

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique

M1510.065

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques



Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : EDP



Par :

CHEBLI Wassila et SAYOUD Asma

Intitulé

**Equations de Transport
Chocs, Raréfaction et Détente**

Dirigé par : Dr HITTA Amara

Devant le jury

**PRESIDENT
RAPPORTEUR
EXAMINATEUR1**

**A. HITTA
K.BENARIOUA
A. FRIOUI**

**Univ-Guelma
Univ-Guelma
Univ-Guelma**

Session Juin 2013

Remerciements

Au nom d'Allah

Avant tout, Je ne peut oublier de remercier mes parents pour leurs soutiens, leurs aides et leurs patiences qui m'ont été, tout au long de ma vie et de mes études, un réconfort et un encouragement surtout dans les moments opportuns. Pour cela, leur amour ne s'embarasse ni ne s'acquitte de remerciements.

Je tiens à exprimer toutes mes reconnaissances à mon Encadreur, **Dr HITTA Amara**, pour avoir dirigé ce travail avec abnégation et disponibilité. Ces conseils et son soutien m'ont été d'un grand apport pour l'accomplissement de ce mémoire. Sans cela, cette recherche n'aura pas eu lieu.

Je remercie, également, tous les membres du Jury pour avoir accepté d'en faire partie. Leurs critiques et leurs remarques me seront, dans l'avenir, un jalon dans ma carrière professionnelle.

Sans oublier aussi tous les membres de ma famille en particulier : mes sœurs, mes frères et tous mes proches.

Enfin, j'adresse mes remerciements à tous mes collègues et tous les étudiants de ma promotion qui m'ont encouragé pour la réalisation de ce travail.

Table des Matières

1	Introduction	7
2	Equations de Transports	9
2.1	Motivations Physiques : Fluide en mouvement	9
2.2	Définitions et exemples	11
2.2.1	L'équation de transport à vitesse variable	15
2.2.2	Un premier exemple de condition aux frontière	16
2.2.3	L'équation de transport conservative	18
2.2.4	Solutions auto-semblables	21
3	Résolutions et études des cas	23
3.1	Méthodes caractéristiques : Cas général (\mathbb{R}^n)	23
3.2	Equation de transpot, solutions faibles	27
3.3	Advection	30
3.4	Lois de conservations scalaires et singularité	34

3.4.1	Lois de conservation linéaires	35
3.4.2	Lois de conservation non-linéaires	38
4	Ondes de chocs et ondes de Raréfaction	41
4.1	Existence des ondes de choc : Relation de Rankine-Hugniot	41
4.2	Existence des ondes de Raréfaction	43
4.3	Entropies	44
5	Flux non convexe : Problème de Riemann	49
5.1	Application : Flux non convexe	53

Chapitre 1

Introduction

A partir de la physique on obtient des modèles simples qui régissent l'évolution de divers phénomènes tels que la convection, la diffusion de la chaleur, la propagation des ondes électromagnétiques, du trafic routier et enfin d'un gaz incompressible. Dans tous les cas, ces modèles s'écrivent sous la forme d'équations aux dérivées partielles.

L'équation de transport est obtenue comme une conséquence du principe de conservation de la masse au sein d'un domaine fluide que l'on suit dans son mouvement. C'est le modèle le plus simple provenant de la physique. Cette terminologie d'équations de transport inclut une grande variété d'équations, selon que la vitesse est constante ou pas, selon la dimension de l'espace et selon que la solution cherchée est scalaire ou vectorielle.

Le plan de ce mémoire est le suivant:

- ① Nous présenterons, dans ce Chapitre, les propriétés essentielles des équations de transport qui seront d'une grande utilité à la résolution celles-ci.
- ② Nous démontrerons l'existence des solutions au problème de Cauchy ainsi que l'étude certains exemples de l'équation de transport.

- ③ On démontre l'existence des ondes de choc et de raréfaction.
- ④ On étudie un problème de Riemann concernant le flux non-convexe.

Chapitre 2

Equations de Transports

Nous présenterons, dans ce Chapitre, les propriétés essentielles des équations de transport qui seront d'une grande utilité à la résolution celles-ci.

2.1 Motivations Physiques : Fluide en mouvement

Considérons un fluide en mouvement le long de l'axe réel. Soient alors $u = u(x, t)$ et $\rho = \rho(x, t)$ les profils de vitesse et de densité du fluide au point x et à l'instant t , que l'on suppose réguliers par rapport à x et t . Soit $\Omega(t) =]a(t), b(t)[$ un domaine fluide de \mathbb{R} ($a(t)$ et $b(t)$ sont supposées aussi régulières) que l'on suit dans son mouvement.

On suppose que :

Le principe de la conservation de la masse s'applique c'est à dire qu'il n'y a pas création de la masse.

Dans ce cas, la quantité

$$M(t) := \int_{a(t)}^{b(t)} \rho(x, t) dx$$

reste constante au cours du temps, ce qui entraîne que sa dérivée s'annule identiquement. En utilisant alors la formule de dérivation des fonctions composées, cette dérivation s'écrit pour tout temps

$$M'(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t}(x, t) dx + b'(t)\rho(b(t), t) - a'(t)\rho(a(t), t).$$

Comme le domaine est en mouvement avec le fluide, alors les quantités $a'(t)$ et $b'(t)$ sont liées à la vitesse par

$$a'(t) = u(a(t)) \quad \text{et} \quad b'(t) = u(b(t)).$$

On en déduit de ce qui précède que

$$M'(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial}{\partial t}(\rho(x, t)u(x, t)) \right\} = 0.$$

Puisque ce raisonnement est valable pour tout intervalle de \mathbb{R} , on en déduit que l'intégrande est identiquement nul pour chaque x et t , de sorte que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) = 0.$$

Dans le cas d'une vitesse constante $u(x) = c$, on obtient l'équation de transport (ou équation de convection) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + c \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

En dimension d'espace supérieure, on obtient une relation analogue, à savoir

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u) = 0.$$

Ici encore si l'on suppose que le fluide a une vitesse constante $u(x) = c \in \mathbb{R}^n$, l'équation précédente devient simplement

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \langle c, \nabla u \rangle = 0. \quad \blacksquare$$

2.2 Définitions et exemples

L'équation aux dérivées partielles la plus simple est l'équation de transport dans le demi-plan, il s'agit d'une équation linéaire d'évolution du premier ordre.

On cherche une fonction u qui vérifie :

Définition 2.2.1

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 & x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+ \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.1)$$

où c est la vitesse et où u_0 est une fonction donnée dans $C^1(\mathbb{R})$.

Un tel problème est appelé **problème de Cauchy**.

Les solutions sont des fonctions définies dans $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ dont la frontière est $\partial D = \mathbb{R} \times 0$.

Pour ce problème, les solutions sont très facilement calculables en utilisant la notion de courbes caractéristiques ou la Transformée de Fourier :

- ① **Courbes caractéristiques** : On définit les courbes caractéristiques comme étant les courbes du plan cartésien \mathbb{R}^2 formées par les points

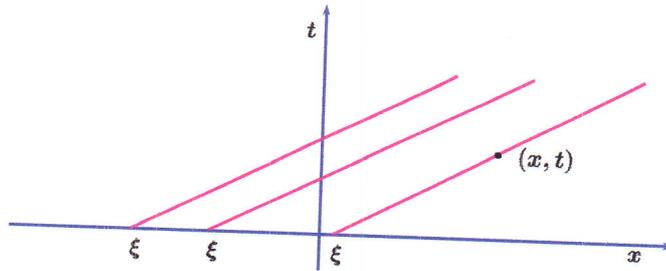
$(X(t); t)$ où la fonction $X(t)$ est solution de l'équation différentielle ordinaire

$$X'(t) := \frac{dX}{dt} = c$$

On peut définir les courbes caractéristiques comme étant une famille paramétrique de courbes (C_ξ) définies dans le plan cartésien \mathbb{R}^2 par

$$C_\xi = \{(X(t), t), t \in \mathbb{R} : X'(t) = c, X(0) = \xi\}$$

où ξ est donné initialement dans \mathbb{R} . Ainsi, les courbes caractéristiques prennent le formes suivantes :



Courbe caractéristique C_ξ dans le plan (x, t)

② **Transformée de Fourier** : Supposons que $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, pour $\xi \in \mathbb{R}^n$ on définit :

$$\mathcal{F}u(\xi) = \hat{u}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x,\xi)} u(x) dx.$$

et

$$\overline{\mathcal{F}u}(\xi) = \hat{u}(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,\xi)} u(x) dx.$$

Un des avantages de la transformée de Fourier est de changer la dérivation en multiplication et de convertir le produit de convolution en multiplication.

Théorème 2.2.1 Si u_0 est dérivable sur \mathbb{R} , alors il existe une unique solution du problème de Cauchy en (x, t) , elle est donnée par:

$$u(x, t) = u_0(x - ct) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall t > 0.$$

Preuve 2.2.2 Pour des raisons techniques, On donne les deux versions de la preuve.

- ① **Courbes caractéristiques** : Le long des caractéristiques, la solution de l'équation (2.1) vérifie :

$$\frac{d}{dt}(u(X(t), t)) = \frac{dX}{dt} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0,$$

ce qui implique que les solutions sont constantes le long des caractéristiques. Soient (x^*, t^*) un point du plan avec $t^* > 0$ et $X^*(t)$ la caractéristique passant par ce point, alors, elle vérifie :

$$\begin{cases} \frac{dX^*}{dt} = c \\ X^*(t^*) = x^*. \end{cases}$$

La solution est alors :

$$X^*(t) = ct + x^* - ct^*$$

Pour $t = 0$, ceci donne :

$$X^*(0) = x^* - ct^*$$

et on a :

$$u(x^*, t^*) = u(X^*(0), 0) = u(x^* - ct^*, 0) = u_0(x^* - ct^*).$$

- ② **Transformée de Fourier** : Supposons pour cela que u ainsi que ses dérivées admettent à tout instant t des transformées de Fourier en espace, on a alors

$$\mathcal{F}_x \left(\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \mathcal{F}_x(0) = 0.$$

En utilisant le fait que

$$\mathcal{F}_x \left(\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, t) \right) = \frac{\partial}{\partial t} \hat{u}(\cdot, t) \quad \mathcal{F}_x \left(\frac{\partial u}{\partial x}(\cdot, t) \right) = i\xi \hat{u}(\cdot, t),$$

on voit que l'équation de transport est transformée en l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$\frac{d}{dt}\widehat{u}(\xi, t) + ic\xi\widehat{u}(\xi, t) = 0$$

dans laquelle la dérivée en temps est une dérivée totale, le réel ξ figure en tant que paramètre. La condition initiale correspondante est

$$\mathcal{F}_x u(., 0) = \widehat{u}(\xi, 0) = \widehat{u}_0(\xi)$$

pour chaque $\xi \in \mathbb{R}$. La résolution explicite de cette équation différentielle nous donne immédiatement pour tout couple $(\xi, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$\widehat{u}(\xi, t) = e^{-ic\xi t}\widehat{u}_0(\xi)$$

En appliquant la formule d'inversion, on obtient

$$\begin{aligned} u(x, t) = \mathcal{F}_x^{-1}\widehat{u}(\xi, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} \widehat{u}(\xi, t) d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i(x-ict)\xi} \widehat{u}_0(\xi) d\xi \\ &= u_0(x - ct) \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}. \end{aligned}$$

C'est le résultat obtenu avec la méthode des caractéristique. De plus, dans les deux cas , nous sommes passés d'une équation aux dérivées partielles à une équation différentielle ordinaire.

Interprétation du résultat : En effet, le graphe de la solution en (x, t) ne dépend que de la valeur initiale u_0 de Cauchy en $\xi = x - ct$. En fait la graphe de la solution se déduit du graphe de u_0 par une translation horizontale de vecteur $\vec{v} = \text{cst} \cdot \vec{e}$ (\vec{e} étant le vecteur de base de l'axe des abscisses). Cela entraîne, en particulier, que :

La solution gardera à un instant t donné les mêmes propriétés (régularité, décroissance à l'infini) que celle de la donnée initiale de Cauchy.

2.2.1 L'équation de transport à vitesse variable

On considère maintenant le cas de l'équation de transport où la vitesse varie en temps et en espace. On cherche des solutions u définies dans $]a; b[\times \mathbb{R}_+^*$ vérifiant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + c(x, t) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = 0 & \forall x \in]a, b[, \forall t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & \forall x \in]a, b[. \end{cases} \quad (2.2)$$

On suppose vérifier la condition $c(a, t) = c(b, t) = 0$.

La technique qu'on a utilisé pour montrer l'existence et l'unicité pour l'équation de transport à vitesse constante peut se généraliser au cas où la vitesse n'est pas constante. On cherche alors les courbes caractéristiques qui sont les solutions de l'équation différentielle ordinaire :

$$\frac{dX}{dt} = c(X(t), t).$$

Le long de ces courbes on a :

$$\frac{d}{dt}(u(X(t), t)) = \frac{\partial u}{\partial t}(X(t), t) + \frac{\partial u}{\partial x}(X(t), t) \frac{dX}{dt} = \left(\frac{\partial u}{\partial t} + c(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) (X(t), t) = 0.$$

Ceci veut dire que les solutions sont constantes le long des caractéristiques, il suffit alors de prendre en compte la condition initiale. La solution au point (x_0, t_0) est égale à la valeur de $u_0(x^*)$ où x^* est la valeur pour $t = 0$ de la caractéristique qui passe par le point (x_0, t_0) , en d'autres termes :

$$u(x_0, t_0) = u_0(x^*); x^* = X(0)$$

et $X(t)$ est solution de :

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = c(x, t) \\ X(t_0) = x_0. \end{cases}$$

☞ **Exemple 2.2.1** Cherchons les solutions de l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + x(1-x)\frac{\partial u}{\partial x} = 0 & \text{sur }]0, 1[\times]0, +\infty[\\ u(x_0) = u_0(x) & \text{sur }]0, 1[\end{cases} \quad (2.3)$$

au point (x_0, t_0) , la caractéristique qui passe par ce point est solution de l'équation :

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = X(1-X) \\ X(t_0) = x_0. \end{cases}$$

On peut résoudre cette équation différentielle par séparation de variables :

$$\frac{dX}{X(1-X)} = dt.$$

Par intégration, on obtient :

$$\int_{x_0}^X \frac{ds}{s(1-s)} = \int_{t_0}^t dw.$$

L'expression de la caractéristique est :

$$X(t) = \frac{x_0}{x_0 + (1-x_0)e^{t_0-t}}.$$

La solution de(2.3) est alors :

$$u(x_0, t_0) = u_0 \left(\frac{x_0}{x_0 + (1-x_0)e^{t_0-t}} \right). \quad \blacksquare$$

2.2.2 Un premier exemple de condition aux frontière

On va montrer un premier exemple d'une équation aux dérivées partielles avec condition au frontière. Pour simplifier on regardera uniquement le cas de

l'équation de transport à vitesse constante pour x positif :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 & \forall t > 0, x > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & \forall x \geq 0 \\ u(0, t) = g(t) & \forall t > 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

Dans ce cas, on peut très facilement construire la solution, il suffit de généraliser la démonstration du résultat pour l'équation de transport à vitesse constante dans \mathbb{R} .

Théorème 2.2.2 *Le problème (2.4) a pour solution :*

$$\begin{cases} u_0(x - ct) & \text{si } x - ct \geq 0 \\ g\left(t - \frac{x}{c}\right) & \text{si } x - ct < 0. \end{cases}$$

Pour se convaincre de ce résultat, il suffit de regarder la figure 1.1, et de noter que la ligne pointillée représente la caractéristique qui passe par le point $(0; 0)$, c'est-à-dire, la demi-droite $x = ct; t > 0$. La partie du domaine à droite de cette caractéristique vérifie $x - ct > 0$ et la partie à gauche $x - ct < 0$. Pour cette dernière partie les caractéristiques touchent l'axe $x = 0$ avant de toucher l'axe $t = 0$. On ne traitera pas le cas général d'un domaine borné où la vitesse ne s'annule pas sur les bords, on peut néanmoins s'apercevoir que le problème peut advenir si une courbe caractéristique touche un point (a, t) où (b, t) pour

$t > 0$. Il faut alors ajouter une condition de frontière à l'équation et l'utiliser pour remonter l'information. Ceci se comprend mieux sur la figure :

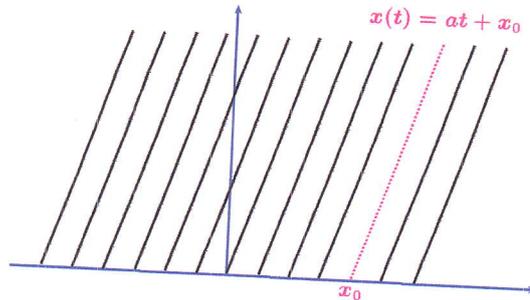


Figure 1.1. Caractéristiques dans le plan (x, t)

2.2.3 L'équation de transport conservative

On étudie maintenant une équation proche des équations qu'on vient d'étudier. Il s'agit de l'équation de transport conservative :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(c(x, t)u)(x, t) = 0 & \text{sur } x \in]a, b[, t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & \forall x \in]a, b[\end{cases} \quad (2.5)$$

$c(x; t)$ est une vitesse donnée et vérifie $c(a, t) = c(b, t) = 0$ et u_0 est une fonction donnée. On va voir pourquoi on appelle cette équation conservative.

Proposition 2.2.3 *L'intégrale en x de la solution de l'équation (2.5) se conserve dans le temps, c'est-à-dire :*

$$\int_a^b u(x, t) dx = \int_a^b u_0(x) dx \quad \forall t > 0.$$

Preuve 2.2.3 Comme u est solution de (2.5) on a :

$$\int_a^b \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(c(x, t)u) \right) (x, t) dx = 0$$

et

$$\int_a^b \frac{\partial}{\partial x} (c(x, t)u)(x, t) dx = [c(x, t)u(x, t)]_a^b = 0$$

car $c(a, t) = c(b, t) = 0$. D'où le résultat. ■

On remarquera que cette équation possède un terme supplémentaire, par rapport à l'équation de transport $\left(\frac{\partial c}{\partial x} u\right)$ et de ce fait on ne peut plus dire que la solution est constante le long des caractéristiques.

Par ailleurs, pour l'équation de transport à vitesse non constante, malgré le fait que la solution soit ponctuellement constante le long des caractéristiques l'intégrale ne se conserve pas.

En effet, de :

$$\frac{d}{dt} \int_a^b u(x, t) dx + \int_a^b c(x, t) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) dx = 0$$

On conclut que :

$$\frac{d}{dt} \int_a^b u(x, t) dx = \int_a^b \frac{\partial c}{\partial x}(x, t) u(x, t) dx$$

où on a utilisé le fait que $c(a, t) = c(b, t) = 0$. Si on écrit l'équation conservative le long d'une caractéristique, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t} u(X(t), t) + \frac{\partial}{\partial x} (c(X(t), t)) u(X(t), t) = 0.$$

On note maintenant que

$$\frac{\partial}{\partial t} u(X(t), t) + \frac{dX}{dt}(t) \frac{\partial u}{\partial x}(X(t), t) = \frac{d}{dt} u(X(t), t)$$

ce qui entraîne :

$$\frac{d}{dt} u(X(t), t) + \frac{\partial c}{\partial x}(X(t), t) u(X(t), t) = 0.$$

Si on définit la fonction :

$$w(t) = u(X(t), t) e^{\int_0^t \frac{\partial c}{\partial x}(X(\tau), \tau) d\tau}$$

elle vérifie :

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= \left(\frac{du}{dt}(X(t), t) + \left(u \frac{\partial c}{\partial x} \right) (X(t), t) \right) e^{\int_0^t \frac{\partial c}{\partial x}(X(\tau), \tau) d\tau} \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial t}(X(t), t) + \frac{dX}{dt} \frac{\partial u}{\partial x}(X(t), t) + \left(u \frac{\partial c}{\partial x} \right) (X(t), t) \right) e^{\int_0^t \frac{\partial c}{\partial x}(X(\tau), \tau) d\tau} \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial t}(X(t), t) + \frac{\partial}{\partial x}(c(X(t), t)u)(X(t), t) \right) e^{\int_0^t \frac{\partial c}{\partial x}(X(\tau), \tau) d\tau} \\ &= 0. \end{aligned}$$

On peut donc conclure que :

$$u(X(t), t) e^{\int_0^t \frac{\partial c}{\partial x}(X(\tau), \tau) d\tau} = u_0(X(0)).$$

On a ainsi montré :

Proposition 2.2.4 *Le long d'une caractéristique la solution de l'équation (2.5) vérifie :*

$$u(X(t), t) = u_0(X(0)) e^{-\int_0^t \frac{\partial c}{\partial x}(X(\tau), \tau) d\tau}.$$

☞ **Exemple 2.2.2** On va résoudre l'équation :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(xtu) = 0 & \forall x > 0, \forall t > 0 \\ u(x, 0) = x & \forall x > 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

Cherchons tout d'abord la caractéristique $X(\theta)$ passant par le point (x, t) . Elle est solution de

$$X'(\theta) = X(\theta)\theta,$$

il s'agit d'une équation à variables séparées. Sa solution est :

$$X(\theta) = b e^{\frac{\theta^2}{2}}.$$

On détermine la constante b à partir de l'égalité :

$$X(t) = x$$

ce qui donne :

$$b = xe^{-\frac{t^2}{2}}$$

et

$$X(\theta) = xe^{\frac{\theta^2 - t^2}{2}}.$$

La vitesse et sa dérivée partielle en x sont données par :

$$c(x, t) = xt \quad \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = t$$

et la solution de (2.6) est donnée par :

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u_0(X(0))e^{-\int_0^t \frac{\partial c}{\partial x}(X(\tau), \tau) d\tau} \\ &= u_0(xe^{-\frac{t^2}{2}})e^{-\int_0^t \tau d\tau} \\ &= xe^{-\frac{t^2}{2}}e^{-\frac{t^2}{2}} \\ &= xe^{-t^2}. \end{aligned}$$

2.2.4 Solutions auto-semblables

Pour terminer ce chapitre on va présenter la notion de solution auto-semblable et l'appliquer à l'équation de transport à vitesse constante. On appelle solution **auto-semblable** une fonction qui est invariante par un changement d'échelle en temps. Ce type de fonctions est très important en physique car elles modélisent des phénomènes qui sont indépendants de l'échelle de mesure. La méthode de recherche des solutions auto-semblable consiste à imposer une certaine forme à la solution recherchée, et de ce fait à transformer l'équation aux dérivées partielles en une équation différentielle ordinaire. Voyons ceci sur un exemple.

☞ **Exemple 2.2.3** On cherche des solutions de l'équation (2.1) qui vérifient :

$$u(x, t) = t^\alpha f\left(\frac{x}{t^\beta}\right) \quad (2.7)$$

où f est une fonction quelconque, α et β sont des constantes à choisir pour que les solutions existent. Calculons les dérivées partielles d'ordre 1 de u :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \alpha t^{\alpha-1} f'\left(\frac{x}{t^\beta}\right) - \beta t^{\alpha-\beta-1} x f'\left(\frac{x}{t^\beta}\right)$$

et :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = t^{\alpha-\beta} f'\left(\frac{x}{t^\beta}\right)$$

L'équation (2.1) devient alors :

$$\alpha t^{\alpha-1} f'\left(\frac{x}{t^\beta}\right) + (ct^{\alpha-\beta} - \beta t^{\alpha-\beta-1} x) f'\left(\frac{x}{t^\beta}\right) = 0$$

on choisit $\beta = 1$ et $y = x/t$. On se ramène ainsi à l'équation différentielle ordinaire :

$$\alpha f(y) + (c - y) f'(y) = 0$$

qui peut s'écrire :

$$\frac{f'(y)}{f(y)} = \frac{\alpha}{y - c} \Rightarrow \ln |f| = \alpha \ln |y - c| + \lambda_0$$

où λ_0 est la constante d'intégration. On conclut qu'une solution auto-semblable de l'équation de transport à vitesse constante est

$$u(x, t) = \lambda t^\alpha \left| \frac{x}{t} - c \right|^\alpha = \alpha |x - ct|^\alpha$$

où λ est une constante à déterminer à partir des conditions initiales. On remarque que la solution retrouvée dépend uniquement de $x - ct$.

Chapitre 3

Résolutions et études des cas

3.1 Méthodes caractéristiques : Cas général (\mathbb{R}^n)

En mathématiques, la méthode des caractéristiques est une technique permettant de résoudre les équations aux dérivées partielles. Particulièrement adaptée aux problèmes de transport, cette méthode est utilisée dans de nombreux domaines tels que la mécanique des fluides ou le transport de particules.

Dans certains cas particuliers, la méthode des caractéristiques peut aider à la résolution purement analytique de l'EDP. Dans les cas plus complexes (rencontrés par exemple en modélisation des systèmes physiques), la méthode des caractéristiques peut être utilisée comme une méthode de résolution numérique du problème.

Pour une équation aux dérivées partielles (EDP) du premier ordre, la méthode des caractéristiques cherche des courbes (appelées "**lignes caractéristiques**", ou plus simplement "**caractéristiques**") le long desquelles l'EDP se réduit à

une simple équation différentielle ordinaire (EDO). La résolution de l'EDO le long d'une caractéristique permet de retrouver la solution du problème original.

Le cas simple qui se présente est le cas où le seconde terme est nul. Autrement dit, on cherche $u \equiv u(x, t)$ solution du problème de Cauchy pour l'équation de transport :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u + c(x, t) \cdot \nabla_x u = 0 & \forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n \\ u(0, x) = u_0(x) \in C^1(\mathbb{R}^n). \end{cases} \quad (3.1)$$

On peut construire des solutions explicites de cette équation grâce à la méthode des caractéristiques.

Pour cela, on ajoute les hypothèses de Cauchy-Lipschitz (C.L) suivantes :

Il existent deux constantes $\exists M_1(T, R)$ et $M_2(T)$ telles que pour tout $|t| \leq T$ on ait :

$$\begin{cases} |c(t, x) - c(t, y)| \leq M_1(T, R)|x - y| & \forall x, y \in B_R \\ |c(t, x)| \leq M_2(T)(1 + |x|) & \forall x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (3.2)$$

Avec ces hypothèses on peut définir les caractéristiques :

Définition 3.1.1 Dans ce cas, on appelle **caractéristiques de transport (3.1)**, Les trajectoires du système différentiel :

$$\begin{cases} X'(t, y) = c(t, X(t; y)) \\ X(t = 0; y) = y \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (3.3)$$

On rappelle que ces trajectoires existent pour tout temps et que l'application, appelée **flot**, suivante :

$$y \in \mathbb{R}^n \rightarrow X(t, y) \in \mathbb{R}^n$$

est un difféomorphisme de classe \mathcal{C}^1 pour $c \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{n+1})$.

Théorème 3.1.1 *Sous les hypothèses de Cauchy-Lipschitz (3.2) et en prenant $c \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, il existe une unique solution $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ de l'équation de transport (3.1), donnée par la méthode des caractéristiques :*

$$\forall t, s \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n, \quad u(t, X(t; y)) = u(s, X(s; y)) = u^0(y).$$

On dit que la solution de l'équation de transport est "constante le long des caractéristiques".

Preuve 3.1.2 La règle de dérivation composée nous donne :

$$\frac{d}{dt}u(t, X(t, y)) = \frac{\partial}{\partial t}u + \nabla_x u \cdot X'$$

or $X'(t, y) = c(t, X(t, y))$, d'où

$$\frac{d}{dt}u(t, X(t, y)) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial t}u + c(t, x) \cdot \nabla_x u = 0$$

et la formule énoncée est donc démontrée ainsi que l'unicité. Pour conclure, il suffit de rappeler que $y \rightarrow X(t, y)$ est un difféomorphisme de classe \mathcal{C}^1 et la formule des caractéristiques définit donc bien une solution $u(t, x)$ en tout point.

Proposition 3.1.2 (Propriétés d'hyperbolicité). La solution de l'équation de transport (3.1) vérifie les propriétés suivantes :

① $u(t, x)$ ne dépend que de $u^0(y)$ avec

$$|y| \leq |x| + \|c\|_{L^\infty} |t|.$$

En d'autres termes, il y a vitesse finie de propagation.

② Il y a propagation des singularités.

③ $\min_{y \in \mathbb{R}^n} u^0(y) \leq |u(t, x)| \leq \max_{y \in \mathbb{R}^n} u^0(y)$.

④ pour $c = \text{cst}$, l'application $S(t)[u^0] = u(t, x)$ définit un groupe sur $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$.

Ces propriétés sont bien sûr opposées aux propriétés des solutions de l'équation de la chaleur qui dépendent instantanément de la donnée initiale, avec un effet régularisant.

Remarque : Les propriétés ① - ② sont typiques du caractère hyperbolique des équations de transport. Elle s'opposent aux propriétés de vitesse infinie de propagation et aux effets régularisants des équations paraboliques telle l'équation de la chaleur,

$$\frac{\partial}{\partial t} u - \frac{1}{2} \Delta u = 0.$$

Les propriétés de l'équation de la chaleur se lisent sur la solution qui est donnée par la convolution

$$u_c(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}^d} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{2t}} u^0(y) dy$$

Preuve 3.1.3 Ces propriétés se déduisent immédiatement de la formule du Théorème 3.1.1. Notons simplement que ④ signifie

$$S(0) = I_d, \quad S(t+s) = S(t) \circ S(s) \iff X(t+s, y) = X(t, X(s, y)). \quad \blacksquare$$

3.2 Equation de transport, solutions faibles

Définition 3.2.1 On dit que u est **Solution faible** de (2.1) si $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et vérifie pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ l'identité :

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} [u(x, t)\varphi_t + cu(x, t)\varphi(x, t)] dt dx + \int_{\mathbb{R}} u_0(x)\varphi(x, 0) dx = 0. \quad (3.4)$$

Notons que dans la définition ci-dessus, on note $\mathcal{C}_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ l'ensemble des restrictions à $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ des fonctions $\mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^2)$. Il découle de ce choix qu'on peut avoir $\varphi(x, 0) \neq 0$.

Cherchons maintenant les relations entre les deux notions de solutions. A savoir, **la solution classique** et **la solution faible**.

Proposition 3.2.1 Si u est solution classique de (2.1) alors u est solution faible. Réciproquement, si $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times]0, +\infty[) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R} \times [0, +\infty[)$ est solution classique de (1.a) alors u est solution forte de (2.1).

La démonstration de cette proposition est effectuée dans le cadre plus général des équations hyperboliques non linéaires.

Notons que si on prend $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R} \times]0, +\infty[, \mathbb{R})$ au lieu de $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R} \times]0, +\infty[, \mathbb{R})$ dans (3.4), on obtient :

$$u_t + cu_x = 0$$

mais on ne récupère pas la condition initiale. Il est donc essentiel de prendre des fonctions dans $\mathcal{C}_c^1(\mathbb{R} \times]0, +\infty[, \mathbb{R})$.

Théorème 3.2.2 (Existence et unicité de la solution faible). Si $u \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R})$, il existe une unique fonction u solution faible de (2.1).

Preuve 3.2.2 On va montrer que $u(x, t) = u_0(x - ct)$ est solution faible. Comme $u \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R})$, on a $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R} \times]0, +\infty[, \mathbb{R})$, on veut montrer que :

$$\int \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+} u(x, t) \varphi_t(x, t) dx dt + \int \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+} cu(x, t) \varphi_t(x, t) dx dt + \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \varphi(x, 0) dx = 0.$$

Posons

$$A = \int \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+} u(x, t) \varphi_t(x, t) dx dt + \int \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+} cu(x, t) \varphi_t(x, t) dx dt$$

Si $u(x, t) = u_0(x - ct)$, on a :

$$A = \int \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+} u_0(x - ct) \varphi_t(x, t) dx dt + \int \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+} cu_0(x - ct) \varphi_t(x, t) dx dt$$

En appliquant le changement de variable $y = x - ct$ et en utilisant le théorème de Fubini, on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}} u_0(y) \int_{\mathbb{R}_+} [\varphi_t(y + ct, t) + c\varphi_x(y + ct, t)] dt dy.$$

Posons alors

$$\psi_y = \varphi(y + ct, t).$$

On a donc

$$A = \int_{\mathbb{R}} (u_0(y) \int_0^{+\infty} \psi'_y(t) dt) dy$$

et comme ψ est à support compact sur $[0, +\infty[$, alors

$$A = - \int_{\mathbb{R}} u_0(y) \psi_y(0) dy.$$

Donc finalement :

$$A = - \int_{\mathbb{R}} u_0(y) \psi(y, 0) dy.$$

On a ainsi démontré que la fonction définie par $u(x, t) = u_0(x - ct)$ est solution faible de l'équation(2.1), d'où l'existence d'une solution faible. Montrons

maintenant que celle-ci est unique. Soient u et v deux solutions faibles de (2.1). On pose $w = u - v$. Par définition, w satisfait :

$$\int \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+} w(x, t)(\varphi_t(x, t) + c\varphi_x(x, t)) = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R}) \quad (3.5)$$

Par le **lemme 3.2.2** donné ci-dessous, pour toute fonction $f \in C_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ il existe $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, telle que $\varphi_t + c\varphi_x = f$, et par (3.5) on a :

$$\int \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+} w(x, t)f(x, t)dxdt = 0, \quad \forall f \in C_c(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_^+, \mathbb{R}).$$

Ceci entraîne que $w = 0$ p.p. ■

Lemme 3.2.3 Soit $f \in C_c(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_^+, \mathbb{R})$ alors il existe

$$\varphi \in C_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R}) \quad \text{telle que} \quad \varphi_t + c\varphi_x = f.$$

Preuve 3.2.3 Soit $f \in C_c(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_^+, \mathbb{R})$, et $T > 0$ tel que $f(x, t) = 0$ si $t \geq T$. On considère le problème :

$$(*) \quad \begin{cases} \varphi_t + c\varphi_x = f \\ \varphi(x, T) = 0. \end{cases}$$

On vérifie facilement que le problème (*) admet une solution classique

$$\varphi(x, t) = - \int_t^T f(x - c(s - t), s)ds.$$

En effet, avec ce choix de φ , on a

$$\varphi \in C_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \varphi_t + c\varphi_x = f$$

De plus, comme f est à support compact, φ est à support compact. ■

Remarque (Sur les propriétés de la solution). Remarquons que la solution faible de (2.1) possède les propriétés suivantes :

- ① $u_0 \geq 0$ p.p alors $u \geq 0$ p.p.
 ② $\|u(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R})} = \|u_0(x)\|_{L^p(\mathbb{R})}, \quad \forall p \in]1, +\infty[.$

3.3 Advection

Considérons la variante conservative de l'équation de transport suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}(cu) = 0, \\ u(t=0, x) = u^0(x) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n). \end{cases} \quad (3.6)$$

Cette variante a une structure assez intéressante à étudier.

Théorème 3.3.1 (Solution forte). Sous les hypothèses de Cauchy-Lipschitz et en prenant $c \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ et $\operatorname{div} c \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, et pour tout $u^0 \in \mathcal{C}^1$, il existe une unique solution $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ donnée par :

$$u(t, X(t, y))J(t, y) = u^0(y).$$

avec

$$J(t, y) = e^{\int_0^t (\operatorname{div} c)(s, X(s, y)) ds} = \det \left(\frac{\partial X(t; y)}{\partial y} \right).$$

Remarque : En fait, la quantité $J(t, y)$ n'est autre que **le Jacobien du flot des caractéristiques (3.3)**. On a alors

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial X}{\partial y}(t, y) = D_x c(t, X(t; y)) \cdot \frac{\partial X}{\partial y}(t, y),$$

et

$$\begin{cases} J(t; y) = \operatorname{div} c(t, X(t; y)) J(t, y) \\ J(0, y) = 1. \end{cases}$$

On en déduit donc que

$$J(t, y) = \det \left(\frac{\partial X}{\partial y} \right). \quad (3.7)$$

Preuve 3.3.1 On utilise la méthode des caractéristiques pour obtenir :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \cdot \nabla_x u + (\operatorname{div} c)u = 0$$

Ce qui équivaut à :

$$\frac{du}{dt}(t, X(t, y)) + (\operatorname{div} c)(t, X(t, y))u(t, X(t, y)) = 0.$$

Donc

$$\frac{d}{dt}[u(t, X(t, y))J(t, y)] = 0. \quad \blacksquare$$

L'intérêt principal de cette forme de l'équation de transport apparaît surtout dans une propriété que nous énonçons maintenant :

Proposition 3.3.2 (Solutions faibles, conservation). Sous les hypothèses du théorème précédent sur c , on suppose que $u^0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ alors l'équation d'advection admet une unique solution au sens des distributions donnée par la formule du théorème précédent. De plus

- ① $u(t, x) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, L^1(\mathbb{R}))$ et $|u| \in C(\mathbb{R}; L^1(\mathbb{R}))$
- ② $\int_{\mathbb{R}^n} u(t, x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} u^0(x) dx$ et $\int_{\mathbb{R}^n} |u(t, x)| dx = \int_{\mathbb{R}^n} |u^0(x)| dx$
- ③ $u^0 \geq 0 \Rightarrow u(t, x) \geq 0$
- ④ on a aussi

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} |u| + \operatorname{div}(c|u|) = 0 & \text{dans } D'(\mathbb{R}^2) \\ |u(t=0, x)| = |u^0(x)|. \end{cases}$$

Remarque : En d'autres termes, on a le droit d'intégrer une équation conservative et d'utiliser la règle :

$$\text{sign}(u) \frac{\partial}{\partial t} u = \frac{\partial}{\partial t} |u|, \quad \text{et} \quad \text{sign}(u) c \cdot \nabla_x u = c \cdot \nabla_x |u|.$$

Preuve 3.3.2 On commence par montrer ② . Pour cela on utilise la forme explicite de la solution, voir le Théorème 3.3.1, pour écrire

$$|u(t, X(t, y))| J(t, y) = |u^0(y)|.$$

On calcule alors (voir l'égalité (3.7))

$$\begin{aligned} \int |u(t, X(t, y))| J(t, y) dy &= \int |u^0(y)| dy \\ &= \int |u(t, X)| \det \left(\frac{\partial X}{\partial y} \right) dy \\ &= \int |u(t, X)| dX \end{aligned}$$

Ce qui prouve que $u(t) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et aussi la seconde égalité dans ② . Puisque l'intégrabilité est démontrée, on déduit la première égalité de ② par le même argument sans les valeurs absolues. La propriété de continuité ① peut se démontrer par densité. Soit $u_n^0 \in \mathcal{C}_{comp}^1 \rightarrow u^0$ dans $L^1(\mathbb{R}^n)$. La suite $u_n(t, x)$ des solutions correspondantes sont \mathcal{C}^1 et à support borné en x pour des temps bornés (grâce à la solution explicite). Elle appartient donc à $\mathcal{C}(\mathbb{R}, L^1(\mathbb{R}))$. Par ailleurs, en utilisant ② pour $u_n - u$, on déduit

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u_n - u|(t, x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} |u_n^0 - u^0|(x) dx \rightarrow 0, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Ceci prouve la convergence de u_n vers u dans l'espace $\mathcal{C}(\mathbb{R}, L^1(\mathbb{R}))$. La propriété ③ se déduit directement de la forme de la solution dans le Théorème 3.3.1 car $J \geq 0$. Pour montrer la propriété ④ , on raisonne en deux temps, d'abord pour des données initiales régulières, puis pour les solutions faibles. D'abord,

pour les solutions $u(t, x) \in \mathcal{C}^1$, on considère des fonctions régulières $(\mathcal{C}^1)S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. En utilisant la règle de dérivation composée, on trouve

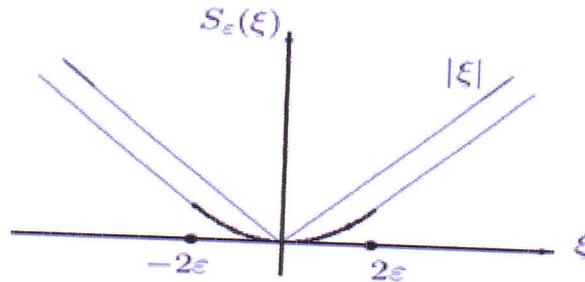
$$\frac{\partial}{\partial t} S(u) + \operatorname{div} (cS'(u)) + \operatorname{div}[uS'(u) - S(u)] = 0.$$

On voudrait utiliser cette règle pour $S(\cdot) = |\cdot|$, qui n'est pas \mathcal{C}^1 . Pour cela, on considère une famille de fonctions de classe \mathcal{C}^1 convexes, $S_\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} S_\varepsilon(u) = |u| - \varepsilon & \text{pour } |u| \geq 2\varepsilon \\ S_\varepsilon(0) = 0. \end{cases}$$

Remarquons alors qu' on a :

$$\begin{aligned} 0 &\leq |u| - S_\varepsilon(u) \leq \min(u, \varepsilon) \\ 0 &\leq S_\varepsilon(u) - uS'_\varepsilon(u) \leq \min(u, \varepsilon). \end{aligned}$$



La fonction S_ε qui régularise $|\varepsilon|$

Comme on a

$$\frac{\partial}{\partial t} S_\varepsilon(u) + \operatorname{div} (cS'_\varepsilon(u)) + \operatorname{div} c[uS'_\varepsilon(u) - S_\varepsilon(u)] = 0.$$

Lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, au sens des distributions on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t} |u| + \operatorname{div}(c|u|) + 0 = 0.$$

En effet, grâce aux propriétés énoncées ci-dessus de S_ε , on a $S_\varepsilon(u) \rightarrow |u|$ dans $\mathcal{C}([-T, T]; L^1(\mathbb{R}^n))$ et le troisième terme du membre de gauche tend bien vers zéro car $\operatorname{div} c$ est borné et $S_\varepsilon(u) - uS'_\varepsilon(u) \rightarrow 0$ dans $\mathcal{C}((-T, T); L^1(\mathbb{R}^n))$.

Ceci établit ④ pour les solutions régulières. Ensuite, pour les solutions $u(t, x) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}; L^1(\mathbb{R}^n))$, on considère une suite $u_n^0 \in \mathcal{C}_{comp}^1(\mathbb{R}^n)$ telle que $u_n^0 \rightarrow u^0$. On a vu que $u_n \rightarrow u$ est dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}; L^1(\mathbb{R}^n))$. On peut alors passer à la limite au sens des distributions dans ④ écrite pour u_n . ■

Remarque : On peut aussi remarquer qu'en prenant φ solution de l'équation :

$$\partial_t \varphi + c \cdot \nabla_x \varphi = 0,$$

on a

$$\varphi(t, X(t, y)) = \varphi^0(y).$$

On calcule donc

$$\begin{aligned} \int |u^0(y)| \varphi^0(y) dy &= \int |u(t, X(t, y))| J(t, y) \varphi(t, X(t, y)) dy \\ &= \int |u(t, X(t, y))| \varphi(t, X(t, y)) J(t, y) \left(\det \frac{\partial X}{\partial y} \right)^{-1} dx \\ &= \int |u(t, x)| \varphi(t, x) dx \end{aligned}$$

après le changement de variable $y \rightarrow x = X(t, y)$. On a donc montré que :

$$\int |u^0(y)| \varphi^0(y) dy = \int |u(t, x)| \varphi(t, x) dx$$

pour toute fonction φ vérifiant (3.1). Ceci est une forme faible de la définition des solutions dans \mathcal{D}' .

3.4 Lois de conservations scalaires et singularité

Le but de cette section est d'introduire quelques notions mathématiques concernant les systèmes de lois de conservation pour une variable d'espace. Ce sujet

est l'objet d'une littérature abondante dans le domaine des mathématiques appliquées.

Dans tout ce qui suit $t \geq 0$ désigne le temps et $x \in \mathbb{R}$ la variable d'espace. Soit $u = u(x, t)$ solution du problème

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0 & (1.a) \\ u(x, 0) = u^0(x) & (1.b) \end{cases}$$

où $f = f(u)$ est une fonction suffisamment régulière et $u^0(x)$ la donnée initiale. Cette équation exprime la conservation de la quantité u . Pour s'en convaincre il suffit d'intégrer (1.a) sur l'intervalle $[A, B]$

$$\frac{d}{dt} \int_A^B u(x, t) dx + [f(u(x, t))]_A^B = 0$$

Si le flux, $f = f(u)$, est une fonction linéaire (resp. non-linéaire) de la quantité u , on parle de loi de conservation linéaire (resp. non-linéaire).

3.4.1 Lois de conservation linéaires

Dans le cas linéaire, le flux est donné par

$$f(u) = au,$$

où a est une donnée qui est homogène à une vitesse.

Cette vitesse peut être fonction de l'espace et du temps. Dans le cas particulier où cette vitesse est constante, le problème (1) devient

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 & (2.a) \\ u(x, 0) = u^0(x) & (2.b) \end{cases}$$

La solution analytique de ce problème est obtenue en utilisant la méthode des caractéristiques.

On définit dans le plan (x, t) les courbes caractéristiques associées à (2.a) comme les solutions de l'équation différentielle ordinaire :

$$\frac{dx}{dt} = a \quad x(0) = x^0. \quad (3.8)$$

L'intégration de (3.8) est immédiate et nous conduit à $x(t) = x^0 + at$. Les courbes caractéristiques forment une famille de droites parallèles dans le plan (x, t) .

Dans ce cadre, $x(t)$ désigne la position d'une particule à l'instant t , initialement située en x^0 . Si u est solution de (2.a), la variation de u le long des courbes caractéristiques est fournie en calculant la dérivée de $u(x(t), t)$ par rapport au temps

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} u(x(t), t) &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial t} \\ &= \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x}. \end{aligned}$$

Sachant que u est solution de (2.a) nous en déduisons $\frac{d}{dt} u(x(t), t) = 0$, ainsi u est constante le long des caractéristiques et donc

$$u(x(t), t) = u(x(0), 0) = u^0(x^0),$$

d'où

$$u(x, t) = u^0(x - at) \quad (3.9)$$

puisque $x^0 = x - at$. Cette solution correspond au transport de la donnée initiale à la vitesse a et ce quelle que soit la régularité de u^0 . Dans le cas où u^0 présente des discontinuités (par exemple un créneau), celles-ci sont transportées à la vitesse a .

Si l'on considère le problème, plus général, pour lequel la vitesse dépend de l'espace, i.e., $f(u) = au$ avec $a = a(x)$ où $a(x)$ est une fonction régulière, alors u est solution de

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}[a(x)u] = 0, \quad u(x, 0) = u^0(x) \quad (3.10)$$

Supposons que $a(x)$ est une fonction Lipschitzienne, les caractéristiques sont solutions de

$$\frac{dx}{dt} = a(x(t)), \quad x(0) = x^0. \quad (3.11)$$

Le théorème de Cauchy-Lipschitz assure que pour x^0 donné, l'équation différentielle (3.11) admet une unique solution $x(x^0, t)$, permettant de définir la courbe caractéristique correspondante.

Notons que ces courbes ne sont pas nécessairement des droites. Sachant que u est solution de (3.10), sa variation le long de la courbe caractéristique définie par (3.11) est évaluée en calculant

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}u(x(t), t) &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial t} \\ &= -a'(x)u, \end{aligned}$$

où a' désigne la dérivée de a par rapport à x . Ainsi le long des courbes caractéristiques définies par (3.11), u est solution de l'équation différentielle ordinaire

$$\frac{d}{dt}u(x(t), t) = -a'(x)u(x(t), t). \quad (3.12)$$

Tant que les caractéristiques sont définies nous savons calculer la solution du problème (3.11).

Ce ne sera pas toujours le cas comme nous allons le voir dans la section suivante.

3.4.2 Lois de conservation non-linéaires

Dans ce cas, le flux f , est une fonction non-linéaire de la variable u . Pour des solutions suffisamment régulière, la vitesse de propagation associée est définie par

$$a(u) = f'(u) \quad (3.13)$$

où $f'(u)$ est la dérivée de f par rapport à la variable u qui est alors solution du problème

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad u(x, 0) = u^0(x), \quad (3.14)$$

La vitesse de propagation $a(u)$ dépend de u d'où le caractère non linéaire du problème présent. On suppose que $a(u)$ est une fonction suffisamment régulière. Comme précédemment les caractéristiques sont définies par la solution de l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = a[u(x(t), t)], \quad x(0) = x^0 \quad (3.15)$$

On vérifie sans peine que si u est solution de (3.14), la variation de u , le long des caractéristiques définies par

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} u(x(t), t) &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial t} \\ &= \frac{\partial u}{\partial t} + a(u) \frac{\partial u}{\partial x} \\ &= 0. \end{aligned}$$

On en déduit que u est constante le long des caractéristiques, i.e., $u(x(t), t) = u^0(x^0)$. Ainsi $a(u) = a[u^0(x^0)]$ et les caractéristiques sont des droites d'équation

$$x = x^0 + a[u^0(x^0)]t \quad (3.16)$$

Contrairement au cas linéaire, les pentes des caractéristiques dépendent de la donnée initiale.

En particulierisant le problème (3.14) nous allons mettre en évidence le fait que l'existence des caractéristiques n'est pas assurée quelque soit $t > 0$. Pour ce faire nous considérons l'équation de Burgers, pour laquelle $f(u) = \frac{u^2}{2}$ et $a(u) = u$ munie d'une donnée initiale u^0 qui est une fonction régulière et décroissante.

Soient les deux positions initiales x_1 et x_2 tels que $x_1 < x_2$, alors $u^0(x_1) > u^0(x_2)$ de sorte que la pente de la caractéristique issue de x_2 est supérieure à celle issue de x_1 . Avec ces hypothèses le temps critique $t_c > 0$ pour lequel les caractéristiques issues de x_1 et de x_2 se rencontrent est défini par

$$t_c = -\frac{x_2 - x_1}{u^0(x_2) - u^0(x_1)}$$

En ce point nous avons $u(x(t_c), t_c) = u^0(x_1) = u^0(x_2)$ ce qui remet en cause l'unicité de la solution de l'équation différentielle (3.15). Plus précisément, on souhaite déterminer le temps minimal à partir duquel cette situation apparaît. En utilisant le théorème des accroissements finis, t_c se met sous la forme

$$t_c(\bar{x}) = -\frac{1}{\frac{d}{dx}u^0(\bar{x})}$$

où $\bar{x} \in]x_1, x_2[$. Le temps minimal de croisement des caractéristiques est alors défini par

$$t^* = \min_{\bar{x} \in \mathbb{R}} t_c(\bar{x}).$$

Ce qui s'écrit dans le cas général

$$t^* = -\frac{1}{\min(w, 0)}, w = \min_{y \in \mathbb{R}} \frac{d}{dy} a(u^0(y))$$

Par conséquent la méthode des caractéristiques est mise en défaut à partir du temps t^* .

Afin de préciser le comportement de la solution dans cette situation, donnons-en un exemple.

Théorème 4.1.1 (Onde de choc). Il existe des solutions au sens des distributions, discontinues, appelées **ondes de choc**, de la forme :

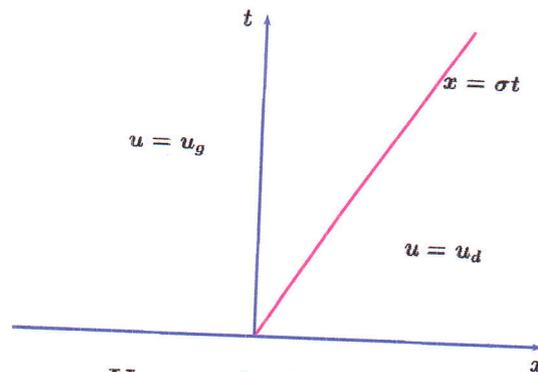
$$u(t, x) = \begin{cases} u_g & \text{pour } x < \sigma t \\ u_d & \text{pour } x > \sigma t. \end{cases}$$

Elle sont caractérisées par la **relation de Rankine-Hugoniot** :

$$\sigma[u] = [f(u)], \quad \text{i.e. } \sigma = \frac{f(u_d) - f(u_g)}{u_d - u_g}$$

Remarque : Les ondes de choc sont des solutions autosimilaires (i.e qui ne dépendent que de $\frac{x}{t}$)

$$u = \tilde{u}\left(\frac{x}{t}\right), \quad \tilde{u}(\xi) = \begin{cases} u_g & \text{pour } \xi < \sigma \\ u_d & \text{pour } \xi > \sigma. \end{cases}$$



Une onde de Choc

Preuve 4.1.1 Cherchons à quelle condition une solution de la forme donnée est solution au sens des distributions. Supposons par exemple que $\sigma > 0$, (le

même calcul s'applique à $\sigma < 0$). On évalue d'abord :

$$\partial_t u = \delta\left(t = \frac{x}{\sigma}\right)(u_g - u_d) = -[u]\delta\left(t = \frac{x}{\sigma}\right)$$

et de même,

$$\partial_x f(u) = [f(u)]\delta(x = \sigma t).$$

Il reste à remarquer que (tester contre des fonctions continues):

$$\delta\left(t = \frac{x}{\sigma}\right) = |\sigma|\delta(x = \sigma t).$$

On en déduit que l'équation a lieu si et seulement si la relation de Rankine-Hugoniot est vraie. ■

4.2 Existence des ondes de Raréfaction

Théorème 4.2.1 Pour $a(u_g) < a(u_d)$, il existe des solutions au sens des distribution, Lipschitziennes, appelées **ondes de raréfaction ou détentés**, de la forme:

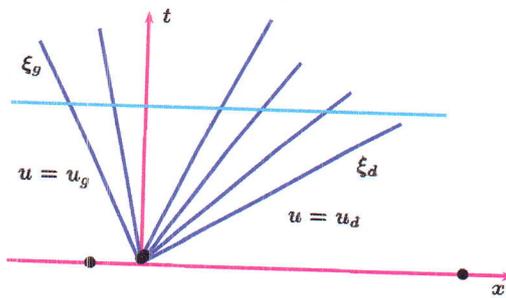
$$u(t, x) = \begin{cases} u_g & \text{pour } x \leq \xi_g t \\ a^{-1}\left(\frac{x}{t}\right) & \text{pour } \xi_g t \leq x \leq \xi_d t \\ u_d & \text{pour } \xi_d t \leq x \end{cases}$$

avec

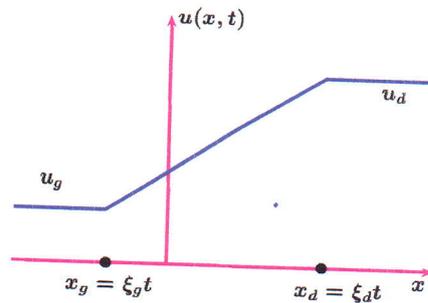
$$\begin{aligned} \xi_g &= a(u_g) \\ \xi_d &= a(u_d). \end{aligned}$$

Remarque : Les ondes de raréfaction sont aussi des solutions autosimilaires

$$u(t, x) = \underline{u}\left(\frac{x}{t}\right)$$



Détente : Caractéristiques



Solution à un temps donné

Preuve 4.2.1 À quelle condition une fonction autosimilaire est elle solution de (2.a) ? On pose $\xi = \frac{x}{t}$ et on calcule

$$\frac{\partial}{\partial t} u\left(\frac{x}{t}\right) = -\frac{\xi}{t} u'(\xi), \quad \frac{\partial}{\partial t} f\left(u\left(\frac{x}{t}\right)\right) = \frac{1}{t} a(u(\xi)) u'(\xi)$$

L'équation (2.a) s'écrit donc

$$u'(\xi)[- \xi + a(u(\xi))] = 0, \quad (4.1)$$

ce qui signifie que soit $u'(\xi) = 0$, ou bien $\xi = a(u(\xi))$. On vérifie bien que la fonction de l'énoncé est une solution. Il s'agit d'une solution au sens "presque partout", qui est équivalente au sens D' . ■

4.3 Entropies

Commençons par une définition

Définition 4.3.1 On appelle "problème de Riemann" la construction d'une solution autosimilaire $u\left(\frac{x}{t}\right)$ pour une donnée initiale discontinue

$$u^0(x) = \begin{cases} u_g & \text{pour } x < 0 \\ u_d & \text{pour } x > 0. \end{cases}$$

Le problème de Riemann se résoud en général en juxtaposant des états constants et des "ondes simples" (**chocs ou raréfaction**). La juxtaposition d'ondes simples s'appelle "onde composée". pour le cas particulièrement simple des flux $f(u)$ convexes. Voir, aussi, le problème pour le cas plus complexe d'un flux cubique.

Les deux types d'ondes (choc, raréfaction) fournissent un exemple de non unicité des solutions faibles du problème de Riemann.

On choisit en effet une donnée initiale discontinue dans le cas compatible avec une onde de raréfaction et on a donc deux solutions, l'**onde de raréfaction** et l'**onde de choc**. On doit donc introduire une condition supplémentaire d'unicité. La condition d'entropie permet de sélectionner la "bonne solution" physique.

Pour cela considérons une fonction $S(\cdot) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$; alors pour toute solution \mathcal{C}^1 de (2.a), on a

$$\frac{\partial}{\partial t} S(u) + \frac{\partial}{\partial x} \eta_s(u) = 0$$

avec

$$\eta_s'(\cdot) = a(\cdot)S'(\cdot).$$

Mais la manipulation non-linéaire utilisée (loi de dérivation composée) n'est pas vraie pour les solutions au sens des distributions et cette égalité est fautive pour les ondes de choc.

Définition 4.3.2 Une solution de (2.a) est dite **entropique** si, au sens des distributions,

$$\frac{\partial}{\partial t} S(u) + \frac{\partial}{\partial x} \eta_s(u) \leq 0, \quad \forall S(\cdot) \text{ convexe.}$$

La fonction $S(u)$ est appelée **entropie convexe**.

Notons que l'inégalité ci-dessus, au sens des distributions, s'entend en remplaçant l'égalité par une inégalité dans l'intégrale définissant la solution D' et en se restreignant aux fonctions test positives.

Théorème 4.3.1 Une onde de choc est entropique si et seulement si elle satisfait la relation de Rankine-Hugoniot pour l'entropie:

$$\sigma[S] \geq [\eta_s] \quad \forall S(\cdot) \text{ convexe.}$$

Preuve 4.3.3 Reprendre la démonstration du Théorème 4.1.1. ■

Proposition 4.3.2 Soit $f(\cdot)$ un flux convexe alors on a :

- ① Un choc est entropique si et seulement si $u_g \geq u_d$,
- ② Si l'inégalité est vraie pour une entropie S convexe, elle est vraie pour toutes les entropies convexes.

Preuve 4.3.4 Reprenons la relation de Rankine-Hugoniot pour la vitesse σ du choc, on est amené à démontrer

$$\frac{f(u_d) - f(u_g)}{u_d - u_g} [S(u_d) - S(u_g)] \geq \eta_s(u_d) - \eta_s(u_g).$$

On montre, et nous l'admettons, l'équivalence de cette inégalité (pour f et S convexes) avec $u_d - u_g \leq 0$. Considérons seulement le cas de Burgers-Hopf $f(u) = \frac{u^2}{2}$ et de l'entropie quadratique $S(u) = \frac{u^2}{2}$. On doit alors démontrer que

$$\frac{(u_d)^2 - (u_g)^2}{2(u_d - u_g)} \frac{(u_d)^2 - (u_g)^2}{2} \geq \frac{(u_d)^3 - (u_g)^3}{3} = \eta_s(u_d) - \eta_s(u_g).$$

Cette inégalité s'écrit aussi

$$3(u_d + u_g)^2(u_d - u_g) \geq 4(u_d - u_g)(u_d^2 + u_d u_g + u_g^2),$$

i.e.

$$0 \geq (u_d - u_g)(u_d^2 - 2u_d u_g + u_g^2) = (u_d - u_g)^3,$$

ce qui est équivalent à $u_d - u_g \leq 0$.

Notons que ce calcul montre aussi que la dissipation d'entropie est le cube de la "force du choc" i.e. du saut de u . ■

On en déduit la solution du problème de Riemann pour un flux convexe et qu'elle est formée d'une seule onde unique (parmi les ondes composées).

L'énoncé de la Proposition 4.3.2 est faux pour un flux non-convexe, on renvoie au problème ci-dessous pour un contre-exemple. Par contre on peut montrer que le problème de Riemann admet toujours une unique solution entropique formée d'une onde composée.

Chapitre 5

Flux non convexe : Problème de Riemann

Le problème de Riemann associé à l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0$$

consiste à déterminer la solution correspondante à la donnée initiale u^0 définie par :

$$u^0(x) = \begin{cases} u_g & \text{si } x < 0 \\ u_d & \text{si } 0 < x. \end{cases}$$

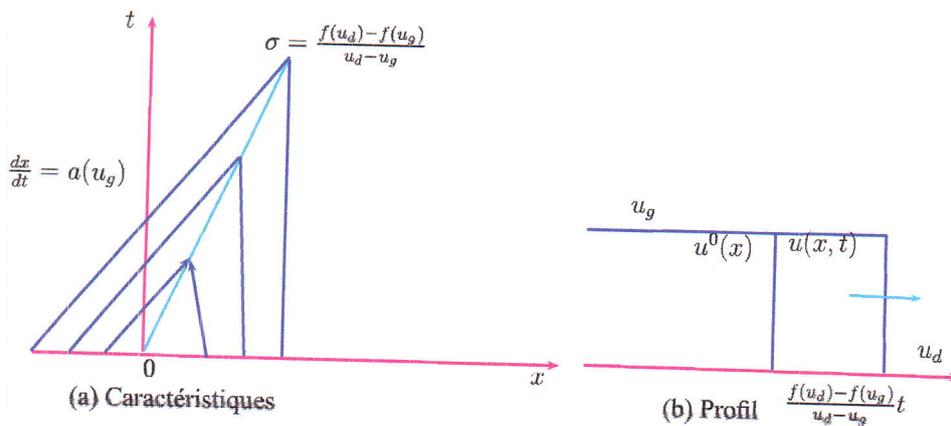
Nous allons donner la solution de ce problème pour une fonction f strictement convexe, la vitesse de propagation $a(u) = f'(u)$ étant une fonction strictement croissante. Suivant les valeurs de u_g et de u_d on distingue deux cas :

Premier cas $u_g > u_d$: la solution est une onde de choc qui se propage à la vitesse

$$\sigma = \frac{f(u_d) - f(u_g)}{u_d - u_g}.$$

Cette solution s'écrit

$$u(x, t) = \begin{cases} u_g & \text{si } x < \frac{f(u_d) - f(u_g)}{u_d - u_g} t \\ u_d & \text{si } x > \frac{f(u_d) - f(u_g)}{u_d - u_g} t. \end{cases}$$



Solution du problème de Riemann : onde de choc se propageant dans le sens des $x > 0$.

Elle se propage dans le sens des $x > 0$ (resp. $x < 0$) si $\sigma > 0$ (resp. $\sigma < 0$). On a représenté, Figures (a) et (b), l'allure des caractéristiques dans le plan (x, t) et le profil de la solution.

Deuxième cas $u_g < u_d$: La solution est une onde de détente centrée et les vitesses de propagation sont telles que $a(u_g) < a(u_d)$. On va détailler la construction de la solution dans le secteur $a(u_g)t < x < a(u_d)t$. On cherche u sous la forme d'une solution auto-semblable en posant $u(x, t) = U(\zeta)$ avec $\zeta = \frac{x}{t}$. La fonction U est solution de l'équation différentielle

$$-\zeta \frac{dU}{d\zeta} + a(U) \frac{dU}{d\zeta} = 0.$$

L'élimination de la solution triviale $U = cte$ nous conduit à $a(U) = \zeta$ avec $\zeta \in [a(u_g), a(u_d)]$. Comme a est une fonction strictement croissante, a réalise une bijection de $[u_g, u_d]$ sur $[a(u_g), a(u_d)]$. Nous en déduisons que l'équation

$a(U) = \zeta$ admet une unique solution, soit $U = a^{-1}(\zeta)$, d'où

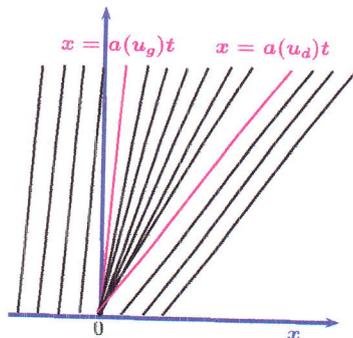
$$u(x, t) = a^{-1}\left(\frac{x}{t}\right).$$

Ainsi la solution du problème de Riemann s'écrit :

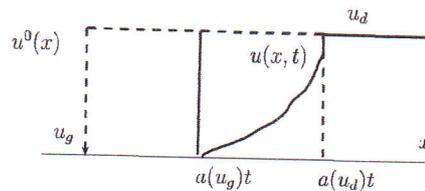
$$u(x, t) = \begin{cases} u_g & \text{si } x \leq a(u_g)t \\ a^{-1}\left(\frac{x}{t}\right) & \text{si } a(u_g)t \leq x \leq a(u_d)t \\ u_d & \text{si } x \geq a(u_d)t. \end{cases}$$

Il nous reste à distinguer trois sous-cas afin de déterminer le sens de propagation de l'onde de détente.

- ① $0 < a(u_g) < a(u_d)$: L'onde de détente se propage dans le sens des $x > 0$ comme on peut le constater sur les Figures (c) et (d)



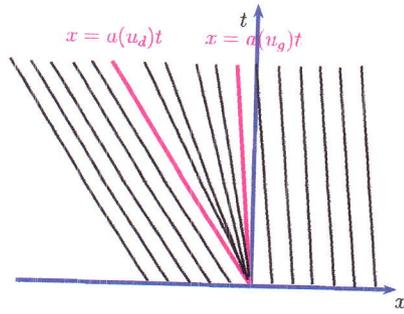
(c) Caractéristiques



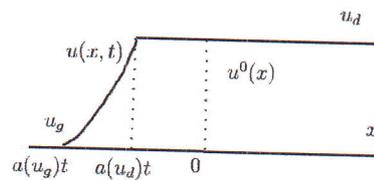
(d) Profil

Solutions du problème de Riemann : ondes de détente se propageant dans le sens des $x > 0$

- ② $a(u_g) < a(u_d) < 0$: Cette fois l'onde de détente se propage dans le sens des $x < 0$. L'allure des caractéristiques et du profil de la solution représentés en Figures (e) et (f).



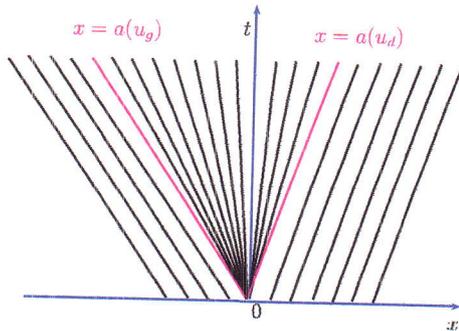
(e) Caractéristiques



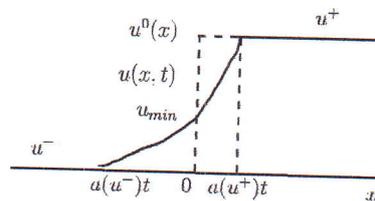
(f) Profil

Solutions du problème de Riemann : Ondes de détente se propageant dans le sens des $x < 0$

- ③ $a(u_g) < 0 < a(u_d)$: Ce dernier cas est appelé cas sonique par analogie avec la mécanique des fluides. La ligne $x = 0$ contenue dans le faisceau de caractéristiques issues de l'origine transporte la valeur u_{min} qui correspond à la valeur de u pour laquelle $f(u)$ atteint son minimum, on a également $a(u_{min}) = 0$, voir les Figures (g) et (h).



(g) Caractéristiques



(h) Profil

Solutions du problème de Riemann : Ondes de détente se propageant dans le cas sonique

5.1 Application : Flux non convexe

L'objectif de cette section est de montrer que, pour un flux non convexe, une seule inégalité d'entropie ne suffit pas à définir une solution unique au problème de Riemann.

Pour cela, considérons la loi de conservation scalaire :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^3}{\partial x} = 0, t \geq 0, x \in \mathbb{R} \quad (5.1)$$

auquel on ajoute l'inégalité d'entropie

$$\frac{\partial(2u^2)}{\partial t} + \frac{\partial(3u^4)}{\partial x} \leq 0. \quad (5.2)$$

On considère le problème de Riemann, c'est à dire la solution de (5.1) avec la donnée initiale

$$u(x, t = 0) = u^0(x) = \begin{cases} u_g & \text{pour } x < 0 \\ u_d \neq u_g & \text{pour } x > 0. \end{cases} \quad (5.3)$$

On devrait répondre aux questions suivante :

- ① Donner une justification simple de (5.2).
- ② **Ondes de choc** : Il existe toujours une onde de choc au problème (5.1) et (5.3). Calculer sa vitesse σ et montrer que

$$\sigma \geq |u_d u_g| ?$$

- ③ Montrer que l'inégalité d'entropie (5.2) est équivalente à la condition :

$$u_d^2 \leq u_g^2 \quad (5.4)$$

- ④ **Ondes de détentes** : Il existe des solutions \mathcal{C}^1 par morceaux, continues et de la forme $u(\frac{x}{t})$ au problème (5.1) et ces solutions sont forcément données par la formule :

$$u(\xi) = \begin{cases} u_g & \text{pour } \xi \leq \xi_g = 3u_g^2 \\ u_d & \text{pour } \xi \geq \xi_d = 3u_d^2 \\ 3u^2(\xi) = \xi & \text{pour } \xi_g \leq \xi \leq \xi_d. \end{cases}$$

- ⑤ On suppose $u_g \neq 0$ et $u_d \neq 0$. Montrer qu'il existe une unique solution "onde de détente" au problème (5.1), (5.3) sous des conditions, de signe entre autre, à préciser sur u_g et u_d . (Faire un dessin).

Réponse

- ① Cette égalité est vraie pour les solutions \mathcal{C}^1 (d'après le calcul du flux d'entropie abordé avant). D'autre part $S(u) = 2u^2$ est convexe ce qui justifie l'inégalité.

- ② La relation de R.H donne

$$\sigma = \frac{u_g^3 - u_d^3}{u_g - u_d} = u_d^2 + u_d u_g + u_g^2.$$

De plus $\sigma \geq u_d u_g$ et $\sigma = (u_d + u_g)^2 - u_d u_g \geq -u_d u_g$.

- ③ Pour l'inégalité d'entropie on écrit l'inégalité de R.H.

$$2\sigma(u_d^2 - u_g^2) \geq 3(u_d^4 - u_g^4) = 3(u_d^2 + u_g^2)(u_d^2 - u_g^2).$$

Donc on doit avoir

$$2(u_d^2 + u_d u_g + u_g^2)(u_d^2 - u_g^2) \geq 3(u_d^2 - u_g^2)(u_d^2 + u_g^2),$$

ou encore

$$0 \geq (u_d^2 - 2u_d u_g + u_g^2)(u_d^2 - u_g^2) = (u_d^2 - u_g^2)(u_d - u_g)^2.$$

ce qui équivaut à

$$0 \geq u_d^2 - u_g^2.$$

④ De telles solutions vérifient :

$$\forall \xi \quad \dot{u}(\xi) = 0 \quad \text{ou} \quad a(u(\xi)) = \xi.$$

Ainsi, pour :

① $\xi \in]-\infty, 3u_g^2]$, on a

$$u(\xi) = u_g,$$

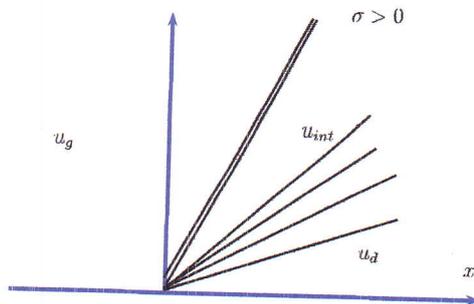
② $\xi \in [3u_d^2, +\infty[$ on a

$$u(\xi) = u_d,$$

③ $\xi_g \leq \xi \leq \xi_d$, on

$$3u^2(\xi) = \xi.$$

On peut construire une solution onde de détente dès que $u_g^2 < u_d^2$ en choisissant $u(\xi) = \sqrt{\frac{\xi}{3}}$ ou $u(\xi) = -\sqrt{\frac{\xi}{3}}$ (on a bien $\xi \geq \xi_g \geq 0$), et la continuité de u impose que u_g et u_d ont le même signe ($u_g u_d \geq 0$).



Bibliography

- [1] B. PERTHAME. *Equations de transport non linéaires et systèmes hyperboliques, Théorie et méthodes numériques*. Cours, 2003-2004.
- [2] L DI MENZA. *Analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. Cassini, Paris 2009.
- [3] S. NICAISE. *Analyse numériques des équations aux dérivées partielles*. Dunod, Paris 2000.
- [4] M. WILLEM. *Analyse fonctionnelle*. Cassini, Paris 2003.
- [5] textscM. TucsnaK. *Distributions et équations fondamentales de la Physique*. Paris, 2005. Editions O'REILLY, Paris 1999.
- [6] Christian KENDALL ATKINSON ET ALL. *Theoretical Numerical Analysis*. Springer, 2009.

● ————— **Merci** ————— ●

— **Fin** —