 \right) u^{\frac{1}{n}-1} \right) \\ &+ \left(\frac{1}{n} - 1 \right) u^{-1} \varphi(x) \end{aligned} \quad (**)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{n} u^{\frac{1}{n}-1} \right) \frac{d^2 f_1}{dx^2} &= \frac{1}{n^2} u^{\frac{2}{n}-2} [\varphi'''(x) (x + x^{n+1}) + \varphi''(x) (1 + (n+1)x^n)] \\ &+ \frac{1}{n^2} u^{\frac{2}{n}-2} [\varphi''(x) ((2+n)x^n + 2 - n) + \varphi'(x) ((2n+n^2)x^{n-1})] \\ &+ \frac{1}{n^2} u^{\frac{2}{n}-2} [n(n-1)x^{n-2} \varphi(x) + nx^{n-1} \varphi'(x)] \\ &= \frac{1}{n^2} u^{\frac{2}{n}-2} \left[\varphi'''(x) \left(u^{\frac{1}{n}} + u^{\frac{1}{n}+1} \right) + \varphi''(x) (3 - n + (2n+3)u) \right] \\ &+ \frac{1}{n^2} u^{\frac{2}{n}-2} \left[\varphi'(x) (3n + n^2) u^{1-\frac{1}{n}} + n(n-1) u^{1-\frac{2}{n}} \varphi(x) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{n} u^{\frac{1}{n}-1} \right) \frac{d^2 f_1}{dx^2} &= \frac{1}{n^2} \varphi'''(x) \left(u^{\frac{3}{n}-2} + u^{\frac{3}{n}-1} \right) \\ &+ \frac{1}{n} \varphi''(x) \left(\left(\frac{3}{n} - 1 \right) u^{\frac{2}{n}-2} + \left(2 + \frac{3}{n} \right) u^{\frac{2}{n}-1} \right) \\ &+ \varphi'(x) \left(\left(\frac{3}{n} + 1 \right) u^{\frac{1}{n}-1} \right) + \frac{1}{n} (n-1) u^{-1} \varphi(x) \end{aligned} \quad (***)$$

De (*), (**) et (***), on a

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{du^2} f_1(x(u)) &= \frac{1}{n^2} \varphi'''(x) \left(u^{\frac{3}{n}-2} + u^{\frac{3}{n}-1} \right) \\ &+ \frac{1}{n} \varphi''(x) \left(\left(\frac{4}{n} - 2 \right) u^{\frac{2}{n}-2} + \left(\frac{4}{n} + 1 \right) u^{\frac{2}{n}-1} \right) \\ &+ \varphi'(x) \left(\left(\frac{2}{n^2} + \frac{2}{n} \right) u^{\frac{1}{n}-1} + \left(\frac{2}{n} - 1 \right) \left(\frac{1}{n} - 1 \right) u^{\frac{1}{n}-2} \right) \end{aligned} \quad (3.15)$$

Théorème 3.4

Si $\varphi'(x) \leq 0$, $\varphi''(x) \leq 0$, $\varphi'''(x) \leq 0$, le système (3.9) avec $\psi(y) = c_0$, $c_0 > 0$ et $p(x)$ est donnée par (3.13) avec $0 < n < 1$ ou $n = 2$, possède au plus un cycle limite et s'il existe il est hyperbolique.

On peut améliorer ce résultat en prenant $\varphi(x)$ un polynôme en x , on choisit tout les coefficients de $\varphi(x)$ négatifs sauf le terme constant (ceci est une extension d'un choix connu de $\varphi(x)$). On commence par la plus simple extension

$$\varphi(x) = k_0 + k_1 x^m, \quad k_0 > 0, \quad k_1 < 0, \quad m > 0. \quad (3.16)$$

Après substitution dans (3.15), on obtient

$$\frac{d^2}{du^2} f_1(x(u)) = k_1 \left[\frac{m}{n^2} u^{\left(\frac{m}{n}-2\right)} (m-n)(m-n+1) + \frac{m}{n^2} u^{\left(\frac{m}{n}-1\right)} (m+1)(m+n) \right] \quad (3.17)$$

il suit que $\frac{d^2 f_1(x(u))}{du^2}$ a un signe fixe seulement si $(m-n)(m-n+1) \geq 0$. Ceci implique que pour m donné, au plus un cycle limite existe si n se trouve à l'extérieur de l'intervalle ouvert $]m, m+1[$. Comme cet intervalle est ouvert, pour les valeurs entières de n, m , l'unicité du cycle limite suit immédiatement.

Théorème 3.5

Soit le système (3.9) avec $\varphi(x) = k_0 + k_1 x^m$, $k_0 > 0$, $k_1 < 0$, $m \in \mathbb{N}$, $\psi(y) = c_0$, $c_0 > 0$, et $p(x)$ est donnée par (3.13) et $n \in \mathbb{N}$, alors au plus un cycle limite existe et s'il existe il est hyperbolique.

Corollaire 3.1

Si $\varphi(x) = k_0 + k_{i_1} x^{i_1} + k_{i_2} x^{i_2} + \dots + k_{i_m} x^{i_m}$, $i_1 \leq i_2 < \dots < i_m$, $i_k \in \mathbb{R}^+$, $k_{i_k} \leq 0$, $k_0 > 0$, dans (3.12), alors au plus un cycle limite existe pour tout $n \in \mathbb{R}$ à l'extérieur de l'union des intervalles : $]i_1, i_1 + 1[\cup]i_2, i_2 + 1[\cup \dots]i_m, i_m + 1[$. Si le cycle limite existe, il est hyperbolique.

Preuve (La preuve est similaire à la preuve du théorème 3.5).

Plus généralement, si $\varphi(x)$ est une série entière, $n \in \mathbb{N}$ dans (3.12) :

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i, \quad a_i \in \mathbb{R} \quad (3.18)$$

après substitution dans (3.15), on obtient : $\frac{d^2 f_1(x(u))}{du^2}$ est proportionnelle à

$$\sum_{i=0}^m i a_i [(i-n)(i-n+1)x^i + (i+1)(i+n)x^{i+n}] \quad (3.19)$$

Si $m > n$: alors (3.19) peut être écrite comme

$$\sum_{i=0}^m i a_i (i-n)(i-n+1)x^i + \sum_{i=n+1}^m i a_i (i-n)(i-n+1)(a_i + a_{i-n})x^i + \sum_{i=m+1}^{m+n} i a_{i-n} (i-n)(i-n+1)x^i \quad (3.20)$$

de (3.19) et (3.20), si $a_i \leq 0, \forall i = \overline{1, m}$, alors $\frac{d^2 f_1(x(u))}{du^2}$ a un signe fixe.

Théorème 3.6

Si $\varphi(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i, a_i \leq 0$, pour $i > 0$, et $a_0 > 0, \psi(y) = c_0, c_0 > 0, p(x)$ et comme dans (3.12) et $n \in \mathbb{N}$, alors au plus un cycle limite existe et s'il existe il est hyperbolique.

Remarque 3.4

Le résultat est aussi valable pour $m = \infty$, si $\varphi(x)$ est une fonction analytique.

Bibliographie

- [1] R. E. Kooij & A. Zegeling, Qualitative Properties of Two-Dimensional predator-prey systems, *Nonlinear Analysis, Theory and Applications*, Vol. 29, N°6, pp. 693-715, 1997.
- [2] L Perko : *Differential equations and dynamical systems*, Texts in Applied Mathematics, 7. Third edition. Springer-Verlag, New York, 2001.
- [3] A. Gasull, *Differential Equations that can be Transformed into Equations of Liénard Type*. Actas del XVLL Colloquio Brasileiro de Mathematica, 1989.
- [4] Kuang Yang & Freedman H. I., Uniqueness of Limit Cycles in Gause Type Models of Predator-prey Systems, *Math. Biosci.*, 88, 67-84. (1988).
- [5] Freedman H. I, *Deterministic Mathematical Models in Population Ecology*, Marcel Dekker, New York (1980).
- [6] Gause G. F, *The Stuggle for Existence*. Williams & Wilkins, Baltimore (1934).
- [7] Volterra V., *Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi*, *Mem. R. Com. Tolassogr. Ital.* 131, 1-142 (1927).
- [8] Levin S. A., A more functional response to predator prey stability, *Am. Nat.* 110, 381-383 (1977).
- [9] Rosenzweig M. L.& Macarthur R. H., Graphical representation and stability conditions of predator-prey interactions, *Am. Nat.* 47, 209-223 (1963).
- [10] Cheng Kuosheng, Uniqueness of a limit cycle for a predator-prey system, *SIAM J. Math. Analysis* 12, 541-548 (1981).
- [11] Holling C. S., The components of predation as revealed by study of small-mammal predation of the European pine sawfly, *Can. Entomol.* 91, 293-320 (1959).
- [12] Chen Junping & Zhang Hongde, The qualitative analysis of two species predator-prey model with Holling's type I I I functional response, *Appl. Math. Mech.* 7, 77-86 (1986).
- [13] Kazanioroff N & Van Der Driessche P, A model predator-prey system with functional response, *Math. Biosci.* 39, 125-134 (1978).