République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option :**Analyse**

Par :

REZZAGUI Rafika

Intitulé

Etude de quelques inégalités intégrales à noyaux singuliers et leurs applications.

Dirigé par : Dr LAKHAL Fahim

Devant le jury

PRESIDENT	**Debbouche. A**	**Univ-Guelma**
RAPPORTEUR	**Lakhal. F**	**Univ-Guelma**
EXAMINATEUR	**Bouatia. Y**	**Univ-Guelma**

Session Juin 2013

Remerciement

Avant toute chose, je tiens à remercier **Allah** le tout puissant, pour m'avoir donnée la force et la patience.

Je remercie monsieur **Lakhal Fahim**, qu'il trouve ici l'expression de mon profonde reconnaissances pour m'avoir accordé son confiance et guider dans mon travail, ses compétences, ses précieux conseils et sa disponibilité.

Je remercie également monsieur **A.Debbouche** et monsieur **Y.Bouatia** qui ont accepté d'évaluer et juger mon travail malgré leurs nombreux autres obligatoires.

Je tien à remercier toutes ma famille et mes amis.

Résumé

Quelques inégalités intégrales faiblement singuliers de type Growall-Bellman sont établis, dont elle généralisent quelques inégalités intégrales faiblement singuliers connus et peut être utilisées à la théorie des certains classes d'équations différentielle et équations intégrales .En présentant quelques applications sur les équations différentielles fractionnaires et intégrales.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Il est bien connu que les inégalités intégrales de type Gronwall jouent un rôle important dans la théorie quantitative des solutions d'équations intégrales et différentielles. La littérature sur ces inégalités et leurs applications est vaste, voir [1-4]. Généralemtent, les intégrales qui concernent ce type d'inégalités ont des noyaux réguliers ou continus, mais quelques problèmes théoriques ou pratiques nous exigent de résoudre des inégalités intégrales avec des noyaux singuliers. Par exemple, D.Henry [5] a employé ce type d'inégalités intégrales pour prouver des résultats d'existence globale et la décroissance exponentielle pour un problème parabolique de Cauchy. Sano et Kunimatsu [6] ont donné une condition suffisante pour la stabilisation des systèmes paraboliques semilinéaire répartis en se servant d'une modification de Henry-type inégalités. Ye,Gao et Ding [7] ont prouvé une généralisation de ce type d'inégalité et l'ont utilisé pour étudier la dépendance de la solution à légard d'ordre et la condition initial d'une équation aux dérivées partielles. Toutes ces type d'inégalités sont prouvées par un argument d'itération, et les formules d'éstimations sont exprimées par des séries entières compliquées ce qui ne sont pas parfois très commodes pour les applications. Pour éviter cela, Medved [8] a présenté une nouvelle méthode dite méthode de désingularisation pour étudier les inégalités de type D.Henry et a établi des majorations explicites pour des solutions de certains problèmes avec des formules simples semblables aux inégalités classiques de Gronwall-Bellman.

Chapitre 2

Préliminaires

Définition 1 (Voir [14]). La dérivée fractionnaire d'ordre α, $0 < \alpha < 1$ d'une fonction $f \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ au sens de Riemann-Liouville est donnée par

$$D^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x (x-t)^{-\alpha} f(t)\, dt$$

pourvu que le côté droit existe sur $\mathbb{R}_+$.
Définition 2 (Voir [14]). La primitive fractionnaire d'ordre α, $0 < \alpha < 1$ d'une fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ au sens de Riemann-Liouville est donnée par

$$I^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\, dt$$

pourvu que le côté droit existe sur $\mathbb{R}_+$.
Lemme 1 (Gronwall). Supposons que $u(t), a(t), b(t) \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$, et $a(t)$ est croissante pour $t \in \mathbb{R}_+$. Si

$$u(t) \leq a(t) + \int_0^t b(s)\, u(s)\, ds, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

alors

$$u(t) \leq a(t) \exp\left(\int_0^t b(s)\, ds\right), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Lemme 2 (Voir [9]). Soit $a \geq 0$, $p \geq q \geq 0$ et $p \neq 0$, alors

$$a^{\frac{q}{p}} \leq \frac{q}{p} K^{\frac{q-p}{p}} a + \frac{p-q}{p} K^{\frac{q}{p}} \tag{2.1}$$

pour tout $K > 0$.

Preuve. Si $a = 0$, il est facile de voir que l'inégalité (2.1) est vérifiée. Donc nous montrons seulement que l'inégalité (2.1) est vraie dans le cas $a > 0$.

Posons

$$f(K) = \frac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}}a + \frac{p-q}{p}K^{\frac{q}{p}},\ K > 0$$

Nous obtenons

$$f'(K) = \frac{q(p-q)}{p^2}K^{\frac{q-2p}{p}}(K-a).$$

Alors il est facile de voire que

$$\begin{aligned} f'(K) &\geq 0,\ K > a, \\ f'(K) &= 0,\ K = a, \\ f'(K) &\leq 0,\ 0 < K < a. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$f(K) \geq f(a) = a^{\frac{q}{p}},$$

et la preuve du Lemme 2 est complète.

Lemme 3 (Voir [11, p. 296]). Soient α, β, γ et p des constantes positives. Alors

$$\int_0^t (t^\alpha - s^\alpha)^{p(\beta-1)}\, s^{p(\gamma-1)}ds = \frac{t^\theta}{\alpha}B\left[\frac{p(\gamma-1)+1}{\alpha}, p(\beta-1)+1\right],\ t \in \mathbb{R}_+,$$

où $B[\xi,\eta] = \int_0^1 s^{\xi-1}(1-s)^{\eta-1}ds$, $(\xi,\eta \in \mathbb{C},\ \Re\xi > 0,\ \Re\eta > 0)$ est la fonction bêta bien connue et $\theta = p[\alpha(\beta-1)+\gamma-1]+1$.

Preuve. On a

$$\begin{aligned} \int_0^t (t^\alpha - s^\alpha)^{p(\beta-1)}\, s^{p(\gamma-1)}ds &= \int_0^t \left[t^\alpha\left(1-(\frac{s}{t})^\alpha\right)\right]^{p(\beta-1)} s^{p(\gamma-1)}ds \\ &= t^{\alpha p(\beta-1)}\int_0^t \left[1-(\frac{s}{t})^\alpha\right]^{p(\beta-1)} s^{p(\gamma-1)}ds \end{aligned}$$

Posons $(\frac{s}{t})^\alpha = \mu$, alors on a

$$\begin{cases} d\mu = \alpha\frac{1}{t}(\frac{s}{t})^{\alpha-1}ds = \alpha\frac{1}{t}(\mu^{\frac{1}{\alpha}})^{\alpha-1}ds \\ \frac{s}{t} = \mu^{\frac{1}{\alpha}} \end{cases},$$

donc

$$\begin{aligned}
\int_0^t \left(t^{\alpha}-s^{\alpha}\right)^{p(\beta-1)} s^{p(\gamma-1)}ds &= t^{\alpha p(\beta-1)}\int_0^1 (1-\mu)^{p(\beta-1)}\left(t\mu^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{p(\gamma-1)}\frac{t}{\alpha}\left(\mu^{\frac{1}{\alpha}}\right)d\mu \\
&= t^{\alpha p(\beta-1)}t^{p(\gamma-1)}\frac{t}{\alpha}\int_0^1 (1-\mu)^{p(\beta-1)}\mu^{\frac{p(\gamma-1)}{\alpha}+\frac{1}{\alpha}-1}d\mu \\
&= \frac{t^{\,p[\alpha(\beta-1)+\gamma+1]+1}}{\alpha}\int_0^1 (1-\mu)^{p(\beta-1)+1-1}\mu^{\frac{p(\gamma-1)+1}{\alpha}-1}d\mu \\
&= \frac{t^{\theta}}{\alpha}B\left[\frac{p(\gamma-1)+1}{\alpha},p(\beta-1)+1\right],
\end{aligned}$$

où $\theta=p\left[\alpha\left(\beta-1\right)+\gamma+1\right]+1$.

Lemme 4 (Voir [10]). Supposons que les constantes positives α,β,γ,p_1 et p_2 satisfont les conditions :

(a) Si $\alpha\in(0,1]$, $\beta\in\left(\frac{1}{2},1\right)$, $\gamma\geq\frac{3}{2}-\beta$ et $p_1=\frac{1}{\beta}$;

(b) Si $\alpha\in(0,1]$, $\beta\in(0,\frac{1}{2}]$, $\gamma>\frac{1-2\beta^2}{1-\beta^2}$ et $p_2=\frac{1+4\beta}{1+3\beta}$, alors

$$B\left[\frac{p_i\left(\gamma-1\right)+1}{\alpha},\ p_i\left(\beta-1\right)+1\right]\in(0,+\infty)$$

et

$$\theta_i=p_i\left[\alpha\left(\beta-1\right)+\gamma-1\right]+1\geq 0$$

sont valide pour $i=1,2$.

Lemme 5 (Voir [12]). Soient $u\left(t\right)$, $u_0\left(t\right)$, $w\left(t\right)$, et $v\left(t\right)$ des fonctions non négatives continues sur $\mathbb{R}_+$, et soit $r\geq 1$ un nombre reél. Si

$$u\left(t\right)\leq u_0\left(t\right)+w\left(t\right)\left[\int_0^t v\left(s\right)u^r\left(s\right)ds\right]^{1/r},\quad t\in\mathbb{R}_+, \tag{2.2}$$

alors

$$\int_0^t v\left(s\right)u^r\left(s\right)ds\leq\left[1-\left(1-W\left(t\right)\right)^{1/r}\right]^{-r}\int_0^t v\left(s\right)u_0^r\left(s\right)W\left(s\right)ds,\quad t\in\mathbb{R}_+, \tag{2.3}$$

où

$$W(t) = \exp\left(-\int_0^t v(s)\, w^r(s)\, ds\right). \tag{2.4}$$

Preuve. On définit une fonction $\phi(t)$ par

$$\phi(t) = W(t) \int_0^t v(s)\, u^r(s)\, ds. \tag{2.5}$$

D'aprés l'inégalité (2.2) on a

$$\begin{aligned} \phi'(t) &= W(t)\, v(t)\, u^r(t) - v(t)\, w^r(t)\, \phi(t) \\ &\leq (u_0 v^{1/r} W^{1/r} + w v^{1/r} \phi^{1/r})^r - v w^r \phi. \end{aligned}$$

Comme $\phi(0) = 0$, donc par une intégration nous obtenons

$$\phi(t) \leq \int_0^t (u_0 v^{1/r} W^{1/r} + w v^{1/r} \phi^{1/r})^r - \int_0^t v w^r \phi.$$

Or d'aprés l'inégalité de Minkowski on a

$$\left[\int_0^t (u_0 v^{1/r} W^{1/r} + w v^{1/r} \phi^{1/r})^r\right]^{1/r} \leq \left(\int_0^t u_0^r v W\right)^{1/r} + \left(\int_0^t w^r v \phi\right)^{1/r},$$

par conséquent,

$$\left(\phi(t) + \int_0^t v w^r \phi\right)^{1/r} - \left(\int_0^t v w^r \phi\right)^{1/r} \leq \left(\int_0^t v W u_0^r\right)^{1/r}. \tag{2.6}$$

Le membre gauche de l'inégalité (2.6) est une fonction de la forme : $m(x) = (\alpha + x)^{1/r} - x^{1/r}$. Pour tout $r \geq 1$ et $\alpha \geq 0$, $m(x)$ est une fonction décroissante de x (i.e. $m'(x) \leq 0$ pour $x \geq 0$). Donc, nous pouvons remplacer $\int_0^t v w^r \phi$ dans l'inégalité (2.6) par une quantité plus

grande et avoir toujours une inégalité valide.
Il est facile de voir à partir de la définition de $\phi(t)$ donnée par l'équation (2.5), que

$$\int_0^t vw^r\phi \leq \left(\int_0^t vu^r\right)\left(\int_0^t vw^r W\right) = (1 - W(t)) \int_0^t vu^r. \tag{2.7}$$

Aprés une substitution de l'équation (2.5) et l'inégalité (2.7) dans l'inégalité (2.6) on trouve l'inégalité (2.3) cherchée.

Chapitre 3

Résultats obtenus

Théorème 1. Soient $u(t)$, $a(t)$, $b(t)$ et $f(t)$ des fonctions non négatives continues pour $t \in \mathbb{R}_+$. Soit p et q des contantes avec $p \geq q \geq 0$. Si $u(t)$ satisfait

$$u^p(t) \leq a(t) + b(t) \int_0^t (t^\alpha - s^\alpha)^{\beta-1} s^{\gamma-1} f(s) u^q(s) \, ds, \ t \in \mathbb{R}_+. \tag{3.1}$$

Alors pour tout $K > 0$:
(i) Si $\alpha \in (0,1]$, $\beta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ et $\gamma \geq \frac{3}{2} - \beta$,on a

$$\begin{aligned} u(t) \leq & \left\{ a(t) + M_1^\beta t^{(\alpha+1)(\beta-1)+\gamma} b(t) \left[\mathcal{A}_1^{1-\beta}(t) + K^{\frac{q-p}{p}} M_1^\beta [1-(1-V_1(t))^{1-\beta}]^{-1} \right.\right. \\ & \left.\left. \times \left(\int_0^t s^{\frac{(\alpha+1)(\beta-1)+\gamma}{1-\beta}} f^{\frac{1}{1-\beta}}(s) \, b^{\frac{1}{1-\beta}}(s) \, \mathcal{A}_1(s) \, V_1(s) \, ds \right)^{1-\beta} \right] \right\}^{\frac{1}{p}}, \end{aligned} \tag{3.2}$$

où

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{1}{\alpha} B \left[\frac{\beta+\gamma-1}{\alpha\beta}, \frac{2\beta-1}{\beta} \right], \quad A(t) = \frac{q}{p} K^{\frac{q-p}{p}} a(t) + \frac{p-q}{p} K^{\frac{q}{p}}, \\ \mathcal{A}_1(t) &= \int_0^t f^{\frac{1}{1-\beta}}(s) \, A^{\frac{1}{1-\beta}}(s) \, ds \end{aligned}$$

et

$$V_1(t) = \exp\left(-K^{\frac{q-p}{p(1-\beta)}} M_1^{\frac{\beta}{1-\beta}} \int_0^t s^{\frac{(\alpha+1)(\beta-1)+\gamma}{1-\beta}} f^{\frac{1}{1-\beta}}(s) \, b^{\frac{1}{1-\beta}}(s) \, ds \right);$$

(ii) Si $\alpha \in (0,1]$, $\beta \in (0,\frac{1}{2}]$ et $\gamma > \dfrac{1-2\beta^2}{1-\beta^2}$, on a

$$u(t) \leq \Bigg\{ a(t) + M_2^{\frac{1+3\beta}{1+4\beta}} t^{\frac{[\alpha(\beta-1)+\gamma](1+4\beta)-\beta}{1+4\beta}} b(t)$$

$$\times \left[\mathcal{A}_2^{\frac{\beta}{1+4\beta}}(t) + K^{\frac{q-p}{p}} M_2^{\frac{1+3\beta}{1+4\beta}} \left[1 - (1 - V_2(t))^{\frac{\beta}{1+4\beta}} \right]^{-1} \right.$$

$$\left. \times \left(\int_0^t s^{\frac{[\alpha(\beta-1)+\gamma](1+4\beta)-\beta}{\beta}} f^{\frac{1+4\beta}{\beta}}(s)\, b^{\frac{1+4\beta}{\beta}}(s)\, \mathcal{A}_2(s)\, V_2(s)\, ds \right)^{\frac{\beta}{1+4\beta}} \right] \Bigg\}^{\frac{1}{p}}, \tag{3.3}$$

où

$$M_2 = \frac{1}{\alpha} B\left[\frac{\gamma(1+4\beta)-\beta}{\alpha(1+3\beta)}, \frac{4\beta^2}{1+3\beta} \right], \quad \mathcal{A}_2(t) = \int_0^t f^{\frac{1+4\beta}{\beta}}(s)\, A^{\frac{1+4\beta}{\beta}}(s)\, ds$$

et

$$V_2(t) = \exp\left(-K^{\frac{(q-p)(1+4\beta)}{p\beta}} M_2^{\frac{1+3\beta}{\beta}} \int_0^t s^{\frac{[\alpha(\beta-1)+\gamma](1+4\beta)-\beta}{\beta}} f^{\frac{1+4\beta}{\beta}}(s)\, b^{\frac{1+4\beta}{\beta}}(s)\, ds \right).$$

Preuve. On définit une fonction $v(t)$ par

$$v(t) = b(t) \int_0^t (t^\alpha - s^\alpha)^{\beta-1} s^{\gamma-1} f(s)\, u^q(s)\, ds, \; t \in \mathbb{R}_+, \tag{3.4}$$

alors

$$u^p(t) \leq a(t) + v(t)$$

où

$$u(t) \leq (a(t) + v(t))^{\frac{1}{p}}. \tag{3.5}$$

Par le Lemme 2 et (3.5), pour tout $K > 0$, nous avons

$$u^p(t) \leq (a(t) + v(t))^{\frac{q}{p}} \leq \frac{q}{p} K^{\frac{q-p}{p}} (a(t) + v(t)) + \frac{p-q}{p} K^{\frac{q}{p}}$$

Substituant la dernière relation dans (3.4) nous obtenons

$$v(t) \leq b(t) \int_0^t (t^\alpha - s^\alpha)^{\beta-1} s^{\gamma-1} f(s) \left[\frac{q}{p} K^{\frac{q-p}{p}} (a(s) + v(s)) + \frac{p-q}{p} K^{\frac{q}{p}} \right] ds$$

$$= b(t) \int_0^t (t^\alpha - s^\alpha)^{\beta-1} s^{\gamma-1} f(s) A(s)\, ds + \frac{q}{p} K^{\frac{q-p}{p}} b(t) \int_0^t (t^\alpha - s^\alpha)^{\beta-1} s^{\gamma-1} f(s) v(s)\, ds, \tag{3.6}$$

où

$$A(t) = \frac{q}{p} K^{\frac{q-p}{p}} a(t) + \frac{p-q}{p} K^{\frac{q}{p}}.$$

Si $\alpha \in (0,1]$, $\beta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ et $\gamma \geq \frac{3}{2} - \beta$, soit $p_1 = \dfrac{1}{\beta}$, $q_1 = \dfrac{1}{1-\beta}$;
Si $\alpha \in (0,1]$, $\beta \in (0, \frac{1}{2}]$ et $\gamma > \dfrac{1-2\beta^2}{1-\beta^2}$, soit $p_2 = \dfrac{1+4\beta}{1+3\beta}$, $q_2 = \dfrac{1+4\beta}{\beta}$,
alors $\dfrac{1}{p_i} + \dfrac{1}{q_i} = 1$ pour $i = 1, 2$,donc en utilisant l'inégalité de Hölder avec les indices p_i, q_i à (3.6) nous obtenons

$$\begin{aligned} v(t) &\leq b(t) \left[\int_0^t (t^\alpha - s^\alpha)^{p_i(\beta-1)} s^{p_i(\gamma-1)} ds\right]^{1/p_i} \left[\int_0^t f^{q_i}(s) A^{q_i}(s)\, ds\right]^{1/q_i} \\ &\quad + K^{\frac{q-p}{p}} b(t) \left[\int_0^t (t^\alpha - s^\alpha)^{p_i(\beta-1)} s^{p_i(\gamma-1)} ds\right]^{1/p_i} \left[\int_0^t f^{q_i}(s) v^{q_i}(s)\, ds\right]^{1/q_i}. \end{aligned}$$

Par les Lemme 3 et 4, la dernière inégalité peut être réécrite comme suit

$$v(t) \leq \left(M_i t^{\theta_i}\right)^{\frac{1}{p_i}} \mathcal{A}_i^{\frac{1}{q_i}}(t) b(t) + K^{\frac{q-p}{p}} \left(M_i t^{\theta_i}\right)^{\frac{1}{p_i}} b(t) \left[\int_0^t f^{q_i}(s) v^{q_i}(s)\, ds\right]^{1/q_i} \quad \text{pour } t \in \mathbb{R}_+, \tag{3.7}$$

où

$$M_i = \frac{1}{\alpha} B\left[\frac{p_i(\gamma-1)+1}{\alpha}, p_i(\beta-1)+1\right], \quad \mathcal{A}_i(t) = \int_0^t f^{q_i}(s) A^{q_i}(s)\, ds,$$

et θ_i est donnée comme dans le Lemme 4, pour $i = 1, 2$.
En appliquant le Lemme 5 à (3.7), nous obtenons

$$\begin{aligned} v(t) &\leq \left(M_i t^{\theta_i}\right)^{\frac{1}{p_i}} \mathcal{A}_i^{\frac{1}{q_i}}(t) b(t) + K^{\frac{q-p}{p}} \left(M_i t^{\theta_i}\right)^{\frac{1}{p_i}} b(t) \left[1 - (1 - V_i(t))^{\frac{1}{q_i}}\right]^{-1} \\ &\quad \times \left(\int_0^t f^{q_i}(s) \left(M_i s^{\theta_i}\right)^{\frac{q_i}{p_i}} b^{q_i}(s) \mathcal{A}_i(s) V_i(s)\, ds\right)^{\frac{1}{q_i}}, \end{aligned} \tag{3.8}$$

où

$$V_i(t) = \exp\left(-K^{\frac{q_i(q-p)}{p}} \int_0^t f^{q_i}(s) \left(M_i s^{\theta_i}\right)^{\frac{q_i}{p_i}} b^{q_i}(s)\, ds\right).$$

Finalement, substituant (3.8) dans (3.5), considérant deux cas pour $i = 1, 2$ et en utilisant les paramètres α, β et γ pour indiquer p_i, q_i et θ_i dans (3.8), nous pouvons obtenir les estimations souhaitées (3.2) et (3.3), respectivement.

Remarque 1. (i) Dans (3.2) et (3.3), Nous n'avons pas seulement donné quelques nouvelles estimations à une classe d'inégalités intégrales non-linéaires faiblement singulières, mais aussi il faut noter que les fonctions $a(t)$ et $b(t)$ apparaissant dans (3.2) et (3.3) ne sont pas nécessairement satisfont la condition de non décroissance que certains résultats connus l'exige [7,8,10].

(ii) En utilisant l'inégalité de Bernoulli généralisée [13] à (3.2) et (3.3), nous pouvons obtenir quelques formules simples pour les estimations des solutions de (3.1) comme suit :

Théorème 2. Soient $u(t), a(t), b(t), f(t), p$ et q sont définies comme dans le Théorème 1, $u(t)$ satisfait (3.1). Alors pour tout $K > 0$ on a

(i) Si $\alpha \in (0, 1]$, $\beta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ et $\gamma \geq \dfrac{3}{2} - \beta$, alors

$$\begin{aligned} u(t) \leq & \left\{ a(t) + M_1^{\beta} t^{(\alpha+1)(\beta-1)+\gamma} b(t) \left[\mathcal{A}_1^{1-\beta}(t) + K^{\frac{q-p}{p}} \frac{M_1^{\beta}}{1-\beta} V_1^{-1}(t) \right.\right. \\ & \left.\left. \times \left(\int_0^t s^{\frac{(\alpha+1)(\beta-1)+\gamma}{1-\beta}} f^{\frac{1}{1-\beta}}(s)\, b^{\frac{1}{1-\beta}}(s)\, \mathcal{A}_1(s)\, V_1(s)\, ds \right)^{1-\beta} \right] \right\}^{\frac{1}{p}}, \end{aligned} \tag{3.9}$$

où M_1, $\mathcal{A}_1(t)$ et $V_1(t)$ sont définies comme dans le Théorème 1, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

(ii) Si $\alpha \in (0, 1]$, $\beta \in (0, \frac{1}{2}]$ et $\gamma > \dfrac{1-2\beta^2}{1-\beta^2}$, alors

$$\begin{aligned} u(t) \leq & \left\{ a(t) + M_2^{\frac{1+3\beta}{1+4\beta}} t^{\frac{[\alpha(\beta-1)+\gamma](1+4\beta)-\beta}{\beta}} b(t) \left[\mathcal{A}_2^{\frac{\beta}{1+4\beta}}(t) + K^{\frac{q-p}{p}} M_2^{\frac{1+3\beta}{1+4\beta}} \right.\right. \\ & \left.\left. \times \left(\frac{1+4\beta}{\beta}\right) V_2^{-1}(t) \left(\int_0^t s^{\frac{[\alpha(\beta-1)+\gamma](1+4\beta)-\beta}{\beta}} f^{\frac{1+4\beta}{\beta}}(s)\, b^{\frac{1+4\beta}{\beta}}(s)\, \mathcal{A}_2(s)\, V_2(s)\, ds \right)^{\frac{\beta}{1+4\beta}} \right] \right\}^{\frac{1}{p}}, \end{aligned} \tag{3.10}$$

où M_2, $\mathcal{A}_2(t)$ et $V_2(t)$ sont définies comme dans le Théorème 1, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

Preuve Par l'inégalité de Bernoulli généralisée [13], nous avons

$$(1 - V_i(t))^{\frac{1}{q_i}} < 1 - \frac{1}{q_i} V_i(t).$$

Alors

$$\left[1 - (1 - V_i(t))^{\frac{1}{q_i}}\right]^{-1} < q_i V_i^{-1}(t),$$

pour $i = 1, 2$, où $V_i(t)$ est définie comme dans le Théorème 1. En substituant les dernières inégalités dans (3.2) et (3.3) nous pouvons obtenir (3.9) et (3.10), respectivement.

Corollaire 1. Soient $u(t), a(t), b(t)$ et $f(t)$ sont définies comme dans le Théorème 1. Supposons que

$$u(t) \leq a(t) + b(t) \int_0^t (t-s)^{\beta-1} f(s) u(s) ds, \ t \in \mathbb{R}_+. \tag{3.11}$$

Alors :

(i) Si $\beta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$,on a

$$u(t) \leq a(t) + M_{11}^{\beta} t^{2\beta-1} b(t) \times \left[\mathcal{A}_{11}^{1-\beta}(t) + \frac{M_{11}^{\beta}}{1-\beta} V_{11}^{-1}(t) \int_0^t s^{\frac{2\beta-1}{1-\beta}} f^{\frac{1}{1-\beta}}(s) b^{\frac{1}{1-\beta}}(s) \mathcal{A}_{11}(s) V_{11}(s) ds \right], \tag{3.12}$$

où

$$M_{11} = B\left[1, \frac{2\beta-1}{\beta}\right], \qquad \mathcal{A}_{11}(t) = \int_0^t f^{\frac{1}{1-\beta}}(s) a^{\frac{1}{1-\beta}}(s) ds,$$

et

$$V_{11}(t) = \exp\left(-M_{11}^{\frac{\beta}{1-\beta}} \int_0^t s^{\frac{2\beta-1}{1-\beta}} f^{\frac{1}{1-\beta}}(s) b^{\frac{1}{1-\beta}}(s) ds \right), \quad \text{pour } t \in \mathbb{R}_+.$$

(ii) Si $\beta \in (0, \frac{1}{2}]$,on a

$$u(t) \leq a(t) + M_{12}^{\frac{1+3\beta}{1+4\beta}} t^{4\beta} b(t) \left[\mathcal{A}_{12}^{\frac{\beta}{1+4\beta}}(t) + \frac{1+4\beta}{\beta} M_{12}^{\frac{1+3\beta}{1+4\beta}} V_{12}^{-1}(t) \times \int_0^t s^{4\beta} f^{\frac{1+4\beta}{\beta}}(s) b^{\frac{1+4\beta}{\beta}}(s) \mathcal{A}_{12}(s) V_{12}(s) ds \right], \tag{3.13}$$

où

$$M_{12} = B\left[1, \frac{4\beta^2}{1+3\beta}\right], \qquad \mathcal{A}_{12}(t) = \int_0^t f^{\frac{1+4\beta}{\beta}}(s) a^{\frac{1+4\beta}{\beta}}(s) ds,$$

et

$$V_{12}(t) = \exp\left(-M_{12}^{\frac{1+3\beta}{\beta}} \int_0^t s^{4\beta} f^{\frac{1+4\beta}{\beta}}(s) b^{\frac{1+4\beta}{\beta}}(s) ds \right), \quad \text{pour } t \in \mathbb{R}_+.$$

Preuve Les formules (3.12) et (3.13) s'obtiennent en posant $p = q = \alpha = \gamma = 1$ dans le Théorème 2 et par un calcul simple, pour cela nous omettons les détails.
Remarque 2. L'inégalité (3.11) a été étudiée dans [7], mais ici nous n'avons pas seulement donné quelques nouvelles estimations qui ne sont pas en série de puissance compliquée, mais aussi d'éliminer la condition de non décroissante de la fonction $b(t)$.

Si $p = 2$, $q = \alpha = \gamma = 1$, nous pouvons obtenir l'inégalité intégrale singulière intéressante suivante de type Henry-Ou-Iang :

(à propos des inégalités de type Ou-Iang et leurs applications nous nous référons à [4] et les références citées).
Corollaire 2. Soientt $u(t), a(t), b(t)$ et $f(t)$ sont définies comme dans le Théorème 1. Supposons que

$$u^2(t) \leq a(t) + b(t)\int_0^t (t-s)^{\beta-1} f(s)\, u(s)\, ds, \ t \in \mathbb{R}_+. \tag{3.14}$$

Alors, pour tout $K > 0$ nous avons

(i) Si $\beta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$,on a

$$\begin{aligned} u(t) \ \leq\ & \left\{ a(t) + M_{11}^{\beta} t^{2\beta-1} b(t) \left[\widetilde{\mathcal{A}}_{11}^{1-\beta}(t) + K^{-\frac{1}{2}} \frac{M_{11}^{\beta}}{1-\beta} \widetilde{V}_{11}^{-1}(t) \right.\right. \\ & \left.\left. \times \int_0^t s^{\frac{2\beta-1}{1-\beta}} f^{\frac{1}{1-\beta}}(s)\, b^{\frac{1}{1-\beta}}(s)\, \widetilde{\mathcal{A}}_{11}(s)\, \widetilde{V}_{11}(s)\, ds \right] \right\}^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \tag{3.15}$$

où

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{A}}_{11}(t) &= \left(\frac{1}{2}K^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{1-\beta}} \int_0^t f^{\frac{1}{1-\beta}}(s) \left(\frac{a(s)}{K}+1\right)^{\frac{1}{1-\beta}} ds, \\ \widetilde{V}_{11}(t) &= \exp\left[-\left(\frac{M_{11}^{\beta}}{K^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{1-\beta}} \int_0^t s^{\frac{2\beta-1}{1-\beta}} f^{\frac{1}{1-\beta}}(s)\, b^{\frac{1}{1-\beta}}(s)\, ds \right] \end{aligned}$$

et M_{11} est définie comme dans le Corollaire 1, pour $t \in \mathbb{R}_+$.

(ii) Si $\beta \in (0, \frac{1}{2}]$,on a

$$\begin{aligned} u(t) \ \leq\ & \left\{ a(t) + M_{12}^{\frac{1+3\beta}{1+4\beta}} t^{\frac{4\beta^2}{1+4\beta}} b(t) \left[\widetilde{\mathcal{A}}_{12}^{\frac{\beta}{1+4\beta}}(t) + K^{-\frac{1}{2}} M_{12}^{\frac{1+3\beta}{1+4\beta}} \left(\frac{1+4\beta}{\beta}\right) \widetilde{V}_{12}^{-1}(t) \right.\right. \\ & \left.\left. \times \left(\int_0^t s^{\frac{4\beta^2}{1+4\beta}} f^{\frac{1+4\beta}{\beta}}(s)\, b^{\frac{1+4\beta}{\beta}}(s)\, \widetilde{\mathcal{A}}_{12}(s)\, \widetilde{V}_{12}(s)\, ds \right)^{\frac{\beta}{1+4\beta}} \right] \right\}^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \tag{3.16}$$

où

$$\widetilde{A}_{12}(t) = \left(\frac{1}{2}K^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1+4\beta}{\beta}} \int_0^t f^{\frac{1+4\beta}{\beta}}(s)\left(\frac{a(s)}{K}+1\right)^{\frac{1+4\beta}{\beta}} ds,$$

$$\widetilde{V}_{12}(t) = \exp\left[-\left(\frac{M_{12}^{1+3\beta}}{K^{\frac{1+4\beta}{2}}}\right)^{\frac{1}{\beta}} \int_0^t s^{\frac{4\beta^2}{1+\beta}} f^{\frac{1+4\beta}{\beta}}(s)\, b^{\frac{1+4\beta}{\beta}}(s)\, ds\right]$$

et M_{12} est définie comme dans le Corollaire 1, pour $t \in \mathbb{R}_+$.

Preuve Les inégalités (3.15) et (3.16) s'obtiennent par un calcul simple, en posant $p = 2$, $q = \alpha = \gamma = 1$ dans le Théorème 2, pour cela nous omettons les détails.

Chapitre 4

Application

Dans ce chapitre, nous allons indiquer l'utilité de nos principaux résultats dans l'étude de la bornitude des solutions de certaines équations différentielles fractionnaires avec l'opérateur fractionnaire de Riemann-Liouville (R-L)
Considérons le problème fractionnaire de Podlubny [14] suivant :

$$D^{\alpha} y(t) = f(t, y(t)), \tag{4.1}$$

$$D^{\alpha-1} y(t) \mid_{t=0} = \eta, \tag{4.2}$$

où $0 < \alpha < 1,\ 0 \leq t < T \leq +\infty,\ f : [0, T) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; et D^{α} désigne l'opérateur de dérivée de R-L :
Du problème (4.1)-(4.2) nous pouvons obtenir l'équation intégrale fractionnaire

$$y(t) = \frac{\eta}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, y(\tau))\, d\tau, \tag{4.3}$$

qui est équivalente au problème avec condition initiale (4.1)-(4.2), (cf.[14, pp.127-128]).
Théorème 3. Soit $0 < \alpha \leq 1$ et f une fonction continue satisfaite la condition

$$|f(t, y)| \leq g(t) |y|^{q}, \tag{4.4}$$

où $0 < q \leq 1$ est une constante, $g(t)$ est une fonction continue non négative pour $0 \leq t < T \leq +\infty$.
Alors pour toute solution $y(t)$ du problème avec condition initiale (4.1)-(4.2) on a
(i) Si $\alpha \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, alors

$$|y(t)| \leq \frac{|\eta|}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} + \frac{\widetilde{M}_{11}^{\alpha} t^{2\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left[\mathcal{A}_{1q}^{1-\alpha}(t) + \frac{K^{q-1} \widetilde{M}_{11}^{\alpha}}{(1-\alpha)\Gamma(\alpha)} \widetilde{V}_{1q}^{-1}(t) \right.$$
$$\left. \times \int_0^t s^{\frac{2\alpha-1}{1-\alpha}} g^{\frac{1}{1-\alpha}}(s)\, \mathcal{A}_{1q}(s)\, \widetilde{V}_{1q}(s)\, ds \right], \quad 0 < t < T \leq +\infty, \tag{4.5}$$

où

$$A_q(t) = \frac{q|\eta|}{K^{1-q}\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} + (1-q) K^q,$$

$$\widetilde{M}_{11} = B\left[1, \frac{2\alpha-1}{\alpha}\right], \quad \mathcal{A}_{1q}(t) = \int_0^t g^{\frac{1}{1-\alpha}}(s) A_q^{\frac{1}{1-\alpha}}(s)\,ds$$

et

$$\widetilde{V}_{1q}(t) = \exp\left[-\left(\frac{K^{1-q}\widetilde{M}_{11}^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \int_0^t s^{\frac{2\alpha-1}{1-\alpha}} g^{\frac{1}{1-\alpha}}(s)\,ds\right];$$

(ii) Si $\alpha \in (0, \frac{1}{2}]$, alors

$$|y(t)| \leq \frac{|\eta|}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} + \frac{\widetilde{M}_{12}^{\frac{1+3\alpha}{1+4\alpha}} t^{4\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \left[\mathcal{A}_{2q}^{\frac{\alpha}{1+4\alpha}}(t) + \frac{K^{q-1}\widetilde{M}_{12}^{\frac{1+3\alpha}{1+4\alpha}}(1+4\alpha)}{\alpha\Gamma(\alpha)} \widetilde{V}_{2q}^{-1}(t)\right.$$
$$\left.\times\left(\int_0^t s^{4\alpha} g^{\frac{1+4\alpha}{\alpha}}(s)\,\mathcal{A}_{2q}(s)\,\widetilde{V}_{2q}(s)\,ds\right)^{\frac{\alpha}{1+4\alpha}}\right], \quad 0 < t < T \leq +\infty, \tag{4.6}$$

où

$$\widetilde{M}_{12} = B\left[1, \frac{4\alpha^2}{1+3\alpha}\right], \quad \mathcal{A}_{2q}(t) = \int_0^t g^{\frac{1+4\alpha}{\alpha}}(s) A_q^{\frac{1+4\alpha}{\alpha}}(s)\,ds$$

et

$$\widetilde{V}_{2q}(t) = \exp\left[-\left(\frac{K^{q-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\frac{1+3\alpha}{\alpha}} \widetilde{M}_{12}^{\frac{1+3\alpha}{\alpha}} \int_0^t s^{4\alpha} g^{\frac{1+4\alpha}{\alpha}}(s)\,ds\right].$$

Preuve De (4.3) et (4.4) nous avons

$$\begin{aligned}
|y(t)| &\leq \frac{|\eta|}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} |f(\tau, y(\tau))|\,d\tau \\
&\leq \frac{|\eta|}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} g(\tau) |y(\tau)|^q\,d\tau.
\end{aligned}$$

Une application du Théorème 2 (avec $a(t) = \frac{|\eta|}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1}$, $b(t) = \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}$, $f(t) = g(t)$, $p = 1$, $\alpha = \gamma = 1$ et $\beta = \alpha$) à la dernière inégalité donne les estimations souhaitées (4.5) et (4.6).

Bibliographie

[1] V. Lakshmikantham, S. Leela, Differential and Integral Inequalities, Theory and Applications, Academic Press, New York, 1969.

[2] D.D. Bainov, P. Simeonov, Integral Inequalities and Applications, Kluwer Academic Publishers, 1992.

[3] R.P. Agarwal, Difference Equations and Inequalities, Marcel Dekker, New York, 1993.

[4] B.G. Pachpatte, Inequalities for Differential and Integral Equations, Academic Press, New York, 1998.

[5] D. Henry, Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations, Lecture Notes in Math., vol. 840, Springer-Verlag, New York/Berlin, 1981.

[6] H. Sano, N. Kunimatsu, Modified Gronwall's inequality and its application to stabilization problem for semilinear parabolic systems, Systems Control Lett. 22 (1994) 145–156.

[7] H.P. Ye, J.M. Gao, Y.S. Ding, A generalized Gronwall inequality and its application to a fractional differential equation, J. Math. Anal.Appl. 328 (2007) 1075–1081.

[8] M. Medved, A new approach to an analysis of Henry type integral inequalities and their Bihari type versions, J. Math. Anal. Appl. 214 (1997)349–366.

[9] F.C. Jiang, F.W. Meng, Explicit bounds on some new nonlinear integral inequalities with delay, J. Comput. Appl. Math. 205 (2007) 479–486.

[10] Q.H. Ma, E.H. Yang, Estimations on solutions of some weakly singular Volterra integral inequalities, Acta Math. Appl. Sin. 25 (2002) 505–515.

[11] A.P. Prudnikov, Yu.A. Brychkov, O.I. Marichev, Integrals and Series, Elementary Functions, vol. 1, Nauka, Moscow, 1981 (in Russian).

[12] D. Willett, Nonlinear vector integral equations as contraction mappings, Arch. Ration. Mech. Anal. 15 (1964) 79–86.

[13] D.S. Mitrinovi ́c, Analytic Inequalities, Springer-Verlag, Berlin, 1970.

[14] I. Podlubny, Fractional Differential Equations, Academic Press, New York, 1999.