

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique

M/S 10.061

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques



Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Master Académique en Mathématiques
Option : Equations aux Dérivées Partielles

Par :

SAHOUR SELWA

Intitulé



**Une méthode nodale appliquée à un
problème de diffusion à coefficients
généralisés**

Dirigé par : Dr. KHAAIREDDINE FERNANE

Devant le jury

**PRESIDENT
RAPORTEUR**

**Dr. A. CHAOUI
Dr. K. FERNANE**

**Université 8 Mai 1945-Guelma
Université 8 Mai 1945-Guelma**

EXAMINATEUR1

Mr. A. MEHRI

Université 8 Mai 1945-Guelma

Session Juin 2013



Remerciements

C'est avec un grand plaisir que nous apportons ce modeste travail à tout ceux que j'ai gratifié de leur confiance.

Réalisation de se travail. Et je tiens en premier présenter ma grand et particulière gratitude à :

Monsieur” **Fernane Khaireddine** ”

d'avoir bien voulu m'aider avec ses précieux conseils et encouragements en acceptant de m'encadrer dont apprécie les vastes connaissances et les qualités professionnelles qui servant d'exemple

Mon grand respect aux membres du jury monsieur ” **A.Mehri** ” et ” **A.Chaoui** ” qui m'ont lait honneur d'évaluer et d'apprécier mon travaille qui durant mes études ; ma toujours donné la possibilité de faire ce que je veux..

Je n'oblie pas le **département de Mathématique de l'université de 08 Mai 1945-Guelma** .



Dédicace

A l'aide de " **dieu** " tout puissant, qui m'a tracé le chemin de ma vie, j'ai pu réaliser ce travail que je dédie :

A la lumière de mes yeux, l'ombre de mes pas et le bonheur de ma vie " **ma mère** " qui m'a apporté son appui durant toutes mes années d'études, pour son sacrifice et soutien qui m'ont donné confiance, courage et sécurité.

A mon cher " **père** " qui m'a appris le sens de la persévérance tout au long de mes études, pour son sacrifice ses conseils et ses encouragements.

A mes soeurs et mes frères

A toute la famille **SAHOUR** et **SERDOUK**

A mes amis .



Résumé



Dans ce mémoire, On propose les méthodes nodales analytiques d'indice l (MNA) consistent à faire une intégration transverse (IT) de l'EDP suivant $(n - 1)$ directions. Ce qui mène à un système de n équations (1D). Chacune de ces équations se résout analytiquement en utilisant les solutions fondamentales et les solutions particulières. Hennart affirme que les inconnues sont calculées exactement, mais si on fait l'IT, ceci n'est pas vrai puisque le second membre des équations 1D dépend de la solution approchée.

Table des matières

1	Rappels d'analyse fonctionnelle	4
1.1	Les espaces de Sobolev	5
1.1.1	Définitions et propriétés	5
1.1.2	Propriétés du polynôme de Legendre	6
2	Modélisation de l'équation de réaction-diffusion	9
2.1	Equations de réaction-diffusion	9
2.1.1	Définition de la densité de population	9
2.1.2	Equations de réaction-diffusion	10
2.1.3	Exemples d'équations de réaction-diffusion :	12
2.1.4	Exemples en biologie	13
3	Méthode nodale appliquée à un problème de diffusion	15
3.1	Introduction	15
3.2	Formulation de base des méthodes nodale analytique	16
3.2.1	Méthodes nodales analytiques directs	21
3.2.2	Méthode nodale analytique physique	22
3.2.3	Méthode nodale analytique mathématique	22
3.3	Procédure itérative	28
3.4	Résultats numériques pour $l = 0$	30
3.5	Conclusions	31

Introduction

Les équations aux dérivées partielles (EDP) interviennent dans la description de très nombreux problèmes de physique, chimie, sciences de la Terre, biologie : mécanique des fluides, propagation des ondes, électromagnétisme, phénomènes de diffusion ...

Nous nous limitons dans tout ce qui suit à des EDP relatives à un champ scalaire $u(\vec{r}, t)$. Les généralisations vectorielles sont bien sûr possibles, et techniquement analogues.

-Les exemples d'EDP scalaires les plus connues :

1. L'équation des ondes ;
2. L'équation de diffusion ;
3. L'équation de Schrödinger ;
4. Les équations de Poisson et de Laplace.

-L'étude théorique des EDP est un vaste domaine en mathématiques qui est hors du cadre de notre étude.

-Les EDP linéaires évoquées plus haut sont classées en EDP elliptiques/paraboliques /hyperboliques selon la forme des coefficients figurant

Les méthodes classiques comme la méthode des Eléments Finis (MEF), la méthode des Différences finies (MDF) et la méthode des volumes finis (MVF) sont restées encore à nos jours les méthodes les plus utilisées pour résoudre des systèmes d'équations aux dérivées partielles (EDP) que les problèmes de modélisation physique, en particulier ceux de la mécanique des matériaux posent.

Ces méthodes bénéficient d'un fondement théorique très solide, et de nombreuses techniques sont venues les améliorer au fil des ans. Cependant, leur mise en œuvre reste difficile et coûteuse dans certains cas, notamment dans le domaine de la modélisation de grandes déformations en formulation lagrangienne.

En effet, ces méthodes se basent sur un maillage du domaine dans lequel le problème doit être discrétisé. Pourtant ce maillage sur lequel s'appuie le calcul doit obéir à certaines règles ; en

particulier, les éléments (triangles, pour la méthode des éléments finis et les nœuds des rectangles dans le cas de la méthode des différences finies) ne doivent pas être écrasés, pour éviter que le Jacobien associé ne dégénère. En grandes déformations, le maillage est nécessairement très déformé, avec pour conséquence une perte de précision, des problèmes de convergence ou même un arrêt intempestif de la simulation.

Les méthodes sans maillage ont été développées à partir des années 1970 dans le but de se libérer des problèmes dus au maillage. Ces méthodes, dont le succès est croissant depuis une dizaine d'années, étaient pour les premières fondées sur des méthodes d'interpolation purement nodales.

L'idée est de reconstruire une fonction définie sur un espace continu à partir de l'ensemble des valeurs discrètes prises par cette fonction sur un nuage de points du domaine. On parle alors de méthode particulière. D'un point de vue théorique idéalisé, les avantages de ces méthodes sont les suivants :

- L'absence de connectivités fixes entre les nœuds supprime les effets indésirables de la MEF dus à la déformation du maillage ;
- Le raffinement de la discrétisation est facilité, puisqu'il est très simple de rajouter des nœuds sans un traitement supplémentaire ou particulier tel que l'adaptation du maillage ;
- Les frontières internes variables dans le temps telles que les fissures sont facilement manipulables pour la même raison, et leur orientation ne sera pas directement dépendante de la discrétisation.
- La plus grande particularité de ces méthodes est la possibilité d'enrichir les fonctions, c'est-à-dire d'inclure à leur niveau des propriétés de la physique du problème à étudier. On peut ainsi, avec un faible nombre de nœuds, approcher avec une grande précision la solution du problème.

Ces avantages font des méthodes sans maillage les candidates idéales pour simuler des problèmes à frontière libre et/ou en grande déformation.

Le présent mémoire est organisé en trois chapitres :

- le premier chapitre est un rappel des résultats mathématiques nécessaires à la suite du travail ;
- le deuxième chapitre présente la modélisation physique et mathématique du phénomène de diffusion ;
- Le chapitre 3 est consacré à l'application de méthode nodale au problème de diffusion à coefficients généralisés.

Rappels d'analyse fonctionnelle

On commence par introduire quelques notions de base et rappeler quelques définitions indispensables à la compréhension du manuscrit (sans donner de démonstrations). On introduit les espaces dans lesquels les Sobolev qui sont utilisés dans l'analyse numérique de ce problème. On pourra consulter pour plus de détails [13].

Notations

On notera $x := (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ les éléments de \mathbb{R}^n ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$), $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ est la norme euclidienne de x . Un vecteur $\alpha := (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T \in \mathbb{N}^n$ est appelé un multi-indice et $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ est la longueur du multi-indice. Pour toute fonction $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ régulière, on note :

$$D^\alpha F(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} F(x)}{\partial^{\alpha_1} x_1 \partial^{\alpha_2} x_2 \dots \partial^{\alpha_n} x_n} \quad (1.0.1)$$

Si $\alpha = (0, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{N}^n$, on adopte la convention $D^\alpha F(x) = F(x)$. De même, on notera pour tout $x := (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$:

$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} \quad (1.0.2)$$

L'espace des fonctions C^∞ à support compact inclus dans un ouvert Ω de \mathbb{R}^n est noté $D(\Omega)$ (espace des fonctions test). L'espace des distributions à support dans Ω est le dual topologique de $D(\Omega)$, on le note $D'(\Omega)$. L'espace $\mathbb{L}^1(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions mesurables (pour la tribu de Borel) intégrables (pour la mesure de Lebesgue dx) sur Ω . On note :

$$\|f\|_{\mathbb{L}^1(\Omega)} = \int_{\Omega} |f(x)| dx \quad (1.0.3)$$

On définit ensuite pour tout $1 \leq p \leq \infty$ l'espace :

$$\mathbb{L}^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ mesurable et } |f(x)|^p \in \mathbb{L}^1(\Omega) \right\} \quad (1.0.4)$$

que l'on munit de la norme :

$$\|f\|_{\mathbb{L}^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad (1.0.5)$$

Lorsque $p = \infty$, on a la définition suivante :

$$\mathbb{L}^\infty(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ mesurable et } |f(x)|^p \in \mathbb{L}^1(\Omega) \right\} \quad (1.0.6)$$

dont la norme est :

$$\|f\|_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)} = \inf \{ C, |f(x)| \leq C \text{ p.p.} \} \quad (1.0.7)$$

Proposition 1.0.1 (Inégalité de Holder) Pour tout $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^{p'}(\Omega)$, $|fg| \in L^1(\Omega)$ et on a l'égalité :

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)| dx \leq \|f\|_{\mathbb{L}^p} \|g\|_{\mathbb{L}^{p'}} \quad (1.0.8)$$

Lorsque $p = p' = 2$, on retrouve l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

1.1 Les espaces de Sobolev

1.1.1 Définitions et propriétés

Définition 1.1.1 Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n . On pose :

$$\mathbb{H}^1(\Omega) = \left\{ u \in \mathbb{L}^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in \mathbb{L}^2(\Omega), \forall i = 1, \dots, n \right\} \quad (1.1.1)$$

Bien entendu, la dérivation est à comprendre au sens des distributions. En d'autres termes, une fonction $u \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ est dans $\mathbb{H}^1(\Omega)$ s'il existe des fonctions v_1, \dots, v_n dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$ telles que :

$$\int_{\Omega} v \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_i} \phi dx, \quad \forall \phi \in D(\Omega), \forall i = 1, \dots, n \quad (1.1.2)$$

L'espace $\mathbb{H}^1(\Omega)$ est muni de la norme :

$$\|u\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq 1} \int_{\Omega} |D^{\alpha} u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.1.3)$$

Proposition 1.1.1 *L'espace $\mathbb{H}^1(\Omega)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)}$ est un espace de Hilbert. On définit les espaces de Sobolev $\mathbb{H}^m(\Omega)$ où m est un entier strictement positif par :*

$$\mathbb{H}^m(\Omega) = \left\{ u \in \mathbb{L}^2(\Omega) : D^{\alpha} u \in \mathbb{L}^2(\Omega), \alpha \in \mathbb{N}, |\alpha| \leq m \right\} \quad (1.1.4)$$

On le munit de la norme naturelle :

$$\|u\|_{\mathbb{H}^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^{\alpha} u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.1.5)$$

Proposition 1.1.2 *L'espace $\mathbb{H}^m(\Omega)$ ($\alpha \in \mathbb{N}^*$) muni de la norme $\|\cdot\|_{\mathbb{H}^m(\Omega)}$ est un espace de Hilbert.*

Définition 1.1.2 *On note $\mathbb{H}_0^m(\Omega)$ l'adhérence (pour la norme $\|\cdot\|_{\mathbb{H}^m(\Omega)}$) du sous-espace $D(\Omega)$ dans $\mathbb{H}^m(\Omega)$.*

Proposition 1.1.3 *(Inégalité de Poincaré) Soit Ω un ouvert borné dans une direction. Alors il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que de Ω telle que :*

$$\forall u \in \mathbb{H}_0^1(\Omega) \quad \|u\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \quad (1.1.6)$$

1.1.2 Propriétés du polynôme de Legendre

Soit p_i le polynôme de Legendre de degré i défini sur l'intervalle $[-1, 1]$ par :

$$p_i(x) = \frac{1}{i! 2^i} \frac{d^i}{dx^i} (x^2 - 1)^i$$

Nous rappelons les propriétés suivantes qui serviront par la suite à élaborer nos calculs :

$$\begin{aligned} P_i(+1) &= 1, \\ P_i(-1) &= (-1)^i, \\ P_i(-x) &= (-1)^i P_i(x), \\ \int_{-1}^1 P_i(x) P_j(x) dx &= \delta_{ij} N_i, \\ P_{ij}(x, y) &= P_i(x) P_j(y). \end{aligned}$$

où :

$$N_i = \frac{2}{2i+1}$$

est un facteur commode de normalisation. Les polynômes de degré ≤ 3 , sur l'intervalle $[-1, 1]$ s'écrivent :

$$\begin{cases} P_0(x) = 1, \\ P_1(x) = x, \\ P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}, \\ P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x. \end{cases}$$

Introduisons maintenant quelques notations qui sera très utile par la suite pour tout fonction $w \in L^2(\Omega)$, on notera le moment (la moyenne) transverse d'ordre i de w suivant x (par rapport a y) :

$$m_y^i(w; x) = \frac{1}{N_i} \int_{-1}^1 P_i(y)w(x, y)dy,$$

et le moment transverse d'ordre i de w suivant y (par rapport a x) :

$$m_x^i(w; y) = \frac{1}{N_i} \int_{-1}^1 P_i(x)w(x, y)dx$$

où p_i est le polynôme de Legendre de degré i sur $[-1, 1]$ Nous allons par la suite définir quelques formes linéaires associées au rectangle Ω ainsi qu'à ses facettes, notées $L; R; B; T$ pour left, right, bottom and top. Pour toute fonction w de $L^2(\Omega)$, on fait associer ses moments transverses aux faces de Ω :

$$m_L^i(w) = m_y^i(w; x = -1),$$

$$m_R^i(w) = m_y^i(w; x = +1),$$

$$m_B^i(w) = m_x^i(w; y = -1),$$

$$m_T^i(w) = m_x^i(w; y = +1),$$

les moments d'ordres (i, j) de w sur Ω (appelées aussi les valeurs moyennes) seront données par :

$$m_C^{ij}(w) = \frac{1}{N_i N_j} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 P_i(x)P_j(y)w(x, y)dx dy \quad (1.1.7)$$

On définit aussi les espaces polynomiaux suivants :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_i &= \{x^a y^b / 0 \leq a+b \leq i \quad i \in \mathbb{N}\}, \\ Q_{i,j} &= \{x^a y^b / 0 \leq a \leq i \quad 0 \leq b \leq j \quad i, j \in \mathbb{N}\}, \\ Q_i &\equiv Q_{i,i}.\end{aligned}$$

Définition 1.1.3 (*Loi de Balance*) On dit qu'une fonction $F = (f_k)_{k=1}^m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie la loi de Balance lorsqu'il existe des constantes $c_k > 0$ telles que :

$$\sum_{k=1}^m c_k f_k(v) = 0, \forall v \in \mathbb{R}_+^m \tag{1.1.8}$$

Modélisation de l'équation de réaction-diffusion

2.1 Equations de réaction-diffusion

Le but de ce chapitre est de montrer comment on obtient les équations de réaction diffusion, qui apparaissent dans plusieurs domaines des sciences de la nature.

2.1.1 Définition de la densité de population

Le mécanisme de diffusion modélise le mouvement des individus dans un environnement ou un milieu. Ces individus peuvent être petits, tels que des particules en physique, bactéries, molécules ou cellules, ou encore des objets très larges comme des êtres humains, animaux, insectes, organismes, plantes, ou certains types d'évènements comme des épidémies ou de rumeurs.

Supposons que les individus résident dans une région Ω , qui est un domaine ouvert de l'espace euclidien \mathbb{R}^n , avec $n \geq 1$. En particulier, nous serons intéressés par les cas $n = 1, 2$ et 3 . Mais le formalisme présenté ici s'applique à toute dimension de l'espace.

La variable mathématique de base que nous considérons ici est la fonction densité de population : $P(x, t)$, où t est le temps et $x \in \Omega$ est la position. La dimension de la densité de populations est le nombre de particules par unité de longueur (pour $n = 1$), unité d'aire (pour $n = 2$) ou par unité de volume (pour $n = 3$). Par exemple, la densité de population humaine est souvent exprimée en nombre d'individus par kilomètre carré.

La densité de population est toujours associée à une échelle, comme le pays, la ville, la cité ou la rue. Mais comme pour d'autres modèles mathématiques, nous supposons que la fonction $P(x, t)$ a les bonnes propriétés mathématiques, comme la continuité et la dérivabilité. Ce qui est, en fait, raisonnable, lorsqu'on considère une population avec un grand nombre d'individus. Techniquement, l'on définit la fonction densité de population $P(x, t)$ comme suit : soit x un point de l'habitat Ω . et soit $\{O_n\}_{n=1}^{\infty}$ une séquence de régions spatiales (qui ont la même dimension que Ω) entourant le point x . Ici, les sous-domaines $\{O_n\}$ sont choisis, de sorte que leurs mesures

spatiales $\{|O_n|\}$ (longueur, aire, volume, ou mathématiquement, la mesure de Lebesgue) tendent vers zéro, lorsque $n \rightarrow \infty$, et $O_n \supset O_{n+1}$; alors :

$$p(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Nombre d'individus dans } O_n \text{ au temps } t}{|O_n|} \quad (2.1.1)$$

si la limite existe. Réellement, tant que l'échelle de collection des données est suffisamment petite, la densité de population est toujours très bien définie. Il est clair que la population totale dans n'importe quelle région O de Ω , au temps t , est :

$$\int_{\Omega} p(x, t) \, dx \quad (2.1.2)$$

2.1.2 Equations de réaction-diffusion

La question à laquelle nous sommes intéressés, maintenant, est comment la fonction $P(t, x)$ change, lorsque t évolue et la position x varie. La population peut changer de deux manières : une est que les particules individuelles peuvent bouger dans leur domaine; et la deuxième est qu'elles peuvent donner naissance à de nouveaux individus, ou tuer les individus existants, à cause des raisons physique, chimique ou biologique. On modélisera ces deux différents phénomènes séparément.

Comment les particules peuvent bouger ? En général, ceci est un processus hautement compliqué, qui peut être attribuer à plusieurs raisons. Par exemple, les raisons d'immigration humaine peuvent être pour chercher une vie descente, pour chercher un travail meilleur, pour une raison politique, ou pour une raison religieuse.

Généralement, la population se déplacent des régions où la densité de population est la plus grande à des régions où cette densité est la plus faible. Cela est similaire à plusieurs phénomènes physiques, comme le transfert de chaleur (de l'endroit le plus chaud à l'endroit le plus froid), ou une dilution chimique dans l'eau. Ce fait nous rappelle le proverbe chinois : Le peuple monte vers le haut et l'eau coule vers le bas.

Le mouvement de $P(x, t)$ est appelé "flux de densité de population", qui est un vecteur. Le principe du "haut vers le bas" signifie que le flux pointe dans la direction de la décroissance rapide de $P(x, t)$, qui est le gradient négatif de $P(x, t)$.

Ce principe est appelé "Loi de Fick", décrite par l'équation :

$$J(x, t) = -D(x) \nabla_x p(x, t) \quad (2.1.3)$$

où $J(x, t)$ est le flux de $P(x, t)$. $D(x)$ est le coefficient de diffusion au point x , et ; ∇_x l'opérateur

gradient : $\nabla_x f(x) = (\partial f / \partial x_1, \dots, \partial f / \partial x_n)$.

D'un autre côté, le nombre d'individus en n'importe quel point peut changer, à cause d'autres raisons, comme la naissance, la mort, la chasse, ou les réactions chimiques. L'on suppose que le taux de changement de la fonction densité dû à ces raisons est $f(t, x, P)$, appelé "taux de réaction". Maintenant, le but est d'obtenir une équation différentielle en utilisant la "loi de balance". L'on choisit une région Ω , alors la population dans Ω est $\int_{\Omega} P(x, t) dx$, et le taux de changement de la population totale est :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} p(x, t) dx. \quad (2.1.4)$$

La croissance nette de la population dans le domaine O est :

$$\int_{\Omega} f(x, t, p(x, t)) dx, \quad (2.1.5)$$

et le flux total est :

$$\int_{\partial O} J(x, t) \cdot n(x, t) ds, \quad (2.1.6)$$

où ∂O est le bord de O , et $n(x, t)$ est la direction normale extérieure au point x . Alors, la loi de balance implique :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} p(x, t) dx = - \int_{\partial O} J(x, t) \cdot n(x, t) ds + \int_{\Omega} f(x, t, p(x, t)) dx. \quad (2.1.7)$$

Du théorème de la divergence, l'on a :

$$\int_{\partial O} J(x, t) \cdot n(x, t) ds = \int_{\Omega} \operatorname{div} J(x, t) dx \quad (2.1.8)$$

En combinant (1.3), (1.7) et (1.8), et en interchangeant l'ordre d'intégration et de dérivation, l'on obtient :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial p(x, t)}{\partial t} dx = \int_{\Omega} \{ \operatorname{div} [D(x) \nabla_x p(x, t)] + f(x, t, p(x, t)) \} dx. \quad (2.1.9)$$

Puisque le choix de la région O est arbitraire, alors l'on a l'équation différentielle :

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = \operatorname{div} [D(x) \nabla_x p(x, t)] + f(x, t, p(x, t)) \quad (2.1.10)$$

en tout point x et à chaque instant t . L'équation (1.10) est appelée "équation de réaction-diffusion". Ici, $div[D(x)\nabla_x P(x,t)]$ est le terme de diffusion qui décrit le mouvement des individus, et $f(t,x,P(x,t))$ le terme de réaction qui décrit la naissance/mort ou la réaction se produisant à l'intérieur de l'habitat ou réacteur.

Le coefficient de diffusion $D(x)$ n'est pas constant, en général, puisque l'environnement est d'habitude hétérogène. Mais lorsque la région de diffusion est approximativement homogène, l'on peut supposer que $D(x) = D$, alors l'équation (1.10) devient :

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = D\Delta p(x,t) + f(x,t,p(x,t)) \quad (2.1.11)$$

où $\Delta = \sum_{i=1}^n \partial^2/\partial x_i^2$ est l'opérateur Laplacien.

2.1.3 Exemples d'équations de réaction-diffusion :

Equation de la chaleur

Soit $T(\vec{r}, t)$ le champ de température dans un échantillon soumis à un gradient de température. La grandeur $T(\vec{r}, t)$ satisfait l'équation différentielle parabolique :

$$\partial_t T = k\Delta T, \quad (2.1.12)$$

où k est le coefficient de diffusivité thermique.

Marche au hasard

Soit une particule en suspension dans un liquide. Elle subit alors un mouvement brownien (trajectoire aléatoire ou marche au hasard). Désignons par $P(\vec{r}, t)$ la probabilité de trouver la particule au point \vec{r} , à l'instant t , sachant qu'elle était à l'origine de l'espace O , à l'instant $t=0$. Cette probabilité est solution de l'équation de diffusion :

$$\partial_t P = D\Delta P, \quad \text{diffusion.} \quad (2.1.13)$$

En présence d'une advection, cette équation devient :

$$\frac{\partial P}{\partial t} + v\vec{\nabla} p \cdot \vec{\gamma} = D\Delta p, \quad \text{Advection.} \quad (2.1.14)$$

Ici, $\vec{\gamma}$ désigne la direction d'orientation de la diffusion.

Propagation des épidémies

Les épidémies sont causées par des bactéries, virus, moisissures par des insectes ou animaux enrégés.... L'on suppose que la transmission se fait d'un individu à l'autre. Désignons par $S(x, t)$ la densité de population, qui n'est pas encore infectée, au point x , et à l'instant t . Soit $I(x, t)$, la densité de population qui n'est pas encore affectée, au même point x et au même instant t . L'on a les équations de réaction-diffusion couplées :

$$\frac{\partial S}{\partial t} = D\Delta S - rS \times I \quad (2.1.15)$$

$$\frac{\partial I}{\partial t} = D\Delta I + rS \times I - aI. \quad (2.1.16)$$

Ici, r désigne le taux d'infection et a le taux de mortalité.

Dispersion d'un insecte invasif

Considérons des insectes ravageurs (de graines de cèdre, par exemple). Soit $u(x, t)$ leur densité au point x et à l'instant t . Cette variable dynamique est solution de l'équation de réaction-diffusion :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u - \vec{V} \cdot \vec{\nabla} u - X(x, t)u + f(x, t), \quad (2.1.17)$$

où $f(x, t)$ est la fonction émergence progressive des insectes, $X(x, t)$ le taux de mortalité quotidien pendant la période de vol, et $\vec{V}(x, t)$ un vecteur tenant compte de la distance à la forêt la plus proche, et de la force du vent.

2.1.4 Exemples en biologie

Equation de Fisher

Le premier exemple est fourni par l'équation de Fisher, qui décrit la dispersion d'un gène favorable dans une population. Soit $u(x, t)$ la densité des gènes. Elle satisfait

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \Delta u + ru \left(1 - \frac{u}{C}\right) \quad (2.1.18)$$

où r est le taux de reproduction, k le coefficient de dispersion, et C la capacité de l'environnement.

Equations de Fitzhugh-Naguma

Les équations de Fitzhugh-Naguma constituent un autre exemple relevant du domaine de la biologie. Ces équations sont utilisées, pour modéliser la transmission d'impulsions nerveuses, ou des réactions chimiques (autocatalytiques) de type Bolousov-Zhabotinsky.

Soient $u(x, t)$ et $v(x, t)$ les concentrations des espèces (chimiques) A et B. Elles sont solutions des équations couplées :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D_A \Delta u + f(u) - v, \quad (2.1.19)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = D_B \Delta v + \alpha u - \beta v, \quad (2.1.20)$$

où α et β sont des constantes positives. Ici, f est une fonction non linéaire de sa variable, et D_A et D_B les constantes de diffusion des espèces A et B.

Méthode nodale appliquée à un problème de diffusion

3.1 Introduction

Les méthodes nodales se classent parmi les méthodes de résolution des équations aux dérivées partielles (multidimensionnelles), introduites dans les années 70 en neutronique, principalement par Dorning et Lawrence et leurs collaborateurs aux Etats Unis ([20],[21],[22]) ainsi que par Wagner et Finnemann et leurs collaborateurs en Allemagne ([10],[11]).

Notons qu'au début des années 70, les méthodes nodales ont été présentées par les neutroniciens en bloc comme des méthodes de discrétisation-résolution des équations de diffusion multigroupe. Cependant plusieurs auteurs ont séparé ces aspects dans leurs travaux en présentant les méthodes nodales essentiellement comme des méthodes de discrétisation. Citons à titre d'exemples les travaux de Azmy et Dorning ([5],[6]), précisément dans l'étude des écoulements stationnaires de fluides incompressibles et les travaux de Hennart ([16],[17]) qui a présenté les méthodes nodales mathématiques analytiques et polynomiales d'ordre élevé comme étant des méthodes d'éléments finis non-conformes.

Des méthodes nodales d'ordre élevé pour la discrétisation des équations de diffusion neutronique multigroupe ont été aussi proposées par Guessous [14].

Les méthodes nodales sont développées essentiellement sur des maillages grossiers réguliers (rectangles en deux dimensions et parallélépipèdes en 3 dimensions), utilisant comme inconnues principales, les valeurs moyennes, dites transverses, des variables dépendantes.

Comme pour les méthodes des éléments finis (MEF), l'approximation de la solution est exprimée par des fonctions polynomiales ([10],[11]) ou quasi polynomiales ([14],[15]). Avec les méthodes des différences finies (MDF), elles partagent le fait que le système algébrique final possède une matrice creuse et bien structurée sur des mailles régulières de type réunions de rectangles. Les variantes les plus connues des méthodes nodales sont :

1. Méthodes nodales avec développement polynomial **NEM** [10].

2. Méthodes nodales Integrales (ou analytiques NIM)([1],[2],[3],[4]).
3. Méthodes nodales polynomiales mathématiques et physiques [16].

Définition 3.1.1 Soit un système de N équations aux dérivées partielles régissant le comportement de N fonctions (variables dépendantes) à deux dimensions (x et y variables indépendantes).

Soit un domaine de résolution Ω subdivisé en N_e zones $\Omega_k (k = 0, 1, \dots, N_e)$ appelées aussi noeuds, de formes rectangulaires, tel que :

$$\bullet \bar{\Omega} = \bigcup_{k=1}^{N_e} \bar{\Omega}_k$$

$$\bullet \Omega_k \cap \Omega_l = \emptyset \text{ si } k \neq l$$

Le noeud est la cellule de base sur laquelle seront effectuées tous les développements. Dans la suite considérons un noeud $K =]-a, +a[\times]-b, +b[$. Chacune des N équations est successivement intégrée avec les poids $p_j(y)$, $j = 0, \dots, m$ suivant la direction y entre $-b$ et $+b$ puis avec les poids $p_i(x)$, $i = 0, \dots, m$ entre $-a$ et a suivant la direction x dans le noeud K , ce qui conduit à un système de $2N(m+1)$ équations unidimensionnelles, (des équations différentielles ordinaires). Ce processus d'intégration sur une variable dite transversale.

3.2 Formulation de base des méthodes nodale analytique

Considérons le EDP elliptique suivante :

$$-\nabla \cdot p \nabla u + qu = f \quad \forall r \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \quad (3.2.1)$$

où $p = p(r) > 0$ tandis que $q = q(r) \geq 0$. De plus u vérifie les condition aux limit sur la frontière $\Gamma = \partial\Omega$, que nous prendrons du type de Dirichlet pour le simplifie :

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma \quad (3.2.2)$$

Dans les applications typiques des neutrons, u désigne le flux des neutrons, tandis que p et q désigne le coefficient de diffusion et la section transversale, respectivement, qui sont constants par morceaux. Pour simplifier, on prend $n = 2$ et nous subdivisons le domaine Ω en des rectangles : " union du type de rectangles ". Ω peut être complètement couvert par I bande verticale et J bande horizontales. La formulation de base de la méthode nodale analytique consiste à intégrer suivant une direction transversale (3.2.1) au-dessus en dimensions de $n - 1$. Ceci est fait successivement et mène à n équations en 1D dans les différentes directions (ici

x et y). Supposez que Ω est l'union des cellules C_{ij} rectangulaires de taille $h \times k$ (ou plus généralement $h_i \times k_j$) appartenant à l'intersection de i^{th} bande verticales et de j^{th} bande horizontales. Considérons un noeud quelconque du maillage l'équation (3.2.1) devient :

$$-\frac{4}{h^2}(pu_x)_x - \frac{4}{k^2}(pu_y)_y + qu = f \quad \forall (x, y) \in \hat{C} = [-1, 1]^2 \quad (3.2.3)$$

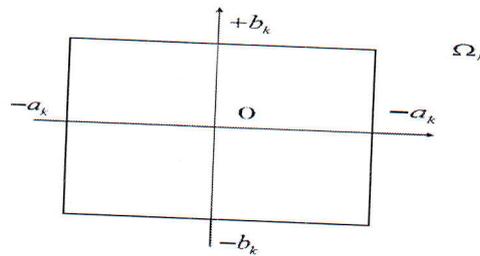


FIGURE 3.1 – Un noeud Ω_k de T_h .

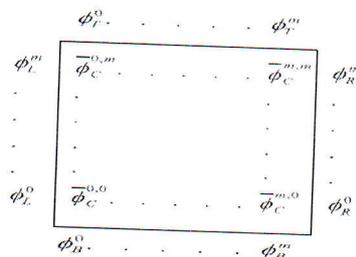


FIGURE 3.2 – Degrés de liberté sur un noeud Ω_k de T_h

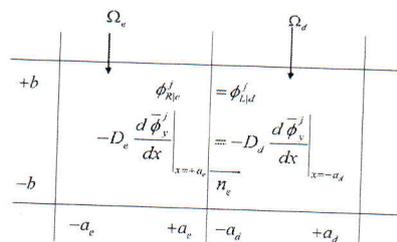


FIGURE 3.3 – Deux noeuds adjacents suivant une bande horizontale

En multiplie (3.2.3) par $p_i(y)$ ($i = 0, 1, \dots, l, l \in \mathbb{N}$) on divise par N_i puis on intègre entre -1 et 1 suivant la direction y on obtient :

$$-\frac{4}{h^2} \frac{d}{dx} \left(p \frac{d}{dx} m_y^i(u, x) \right) + q m_y^i(u, x) = m_y^i(f, x) + \frac{4}{k^2} l_y^i(u, x) \quad i = 0, \dots, l \quad (3.2.4)$$

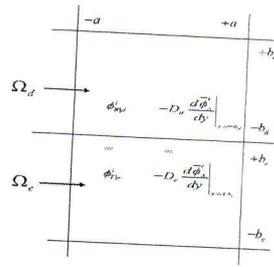


FIGURE 3.4 – Deux noeuds adjacents suivant une bande verticale

où $L_y^i(u, x)$ est une fuite transverse sur u (et x) au dessus et au bas des cellules C_{ij} :

$$l_y^i(u, x) = m_y^i \left(\frac{d}{dy} \left(p \frac{d}{dy} u(x, y) \right) \right) \quad i = 0, \dots, l$$

on fait la même chose suivant x , on obtient :

$$-\frac{4}{k^2} \frac{d}{dy} \left(p \frac{d}{dy} m_x^i(u, x) \right) + q m_x^i(u, y) = m_x^i(f, y) + \frac{4}{h^2} l_x^i(u, y) \quad i = 0, \dots, l \quad (3.2.5)$$

avec :

$$l_x^i(u, y) = m_x^i \left(\frac{d}{dx} \left(p \frac{d}{dx} u(x, y) \right) \right) \quad i = 0, \dots, l$$

Les conditions de compatibilités doivent être satisfaites, exigeant ce m_x^i et m_y^i commutative (permutez) :

$$m_x^i(m_y^j(w; x)) = m_y^j(m_x^i(w; y)) = m_C^{ij}(w) \quad i, j = 0, \dots, l$$

La solution numérique de (3.2.4) pour les bandes horizontales de J et de (3.2.5) pour les bandes verticales de I est alors envisagé comme suit. Pour simplifier l'exposition, nous devons considérer d'abord que chacun d'eux réduit à la forme canonique suivante :

$$-\frac{d}{dx} \left(p \frac{d}{dx} \right) u + qu = f \quad \forall x \in [a, b] \quad (3.2.6)$$

sur la bande correspondante, où à la fois p et q sont des constantes par morceaux, et que, du fait à (3.2.2), u est égal à zéro aux extrémités de la bande $u(a) = u(b) = 0$.

L'équation (3.2.6) est tout d'abord remplacé par une forme faible obtenu en le multipliant par un certain fonction test $v(x)$ et son intégration sur $[a, b]$. Comme pour les méthodes des éléments finis standard, le problème initial est équivalent au problème suivant :

$$\text{trouver } u \in H_0^1[a, b] \text{ tel que } a(u, v) = f(v) \text{ pour tout } v \in H_0^1[a, b] \quad (3.2.7)$$

où :

$$a(u, v) = \int_a^b \left(p \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} + quv \right) dx \quad f(v) = \int_a^b f v dx \quad (3.2.8)$$

Certains discrétisation doit être introduite, à savoir un sous-espace de dimension finie S_h de $H_0^1[a, b]$ est défini et (3.2.7) est remplacé par :

Trouver $u_h \in S_h \subset H_0^1[a, b]$ telle que :

$$a(u_h, v_h) = f(v_h) \quad \forall v_h \in S_h \subset H_0^1[a, b] \quad (3.2.9)$$

Dans notre description des méthodes nodales analytiques, les aspects de base de m e f standard seront tous préservés, sauf que la définition de D_l et S_l sera légèrement différente :

$$D_l = \{m_L, m_R, m_C^i, i = 0, \dots, l\}, \quad l \in \mathbb{N} \quad \dim D_l = l + 3. \quad (3.2.10)$$

Si l'élément particulier $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ de taille h_i est tracé sur référence intervalle $\hat{C} \equiv [-1, 1]$, l'équation (3.2.6) devient en variables réduites [16]

$$-u_{xx} + \lambda_i^2 u = f \quad \forall x \in [-1, 1] \quad (3.2.11)$$

où $\lambda_i^2 = \frac{h_i^2 q_i}{4p_i}$, tandis que f représente maintenant $f = \frac{h_i^2 f_i}{4p_i}$.

Au-dessus de I , nous avons ainsi (avec $\lambda = \lambda_i$)

$$S_l = \{\exp(\lambda x), \exp(-\lambda x), 1, \dots, x^l\} \quad l \in \mathbb{N} \quad \dim S_l = l + 3 \quad (3.2.12)$$

Définition 3.2.1 On se donne :

- 1) une partie compacte Ω de \mathbb{R}^n , connexe et d'intérieur non vide ;
- 2) un ensemble fini $D_l = \{a_j\}_{j=1}^N$ de N points distincts de Ω ;
- 3) un espace vectoriel S_l de dimonsion finie et composé de fonctions définies sur Ω à valeur réelles.

On dit que l'ensemble D_l est S_l -unisolvant si et seulement si, étant donné N scalaires réels quelconques $\alpha_j, 1 \leq j \leq N$, il existe une fonction p de l'espace S_l et une seule telle que :

$$p(a_j) = \alpha_j; \quad 1 \leq j \leq N$$

Lorsque l'ensemble D_l est S_l -unisolvant, le triplet (Ω, S_l, D_l) est appelé élément fini de Lagrange.

Etant donné un élément fini (Ω, S_l, D_l) , il existe donc pour tout entier $i, 1 \leq i \leq N$, une fonction

$p_i \in S_l$ et une seule telle que

$$p_i(a_j) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq j \leq N.$$

Théorème 3.2.1 D_l est S_l unisolvant.

Preuve. On a $\text{card}(D_l) = \dim(S_l)$, il suffit de présenter les fonction da base correspondante appelons :

$$Q_i(x) = P_i(x) \quad i = 0, \dots, l \quad (3.2.13)$$

$$Q_{l+1}(x) = \begin{cases} \cos h_l^*(\lambda x) & l \text{ est impair} \\ \sin h_l^*(\lambda x) & l \text{ est pair} \end{cases}$$

$$Q_{l+2}(x) = \begin{cases} \sin h_l^*(\lambda x) & l \text{ est impair} \\ \cos h_l^*(\lambda x) & l \text{ est pair} , \end{cases}$$

où (*) indique que les fonctions correspondantes sont normalisées à (+1) lorsque $x = 1$. Equivalente :

$$Q_{l+i}(x) = \frac{\exp_l(\lambda x) + (-1)^{l+i+1} \exp_l(-\lambda x)}{\exp_l(\lambda) + (-1)^{l+i+1} \exp_l(-\lambda)} \quad i = 1, 2 \quad (3.2.14)$$

où :

$$\exp_l(\lambda x) = \exp(\lambda x) - \sum_{i=0}^l \frac{1}{N_i} \int_{-1}^1 P_i(x) \exp(\lambda x) dx \quad (3.2.15)$$

les fonctions de base sont :

$$u_L(x) = -\frac{1}{2}(-1)^{l+1}(Q_{l+2}(x) - Q_{l+1}(x)) \quad (3.2.16)$$

$$u_R(x) = +\frac{1}{2}(Q_{l+2}(x) + Q_{l+1}(x)) \quad (3.2.17)$$

$$u_C^i(x) = Q_i(x) - Q_{l+m(i)}(x) \quad i = 0, \dots, l, \quad (3.2.18)$$

où $m(i) = 1$ ou 2 est telle que i et $l + m(i)$ ont le même partie. ■

3.2.1 Méthodes nodales analytiques directs

Dans sa correspondance avec des arrangements nodaux polynômes d'indice l [18], l'analyse des systèmes analogiques a été introduite par Hennart [18]. Nous définissons :

$$D_l \equiv \{m_L^i, m_R^i, m_B^i, m_T^i, i = 0, \dots, l; m_C^{ij}, i, j = 0, \dots, l\} \quad (3.2.19)$$

$$S_l = \{Q_{l,i} \oplus \langle \exp_l(+\lambda x)P_i(y), \exp_l(-\lambda x)P_i(y), P_i(x)\exp_l(+\lambda y), \quad (3.2.20)$$

$$P_i(x)\exp_l(-\lambda y), i = 0, \dots, l\} \quad (3.2.21)$$

$$\text{card } D_l = \dim S_l \quad (3.2.22)$$

Théorème 3.2.2 D_l est S_l unisolvant.

Preuve. Les fonctions de base sont :

$$u_L^i(x, y) = -\frac{1}{2}(-1)^{l+1}(Q_{l+2,i}(x, y) - Q_{l+1,i}(x, y)) \quad i = 0, \dots, l \quad (3.2.23)$$

$$u_R^i(x, y) = +\frac{1}{2}(Q_{l+2,i}(x, y) + Q_{l+1,i}(x, y)) \quad i = 0, \dots, l \quad (3.2.24)$$

$$u_B^i(y, x) = -\frac{1}{2}(-1)^{l+1}(Q_{i,l+2}(x, y) - Q_{i,l+1}(x, y)) \quad i = 0, \dots, l \quad (3.2.25)$$

$$u_T^i(y, x) = +\frac{1}{2}(Q_{i,l+2}(x, y) + Q_{i,l+1}(x, y)) \quad i = 0, \dots, l \quad (3.2.26)$$

$$u_C^{ij}(x, y) = Q_{ij}(x, y) - Q_{l+m(i),j}(x, y) - Q_{i,l+m(j)}(x, y) \quad i, j = 0, \dots, l \quad (3.2.27)$$

où :

$$Q_{l+m(i),j}(x, y) = Q_{l+m(i)}(x)P_j(y), \quad Q_{i,l+m(j)}(x, y) = P_i(x)Q_{l+m(j)}(y) \quad i, j = 0, \dots, l$$

et où $m(i)$ (resp. $m(j)$) = 1 ou 2 est telle que i (resp. j) et $l + m(i)$ (resp. $l + m(j)$) ont la même partie. ■

Nous pouvons écrire les fonctions de base comme suit :

$$u_L^i(x, y) = u_L(x)P_i(y) \quad i = 0, \dots, l \quad (3.2.28)$$

$$u_R^i(x, y) = u_R(x)P_i(y) \quad i = 0, \dots, l \quad (3.2.29)$$

$$u_B^i(x, y) = u_B(y)P_i(x) \quad i = 0, \dots, l \quad (3.2.30)$$

$$u_T^i(x, y) = u_T(y)P_i(x) \quad i = 0, \dots, l \quad (3.2.31)$$

$$u_C^{ij}(x, y) = P_i(x)P_j(y) - Q_{l+m(i)}(x)P_j(y) - P_i(x)Q_{l+m(j)}(y) \quad (3.2.32)$$

$$i, j = 0, \dots, l$$

3.2.2 Méthode nodale analytique physique

Dans la plupart des articles traitant les méthodes nodales, les équations finales nodales sont dérivées en accord avec des problème de de la physique. En utilisant les mêmes fonctions de base que ci-dessus, mais dont les équations discrètes proviennent des deux caractéristiques physiques suivantes :

-Equations d'équilibre de cellules : les premiers moments de l'équation P_{ij} , $i, j = 0, \dots, l$ plus une cellule sont nuls :

$$\int_{K \in T_h} P_i(x) P_j(y) [Lu_h - f] dr = 0 \quad i, j = 0, \dots, l \quad (3.2.33)$$

-La continuité des moments transverses du flux et du courant à travers les interfaces. Cette dernière condition traduit simplement la continuité des moments de

u_h le long des interfaces du maillage :

$$\int_{K_1 \cap K_2} P_i [p \nabla u_h|_{K_1} - p \nabla u_h|_{K_2}] \cdot 1_n ds = 0 \quad i = 0, \dots, l \quad (3.2.34)$$

où 1_n est le vecteur normal extérieure à l'interface commune $\Gamma_{12} = K_1 \cap K_2$.

3.2.3 Méthode nodale analytique mathématique

Nous dénotons la forme bilinéaire définies sur $H_0^1(\Omega)$:

$$a(u, v) = f(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

et la forme linéaire continue sur $H_0^1(\Omega)$:

$$f(v) = \int_{\Omega} f v dx$$

Enfin, la formulation variationnelle du problème se pose donc :

$$a(u, v) = f(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Nous construisons le sous-espace : S_h de $H_0^1(\Omega)$ est considéré le problème discrétisée devient trouver $u_h \in S_h$ tels que :

$$a(u_h, v_h) = f(v_h) \quad \forall v_h \in S_h \quad (3.2.35)$$

si nous choisissons l'approximation de $H_0^1(\Omega)$ par l'espace de dimension-finie S_h (ou S_l élément par élément défini ci-dessus), $S_h \not\subset H_0^1(\Omega)$ Parce que u_h n'est pas continu à travers les visages de K (seulement les moments de l'ordre jusqu' à l sont). Nous sommes donc dans un non-conforme, la situation où les équations discrètes (3.2.35) peuvent encore être utilisé à condition $a(.,.)$ est remplacé par $a_h(.,.)$ où :

$$a_h(u, v) = \sum_{K \in T_h} \int_K (p \nabla u \nabla v + q u v) dx \quad (3.2.36)$$

De $a(u, v)$ n'aurait aucune signification pour $u, v \in S_h$.

La convergence de cette solution approximative dépendent de deux composants : La premier doit faire globalement avec les propriétés d'approximation disponibles dans S_h ou plutôt dans S_l élément par l'élément. Ces propriétés d'approximation dépendent d'interpolation capabilités de S_l et ceux-ci dans terme comptent sur des valeurs plus grand indice i tels que $p_i \subset S_l$. La deuxième composant est une erreur d'uniformité de S_h dans L^2 . Plus précisément, si $p_{l+1} \subset S_l \forall l \in \mathbb{N}$. et ce de plus les moments d'ordre jusqu'à l sont communs entre deux cellules voisines de sorte qu'un essai de pièce rapportée de l'ordre l soit passé la convergence de l'exhibit des plans non-conforman de $O(h^{l+2})$ dans la norme L^2 .

Propriétés générales qui correspondant nonconforme des plans

Les fonctions de la base ont associé aux valeurs de la limite

On considérer par exemple la fonction de base $u_L^j(x, y)$ associé à gauche ($x = -1$) valeurs de la limite $m_L^j, j = 0, \dots, l$. par (3.2.13), $u_L^j(x, y) = 0$ dès que x est un du $(l+2)$ a généralisé Radau droit points $x_i^{RR}, i = 1, \dots, l+2$ comprenant $x = +1$ [17], ou y est un du j (supposant $j > 0$) Gauss $y_m^G, m = 1, \dots, j$ [17].

Les fonctions de base ont associé aux valeurs de la cellule

On considérer des fonctions de base associées aux valeurs de cellule. Par (3.2.32) nous avons :

$$\begin{aligned} u_C^{ij}(x, y) &= P_{ij}(x, y) - Q_{l+m(i)}(x)P_j(y) + P_{ij}(x, y) \\ &\quad - P_i(x)Q_{l+m(j)}(y) - P_{ij}(x, y) \end{aligned} \quad (3.2.37)$$

combiner (3.2.18) et (3.2.37), nous obtenons

$$u_C^{ij}(x, y) = u_C^i(x)P_j(y) + P_i(x)u_C^j(y) - P_{ij}(x, y). \quad (3.2.38)$$

par exemple nous avons :

$$u_C^{ij}(x, +1) = u_C^i(x) - P_i(x) \quad (3.2.39)$$

combiner (3.2.18) et (3.2.39), nous obtenons

$$u_C^{ij}(x, +1) = -Q_{l+m(i)}(x) \quad (3.2.40)$$

dénotez T_0 comme suit :

$$T_0(x) = -((-1)^i u_L(x) + u_R(x)) \quad (3.2.41)$$

combiner (3.2.23) et (3.2.24) nous obtenons :

$$T_0(x) = -\frac{1}{2} [-(-1)^{l+i+1} (Q_{l+2}(x) - Q_{l+1}(x)) + (Q_{l+2}(x) + Q_{l+1}(x))] \quad (3.2.42)$$

alors :

$$T_0(x) = \begin{cases} -Q_{l+1}(x) & \text{si } l+i+1 \text{ est pair} \\ -Q_{l+2}(x) & \text{si } l+i+1 \text{ est impair} \end{cases}$$

en d'autres termes :

$$T_0(x) = -Q_{l+m(i)}(x) \quad (3.2.43)$$

où $m(i) = 1$ ou 2 est tel qu' i (resp j) et $l+m(i)$ (resp $l+m(j)$) ayez le même parti. combiner (3.2.40), (3.2.41) et (3.2.43) nous avons :

$$u_C^{ij}(x, +1) = -((-1)^i u_L(x) + u_R(x)) \quad (3.2.44)$$

De la même façon, nous avons :

$$u_C^{ij}(x, -1) = (-1)^i u_L(x) + u_R(x) \quad (3.2.45)$$

$$u_C^{ij}(+1, y) = -((-1)^j u_B(y) + u_T(y)) \quad (3.2.46)$$

$$u_C^{ij}(-1, y) = (-1)^j u_B(y) + u_T(y) \quad (3.2.47)$$

Rapports entre la frontière et les fonctions de base de cellules.

Dénotez T_1 et T_2 comme suit :

$$T_1(x, y) = (-1)^i u_L^j(x, y) + u_R^j(x, y) \quad (3.2.48)$$

$$T_2(x, y) = (-1)^j u_B^i(x, y) + u_T^i(x, y) \quad (3.2.49)$$

par (3.2.13) et (3.2.29)

$$T_1(x, y) = ((-1)^i u_L(x) + u_R(x)) P_j(y) \quad (3.2.50)$$

combiner (3.2.40), (3.2.50) nous avons :

$$T_1(x, y) = P_j(y) Q_{l+m(i)}(x) \quad (3.2.51)$$

de la même façon :

$$T_2(x, y) = P_i(x) Q_{l+m(j)}(y) \quad (3.2.52)$$

Utiliser (3.2.48)-(3.2.52) et la définition de la limite et base de la cellule fonctionne, nous obtenez les rapports suivants :

$$P_{ij}(x, y) = (-1)^i u_L^j(x, y) + u_R^j(x, y) + (-1)^j u_B^i(x, y) + u_T^i(x, y) + u_C^{ij}(x, y) \quad i, j = 0, \dots, l \quad (3.2.53)$$

Masse élémentaire et matrices de raideur

On introduire la masse l'élémentaire et la matrices de raideur M^e et K^e d'ordre N comme :

$$M^e = (m_{ij}^e), \quad K^e = (k_{ij}^e)$$

où :

$$m_{ij}^e = \int_{[-1,1]^2} u_i(x, y) u_j(x, y) dx dy \quad (3.2.54)$$

$$k_{ij}^e = \int_{[-1,1]^2} \nabla u_i(x, y) \nabla u_j(x, y) dx dy \quad (3.2.55)$$

supposez maintenant que le vecteur ${}^t u = [u_1, \dots, u_N]$ de fonctions de la base est divisé comme :

$${}^t u = [{}^t u_H \ {}^t u_C \ {}^t u_V]$$

où :

$${}^t u_H = [u_L^0, \dots, u_L^l, u_R^0, \dots, u_R^l] \quad (3.2.56)$$

$${}^t u_C = [u_C^{00}, u_C^{10}, \dots, u_C^{ll}], \quad (3.2.57)$$

$${}^t u_V = [u_B^0, \dots, u_B^l, u_T^0, \dots, u_T^l] \quad (3.2.58)$$

avec M^e a divisé en conséquence. Nous avons par exemple :

$$M^e = \begin{bmatrix} M_{HH}^e & M_{HC}^e & M_{HV}^e \\ M_{CH}^e & M_{CC}^e & M_{CV}^e \\ M_{VH}^e & M_{VC}^e & M_{VV}^e \end{bmatrix} \quad (3.2.59)$$

si les éléments de la matrice sont évalués exactement, c'est facile de se rendre compte de cela :

$$M_{HV}^e = M_{VH}^e = K_{HV}^e = K_{VH}^e = 0$$

afin que l'accouplement entre H (pour horizontal) et V (pour vertical) composants est seulement par les paramètres cellulaires.

La matrice de masse peut être simplifiée grandement si intégration réduite généralisée est utilisé, chaque temps de la fonction de base de la limite u_E où E est L, R, B ou T paraît, la règle correspondante de Radau devrait avoir des abscissae ou des ordonnées de prélèvement x^{RR}, x^{RL}, y^{RB} ou y^{RT} respectivement. En conséquence la matrice de masse élémentaire M^e a seulement les entrées de non zéro dans M_{CC}^e , nous avons grâce à alors (3.2.53) :

$$(u_C^{ij}, u_C^{km}) = \frac{4\delta_{ik}\delta_{jm}}{(2i+1)(2j+1)} \quad (3.2.60)$$

nous obtenons un résultat semblable pour K_e , en effet, : avec $u_i = u_E^i$ ($E = L, R, B, T$) et $u_j = u_G^j$ ($G = L, R, B, T, C$), ∇u_E^i est proportionnel à p_i ($i = 0, \dots, l$) ou à $(Q_{k+1} \pm Q_{k+2})(x$ ou $y)$. Dans le premier cas ∇u_E est orthogonale à ∇u_G^j ; dans le deuxième cas nous utilisons l'intégration réduite par Radau généralisée.

Théorème 3.2.3 *Supposant que p et q sont constantes, la méthode nodale analytique physique est équivalente à la méthode nodale analytique mathématique avec intégration réduite par Radau généralisée.*

Preuve.

a-La méthode nodale analytique mathématique consiste à trouver $u_h \in S_h \subset H_0^1(\Omega)$

$$a_h(u_h, v_h) = f(v_h) \quad \forall v_h \in S_h \subset H_0^1(\Omega) \quad (3.2.61)$$

Prenons des fonctions de base de cellules $u_C^{ij}, i, j = 0, \dots, l$ associé à un certain élément K . L'équation (3.2.61) devient :

$$\int_K (p \nabla u_h^T \nabla u_C^{ij} + q u_h u_C^{ij} - f u_C^{ij}) dr = 0 \quad (3.2.62)$$

ou d'une manière équivalente :

$$\int_{\partial K} u_C^{ij} (p \nabla u_h \cdot 1_n) ds + \int_K u_C^{ij} (Lu - f) dr = 0 \quad (3.2.63)$$

où 1_n est certaine unité arbitraire normal à ∂K . si $K = [-1, 1]^2$ alors :

$$\begin{aligned} & \int_{\partial K} u_C^{ij} (p \nabla u_h \cdot 1_n) ds \\ &= p \int_{-1}^1 u_C^{ij}(1, y) \frac{du_h}{dx} \Big|_{x=1} dy - p \int_{-1}^1 u_C^{ij}(-1, y) \frac{du_h}{dx} \Big|_{x=-1} dy \\ & \quad p \int_{-1}^1 u_C^{ij}(x, 1) \frac{du_h}{dy} \Big|_{y=1} dx - p \int_{-1}^1 u_C^{ij}(x, -1) \frac{du_h}{dy} \Big|_{y=-1} dx \end{aligned} \quad (3.2.64)$$

par (3.2.46) nous avons

$$p \int_{-1}^1 u_C^{ij}(1, y) \frac{du_h}{dx} \Big|_{x=1} dy = -p \int_{-1}^1 u_B(y) \frac{du_h}{dx} \Big|_{x=1} dy - p(-1)^j \int_{-1}^1 u_T(y) \frac{du_h}{dx} \Big|_{x=1} dy \quad (3.2.65)$$

alors, grâce à la règle de la quadrature basée sur le $(l+2)$ zéro y_{BR}^i (resp y_{TR}^i) ($i = 1, \dots, l+2$) de $u_B(y)$ (resp $u_T(y)$) dans $[-1, 1]$

$$p \int_{-1}^1 u_C^{ij}(1, y) \frac{du_h}{dx} \Big|_{x=1} dy = 0 \quad (3.2.66)$$

Ainsi, il est facile de vérifier que le terme de frontière disparaît dans (3.2.63) avec généralisée Radau réduit intégration. Par (3.2.53) nous avons :

$$u_C^{ij}(x, y) = P_{ij}(x, y) - (-1)^i u_L^j(x, y) - u_R^j(x, y) - (-1)^j u_B^i(x, y) - u_T^i(x, y) \quad (3.2.67)$$

où $i, j = 0, \dots, l$. L'équation (3.2.62) sous la généralisation Radau réduit intégration devient

finalement :

$$\int_K P_{ij}(x, y) (\nabla(p\nabla u_h) + qu_h - f) dr = 0 \quad i, j = 0, \dots, l \quad (3.2.68)$$

b-Maintenant prenons v_h les fonctions de base de frontière $u_E^i, i = 0, \dots, l$ où $E = L, R, B,$ ou T .
Pour simplifier, nous considérons :

$$u_E^i = \begin{cases} u_R^i & \text{dans } K_1 \\ u_L^i & \text{dans } K_2 \end{cases}$$

où $\Gamma_{12} = K_1 \cap K_2$. Alors (3.2.61) devient :

$$\int_{K_1} (p\nabla u_h^T \nabla u_R^i + qu_h u_R^i - f u_R^i) dr + \int_{K_2} (p\nabla u_h^T \nabla u_L^i + qu_h u_L^i - f u_L^i) dr = 0 \quad (3.2.69)$$

ou d'une manière équivalente, la généralisation de Radau réduit l'intégrale :

$$\int_{\partial K_1} u_R^i (p\nabla u_h \cdot 1_{n_1}) ds + \int_{\partial K_2} u_L^i (p\nabla u_h \cdot 1_{n_2}) ds = 0 \quad (3.2.70)$$

en raison la généralisation d'intégrale de Radau réduit, (3.2.70) réduit les conditions de la continuité du courantes sur Γ_{12}

$$\int_{\Gamma_{12}} P_i(y) (p\nabla u_h|_{K_1} - p\nabla u_h|_{K_2}) \cdot 1_n ds = 0 \quad i = 0, \dots, l \quad (3.2.71)$$

■

3.3 Procédure itérative

Les résultats numériques avec ($l = 0$) sont testées en utilisant l'équation de diffusion

$$-\Delta u + u = f_i \quad \forall r \in \Omega = [-1, 1]^2 \quad (3.3.1)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma. \quad (3.3.2)$$

supposer que Ω est l'union de cellules rectangulaires K de taille $h \times k$ appartenant à l'intersection de I bandes verticale et J bandes horizontales . Nous numérotons les cellules de gauche sur la droite et de bas en haut. En utilisant les méthodes nodales polynomiales physiques [17] ou

direct analytique (§3) (sans intégration numérique) nous obtenons le système suivant :

$$\begin{aligned} AU + BV &= 0 \\ B^t U + EV + CW &= FC^t V + ZW = 0 \end{aligned}$$

Supposons que U , V et W sont les vecteurs des moments horizontaux, centraux et verticaux. Après simplification, nous obtenons le système suivant :

$$HV = F \tag{3.3.3}$$

où :

$$\begin{aligned} H &= E - B^t A^{-1} B - CZ^{-1} C^t \\ U &= -A^{-1} BV \\ W &= -Z^{-1} C^t V \end{aligned}$$

où A et Z sont des matrices tridiagonales, B et C sont deux diagonales, les composants sont nuls ou satisfaire :

$$\begin{aligned} Z_{ii} &= A_{ii} \\ Z_{i,i+I} &= A_{i,i+1} \\ B_{ii} &= C_{ii} \\ B_{i,i+1} &= C_{i,i+I} \\ E &= cI_d \end{aligned}$$

où c est une constante, I_d est une matrice d'identité. Ici H est une matrice d'ordre $I \times J$. Les blocs diagonaux de H sont des matrices d'ordre $I \times I$ et correspond au J bandes horizontales (pour des raisons de simplicité, nous supposons que $I = J$) et prend la forme : (voir la figure 4.1)

- Les blocs H_{ii} , $i = 1, \dots, I$ est plein symétrique, définie positive.
- Les blocs $H_{ij} = \alpha_{ij} I_d$, $i, j = 1, \dots, I$, $i \neq j$, α_{ij} est constant.

Ainsi, pour partie l'inversion du H_{ii} , $i = 1, \dots, I$ blocs, le système linéaire résulté est résolu par la méthode itérative des blocs Gauss-Seidel où les blocs d'index ij , $i \neq j$ sont identifiés aux

points. De plus, nous déclarer seulement A et B .

$$H = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} & \alpha_{12} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \alpha_{13} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \alpha_{21} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} & \alpha_{23} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \alpha_{31} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \alpha_{32} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

3.4 Résultats numériques pour $l = 0$

Considérons trois problèmes P_i $i = 1, 2, 3$ dans équation (3.3.1) :

Le premier problème, p_1 a une solution exacte :

$$u_1(x, y) = (1 - x^2)(1 - y^2)$$

$$f_1(x, y) = 5 - 3(x^2 + y^2) + x^2y^2.$$

Le deuxième problème, P_2 a une solution exacte :

$$u_2(x, y) = (1 - x^4)(1 - y^4)$$

$$f_2(x, y) = 12x^2(1 - y^4) + 12y^2(1 - x^4) - (x^4 + y^4) + x^4y^4.$$

Le dernier problème, P_3 a une solution exacte :

$$u_3(x, y) = \left(1 - \frac{chy}{ch1}\right) \left(1 - \frac{chx}{ch1}\right)$$

$$f_3(x, y) = 1 - \frac{chxchy}{ch^21}.$$

Les résultats numériques obtenus par les systèmes analytiques physiques directes sont affichés dans le tableau 1. Ceux obtenus par les systèmes de polynômes physiques sont affichés dans le tableau 2. Ici ε_i désignent l'erreur en norme discrète dans L^2 associé au problème P_i $i = 1, 2, 3$

$\varepsilon_i(c)$ désigner l'erreur en norme continu dans L^2 :

$$\varepsilon_i = \left(\sum_{K \in T_h} (m_C(u_i) - m_C(u_{h_i}))^2 \right)^{1/2}, \quad (3.4.1)$$

$$\varepsilon_i(c) = \left(\int_{\Omega} (u_i - u_{h_i})^2 \right)^{1/2} \quad (3.4.2)$$

De ces valeurs de l'erreur nous déduisons l'évaluation de l'ordre optimal de convergence en calculant pour chaque grille de l'interprète numérique de

$$\varepsilon \propto h^\alpha \quad (3.4.3)$$

h qui est la dimension de la maille. En passant la maille i de taille h_i à maille $i+1$ de taille $h_{i+1} = \frac{1}{2}h_i$, nous avons :

$$\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_{i+1}} = 2^\alpha$$

TABLE 3.1 – méthodes nodales analytiques physiques Directes pour les problèmes P_1 et P_3 .

maille	ε_1	α_1	ε_3	α_3
2x2	0.01300		0.06375	
4x4	0.00303	2.07045	0.01440	2.1034
8x8	0.00074	2.02865	0.00347	2.0377
16x16	0.00018	2.00806	0.00086	2.0101

TABLE 3.2 – méthode nodale polynomial physique direct pour les problèmes P_1, P_2 et P_3

maille	$\varepsilon_1(c)$	$\alpha_1(c)$	ε_1	$\varepsilon_2(c)$	$\alpha_2(c)$	ε_2	α_2	ε_3	α_3
2 x2	0.4787		0	1,8839		0,0468		0.00632	
4 x 4	0.1265	1,9435	0	0.4971	1,9466	0,0165	1.7768	0.00214	1.72
8 x 8	0.0321	1,9848	0	0,1272	1,9767	0,0045	1,9366	0.00057	1.94
16x16	0.0081	1,9961	0	0,0320	1.9933	0,0012	1,9837	0.00015	1.95

3.5 Conclusions

(1) - Nous avons analysé les méthodes nodales analytiques directes d'indice l nous avons montré que les méthodes mathématiques correspondantes sont équivalentes à celles des physiques

lorsque les composants de la matrice sont calculées par intégration réduite par la généralisation exacte de Radau (Exacte pour les polynômes de degré $(2l + 2)$).

(2) - Nous comparons dans le Tableau 2, l'erreur discret (ε_i) et l'erreur continue $(\varepsilon_i(c))$ $i = 1, 2, 3$ erreur :

- $\varepsilon_1 = 0$

- $\varepsilon_2(c) \ll \varepsilon_2$

dans le premier cas nous avons le résultat semblable pour la méthode mathématique en raison de l'intégration réduite par Radau généralisée est exacte pour le polynôme de degré 2, dans le deuxième cas nous avons un superconvergence.

(3) - Nous remarquons que les résultats de la méthode polynomiale est meilleur que l'analytique ceux (note que ceux-ci durent est $O(h^{l+3-\delta_{10}})$ ordre dans la norme L^2). En effet nous avons :

- $\varepsilon_1 = 0$ dans tableau 2 (méthode polynomiale), dans tableau 1 (méthodes analytiques), ε_1 est petit mais loin d'être nulle.

- $\varepsilon_3(\text{tableau 1}) \approx 6\varepsilon_3(\text{tableau 2})$.

Bibliographie

- [1] M. AKMOUCH, N. GUESSOUS, Partial current nodal method for the multigroup neutron diffusion equations. Int. Conf. Num. Algorithm, Oct, 2001.
- [2] M. AKMOUCH, N. GUESSOUS, Higher order analytical nodal methods in reponse matrix formulation for the multigroup neutron diffusion equations. An. Nuc. Engerg.29(15), pp 1765-1778, 2002.
- [3] M. AKMOUCH, N. GUESSOUS, High-order analytical nodal methods for the multigroup neutron diffusion equations. Numerical Algorithms. 34, pp 137-146, 2003.
- [4] M. AKMOUCH, Méthodes nodales de résolution des équations aux dérivées partielles en neutronique et en mécanique des fluides incompressibles. Thèse de Doctorat d'état en Mathématiques, Université S. M. Ben Abedallah-FES, Juillet, 2007.
- [5] Y. Y. AZMY, A Nodal Integral Method for the Numerical Solution of Incompressible Fluid Flow Problems. MS Thesis, University of Illinois, 1982.
- [6] Y. Y. AZMY, J. J. DORNING, A Nodal Integral Approach to the numerical solution of partial equations. Advanced in Recator Computations, American Nuclear society, Vol II, p.893, 1983.
- [7] Ciarlet P. G. ; *The finite element method for elliptic problems*, North-Holland, Amsterdam, 1978.
- [8] Dorning J. J. ; *Modern coarse-mesh methods. A development of the 70's*, Computational methods in Nuclear Engineering, vol. 1, pp. 3.1-3.31 ,American Nuclear Society, Williamsburg, Virginia (1979).
- [9] Fedon magnand, Hennart J. P., and Lautard J. J. ; *On the relationship between some nodal schemes and the finite element method in static diffusion calculations*, Advances in Reactor Computations, Vol. 2, Salt Lake City, UT, 1983, pp. 987-1000.
- [10] Finnemann H., Bennewitz F., and Wagner M.R. ; *Interface current techniques for multidimensional reactor calculations*, Atomkernenergie 30, 123- 128 (1977).

- [11] H. D. fischer, H. finneman, The nodal integration method-A diverse solver for neutron diffusion problems. Atomkerenergie, Kerntechink Bd 39, Lfg 4, 1981.
- [12] Frohlich R.; *Summary discussion and state of the art review for coarse-mesh computational methods*, Atomkernenergie 13n 117-126 (1983).
- [13] J. Jacques Vienne, Analyse fonctionnelle - Théorie et applications, Dunod.
- [14] N. Guessous, Méthodes nodales de discrétisation des équations de diffusion multigroupe. Thèse de docteur en science, Université Libre de Bruxel, 1993.
- [15] N. Guessous, Higher Order Analytical Nodal Methods for the Discretization of Diffusion Equations, Colloque Maghrébine TAM-TAM, 14-18 Avril, 2003.
- [16] Hennart J. P.; *On the numerical analysis of analytical nodal methods*, Numerical methods for partial differential equations, 4, 233-254 (1988).
- [17] Hennart J. P.; *A general family of Nodal Schemes*, SIAM J.Sci.Stat.Comput. 7.264 (1986).
- [18] Hennart J.P.; *A Unified view of finite differences, finite elements, and nodal schemes*, National University of Mexico, IIMAS, Mexico City, 01000 Mexico 1986.
- [19] Hennart J.P.; *Nodal method for the numerical solution of partial differential Equations*, Numerical Analysis, Guanajuato, p. 175-190, 51984. J. P. Hennart, ed., Lecture Notes in Mathematics 1230 Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [20] R. D. lawrence, J. J. dorning, A nodal Green's function method for multidimensional neutron diffusion calculation. Trans. Am. Nucl. Soc, 28, p 248, 1978.
- [21] R. D. lawrence, Three dimensional nodal diffusion and transport methods for the analysis of fast-reactor critical experiments. Prog. Nuc. Energy, 18, pp 101-111, 1986.
- [22] V. Louvet, Etude numérique de problèmes de diffusion neutronique en présence de singularités. Thèse de Doctorat, Université de France Compte, février 1998 .
- [23] Meade D., Del Valle E. and Hennart J.P.; *Unconventional finite element methods for neutron group diffusion equations*, IIMAS-UNAM (1986).
- [24] Shober R. A., Simms R. C., and Henry A. F.; *The Nodal Methods for Solving Time Dependent Group Diffusion Equations*, Nucl. Sci. Engng.. 64. 582 (1977).
- [25] Wagner M. R. and Kobke K.; *Progress in nodal reactor analysis*, Atomkernenergie 13,117-126 (1983).