République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques



**Mémoire**

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

**Master Académique en Mathématiques**

Option : **Analyse**



Par :

**Bouguerne Wafa et Brahmia Amina**

**Intitulé**

# Distributions et Espaces de Sobolev
# Théorèmes des Injections de Sobolev
# Applications au Problème de Dirichlet

**Dirigé par : Dr HITTA Amara**

**Devant le jury**

| | | |
|---|---|---|
| PRESIDENT | K.Benarioua | Univ-Guelma |
| RAPPORTEUR | A.Hitta | Univ-Guelma |
| EXAMINATEUR1 | S.Badi | Univ-Guelma |

**Session Juin 2013**

Université 8 Mai 1945, Guelma

Mémoire de Master II

# Distributions et Espaces de Sobolev

# Théorèmes des Injections de Sobolev

# Applications au Problème de Dirichlet

Présenté par :

Bouguerne Wafa et Brahmia Amina

Sous la direction du :

Dr HITTA Amara

Maître de Conférences A

Juin 2013

# Remerciements

Nous tenons à remercier en premier lieu Allah qui nous a donnée vie et santé pour le parachèvement de ce modeste travail.

Nous remercions de tout cœur notre encadreur, **Dr HITTA Amara**, pour son soutien, son encouragement, la confiance qu'il nous témoignée en acceptant de diriger ce travail et pour avoir mis à notre disposition ses conseils pour une meilleure maitrise du sujet.

Nous remercions tous les enseignants du département du Math qui n'ont ménagé aucun effort pour toujours donner le meilleur d'eux.

Nous remercions nos familles qui nous ont toujours donné la possibilité de faire ce que nous voulions durant nos études et qui ont toujours cru en nous.

En fin, nous remercions tous ceux qui ont contribué à ce travail par leurs remarques, leurs suggestions et leurs soutiens.

# Table des Matières

# Chapitre 1

# Introduction

Une distribution sur un ouvert $\Omega$ est une fonctionnelle linéaire continue sur l'espace des fonctions tests. Comme la plupart des grandes théories scientifiques, la théorie des distributions est construite sur des bases provenant de travaux effectués par de nombreux chercheurs.

En 1894, Heaviside introduit la fonction indicatrice de l'intervalle $[0, +\infty[$. Comme la dérivée $H'$ ne peut être une fonction usuelle, Dirac la réintroduit en 1926 pour le besoin de la physique quantique et on l'a appelé couramment fonction de Dirac, en la notant $\delta$. Le fait que $\delta$ n'avait pas une définition mathématique rigoureuse n'a pas empêché Heaviside et d'autres d'obtenir des résultats corrects en manipulant la fonction $\delta$ ainsi que ses dérivées.

En 1945, L. Schwartz retrouve, indépendamment, la théorie des distributions et définit les distributions tempérées et leurs transformés de Fourier.

Une autre motivation pour l'introduction des distributions a été la nécéssité de définir des solutions appelées faibles pour certaines équations aux dérivées partielles. Un exemple célèbre de telles solutions a été donné par Leray dans sa construction de solutions "turbulentes" des équations de Navier-Stokes qui modélisent le mouvement d'un fluide visqueux.

# Bibliography

[1] R.A. Adams. *Sobolev spaces.* Academic Press, New-York 1975.

[2] H. Brezis. *Analyse Fonctionnelle.* Masson, Paris 1993.

[3] L.C. Evans. *Partial Differential Equations.* American Mathematical Society, Providence 1988.

[4] P.A. Raviart, J.M. Thomas. *Introduction à l'analyse numériques des équations aux dérivées partielles.* Masson, Paris 1983.

[5] M. Tucsnak. *Distributions et équations fondamentales de la physique.* Polycope, 2002.

[6] Christian Rolland. *LaTeX par la pratique.* Editions O'REILLY, Paris 1999.

[7] J.-L. Lions et E. Magenes. *Problèmes aux limites non homogènes et applications.* T.1, Dunod, Paris 1968.

[8] J. Nečs. *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques.* Masson, Paris 1967.

[9] P. A. Raviart et J. M. Thomas. *Introduction à l'analyse Num. des équations aux dérivées partielles.* Masson, Paris 1982.

Le plan de ce mémoire est le suivant :

① On donne un résumé succint sur la théorie de distribution et la notion de dérivation faible..

② Nous définissons les espaces de Sobolev d'ordre entier qui sont les espaces "naturels" de fonctions permettant de résoudre les formulations variationnelles d'équations aux dérivées partielles. Nous faisons, ensuite, un lien entre la théorie des distributions et les espaces de Sobolev.

③ Nous aborderons quelques exemples d'équations aux dérivées partielles elliptiques et leurs formulations variationnelles.

④ On termine ce mémoire en rappelant les théorèmes des injections de Sobolev et certaines de leurs applications en analyse fonctionelle en particulier l'inéxistence de la solution du Problème de Dirichlet dans $\mathbb{R}$.

# Chapitre 2

# Les Distributions et leurs Propriétés

Nous présenterons, dans ce Chapitre, un rappel succint sur les espaces fondamentaux en analyse fonctionnelle ainsi que les propriétés essentielles des distributions et celles des espaces de Sobolev qui seront d'une grande utilité dans l'étude des problèmes aux limites.

Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ de point générique $x = (x_1, \cdots, x_n)$. Sauf mention du contraire, toutes les fonctions seront à valeurs dans $\mathbb{R}$. On note par $\boldsymbol{n}$ le vecteur unitaire sur la frontière $\partial\Omega$, dirigé vers l'extérieur de $\Omega$.

## 2.1 Rappels sur les Espaces Fonctionnels

Un espace fonctionnel est un espace dont les points sont des fonctions. La résolution d'un problème d'analyse consiste souvent à choisir un espace fonctionnel muni d'une norme adéquate. Depuis leurs création par Banach en 1922, les espaces normés jouent un rôle central en analyse fonctionnelle. Les espaces de Banach sont des espaces normés complets. La complétude permet de prouver la convergence d'une suite ou d'une série sans connaître sa limite. Les espaces de Hilbert généralisent les espaces euclidiens de dimension finie, ils sont des espaces de Banach dont la norme provient d'un produit scalaire ce qui permet de définir les notions d'orthogonalité et de bases hilbertiennes.

Pour $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, on utilise les notations usuelles relative au cadre euclidien :

$$\|x\| := (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}, \qquad < x, y >= x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n.$$

Soit $u = u(x) = u(x_1, \cdots, x_n)$ une fonction à valeurs réelles de classe $\mathcal{C}^2$ définie sur un ouvert $\Omega$ de $\mathbb{R}^n$. On introduit respectivement les opérateurs gradient et laplacien par :

$$\nabla u := \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) \in \mathbb{R}^n \quad \text{et} \quad \Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \in \mathbb{R}.$$

De la même manière, on définit le Laplacien d'une fonction vectorielle $u = (u_1, \cdots, u_n)^T$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\Omega$ par

$$\Delta u := (\nabla u_1, \cdots, \nabla u_n)^T \in \mathbb{R}^n$$

et sa divergence

$$\text{div } u := \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \in \mathbb{R}.$$

On adopte également la notation multi-indicielle pour les dérivées partielles. Pour cela, si $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ et si $u$ est une fonction définie sur un ouvert $\Omega$ de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$; on note

$$\partial_x^\alpha u(x) := \frac{\partial^{|\alpha| u}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \frac{\partial u_n}{\partial x_n^{\alpha_n}}}(x), \qquad |\alpha| := \sum_{j=1}^{n} \alpha_j.$$

Dans la suite:

on appellera systématiquement par fonction **régulière** toute fonction de classe $\mathcal{C}^\alpha$, ou $|\alpha|$ est choisi suffisament grand pour que les cacluls aient un sens.

Rappelons enfin, quelques identités qui peuvent être facilement obtenues à partir des définitions : Pour les fonctions régulières $f$ définie sur $\Omega$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $u$ définie sur $\Omega$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, on a :

$$\mathrm{div}(fu) = f\ \mathrm{div}u + < u, \nabla f >, \qquad \mathrm{div}(\nabla f) = \Delta f.$$

Pour tout $1 \leq p < \infty$, on note $L^p(\Omega)$ l'espace des fonctions $u$ mesurables telles que

$$\boxed{\|u\|^p_{L^p(\Omega)} := \int_\Omega |u(x)|^p\ xd < +\infty.}$$

Lorsque $p = \infty$, l'espace $L^\infty(\Omega)$ est formé par les fonctions $u$ Lebesgue-mesurables telles que

$$\boxed{\|u\|_{L^\infty(\Omega)} := \sup \mathrm{ess}_{x\in\Omega} u(x) = \inf\{M \geq 0, |u(x)| \leq M \text{ p.p. dans } \Omega\} \leq \infty.}$$

C'est un espace de Banach. Ces espaces sont séparable pour $1 \leq p < \infty$ et réflexif pour $1 < p < \infty$.

Dans le cas particulier, $p = 2$, on dispose d'un cadre hilbertien très commode d'utilisation. Ainsi, pour $u$ et $v$ données dans $L^2(\Omega)$, l'application

$$\boxed{(u, v) \mapsto (u, v)_{L^2(\Omega)} := \int_\Omega u(x)\overline{v(x)}dx}$$

définit un produit scalaire sur $L^2(\Omega)$, qui lui confère une structure d'espace de Hilbert.

## 2.2 L'espace des fonctions tests

L'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ désigne l'espace vectoriel des fonctions $f$ de classe $\mathcal{C}^\infty$, définies et indéfiniment dérivables dans $\Omega$ et à support compact dans $\Omega$ c-à-d que pour tout $f \in \mathcal{D}(\Omega)$, il existe un compact $K \subset \Omega$ tel que $f$ est nulle en dehors de $K$.

La topologie dans $\mathcal{D}(\Omega)$ en définissant la notion de limite comme suit :

> Une suite $(\varphi_n)$ converge vers $\varphi$ si et seulement si :
>
> ① Il existe un compact $K \subset \Omega$ tel que le support de $\varphi_n$ est inclus dans $K$ pour tout $n$.
>
> ② Pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $\partial^\alpha \varphi_n \to \partial^\alpha \varphi$ uniformément sur $K$. Autrement dit
>
> $$\sup_{x \in \omega} |\partial^\alpha \varphi_n(x) - \partial^\alpha \varphi| \to 0$$
>
> lorsque $n \to +\infty$.

L'ensemble $\mathcal{D}(\Omega)$ est loins d'être vide. En effet, on vérifie facilement que la fonction

$$J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{1-|x|^2}\right) & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1. \end{cases}$$

est dans $\mathcal{D}(\Omega)$ et que son support est exactement la boule unité fermée $\overline{B(0,1)}$. Grâce à cette fonction, on construit une infinité d'éléments de $\mathcal{D}(\Omega)$. Pour cela, considérons $x_0 \in \Omega$ et $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, Il est clair que la fonction

$$x \to J\left(\frac{x - x_0}{\varepsilon}\right)$$

appartient à $\mathcal{D}(\Omega)$ et a comme support la boule fermée $\overline{B(0,\varepsilon)}$ de rayon $\varepsilon$.

## 2.3 Espaces de Distributions

L'espace des distributions $\mathcal{D}'(\Omega)$ est l'espace des fonctionnelles linéaires et continues pour la topologie de $\mathcal{D}(\Omega)$. L'espace des distributions est le dual topologique de $\mathcal{D}(\Omega)$. On note par $< .,. >$ le produit de dualité entre $\mathcal{D}'(\Omega)$ et $\mathcal{D}(\Omega)$

Dès lors, $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ si et seulement si $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R} : \varphi \to T(\varphi) =< T, \varphi >$ satisfaisant :

① $T$ est une application linéaire.

② $T$ est continue c'est à dire : si $\varphi_n \to 0$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$ alors $T(\varphi_n) =< T, \varphi_n > \to 0$

Il est à remarquer que dans le cadre foncionnel classique, on a l'habitude de définir une fonction comme agissant sur des éléments $x$ de $\mathbb{R}^n$, alors qu'ici, une distribution est définie par son action sur les foncions test. Par exemple, pour montrer que deux distributions sont identiques, il faut montrer que leurs actions sont identiques pour toutes les foncions test de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. ■

☞ Exemple **2.3.1** (Delta de Dirac). Soit $a \in \Omega$ un point fixe. La delta de Dirac en $a$ est la distribution :

$$\delta_a : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R} : \varphi \to \varphi(a).$$

La linéarité découle de la définition de la somme et la multiplication scalaire dans $\mathcal{D}(\Omega)$. Pour la continuité : Si $\varphi_n \to 0$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$. D'après la definition de la topologie dans $\mathcal{D}(\Omega)$, on a sûrement $\sup_{x\in\Omega} |\varphi_n(x)| \to 0$ ce qui implique forcément $|\varphi_n(a)| \to 0$. Donc $\delta(\varphi_n) \to 0$. ■

L'espace des fonctions localement intégrables sur $\Omega$ est :

$$L^1_{loc}(\Omega) = \bigcup_{K \text{ compact de } \Omega} L^1(K).$$

On identifie l'espace $L^1_{loc}(\Omega)$ à un sous-espace de $\mathcal{D}'(\Omega)$. Ceci identifie

**les fonctions localement intégrables comme des distributions dites régulières. Toutes les distributions qui ne s'écrivent pas de cette manière sont dites singulières.**

grâce au résultat suivant :

**Proposition 2.3.1** L'application $i : f \in L^1_{loc}(\Omega) \to T_f\mathcal{D}'(\Omega)$ définie par

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \qquad i(f) = T_f(\varphi) = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\, dx,$$

est une injection continue.

**Preuve :** La linéarité découle de la linéarité de l'intégrale. Pour la continuité, considérons $(\varphi_n)_\in \mathcal{D}'(\Omega)$ une suite qui converge vers 0. Posons $K$ le compact contenant les supports de $(\varphi_n)_n$, alors

$$\begin{aligned} \left|\int_\Omega f(x)\varphi_n(x)\, dx\right| &= \left|\int_K f(x)\varphi_n(x)\, dx\right| \\ &\leq \int_K |f(x)\varphi_n(x)| dx \\ &\leq \max_{x\in K} |\varphi_n(x)| \int_K |f(x)| dx. \end{aligned}$$

Ce qui implique que $T_f(\varphi_n) = \int_\Omega f(x)\varphi_n(x)dx \to 0$ puisque $\max_{x\in K} |\varphi_n(x)| \to 0$ et que $\int_K |f(x)|dx$ est fini. ■

**Proposition 2.3.2** *La delta de Dirac $\delta_0$ est une distribuion singulière.*

**Preuve :** Supposons qu'il existe $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ telle que $\delta_0 = T_f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. On aura alors

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\, dx = \varphi(0), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Fixons $\varphi \in \mathcal{D}(]0,+\infty[) \cap \mathcal{D}(]-\infty,0[)$, on en déduit que $f = 0$ presque partout. Autrement dit $f$ est la fonction nulle. Donc

$$\varphi(0) = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Ce qui est impossible. ■

En identifiant $L^2(\Omega)$ avec son dual, on a les inclusions :

**Proposition 2.3.3**

$$\boxed{\mathcal{D}(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega).}$$

**Preuve :** En fait, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $K$ compact de $\Omega$ tel que supp $\varphi \subset K$, on a

$$\int_{\Omega} |\varphi|^2\, dx = \int_K |\varphi|^2\, dx \leq \max_K |\varphi|^2 \text{ mes } K.$$

D'où $\varphi \in L^2(\Omega)$. ■

En fait, on n'a plus que l'inclusion. On montre que :

**Proposition 2.3.4** L'espace des fonctions tests $\mathcal{D}(\Omega)$ est un sous-espace dense de $L^2(\Omega)$.

## 2.4 Dérivées et convergence de distributions

Passons maintenant à la notion de Dérivation des distributions :

Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et considérons un multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$; la dérivée $D^\alpha T$ est définie par

$$\boxed{< D^\alpha T, \varphi >= (-1)^{|\alpha|} < T, D^\alpha \varphi >, \qquad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).}$$

le résultat suivant montre que les dérivées d'une distributions sont des distribution c'est à dire que l'espace des distributions est stable par dérivation.

**Lemme 2.4.1** Si $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$, alors $D^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

**Preuve :** Ceci découle de la linéairité de la dérivation et de celle de $T$. Soit $(\varphi_n)$ une suite de distributions qui tend vers 0 et $\beta$ un multi-indice. Alors supp $D^\alpha \varphi_n \subset$ supp$\varphi_n \subset K$, ce qui fournit la première propriété pour $D^\alpha \varphi_n$. D'autre part, on a

$$\sup_{x\in\Omega} |D^\beta D^\alpha \varphi_n(x)| = \sup_{x\in\Omega} |D^{\alpha+\beta} \varphi_n(x)|.$$

Ceci tend vers 0 puisque $\varphi_n \to 0$. ■

☞ **Exemple 2.4.1** **[Dérivations]**

① Soient $\Omega = ]0, 1[$ et $f \in \mathcal{C}^1([0, 1])$. Comme $f$ ainsi que ses dérivées $f'$ sont continues (donc $f$ et $f' \in L^1_{loc}$) on peut leurs associées des distributions notées $T_f$ et $T_{f'}$. On va montrer que

$$\boxed{DT_f = T_{f'}}$$

En effet, pour $\varphi_i n\mathcal{D}(\Omega)$, on a par une intégration par parties :

$$< DT_f, \varphi > \; = \; - < T_f, \varphi' >$$

$$\begin{aligned} &= -\int_0^1 f(x)\varphi'(x)dx \\ &= \int_0^1 f'(x)\varphi(x)dx - f(1)\varphi(1) + f(0)\varphi(0). \end{aligned}$$

Comme $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, on obtient $< DT_f, \varphi >=< T_{f'}, \varphi >$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. D'où l'égalité. ■.

② Prenons $\Omega = \mathbb{R}$ et considérons la fonction d'Heaviside $H$ définie par :

$$H : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

On a bien $H \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, de ce fait on lui associe la distribution $T_H$. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ Calculons $DT_H$ :

$$< DT_H, \varphi >= - < T_H, \varphi' >= -\int_0^{+\infty} \varphi'(x)dx = \varphi(0) =< \delta_0, \varphi > .$$

Ceci établit $DT_H = \delta_0$. Remarquons que la dérivée $H'$ de $H$ au sens de fonctions est nulle sauf en 0, dans ce cas on a $DT_H \neq T_{H'}$.

③ Si $\Omega = \mathbb{R}$ et $f(x) = |x|$. Un calcul identique à celui établit précédement montre que $DT_f = T_{2H-1}$, donc $D^2T_f = 2\delta_0$.

Nous terminons cet aperçu par la formule des sauts. On se donne une distribution $T$ associée à une fonction liocalement intégrable continue par morceaux et on cherche à calculer sa dérivée au sens des distributions dans $\mathbb{R}$.

**Proposition 2.4.1** Soit $f$ une fonction localement intégrable sur $\mathbb{R}$ de dérivée usuelle $f'$ localement intégrable sur $\mathbb{R}$ telle que $f$ est continue partout sauf en un point $x_0$ où elle présente un saut $h = f(x_0^+) - f(x_0^-)$. Alors on a

$$\boxed{T'_f = T_{f'} + h\delta_{x_0}.}$$

Définissons enfin la notion de convergence de distributions.

> Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{D}'(\Omega)$. On dit que $T_n$ converge vers 0 dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, on note $T_n \to 0$, si et seulement si
>
> $$< T_n, \varphi > \to 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Il est clair que si $T_n \to 0$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ alors $D^\alpha T_n \to 0$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

☞ **Exemple 2.4.2** Si une suite $(f_n)_n$ d'éléments de $L^2(\Omega)$ est telle que $f_n \to f$ dans $L^2(\Omega)$, alors $T_{f_n} \to T_f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. En effet, ceci résulte de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$| < T_{f_n} - T_f| = \left| \int_\Omega (f_n(x) - f(x))\varphi(x)\, dx \right| \leq \|f_n - f\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi)\|_{L^2(\Omega)}.$$

# Chapitre 3

# Espaces de Sobolev et Inégalité de Poincarré

## 3.1 Dérivations faibles (au sens des distributions)

Les dérivées faibles seront introduites en utilisant la dérivation par partie comme définition.

**Lemme 3.1.1** Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $1 \leq i \leq n$. Pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega)$ on a

$$\int_\Omega \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = 0. \tag{3.1}$$

**Preuve :** En posant $\varphi(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega$, on peut prendre $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Supposons alors que supp$\varphi \subset [-M, M]^n$ pour un certain $M \in \mathbb{R}$. Sans perdre de généralité, on peut supposer que $i = n$. Il s'en suit que, pour $(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, l'on a

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(x_1, \cdots, x_{n-1}) dx_n = \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, M) - \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, -M).$$

Et alors $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} dx = 0.$ ∎

D'après (3.1) on déduit que pour $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, $\varphi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega)$ (donc $f\varphi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega)$), on a

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\varphi(x)dx = -\int_\Omega f(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\varphi(x)dx. \tag{3.2}$$

Par itération, on obtient pour $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, $\varphi \in \mathcal{C}_0^2(\Omega)$, on a

$$\int_\Omega \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x)\varphi(x)dx = -\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)dx = \int_\Omega f(x)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2}(x)dx. \tag{3.3}$$

En prenant la somme pour $1 \leq i \leq n$ dans (3.3), on trouve

$$\boxed{\int_\Omega \Delta f(x)\varphi(x)dx = -\int_\Omega \mathrm{grad} f(x).\mathrm{grad}\varphi(x) = \int_\Omega f(x)\Delta\varphi(x)dx.} \tag{3.4}$$

Dans l'intégrale du milieu le point désigne la produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$.

Nous allons utilisé les formules précédentes comme motivation pour introduire le concept de différentiation de certaines fonctions qui ne le sont pas nécéssairement dans le sens classique.

**Définition 3.1.2** Soit $f \in L^1_{\ell oc}(\Omega)$. Une fonction $v \in L^1_{\ell oc}(\Omega)$ est dite **dérivée faible** de $f$ dans la direction $x_i$, $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, si

$$\boxed{\int_\Omega v(x)\varphi(x)dx = -\int_\Omega f(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)dx.} \tag{3.5}$$

est vérifiée pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

On note $v = D_i f$. Dans le cas où $f$ admet des dérivées faibles $D_i f$ pour $i = 1, \cdots, n$, on écrit $Df = (D_i f, \cdots, D_n f)$.

Il ressort de (3.2) et (3.5) que chaque $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ admet des dérivées faibles dans toute direction à savoir, $D_i f = \partial f / \partial x_i$. Cependant, il existe des fonctions qui admettent des dérivées faibles mais qui n'appartiennent pas à l'espace $\mathcal{C}^1(\Omega)$. D'autre part, il existe des fonctions dans l'espace $L^1_{\ell oc}(\Omega)$ qui n'ont pas de dérivées faibles.

☞ Exemple **3.1.1** Soient $\Omega = ]-1,1[ \subset \mathbb{R}$ et $f(x) = |x|$. Elle admet la dérivée faible

$$Df(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ -1 & \text{si } -1 < x < 0, \end{cases}$$

car pour tout $\varphi \in \mathcal{D}\,(]-1,1[)$, on a

$$\int_{-1}^{0} (-\varphi(x))dx + \int_{0}^{1} \varphi(x)dx = -\int_{-1}^{1} \varphi'(x).|x|dx.$$

☞ Exemple **3.1.2** La fonction

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{si } -1 < x < 0, \end{cases}$$

n'admet aucune dérivée faible, si c'est la cas $Df(x)$ devrait être 0 pour $x \neq 0$, et puisqu'elle est $L^1_{\ell oc}$ alors $Df \equiv 0$. Mais pour $\varphi \in \mathcal{D}(]-1,1[)$ on a

$$0 = \int_{-1}^{1} \varphi(x).0dx = -\int_{-1}^{1} \varphi'(x).f(x)dx = -\int_{0}^{1} \varphi'(x)dx = \varphi(0). \qquad \blacksquare$$

☞ Exemple **3.1.3** Soit $\Omega = ]0,2[ \subset \mathbb{R}$. Soit

$$u(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

et

$$v(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{si } 1 < x < 2. \end{cases}$$

Montrons que $u' = v$ au sens faible. Pour cela, choisissons $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. On devrait montrer que

$$\int_0^2 u(x)\varphi'(x)dx = -\int_0^2 v(x)\varphi(x)dx.$$

Un calcul simple, nous donne

$$\begin{aligned}\int_0^2 u(x)\varphi'(x)dx &= \int_0^1 x\varphi'(x)dx + \int_1^2 \varphi'(x)dx \\ &= -\int_0^1 \varphi(x)dx + \varphi(1) - \varphi(1) = -\int_0^2 v(x)\varphi(x)dx,\end{aligned}$$

comme convenu. ■

☞ <u>Exemple</u> **3.1.4** Soit $\Omega = ]0,2[ \subset \mathbb{R}$. Soit

$$u(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 2 & \text{si } 1 \leq x < 2. \end{cases}$$

Montrons que $u'$ n'existe pas au sens faible. Pour cela, supposons qu'il existe $v$ tel que $u' = v$. Alors pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned}-\int_0^2 v\varphi dx = \int_0^2 u(x)\varphi'(x)dx &= \int_0^1 x\varphi'(x)dx + 2\int_1^2 \varphi'(x)dx \\ &= -\int_0^1 \varphi(x)dx - \varphi(1).\end{aligned}$$

Choisissons une suite $\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$ de fonctions tests vérifiant

$$0 \leq \varphi_m \leq 1, \quad \varphi_m(1) = 1, \quad \varphi_m(x) \to 0 \text{ pour tout } x \neq 1$$

et remplaçons $\varphi$ par $\varphi_m$ et en faisant tendre $m$ vers l'infini, on obtient

$$1 - \lim_{m\to\infty} \varphi_m(1) - \lim_{m\to\infty} \left[\int_0^2 v\varphi_m(x)dx - \int_0^1 \varphi_m(x)dx\right] = 0.$$

Contradiction. ■

Les dérivées faibles d'ordre supérieures sont définies d'une manière analogue. Soit $f \in L^1_{\ell oc}(\Omega)$, $\alpha := (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, $\alpha_i \geq 0$ $(i = 1, \cdots, n)$, $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i > 0$, et

$$D^\alpha \varphi := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1} x_1 \cdots \partial^{\alpha_n} x_n} \quad \text{pour } \varphi \in \mathcal{C}^{|\alpha|}(\Omega).$$

Une fonction $v \in L^1_{\ell oc}(\Omega)$ est dite **la dérivée $\alpha$-faible de $f$** , ce qui s'écrit $v = D^\alpha f$ si

$$\int_\Omega v(x)\varphi(x)dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f(x) D^\alpha \varphi(x)dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}^{|\alpha|}(\Omega).$$

## 3.2 Espaces de Sobolev d'ordre 1

Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Nous définissons maintenant une catégorie d'espaces fonctionnels très utiles pour l'étude de problèmes variationnels.

Toute fonction $f \in L^2(\Omega)$ s'identifie à une distribution sur $\Omega$, notée $f$. En effet : Pour tout compact $K$ de $\Omega$. L'inégalité de Cauchy-Schwartz montre que

$$\int_K |f(x)|dx \leq \left(\int_K dx\right)^{1/2} \left(\int_K |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} = \sqrt{\text{mes}(K)} ||f||_{L^2(K)} < +\infty.$$

D'où l'on déduit que $f$ est intégrable sur tout compact de $\Omega$, donc $f \in L^1_{loc}(\Omega)$.

En général, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} \notin L^2(\Omega)$, il sera donc légitime de considérer le sous-ensemble de fonctions de $L^2(\Omega)$ dont le gradient est une distribution sur $\Omega$ :

**Définition 3.2.1** On appelle espace de Sobolev d'ordre 1 sur $\Omega$, l'espace

$$\boldsymbol{H^1(\Omega) = \left\{ f \in L^2(\Omega), \ \frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), 1 \leq i \leq n \right\}}$$

L'espace $H^1(\Omega)$ est le sous-espace de $L^2(\Omega)$ formé des fonction $u$ dont le gradient s'identifie à une fonction de $(L^2(\Omega))^n$.

On munit $H^1(\Omega)$ du produit scalaire :

$$(f,g)_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega \left( fg + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_i} \right) = (f,g)_{L^2(\Omega)} + \sum_{j=1}^{n} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial g}{\partial x_i} \right)_{L^2(\Omega)}.$$

La norme correspondante sera notée

$$||f||_{H^1(\Omega} = \sqrt{(f,f)_{H^1(\Omega}} = \left( ||f||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla f||^2_{(L^2(\Omega))^n} \right)^{1/2}.$$

La preuve du théorème suivant peut-être considérée comme un exercice :

**Théorème 3.2.1** Muni du produit scalaire précédement défini, l'espace $H^1(\Omega)$ admet une structure d'espace de Hilbert.

☞ **Exemple 3.2.1** Posons $\Omega = ]-1,1[$ et considérons la fonction $f(x) = |x|$. D'après les exemples précédents, on a $DT_f = T_{2H-1}$. La fonction $2H-1$ n'est pas continue sur $[-1,1]$ mais elle appartient bien à $L^2(]-1,1[)$ car elle est continue sauf sur un ensemble de mesure nulle et on vérifie :

$$\int_{-1}^{1} |2H(x)-1|^2 dx = \int_{-1}^{1} 1dx = 2.$$

Donc $f \in H^1(]-1,1[)$. Par contre $f \notin H^2(]-1,1[)$ car $D^2T_f = 2\delta_0 \notin L^2(]-1,1[)$. ■

Un résultat général permet de voir que $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$. Il est alors intéressant de se demander si $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $H^1(\Omega)$.

Dans le cas où $\Omega = \mathbb{R}^n$, on a le résultat suivant

**Théorème 3.2.2** L'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $H^1(\mathbb{R}^n)$ :

$$\boxed{\overline{\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)} = H^1(\mathbb{R}^n)}$$

Pour la preuve de ce théorème, on utilise une technique très générale en analyse fonctionnelle qui se décompose en deux étapes à savoir : la troncature et la régularisation.

**Remarque** Ce résultat est extrêmement utile en pratique. Par exemple, pour montrer qu'une inégalité est vrai sur $H^1(\mathbb{R}^n)$; il suffira de la montrer dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ce qui est plus commode puis conclure par densité.

On s'intéresse, à présent, au cas où $\Omega \subsetneq \mathbb{R}^n$. On commence par

$$\Omega = \mathbb{R}^n_+ := \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\} \quad \text{alors} \quad \partial\Omega = \Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}.$$

La surface $\Gamma$ est la fronière de $\Omega$ qui s'identifie topologiquement à $\mathbb{R}^{n-1}$.

Considérons l'espace $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ qui est l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans $\overline{\Omega}$, donc eventuellement non nulles sur la frontière $\Gamma = \partial\Omega$.

On a le résultat suivant qui se démontre par troncature et régularisation (voir références) :

**Théorème 3.2.3** L'espace $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$.

Il s'agit maintenant de définir précisément ce que l'on entend par valeur d'une fonction de $H^1(\Omega)$ sur la frontière $\Gamma = \partial\Omega$ de l'ouvert $\Omega = \mathbb{R}^n_+ := \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$.

**Lemme 3.2.4** Pour toute fonction $\varphi$ dans $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$, on a

$$\boxed{||\varphi(.,0)||_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} \leq ||\varphi||_{H^1(\mathbb{R}^n_+)}.}$$

**Preuve :** Comme $\varphi \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$, soit $R$ un réel positif tel que supp$\varphi \subset \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_n \leq R\}$. Alors pour tout $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ et en vertu de l'inégalité $2ab \leq a^2 + b^2$ valable pour tous réels $a$ et $b$ on a :

$$\begin{aligned}
|\varphi(x',0)^2| &= |\varphi(x',0)|^2 - |\varphi(x',R)|^2 = -\int_0^R \frac{\partial}{\partial x_n}|\varphi(x',x_n)|^2 dx_n \\
&= -2\int_0^R \varphi(x',x_n)\frac{\partial}{\partial x_n}\varphi(x',x_n)dx_n \\
&\leq \int_0^R \left(|\varphi(x',x_n)|^2 dx_n + \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(x',x_n)\right|^2\right) dx_n.
\end{aligned}$$

Ceci montre par intégration sur $\mathbb{R}^{n-1}$ que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\varphi(x',x_n)|^2 dx' &\leq \int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_0^R | \left(\varphi(x',x_n)|^2 + \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(x',x_n)\right|^2\right) dx' dx_n \\
&\leq ||\varphi||^2_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} + \left|\left|\frac{\partial \varphi}{\partial x_n}\right|\right|^2_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} \\
&\leq ||\varphi||^2_{H^1(\mathbb{R}^n_+)}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

**Définition 3.2.2** On définit l'opérateur de trace $\gamma_0$ de $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ à valeur dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})$ définie par

$$\boxed{\gamma_0(f) = f(.,0)}$$

En d'autres termes, la trace d'une fonction $f$ définie sur $\overline{\mathbb{R}^n_+}$ est la restriction de cette fonction au bord $\Gamma$ de $\mathbb{R}^n_+$. Le théorème de densité et le lemme précédent (qui assure la continuité de cet opérateur sur $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$) permettent de montrer

**Proposition 3.2.5** L'application $\gamma_0$ se prolonge par densité et par continuité en une application aussi $\gamma_0$ définie et continue de $H^1(\overline{\mathbb{R}}^n_+)$ à valeur dans $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$.

Cette notion de trace a encore un sens dans le cas où $\Omega$ est un ouvert borné suffisamment régulier de $\mathbb{R}^n$. Précisons ce qu'on entend par régularité de $\Omega$ :

**Définition 3.2.3** Un ouvert $\Omega$ de $\mathbb{R}^n$ est dit de classe $\mathcal{C}^1$ si sa frontière $\Gamma$ est une variété de dimension $n-1$ de classe $\mathcal{C}^1$ avec $\Omega$ se trouvant localement d'un seul côté de $\Gamma$.

**Théorème 3.2.6** Soit $\Omega$ un ouvert borné de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^n$ de frontière $\Gamma$. Alors $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$ et l'opérateur de trace $\gamma_0 : u \to u|_\Gamma$ se prolonge par densité et par continuité en une application linéaire continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma)$, appelée encore trace et notée $\gamma_0$. Il existe alors une constante $C \geq 0$ telle que pour tout $u \in H^1(\Omega)$, on a

$$\boxed{||\gamma_0 u||_{L^2(\Gamma)} \leq C||u||_{H^1(\Omega)}.}$$

En général, l'espace des fonctions tests $\mathcal{D}(\Omega)$ n'est pas dense dans l'espace $H^1(\Omega)$. Ceci nous ramène à considérer l'espace fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$ et etudié ses propriétés.

## 3.3 Espace $H^1_0(\Omega)$

Dans les problèmes variationnels, ils convient de considérer des espaces qui traduisant le fait que les fonctions s'annulent sur le bord $\Gamma$ de l'ouvert $\Omega$ au sens de $\gamma_0$ définie précédemment.

**Définition 3.3.1** Pour tout $\Omega$ ouvert de $\mathbb{R}^n$, on pose

$$\boxed{H_0^1(\Omega) := \overline{\mathcal{D}(\Omega)} \quad dans \quad H^1(\Omega).}$$

Ainsi, $H_0^1(\Omega)$ est l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$.

Les fonctions de l'espace $H_0^1(\Omega)$ forment l'ensemble de toutes les limites possibles des suites d'éléments de $\mathcal{D}(\Omega)$ au sens de la topologie de $H^1(\Omega)$.

**Théorème 3.3.1** On suppose que $\Omega$ est borné, de frontière $\partial\Omega$ de classe $\mathcal{C}^1$. Alors, il existe un opérateur linéaire continu

$$\boxed{\gamma_0 : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega),}$$

appelé **opérateur trace**, tel que

$$\boxed{H_0^1(\Omega) = \operatorname{Ker} \gamma_0 = \{u \in H^1(\Omega), \gamma_0 u = 0\}.}$$

L'application $\gamma_0 u$ est appelée la **trace** de $u$ sur $\partial\Omega$.

Ainsi, $H_0^1(\Omega)$ est un fermé de $H^1(\Omega)$.

On note par $H^{-1}(\Omega)$ le dual de $H_0^1(\Omega)$ qui est un espace de Hilbert pour la norme duale. Comme $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$, les fonctions de $H^{-1}(\Omega)$ peuvent être identifiées à des distributions. L'espace $H^{-1}(\Omega)$ est alors un espace de distributions.

## 3.4 Inégalité et théorème de Poincaré

Nous donnons à présent une estimation très utile, valable lorsque $\Omega$ est borné dans une direction. cet estimation est connue sous la forme d'inégalité de Poincaré.

> Henri Poincaré (né le 29 avril 1854 à Nancy - 17 juillet 1912 à Paris) est un mathématicien, un physicien et un philosophe Français. Théoriciens de Génie, ses apports en maints domaines des mathématiques de la physique ont radicalement modifié ces deux sciences.

Pour tout $f \in H^1(\Omega)$, on pose

$$|f|_{H^1(\Omega)} := \left( \sum_{j=1}^{n} || \frac{\partial f}{\partial x_j} ||^2_{L^2(\Omega)} \right)^{1/2}.$$

Ceci permettra le résultat suivant, connu sous le nom d'inégalité de Poincaré :

**Théorème 3.4.1** On suppose que $\Omega$ est borné dans une direction. Alors, il existe une constante $C$ (constante de Poincaré) ne dépendant que de la géométrie de $\Omega$ telle que pour $f \in H_0^1(\Omega)$ on a telle que

$$\boxed{||f||_{L^2(\Omega)} \leq C|f|_{H_1(\Omega)}.}$$

**Preuve :** Sans restriction de généralité, on peut supposer que $\Omega$ est borné dans la direction de $x_n$, c'est à dire

$$\Omega \subset S = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} : a < x_n < b\}.$$

pour des valeurs de $a$ et $b$ données. On se donne pour commencer une fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, pour laquelle

$$f(x', x_n) = f(x', a) + \int_a^{x_n} \frac{\partial f}{\partial x_n}(x', y)dy = \int_a^{x_n} \frac{\partial f}{\partial x_n}(x', y)dy$$

où $(x', x_n) \in S$. On en déduit de l'inégalité de Cauchy-Schwarz que

$$|f(x', x_n)|^2 \leq \left| \int_a^{x_n} \frac{\partial f}{\partial x_n}(x', y) dy \right|^2 \leq (x_n - a) \int_a^b \left| \frac{\partial f}{\partial x_n}(x', y) \right|^2 dy.$$

Par intégration de cette inégalité sur la bande, on arrive à l'estimation sur la norme $L^2$ de $f$ :

$$\int_a^b \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |f(x', x_n)|^2 dx' dx_n \leq \frac{1}{2}(b-a)^2 \int_a^b \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left| \frac{\partial f}{\partial x_n}(x', y) \right|^2 dx' dy.$$

Ceci nous conduit à l'estiùation désirée qui reste valable sur $H_0^1(\Omega)$ par continuité et par densité. ■

Dans la cas d'un ouvert borné

$$\Omega \subset \prod_{1 \leq j \leq n} ]a_i, b_j[,$$

on obtien une estimation exacte de la constante $C$ en foncion de la géométrie de $\Omega$, à savoir

$$\boxed{||u||^2_{L^2(\omega)} \leq \frac{1}{2n} \max_{1 \leq j \leq n} (a_j - b_j) ||\nabla u||^2_{(L^2(\Omega))^n}}$$

qui reste valable pour toute $f \in H_0^1(\Omega)$.

**Théorème 3.4.2 (Théorème de Banach).** Si $\Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ borné dans une direction, alors la semi-norme $|.|_{H^1(\Omega)}$ induit sur $H_0^1(\Omega)$ une norme équivalente à la norme usuelle.

**Preuve :** Il est clair par construction que l'on a l'inégalité

$$|f|_{H^1(\Omega)} \leq ||f||_{H^1(\Omega)}$$

valable pour tout $u$ dans $H_0^1(\Omega)$. En utilisant l'inégalité de Poincaré, on voit que

$$||f||_{H^1(\Omega)} = ||f||^2_{L^2(\Omega)} + |f|^2_{L^2(\omega)} \leq (C+1)|f|^2_{H^1(\Omega)}.$$

En posant $\beta = 1/(C+1)$ on obtient :

$$\beta||f||_{H^1(\Omega)} \leq |f|_{H^1(\Omega)} \leq ||f||_{H^1(\Omega)}. \qquad \blacksquare$$

Terminons par la définition des espaces de Sobolev d'ordre supérieure.

Définition **3.4.1** Soit $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq +\infty$, on définit l'espace de Sobolev $W^{p,k}(\Omega)$ par

$$\boxed{W^{p,k}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) : D^\alpha f \text{ existe et } D^\alpha f \in L^p(\Omega), \quad \forall |\alpha| \leq k\}}$$

On munit les espaces de Sobolev par une structure d'espaces normés dont les normes sont définies par

$$||f||_{W^{p,k}(\Omega)} := \left( \sum_{|\alpha|\leq k} \int_\Omega |D^\alpha f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \qquad 1 \leq p < +\infty$$

$$||f||_{W^{p,\infty}(\Omega)} := \sum_{|\alpha|\leq k} \sup_{x\in\Omega} |D^\alpha f(x)|, \qquad p = +\infty.$$

Lorsque $p = 2$, les espaces de sobolev d'ordre $k \in \mathbb{N}$, sont notés $H^k(\Omega)$ et définis par

$$\boxed{H^k(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega),\ \partial^\alpha f \in L^2(\Omega),\ 0 \leq |\alpha| \leq m\}.}$$

Ils deviennent des espaces de Hilbert pour le produit scalaire

$$\boxed{\forall f, g \in H^k(\Omega), \quad (f,g)_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega \partial^\alpha f \partial^\alpha g.}$$

La norme associée est notée $\|.\|_{H^k(\Omega)}$.

Dans le cas ou $\Omega = \mathbb{R}^n$, il est possible de caractériser les espaces de Sobolev à l'aide de la transformée de Fourier.

# Chapitre 4

# Problèmes aux limites elliptiques

## 4.1 Problème abstrait

Soit $V$ un espace de Hilbert muni du produit scalaire $(.,.)_V$ dont la norme associée est $||.||_V$. Fixons une forme bilinéaire continue

$$a : V \times V \mapsto \mathbb{R} \qquad (u,v) \to a(u,v).$$

La bilinéarité signifie la linéarité de $a$ en $u$ et $v$, tandis que la continuité suppose l'existence d'une constante $C > 0$ telle que

$$\boxed{|a(u,v)| \leq C\|u\|_V.\|v\|_V, \qquad \forall u,v \in V.}$$

Considérons le problème abstrait (ou variationnel) suivant :

**Etant donné $F \in V'$, trouver $u \in V$ solution de l'équation :**

$$\boxed{a(u,v) = F(v), \qquad \forall v \in V} \qquad (P)$$

Pour l'existence d'une solution à ce problème, la forme $a$ devrait vérifier l'hypothèse de la coercivité ou la $V$-ellipticité :

**Définition 4.1.1 On dit que la forme $a$ est $V$-elliptique ou coercice sur $V$ si et seulement si il existe $\alpha > 0$ tel que**

$$\boxed{|a(u,u)| \geq \alpha ||u||_V^2, \qquad \forall u \in V.}$$

Nous avons besoin de la représentation de Riesz qui s'énonce comme suit :

> Théorème de représentation de Riez :
>
> **Désignons par $V'$ l'espace dual de $V$. Soit $F \in V'$. Alors, il existe un et un seul élément $T_F \in V$ tel que :**
>
> $$< F, v >= (T_F, v), \qquad \forall v \in V.$$
>
> **De plus, on a $||T_F|| = ||F||_{V'}$. Autrement dit, l'application $T : V' \to V$ définie par $F \to T_F$ est un isomorphisme.**

**Théorème 4.1.1 (Lax-Milgram).** Si la forme bilinéaire $a$ est $V$-elliptique, alors la problème (P) a une solution unique $u \in V$. De plus, on a l'estimation suivante :

$$\boxed{||u||_V \leq \frac{1}{\alpha}||F||_{V'}.}$$

Preuve : Fixons $u \in V$ et considérons l'application

$$A_u : V \to \mathbb{R} \qquad \text{tel que} \qquad A_u(v) = a(u,v).$$

Ceci définit une forme linéaire continue sur $V$ c-à-d. que $A_u \in V'$ car

$$|A_u(v)| = |a(u,v)| \leq C||u||_V.||v||_V, \quad \forall v \in V$$

et en plus on a

$$||Au||_{V'} \leq M.||u||_V. \qquad (*)$$

Pour un paramètre $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, introduisons :

$$\Phi_\varepsilon : V \to V \qquad \text{tel que} \qquad \Phi_\varepsilon(u) = u - \varepsilon T(A_u - F)$$

où l'application $T : V' \to V$ étant définie dans le théorème de représentation de Riesz. Pour $\varepsilon$ suffisament petit, l'application $\Phi_\varepsilon$ est une contraction. En effet, par la définition de $\Phi_\varepsilon$, la bilinéarité du produit scalaire et grâce aux propriétés de l'application $T$, on obtient

$$||\Phi_\varepsilon(u) - \Phi_\varepsilon(v)|| = ||u - v||_V^2 + \varepsilon^2||A_u - A_v||_{V'}^2 - 2\varepsilon a|(u - v, u - v).$$

D'après (*) et la $V$-ellipticité, on arrive à l'estimation

$$|\Phi_\varepsilon(u) - \Phi_\varepsilon(v)||^2 \leq (1 - 2\varepsilon a + \varepsilon^2 M^2)||u - v||_V^2.$$

Ainsi, $\Phi_\varepsilon$ sera une contraction si $1 - 2\varepsilon a + \varepsilon^2 M^2 < 1$ ce qui est équivalent à : $0 < \varepsilon < 2\alpha/M^2$. Le théorème du point fixe assure l'existence d'un certain $u_0 \in V$ tel que $\Phi_\varepsilon(u_0) = u_0$. Appliquons l'égalité (P) pour $u = v$ donc $a(u, u) = F(u)$. Ainsi, par la coercivité de $a$ et la continuité de $F$, l'identité ci-dessus implique

$$\alpha||u||_V^2 \leq a(u, u) = F(u) \leq ||F||_{V'}.||u||_V.$$

D'où

$$||u||_V^2 \leq \frac{1}{\alpha}||F||_{V'}.||u||_V. \qquad \blacklozenge$$

## 4.2 Problèmes de Dirichlet et de Neumann en dimension 1

Dans ce qui suit on illutrera par des exemples qui montrent comment écrire certains problèmes concrets sous forme variationnelle.

☞ Exemple 4.2.1 [Problème de Dirichlet en dim 1] Considérons l'ouvert $\Omega = ]-1, 1[$ de $\mathbb{R}$. Soit $f \in L^2(\Omega)$, on veut montrer l'existence de la solution $u$ de l'équation différentielle :

$$\begin{cases} -u'' = f \quad \text{dans} \quad \Omega & (1.a) \\ \text{et satisfaisant aux conditions aux bords} & \\ u(0) = u(1) = 0 & (1.b) \end{cases}$$

On peut interpréter cette équation comme représentant l'état stationnaire d'une corde. La solution $u$ représente le déplacement de cette corde dans la direction perpendiculaire à celle-ci par rapport à la position de repos, $f$ est la densité de la force et les conditions aux bords (1.a) et (1.b) signifient que la corde est fixée par ses extrémités.

Supposons que la solution de problème **(1.a)-(1.b)** existe et qu'elle est suffisament régulière par exempel $u \in H^2(\Omega)$. Alors, en multipliant **(1.a)** par une fonction test $v \in H^1(\Omega)$, on obtient :

$$-\int_0^1 u''(x)v(x)\,dx = \int_0^1 f(x)v(x)\,dx.$$

En intégrant par parties dans le premier membre de cette identité, on obtient

$$-\int_0^1 u'(x)v'(x)\,dx + u'(0)v(0) - u'(1)v(1) == \int_0^1 f(x)v(x)\,dx.$$

Comme la condition **(1.b)** signifie que $v \in H_0^1(\Omega)$ c-à-d que $v|_{\partial\Omega} = 0$, on obtient

$$-\int_0^1 u'(x)v'(x)\,dx + u'(0)v(0) - u'(1)v(1) == \int_0^1 f(x)v(x)\,dx. \qquad (\mathcal{P})$$

Le bon choix consiste à prendre :

$$\begin{cases} V = H_0^1(\Omega) \\ a(u,v) = \int_0^1 u'(x)v'(x)\,dx \\ F(v) = \int_0^1 f(x)v(x)\,dx. \end{cases}$$

Grâce au lemme de Lax-Milgram, le problème $(\mathcal{P})$ a une solution unique $u \in H_0^1(\Omega)$. Reste à vérifier les hypothèses. La bilinéarité de $a$ et la linéarité de $F$ découle de la linéarité de l'intégrale. Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on vérifie que la forme $a$ et $F$ sont continues, en effet :

$$|F(v)| \leq ||f||_{0,\Omega}.||v||_{0,\Omega}.$$

Comme la norme $L^2$ est toujours plus petite que la norme $H^1$, on conclu la continuité de $F$ (On procède de manière analogue pour $a$). Reste à vérifer la coercivité de la forme $a$ sur $H_0^1(\Omega)$. Ceci provient de l'inégalité de Poincaré puisque $a(u,u) = |u|_{1,\Omega}^2$. Comme $\mathcal{D}(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$, $(\mathcal{P})$ est vérifiée. En conséquence et au sens des distributions, $u$ satisfait :

$$u'' = -f \qquad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega).$$

Comme par hypothèse $f \in L^2(\Omega)$ on en déduit que :

$$u, u' \ \text{ et } \ u \in L^2(\Omega) \quad \Longrightarrow \quad u \in H^2(\Omega).$$

L'équation **(1.a)** est donc satisfaite au sens $L^2(\Omega)$. ◆

☞ **Exemple 4.2.2 [Problème de Neumann en dim 1]** Posons $\Omega = ]0, 1[$.
On considère cette-fois-ci le problème suivant :

Soit $f \in L^2(\Omega)$, trouver $u$ solution de

$$\begin{cases} u'' + u = f \quad \text{dans } \Omega & (\boldsymbol{N_1}) \\ u'(0) = u'(1) = 0 & (\boldsymbol{N_2}). \end{cases}$$

Supposons qu'une solution de $(\boldsymbol{N_1})$-$(\boldsymbol{N_2})$ existe et qu'elle appartient à $H^2(\Omega)$. Alors en multipliant $(\boldsymbol{N_1})$ par une fonction test $v \in H^1(\Omega)$; on obtient

$$\int_0^1 (-u''(x)v(x) + u(x)v(x))\, dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx.$$

En intégrant par parties dans le premier membre de cette identité, et en tenant compte de $(\boldsymbol{N_2})$, on obtient

$$\int_0^1 (u'(x)v'(x) + u(x)v(x))\,dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx, \quad \forall v \in H^1(\Omega). \qquad (\boldsymbol{N_3})$$

On a ainsi montré que si $u \in H^2(\Omega)$ est solution de $(\boldsymbol{N_1})$-$(\boldsymbol{N_2})$, alors il est solution de $(\boldsymbol{N_3})$. Ce dernier problème est équivalent au problème $(\mathcal{P})$ en prenant :

$$V = H^1(\Omega), \quad a(u,v) = \int_0^1 (u'(x)v'(x)+u(x)v(x))\,dx \text{ et } F(v) = \int_0^1 f(x)v(x)dx.$$

Grâce au lemme de Lax-Milgram, le problème $(\boldsymbol{N_3})$ a une solution unique $u \in H^1(\Omega)$. Comme précédemment, montrons que la solution $u \in H^1(\Omega)$ de $(\boldsymbol{N_3})$ appartient à $H^2(\Omega)$ et satisfait $(\boldsymbol{N_1})$-$(\boldsymbol{N_2})$. En effet, comme $\mathcal{D}(\Omega) \subset H^1(\omega)$, $(\boldsymbol{N_3})$ implique $u$ satisfait $-u'' + u = f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Mais, par hypothèse, $f$ et $u \in L^2(\Omega)$ alors $u'' = u - f \in L^2(\Omega)$. Donc $u \in H^2(\Omega)$ et satisfait $(\boldsymbol{N_2})$. On revient maintenant à $(\boldsymbol{N_3})$ et en intégrant par parties, on obtient $u'(1)v(1) - u'(0)v(0) = 0 \quad \forall v \in H^1(\Omega)$. En prenant $v(x) = x$ et $v(x) = 1-x$, on conclut que $u'(1) = 0$ et $u'(0) = 0$ c-à-d $(\boldsymbol{N_2})$. ◆

## 4.3 Existence d'une solution au problème de Dirichlet en dimension supérieure

On appelle problème de Dirichlet une équation de Laplace avec conditions aux limites de type Dirichlet.

Pour $\Omega$ ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\Gamma := \partial\Omega$ le problème de Dirichlet s'énonce de la façon suivante :

Déterminer une fonction $u$ dans un certain espace fonctionnel $V$ telle que :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{dans } \Gamma. \end{cases}$$

où $f$ est une fonction donnée dans un certain espace fonctionnel $H$.

**Proposition 4.3.1** Soit $f \in L^2(\Omega)$, alors on a équivalence :

① Trouver $u \in H_0^1$ telle que $-\Delta u = f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

② **[Formulation Variationnelle (FV)]** Trouver $u \in H_0^1$ telle que :

$$\int_\Omega \nabla u(x).\nabla v(x)\, dx = \int_\Omega f(x)v(x)\, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

③ **[Principe de Dirichlet]** Trouver $u \in H_0^1$ qui minimise dans $H_0^1$ la fonctionnelle :

$$J(v) := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v(x)|^2\, dx - \int_\Omega f(x)v(x)\, dx.$$

Dire que les 3 formulations sont équivalentes est equivaut à dire que si $u$ est solution de l'une d'elles le saura pour les 2 autres.

Une solution à l'un des problèmes est appelée **solution faible** ou solution variationnelle du problème de Dirichlet (D).

**Preuve :**

- (2) $\Longrightarrow$ (1): Si $u$ est solution de (FV) alors, puisque $\mathcal{D}(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$, on alors pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ :

$$\int_\Omega \nabla u(x).\nabla v(x)\, dx = \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\, dx.$$

Ce qui donne

$$-\Delta u = f \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

- (1) $\Longrightarrow$ (2) : En remontant les calculs précédents, on obtient

$$\int_\Omega \nabla u(x).\nabla\varphi(x)\,dx = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx \qquad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Or $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$, le résultat s'obtient dans $H_0^1(\Omega)$.

- (3) $\Longrightarrow$ (2) : Soit $u \in H_0^1(\Omega)$ qui minimise la fonctionnelle $J$ et soit $v \in H_0^1(\Omega)$. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $J(u) \leq J(u+tv)$; oR?

$$\begin{aligned} J(u+tv) &= \tfrac{1}{2}\textstyle\int_\Omega |\nabla(u+tv)(x)|^2\,dx - \int_\Omega f(x)(u(x)+v(x))\,dx \\ &= J(u) + t\textstyle\int_\Omega \nabla u.\nabla v\,dx + \dfrac{t^2}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2\,dx \\ &\quad -t\textstyle\int_\Omega fv\,dx. \qquad \textbf{(E)} \end{aligned} \tag{4.1}$$

Donc

$$t\left(\int_\Omega \nabla u.\nabla v\,dx - \int_\Omega fv\,dx\right) + \frac{t^2}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2\,dx \geq 0.$$

On a deux cas

① En divisant pat $t > 0$ et en faisant tendre $t$ vers 0, on obtient

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla v\,dx - \int_\Omega fv\,dx \geq 0.$$

② En divisant pat $t < 0$ et en faisant tendre $t$ vers 0, on obtient

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla v\,dx - \int_\Omega fv\,dx \leq 0.$$

D'où $u$ vérifie (FV).

- (2) $\Longrightarrow$ (3) : Si $u$ est solution de (FV) alors avec (E), on obtient que, pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$ :

$$J(u+v) = J(u) + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2\,dx \qquad (*)$$

ce qui prouve que $u$ réalise le minimum de $J$ sur $H_0^1(\Omega)$. ◆

**Corollaire 4.3.1** Si l'un quelconque des problème tous équivalents admet une solution, alors cette solution est unique.

**Preuve :** Soit $u_1$ et $u_2$ sont deux solutions alors d'après (*) on a

$$J(u_1) = J(u_2) = J(u_1) + \int_\Omega |\nabla(u_1 - u_2)|^2 \, dx;$$

ceci implique que $\nabla(u_2 - u_1) = 0$ et donc $u_2 = u_1$ dans $H_0^1(\Omega)$. ◆

## 4.4 Existence d'une solution au problème de Neumann en dimension supérieure

Etant donné $f \in L^2(\Omega)$, on veut trouver la solution $u$ du problème

$$\begin{cases} -\Delta u + cu = f & \text{dans } \Omega \\ \gamma_0 \dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

Comme précedemment, on voit qu'il faut prendre :

$$V = H^1(\Omega), \quad a(u,v) = \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx + \int_\Omega c(x) u(x) v(x) \, dx,$$

et

$$F(v) = \int_\Omega f(x) v(x) \, dx.$$

La $V$-ellipticité de la forme $a$ sur $H^1(\Omega)$ découle de l'estimation

$$a(u,u) \geq ||u||_{1,\Omega}^2 + c_0 ||u||_{0,\Omega}^2 \geq \min(1, c_0) ||u||_{1,\Omega}^2.$$

Par le lemme de Lax-Milgram, il existe une solution unique $u \in H^1(\Omega)$ du problème

$$a(u,v) = F(v), \; \forall v \in H^1(\Omega).$$

Comme $\mathcal{D}(\Omega) \subset H^1(\Omega)$, cette solution vérifie

$$-\Delta u + cu = f \quad \text{dans } \mathcal{D}(\Omega).$$

Mais, cette identité ne nous fournit aucune information sur $\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$. Si la solution $u$ appartient à $H^2(\Omega)$, d'après la formule de Green, on obtient

$$\int_\Gamma \gamma_0 \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \gamma_0 v \, d\sigma = 0, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Comme l'image de $\gamma_0$ est dense dans $L^2(\Omega)$, on conclut que la solution $u$ satisfait la condition de Neumann sur $\Gamma$.

## 4.5 Exemple : Le problème de la plaque encastrée

Soit $\Omega$ un ouvert bornée à bord lipschitzien. Soit $f \in L^2(\Omega)$, on cherche $u$ solution de

$$(Enc) \qquad \begin{cases} \Delta^2 u = f & \text{dans } \Omega \\ \gamma_0 u = \gamma_0 \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0. & \text{dans } \Gamma \end{cases}$$

Ce problème représente l'équation d'une plaque :

$u(x)$ étant le déplacement perpendiculaire à celle-ci au point $x$, $f$ la densité de force et les conditions au bord signifiant que la plaque est encastrée au bord.

Une formulation variationnelle de ce problème est obtenue en choisissant :

$$V = H_0^2(\Omega)$$

$$\begin{aligned} a(u,v) &= \int_\Omega \left[\Delta u \Delta v - (1-\mu)\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right\}\right] dxdy, \\ F(v) &= \int_\Omega f(x)v(x)\, dx, \end{aligned}$$

où $\mu \in ]0,1[$ est le cœfficient de Poisson du matériau constituant la plaque. ◆

## 4.6 Exemple : Système de L'élasticité linéarisée

Nous appliquons l'approche variationnelle à la résolution du système d'équations de l'élasticité linéarisé. Ces équations modélisent les déformations d'un solide sous l'hypothèse de petites déformations et de petits déplacements. On considère les équations stationnaires de l'élasticité c'est à dire indépendantes du temps.

Soit $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. Soit une force $f(x)$, une fonction de $\Omega$ dans $\mathbb{R}^n$. L'inconnu $u$ (le déplacement) est aussi une fonction de $\Omega$ dans $\mathbb{R}^n$. La modélisation mécanique fait intervenir le tenseur des déformations noté $e(u)$, qui est une fonction à valeurs dans l'ensemble des matrices symétriques

$$e(u) = \frac{1}{2}\left(\nabla u + (\nabla u)^t\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)_{1<i,j<n}$$

ainsi que le tenseur des contraintes $\sigma$ (c'est une autre fonction à valeurs dans l'ensemble des matrices symétriques) qui est relié à $e(u)$ par la loi de Hooke

$$\sigma = 2\mu e(u) + \lambda \mathrm{tr}(e(u))\mathrm{Id},$$

où $\lambda$ et $\mu$ sont les cœfficients de Lamé du matériau homogène isotrope qui occupe $\Omega$. Pour des raisons de thermodynamique les cœfficients de Lam vérifient

$$\mu > 0 \quad \text{et} \quad 2\mu + N\lambda > 0.$$

On ajoute à cette loi constitutive le bilan des forces dans le solide

$$-\text{div } \sigma = f \quad \text{dans} \quad \Omega$$

où, par définition, la divergence de $\sigma$ est le vecteur de composantes

$$\text{div } \sigma = \left( \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right)_{1<i<n}.$$

En utilisant le fait que $\text{tr}(e(u)) = \text{div } u$, on en déduit les équations pour $1 \leq i \leq n$ :

$$\boxed{-\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \lambda (\text{div } u) \delta_{ij} \right) = f_i \quad \text{dans} \quad \Omega}$$

avec $f_i$ et $u_i$, pour $1 \leq i \leq n$, les composantes de $f$ et $u$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. En ajoutant une condition aux limites de Dirichlet, et en utilisant des notations vectorielles, le problème aux limites considéré est :

$$\begin{cases} -\text{div}(2\mu e(u) + \lambda \text{tr } (e(u)) \text{ Id}) = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

On montre, et nous l'admettons, que ce problème admet une unique solution faible $u \in H_0^1(\Omega)^N$, si $f \in L^2(\Omega)^N$.

# Chapitre 5

# Théorèmes des Inclusions de Sobolev

Dans ce chapitre, nous collectons une liste de propriétés de base des espace de Sobolev sans en donner les preuves qui se trouvent dans tout livre consacré à ces espaces[, , ].

Notre but est de donner une preuve de la non-existence de la solution au problème aux limites de Dirichlet lorsque $\Omega = \mathbb{R}$.

## 5.1 Injections continues et compactes entre les espaces de Banach

Soit $(E, ||.||_E)$ et $(F, ||.||_F)$ deux espaces de Banach tels qu'il existe une application linéaire continue et injective de $E$ dans $F$ c'est à dire que $E$ est un sous-espace vectoriel normé de $F$.

On dit que cette inclusion est :

① Continue : S'il existe une constante $C > 0$ tel que

$$||u||_F \leq C||u||_E, \quad \forall u \in E.$$

② **Compacte** : Si de toute suite bornée de $E$ ( pour la norme de $E$) on peut extraire une sous-suite qui converge dans $F$ pour la norme $||.||_F$.

② **Dense** : Si pour tout $u \in F$ il existe une suite $(u_n)$ dans $E$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u$ pour la norme de $F$.

## 5.2 Inclusions des espaces de Sobolev

Plus précisément, on fera un rappel sur les injections de Sobolev dont le but de montrer que lorsque l'exposant $m$ est suffisamment grand, les fonctions de $H^m(\Omega)$ ont des propriétés de continuité et de différentiabilité au sens classique.

Supposons tout d'abord que $\Omega = \mathbb{R}^n$, pour $k$ entier définissons le sous-espace $\mathcal{B}^k(\mathbb{R}^n)$ de $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n)$ par :

$$\boxed{\mathcal{B}^k(\mathbb{R}^n) := \{u \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n) : \lim_{|x|\to\infty} |D^\alpha u(x)| = 0 \ \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \ |\alpha| \leq k\}.}$$

Cet espace est un espace de Banach pour la norme suivante :

$$||u||_{\mathcal{B}^k(\mathbb{R}^n)} := \sum_{|\alpha|\leq k} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |D^\alpha u(x)|.$$

Le résultat suivant montre que pour $m > \frac{n}{2}$ les éléments de $H^m(\mathbb{R}^n)$ sont des fonctions continues tendant vers 0 à l'infini.

**Théorème 5.2.1** [Morrey]. Soit $m \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$ vérifiant $m > \frac{n}{2+k}$, alors on a l'inclusion continue :

$$\boxed{H^m(\mathbb{R}^n) \xrightarrow[cont]{} \mathcal{B}^k(\mathbb{R}^n).}$$

Pour $k = 0$ c'est à dire pour $m > \frac{n}{2}$ alors l'espace $H^m(\mathbb{R}^n)$ est formé par les fonctions continues sur $\mathbb{R}^n$ et tendant vers 0 à l'infini. Pour $k \neq 0$; on en déduit le résultat suivant :

**Corollaire 5.2.2** Si $\Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, alors $\forall k \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$ tels que $m > \frac{n}{2+k}$, alors on a l'inclusion continue : $H^m(\Omega) \underset{cont}{\longrightarrow} \mathcal{C}^k(\Omega)$.

**Théorème 5.2.3 [Injections de Sobolev].** Soit $0 \leq m \leq \frac{n}{2}$, alors

① Si $m = \frac{n}{2}$, alors

$$\boxed{H^m(\mathbb{R}^n) \underset{cont}{\longrightarrow} L^q k(\mathbb{R}^n), \quad \forall q \in [2, \infty[.}$$

② Si $0 \leq mm < \frac{n}{2}$, alors

$$\boxed{H^m(\mathbb{R}^n) \underset{cont}{\longrightarrow} L^q k(\mathbb{R}^n), \quad \forall q \in \left[2, \frac{2n}{n-2s}\right[.}$$

On étend les résultats de ce théorème au cas où $\Omega$ est un ouvert régulier.

**Théorème 5.2.5** [Rellich-Kondrashov]. Lorsque $\Omega$ est un ouvert de classe $\mathcal{C}^1$ , on a

① Si $n < 2k$, alors

$$\boxed{H^1(\Omega) \xrightarrow[comp]{} \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}).}$$

② Si $n = 2$, alors

$$\boxed{H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad \forall q \in [1, +\infty[.}$$

② Si $n > 2$, alors

$$\boxed{H^1(\Omega) \xrightarrow[comp]{} L^q(\Omega), \quad \forall q \in \left[1, \frac{2n}{n-2}\right[.}$$

En particulier, on a toujours

$$\boxed{H^1(\Omega) \xrightarrow[comp]{} L^2(\Omega).}$$

Ce qui signifie :

$$\begin{cases} u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \\ \lim\limits_{|x| \to +\infty} u(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim\limits_{|x| \to +\infty} u'(x) = 0. \end{cases}$$

L'égalité $-u'' = f$ a lieu dans $L^2(\mathbb{R})$, au sens des fonctions de $L^2(\mathbb{R})$ donc presque partout. Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $-\infty < a < b < +\infty$, on a $L^2(]a, b[) \subset L^1(]a, b[)$. On peut donc écrire :

$$-\int_a^b u''(x)dx = u'(a) - u'(b) = \int_a^b f(x)dx.$$

En faisant tendre $a \to -\infty$ et $b \to +\infty$, on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a,b \to \pm\infty} \int_a^b f(x)dx = 0.$$

Une condition nécéssaire et suffisante pour que le problème de Dirichlet admette une solution est que

$$\lim_{a,b \to \pm\infty} \int_a^b f(x)dx = 0.$$

Or, toutes les fonctions de $L^2(\mathbb{R})$ ne vérifient pas cette conditions. Contradiction. ■