République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 – Guelma

Faculté de Mathématiques et de l'Informatique et Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire de Fin d'Etude
Master Académique en Mathématiques
Option : EDP

THEME

Equations de l''ecoulement de sang dans les corps animaux

Présenté par :
Harrat Aicha

Dirigé par : **Dr. M. Z. Aissaoui** **MCA** **Univ- Guelma**

Jury :
Examinateur 1 : Dr. H. Fujita Yashima **Prof** **Univ-Guelma**
Examinateur 2 : Dr. M .Sellami **MCA** **Univ-Guelma**

Session Juin 2012

Equations de l'écolement du sang dans les corps animaux

Harrat Aicha

Mémoire de master en mathématiques

Université de Guelma

3 juin 2012

Dédicace

Je rends grâce à Dieu de m'avoir donné le courage et la volonté ainsi que

La conscience d'avoir pu terminer ce travail.

Je Dédié ce travail à mon mari "MOHAMED" pour leur contribution, leur

Soutien et leurs patience durant toutes l'année et qui m'ont

Toujours aidés et encouragés aux moments opportuns.

A mes très chères patents, surtout ma mère pour toute sa tendresse et assistance

Nécessaire et qui ce s'est sacrifiée jour après jour notre bonheur;

Que Dieu me le garde.

A mes très chères frères: Farouk et Ali. Et a toute ma grande famille.

A tous ceux qui j'aime Et A tous ceux qui mon aidé.

A tous mes enseignants Et A tous mes amies,

A tous je leurs souhaite une vie pleine de joie et de bonheur.

AICHA.

❄ *Remerciment* ❄

Au nom d'Allah, le tout miséricordieux,

le très miséricordieux

La reconnaissance est la mémoire du cœur

≼ LE GRAND MERCI POUR ALLAH ≽

Je tiens à remercier sincèrement le prof. Hisao Fujita Yashima qui en tant que Directeur de mémoire, s'est toujours montré à l'écoute et très disponible tout au long de la réalisation de ce mémoire, ainsi pour l'inspiration, l'aide et le temps qu'il a bien voulu me consacrer et sans qui ce mémoire n'aurait jamais vu le jour.

Mes remerciements s'adressent également à Monsieur Dr. Aissaoui Med Zine : directeure du Laboratoire de Mathématiques appliquées et de modélisation, (LMAM), pour sa générosité et la grande patience dont il a su faire preuve malgré ses charges académiques et professionnelles.

J'adresse également mes remerciements, à l'ensemble du laboratoire (LMAM) ; leur accueil chaleureux et leur aide précieuse ont contribué fortement à l'aboutissement de ce travail.

☺**Merci à tous et à toutes.**

Table des matières

Résumé **3**

Introduction **3**

1 Écoulement du sang dans les corps animaux **6**

1.1 Caractéristiques Générales Dans La Circulation Sanguine . . . 6

1.2 Propriétés rhéologiques du sang 9

2 Une transformation du domaine **16**

2.1 Introduction 16

2.2 Rappele : Équations de Navier-Stokes 17

2.3 Le problème de Navier-Stokes sur un domaine dépandant du temps 18

2.4 Réduction à un domaine cylindrique 21

3 Une transformation du problème **23**

3.1 Lemme fondamentale 26

3.1.1 Conservation de la divergence 26

3.1.2 Lemme de Ladyzhenskaya 28

3.2 Transformation des équations 29

4 Approximation de Galerkin **35**

4.1 Quadre fonctionnel 35

4.2 Méthode d'approximation de Galerkin 39

Résumé

Le présent trvail consiste en la modélisation d'écoulement du sang considéré comme un fluide visqueux et incompressible. On considère le système d'équations qui trduit son mouvement dans un domaine qui modélise la veine et étudié quelques propriétés de ce système d'équations en tenant comptes des propriétès du domaine modélisant la veine.

Introduction

L'application des concepts et des méthodes de l'hydrodynamique aux fluides biologiques, et tout particulièrement au sang, s'est très souvent heurtée aux difficultés inhérentes aux propriétés de ces fluides et aux caractéristiques de leurs écoulements. Ce sont pourtant ces particularités qui, pour la plupart, en font un sujet d'étude intéressant, non seulement pour des applications bio-médicales, mais aussi pour l'originalité des problèmes posés. Souvent, dans le passé, des résultats bien établis en hydrodynamique classique ont été trop hâtivement appliqués en physiologie, quelquefois sans même s'assurer, pour ces applications, de la validité des hypothèses de départ. Il semble bien, au contraire, que c'est en traitant comme spécifiques les problèmes posés par les écoulements des fluides biologiques que des progrès peuvent être espérés.

Rappelons néanmoins qu'il ne peut s'agir d'hydrodynamique que si les conditions de validité d'une description continue sont satisfaites : il y aura lieu d'examiner dans chaque cas les échelles respectives des éléments du système. Ainsi, le sang, suspension concentrée de globules rouges (de dimension $\simeq 10\mu$), se comporte comme un fluide newtonien dans les gros vaisseaux (de diamètres ϕ, compris entre 2 et 20 mm) ; mais son écoulement dans les capillaires ($10 \lesssim \phi \lesssim 4\mu$.), partiellement obstrués par les globules rouges, ~~est~~ et celui d'un fluide continu (le plasma sanguin) autour d'obstacles déformables (les globules rouges) ; pour les petits vaisseaux ($0.5 \lesssim \phi \lesssim 2mm$), la description continue sera encore valable ; mais dans les vaisseaux encore plus petits ($50 \lesssim \phi \lesssim 500\mu$.) apparaîtront des effets nouveaux (comme la diminution de la viscosité du sang, avec le diamètre du vaisseau (effet Fahraeus-Lindqvist), que certains auteurs ont tenté d'interpréter comme écarts au comportement continu).

Chapitre 1

Écoulement du sang dans les corps animaux

Nous nous proposons ici, tout d'abord, de passer en revue les principaux problèmes rencontrés en hémodynamique.

1.1 Caractéristiques Générales Dans La Circulation Sanguine

Pour les écoulements sanguins, les caractéristiques spécifiques des problèmes posés se trouvent principalement dans :

La nature des fluides

Le sang est en effet une suspension concentrée de plusieurs espèces de particules (globules rouges, globules blancs, plaquettes) dans du plasma (solution saline de différentes protéines), suspension qui présente, nous le verrons plus loin, des propriétés non newtoniennes pour les faibles cisaillements de vitesse.

Les caractéristiques (forme et sructure) des conduits

Les vaisseaux présentent une très grande diversité de forme et de dimension (coudes, embranchements ; singularités normales (valves cardiaques [1] ; valvules des grosses veines) ou pathologiques (rétrécissements ou sténoses ; dilatations ou anévrismes) ; leurs propriétés rhéologiques [1] (viscoélasticité, non-linéarité, anisotropie) reflètent une structure pariétale plus ou moins complexe [couches successives de fibres diverses (élastine, collagène) disposées en hélices ; couches musculaires dans certains cas .

La nature Des écoulements, essentiellement non stationnaire

Si le caractère puisé de l'écoulement - pulsations associées aux contractions cardiaques, au fonctionnement des valves et à la distensibilité de l'aorte (qui régule l'impulsion de pression) se fait sentir principalement dans la circulation artérielle, les écoulements dans les petits vaisseaux (artérioles, veinules) et dans les capillaires sont intermittents, les artérioles étant contrôlées à leurs entrées par de petits sphincters [1], tandis que la circulation veineuse, compliquée par la structure des veines et par l'existence de zones stagnantes (stase veineuse), est quasi continue. Certaines circonstances physiologiques rendent ces écoulements encore plus complexes : on peut citer, associés à l'existence d'une couche plasmatique (vide d'hématies), près de la périphérie des petits vaisseaux (cf 4), le phénomène d'écrémage plasmatique [6], ou encore, les vaisseaux collapsibles, rencontrés dans la circulation pulmonaire, où une pression (alvéolaire) variable écrase plus ou moins les conduits capillaires, permettant ainsi un contrôle de l'oxygénation, par la mise à contribution d'un plus ou moins grand nombre de vaisseaux [7].

Existance des régimes instables, voire turbulants

Alors que l'écoulement du sang est, dans la plus grande partie du système circulatoire, dominé par les effets de viscosité, l'écoulement dans les grosses artères, surtout derrière les valves et les embranchements, présente, près des instants où le débit est maximum, de nombreuses fluctuations de pression et de vitesse, fluctuations qui semblent associées à des instabilités de couche limite ou de paroi, voire à de la turbulence [1] ; ces phénomènes sont à l'origine de bruits (qui, pour le diagnostic, intéressent la phonocardiologie), mais pourraient aussi contribuer aux accidents vasculaires (observés en aval des sténoses, par exemple : détérioration mécanique de la paroi, coefficients de transport augmentés ...) sans oublier l'action sur les éléments figurés du sang (hémolyse, en particulier) [1].

Importance des phénomènes de transport de masse, aussi bien au sein du fluide qu'au travers des parois vasculaires

Le caractère non stationnaire des écoulements et les caractéristiques géométriques des vaisseaux conduisent à un transport diffusif augmenté par la convection, les gradients de concentration ainsi développés contrôlant, au moins en partie, les échanges transpariétaux; ces mécanismes interviennent donc dans l'évolution spatiale et temporelle du fluide et des parois (variations des compositions chimiques du fluide, de celles de la paroi et par suite de sa structure ...) , d'où leur importance dans l'étude des maladies vasculaires (sténoses, thromboses, anévrismes...).

Intervention, in vivo, de mécanismes complexes de controle et de régulation

[changeant soit les caractéristiques de l'écoulement (pression et rythme cardiaque), soit la composition du sang, soit la géométrie des vaisseaux (par exemple, les vasodilatation et vasoconstriction associées aux stimulis thermiques)], pesant sur la reproductibilité des observations in vivo, et par suite, sur leur interprétation. Ces différentes caractéristiques se rencontrent, à des-degrés divers, dans les trois grands domaines, eux mêmes très vastes, qu'il est possible de distinguer en hydrodynamique sanguine : la grande circulation, la microcirculation et la circulation capillaire . Mais on peut retenir, pour l'essentiel, que ce sont principalement : (i) les propriétés rhéologiques des vaisseaux qui interviennent dans la grande circulation, (ii) les propriétés rhéologiques des globules rouges : et surtout de leurs membranes, dans la circulation capillaire , tandis qu'entre les deux, la microcirculation est dominée par les caractéristiques rhéologiques du sang : nous allons nous limiter, dans la suite à ce dernier sujet, d'où seront omises, malgré leur importance physiopathologique (thrombose, sludge.. .), les questions relevant des écarts à la stabilité des suspensions (floculation, coagulation.. .).

1.2 Propriétés rhéologiques du sang

Composition du sang

Le sang est une suspension très concentrée (environ 45 cellulaires (globules rouges et blancs, plaquettes ...) ; le liquide suspendant est du plasma, solution aqueuse d'électrolytes et de substances organiques, en grande partie des protéines.

La concentration en volume des globules rouges est déterminée par centrifugation qui permet de séparer les cellules du plasma : la fraction du volume occupé par les cellules est l'hématocrite H qui ne donne qu'une valeur approchée de la concentration volumique vraie. Lorsque cette séparation résulte du phénomène de coagulation, on obtient un caillot et du sérum, qui pratiquement est du plasma privé d'une des protéines plasmatiques, le fibrinogène, qui a constitué la trame du caillot.

Les globules rouges sont des disques biconcaves dont les dimensions dépassent la taille critique pour le mouvement brownien, et, par conséquent, la suspension de sang, au repos, montre une sédimentation (c'est d'ailleurs la vitesse de cette dernière qui est utilisée en clinique) ; néanmoins, en écoulement, ce phénomène n'a pas lieu et la suspension reste stable. Le contenu des globules rouges est constitué surtout d'hémoglobine, en solution saturée ou sous forme cristallisée dont la viscosité, associée aux propriétés mécaniques de la membrane, joue très certainement un rôle important dans les propriétés rhéologiques du sang.

Les protéines plasmatiques sont de quatre types : les albumines et les globulines, qui en représentent la presque totalité, les lipoprotéines et le fibrinogène, ce dernier étant intimement lié au phénomène de coagulation.

Méthodes d'études

Les très grands progrès de la biochimie et de la biologie moléculaire ont permis un grand essor de l'hématologie ; mais les études globales du sang, notamment celles des propriétés en écoulement, ont rencontré de grandes

difficultés : citons comme causes principales la forte concentration en éléments figurés (qu'on peut, pour simplifier, ramener aux seuls globules rouges), l'absence de stabilité (coagulation, sédimentation, vieillissement), l'influence de la température et les variations de la composition physico-chimique du plasma. Une revue détaillée des moyens d'étude sortirait du cadre de cet exposé : nous nous limiterons à un bref rappel de quelques points importants.
Les techniques viscosimétriques, notamment en impulsions, ont été utilisées, .Mais, de très grandes précautions doivent être prises pour les mesures et leur interprétation et nous y reviendrons, il semble bien que seules les mesures obtenues sur viscosimètres à cylindres coaxiaux soient à retenir (elles seront d'ailleurs les seules utilisées dans la suite pour les confrontations théorie-expérience). Plus récemment, les techniques optiques, biréfringence d'écoulement, vélocimétrie et mesures de concentration (anémométrie laser à effet Doppler, par ex.) ont donné de très bons résultats. Bien que limitées elles aussi, les techniques ultra-sonores pourraient être envisagées.
Pour l'étude théorique des systèmes dispersés (modèles qui devraient donc s'appliquer aussi à d'autres types de suspensions) on peut séparer les différentes tentatives en deux groupes : (i) celles relevant de la mécanique statistique et qui ont été regroupées sous le terme microrhéologie ; (ii) celles qui s'appuient sur l'hydrodynamique des milieux quasi homogènes.

Mouvement des particules individuelles suspendues dans un écoulement turbulaire

Soumis au cisaillement de l'écoulement, le globule rouge sanguin a un comportement intermédiaire entre celui de petits disques rigides et celui de gouttelettes fluides : en plus de l'entraînement à une vitesse v_p, très voisine de celle du fluide v_f (tant que le rapport $\lambda = a/R$, du rayon de la particule à celui du tube reste assez petit, disons $\lambda \lesssim 10^{-1}$), on observe que :

a) le Globule Rouge Durci (G. R. D.) à la glutaraldéhyde tourne comme un disque rigide avec le même rapport d'axes équivalent ($r_c \simeq 0,4$) ;

b) le Globule Rouge Normal (G. R. N.) tourne de moins en moins, en même temps qu'il s'oriente, en moyenne, dans l'écoulement au fur et à mesure que le cisaillement de vitesse croît ;

c) comme la gouttelette (dont la forme, et par suite l'alignement avec l'écoulement, résulte de l'équilibre tension capillaire-frottement visqueux dû au cisaillement), le globule rouge se déforme, mettant alors en jeu les propriétés mécaniques de sa membrane et la viscosité du fluide interne;

d) une migration radiale est observée ou non, suivant la nature des particules et suivant la valeur du nombre de Reynolds attaché à la particule :

$$Re_p = a(v_f - v_p)/\nu \simeq \lambda^3 Re_f$$

(où $Re_f = v_f R/\nu$ est attaché à l'écoulement).

Lorsque $Re_f \lesssim 10^{-5}$, les gouttelettes migrent vers l'axe, tandis que les particules rigides, quelle que soit leur forme, restent à la même distance de l'axe. Lorsque $Re_p \gtrsim 10^{-4} - 10^{-3}$l'approximation de Stokes n'est plus valable et on doit prendre en compte des effets d'inertie : une migration radiale a lieu pour les particules rigides, qui, venant du bord du tube et migrant vers l'axe, ou venant de la région centrale et migrant vers les bords, vont s'accumuler dans une position excentrée, à environ $r/R \simeq 0,6$ (effet de pincement tubulaire) ; dans les mêmes conditions, les gouttelettes continuent à migrer vers l'axe, avec une position d'équilibre $r \to O$. L'existence d'un Re_p critique pourrait être due aux écarts à l'approximation de Stokes associés à des effets de sillage des particules rigides , mais ces effets seront beaucoup plus faibles pour des particules déformables, et ils ne devraient pas devoir intervenir de manière importante lorsque la concentration devient élevée .

e) lorsque le nombre de particules augmente, les effets des interactions deviennent prépondérants : la dynamique de la collision de deux particules, et inversement, de la rupture d'une chaîne de particules. a été étudiée ([1]). Malheureusement, ces résultats sont difficilement exploitables dès que la concentration dépasse quelques pour-cent, donc pour les suspensions étudiées ici.

Hémorhéologie

Caractéristiques générales de la viscosité sanguine

a) La viscosimétrie élémentaire (utilisant un tube capillaire par ex.) montre d'emblée les principaux facteurs dont dépend le coefficient de viscosité η du sang :

- la concentration en volume c des globules rouges (que nous distinguerons dans toute la suite de l'hématocrite H),

- la vitesse de cisaillement γ

- la viscosité η_p du plasma, elle-même fonction des différents constituants en solutions, et de leurs concentrations respectives $c_l, c_2, ...$ notamment celles en fibrinogène (principal agent de l'agrégation) et en électrolytes (influençant la pression osmotique),

- la température T.

b)Ces propriétés sont montrer dans ([1],FIG1 page C1-12], pour différentes valeurs de γ, soit pour la suspension saline (liquide de Ringer), soit pour le plasma, l'observation d'une viscosité relative η/η_p, pratiquement indépendante de la température T, prouve que la dépendance en T est tout entière contenue dans la viscosité du fluide suspendant. On a donc une viscosité relative :

$$\eta_r = \frac{\eta}{\eta_p} = \eta_r(c, \gamma) \tag{1.1}$$

avec

$$\eta_p = \eta_p(T, c_1, c_2, ...). \tag{1.2}$$

c) La diminution de η_r, lorsque γ augmente, s'interprète comme résultant de la destruction des agrégats de particules (rouleaux de globules rouges et réseau de rouleaux) : aux forts cisaillements, le sang est un fluide newtonien, ces structures étant alors complètement détruites.

Relation viscosité-concentration dans le domaine des grands cisaillements.

En microrhéologie a été défini le concept de volume effectif V_E d'une particule ; c'est la région où se fait sentir la modification des lignes d'écoulement, due à la présence de la particule ; par suite, V_E va influer fortement sur la loi $\eta_r(c)$.

a) Le rapport V_E/V_p du volume effectif au volume réel V_p de la particule

dépend de différents facteurs. Pour les particules rigides, c'est un facteur de forme qui intervient, le volume effectif (et par suite la viscosité) étant d'autant plus important que l'écart à la sphéricité est grand ; pour les particules déformables, ces facteurs sont, les propriétés mécaniques de surface (tension superficielle d'un film liquide, élasticité d'une membrane...), la viscosité η_i du fluide intérieur à la particule et la viscosité η_p du fluide suspendant. Pour les globules rouges, intermédiaires entre ces deux cas extrêmes, ces différents facteurs interviendront ; rigidité des parois ([1], Fig. 2, page C1-13) et viscosité de la solution d'hémoglobine ([1], Fig. 3, page C1-13), viscosité du fluide suspendant.
Différents modèles prenant en compte ces facteurs ont été proposés pour étendre aux fortes concentrations la loi d'Einstein $\eta_r = 1 + 2,5c$. La figure 4([1], Fig. 4, page C1-13) donne les courbes $\eta_r(c)$ pour différents types de particules

c) S'appuyant sur un principe d'énergie dissipée extrémale, une approche variationnelle [1] a permis de proposer [1] pour les suspensions concentrées, une nouvelle loi $\eta_r(c)$:

$$\eta_r = (1 - \frac{1}{2}[\eta]c)^{-2} \tag{1.3}$$

Chapitre 2

Une transformation du domaine

2.1 Introduction

Notre domaine Ω n'est pas fixé (il dépand du temps). et le problème de mouvement d'un fluide dans un domaine varriable pose de difficulté à l'étude de l'équations qui d'écrit le mouvement de fluide.

La difficulté du problème réside donc dans la dépendance de Ω par rapport à t, qu'on est-il lorsqu'on étudie ces equation de façon globale en temps ? Autrement dit, on veut résoudre les équation de Navier-Stokes sur un domaine a priori non cylindrique de la forme :

$$\widehat{Q} = \bigcup_{0 \leq t \leq T} \{\Omega_t \times t\}.$$

En premier lieu, nous supposons que ce domaine non cylindrique s'envoie dans un domaine cylidrique (via un difféomorphisme φ), c'est à dire de la forme

$$\widehat{Q} = \Omega \times [0, T].$$

Ou Ω disigne un domaine bornée de $\mathbb{R}^3$.

Sous certaine hypothèse, cette transformation laissera invariant des propriétés importants comme la conservation de la divergence dans les équations de Navier-Stokes sur le domaine cylindrique Q et φ établit une bijection entre les solutions du premier système est les solutions du second système.

2.2 Rappele : Équations de Navier-Stokes

Les èquation de Navier Stokes forment un modèle mathématique dérivé à partir des lois de conservation qui décrivent l'écoulement d'un fluide. Ce modèle est bien accepté et utilisé par les ingénieurs et les physiciens. il traduit le mouvement d'un fluide visqueux et incompressibles de la façon suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v + \nabla p = \nu \Delta v + f. \\ \nabla \cdot v = 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

$v = v(x,t)$ le vecteur vitesse au point x et à l'instant t.

$p = p(x,t)$ la pression (scalaire) au point x et à l'instant t.

ν est le coefficiet de viscosité.

f la force extérieur.

En exprimant les composantes explicitement, le système d'equations de Navier-Stokes s'écrit :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_i}{\partial t} + \sum\limits_{j=1}^{3} v_j \dfrac{\partial v_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial p}{\partial x_i} = f_i + \nu \sum\limits_{j=1}^{3} \dfrac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} \qquad i = 1,2,3 \\ \sum\limits_{j=1}^{3} \dfrac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0 \end{cases} \tag{2.2}$$

ce système d'équations doit être envisagée dans un domaine de $\mathbb{R}^3$ et doit être complété par les conditions aux limites. Si on le considère dans un domaine fixé (indépendant du temps) et bornée Ω, les conditions aux limites plus simples sont celle de l'adhérence, c'est à dire :

$$v = 0 \qquad sur\ \partial\Omega$$

La solution généralisée (faible)v, que J.Leray a appellé turbulente est définie par la relation :

$$\begin{aligned}&\int_0^T \int_\Omega \Big(- v \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nu \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} - \sum_{i,j=1}^{3} v_j v_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \Big) dx dt = \\ &= \int_\Omega v_0 \cdot \varphi(0,.) dx + \int_0^T \int_\Omega f \cdot \varphi dx dt\end{aligned} \tag{2.3}$$

Pour toute fonction φ suffisament régulière telle que :
$\varphi(T,.) = 0, \qquad \nabla \cdot \varphi = 0, \qquad \varphi|_{\partial\Omega} = 0.$

2.3 Le problème de Navier-Stokes sur un domaine dépandant du temps

On s'intéresse aux équations de Navier-Stokes sur un domaine $\widehat{Q}$ de $\mathbb{R}_x^3 \times \mathbb{R}_t$ qui "bouge" au cours du temps t , pour $t \in [0,T]$ et $T > 0$.
plus précisément, on considère un domaine $\widehat{Q}$ de $\mathbb{R}_x^3 \times \mathbb{R}_t$ qui est la réunion des ouverts $\Omega_t \in \mathbb{R}_x^3$ et $t \in [0,T]$, où Ω_t est l'image d'un ensemble fixé Ω_0, par un difféomorphisme que l'on définie ultérieurement,
Les point de Ω_t sont représenté par $x = (x_1, x_2, x_3)$
Le domaine non cylindrique $\widehat{Q}$ de $\mathbb{R}_x^3 \times \mathbb{R}_t$ est définie par :

$$\widehat{Q} = \bigcup_{0 \leq t \leq T} \{\Omega_t \times \{t\}\}.$$

Si on désigne par Γ_t la frontière de Ω_t , alors la frontière de $\widehat{Q}$ sera :

$$\widehat{\Sigma} = \bigcup_{0 \leq t \leq T} \{\Gamma_t \times \{t\}\}.$$

Hypothèse 1

On supose que la frontère Γ_t est imperméable, c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'entrée ni sortie du fluide du domaine Ω_t ~~est~~ et Ω_t est bornée, Alors son volume doit être invariant. C'est la conséquence de la conservation de la masse et de l'incompréssibilité du fluide. On suppose donc que :

$$\boxed{vol(\Omega_t) = vol(\Omega_0)} \qquad \forall t \in I$$

□

Formulons maintenant les conditions aux limites ; soit x_0 le point générique de la frotière $\Gamma_0 \times I (= [0, T])$ de telle sorte que la frontière Γ_t de Ω_t est définie par :

$$\Gamma_t = \{x = \overrightarrow{\gamma}(x^0; t) \ \ / \quad x^0 \in \Omega_0\}$$

La variation de cette fonction par rapport à t $\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{\gamma}(x^0; t)$ est exactement égale à la vitesse du point matériele x^0 à l'instant t. Pour cette raison définissons la fonction $\overrightarrow{a}(x; t)$ par la relation :

$\overrightarrow{a}(x; t) = \frac{d}{dt}\overrightarrow{\gamma}(x^0; t)$ pour $x = \overrightarrow{\gamma}(x^0; t)$ et $t \in [0, T]$.

Il est évident que $x = \overrightarrow{\gamma}(x^0, t) \in \Gamma_t$, et donc $\overrightarrow{a}(x; t)$ est définie sur Γ_t. Pour la fonction $\overrightarrow{a}(x; t)$ on a la propriété suivante :

Proposition 2.2.1 :

On a : $\displaystyle\int_{\partial\Omega_t} \overrightarrow{a}(x; t) \cdot \overrightarrow{n}\, ds = 0\,;$

où $\overrightarrow{n}$ disigne le vecteur normal à la frontère Γ_t orienté vers l'extérieur.$\square$

démonstration

On rappelle que le volume de Ω_t est constant, donc on a

$$\frac{d}{dt} vol(\Omega_t) = 0.$$

D'autre part on a :

$$\frac{d}{dt} vol(\Omega_t) = \int_{\partial\Omega_t} \overrightarrow{a}(x,t) \cdot \overrightarrow{n} dS$$

Ce qui implique :

$$\int_{\partial\Omega_t} \overrightarrow{a}(x,t) \cdot \overrightarrow{n} dS = 0$$

D'ou la proposition.$\square$

Finalement on propose le problème de Navier-Stokes sur un domaine dépendant du temps (non cylindrique) :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v + \nabla p = \nu \triangle v + f. & sur\ \widehat{Q} \\ \nabla \cdot v = 0. & sur\ \widehat{Q} \\ v = a. & sur\ \Gamma_t \end{cases} \tag{2.4}$$

Le domaine $\widehat{Q}$ dans lequel on étudie alors ces équations de Navier-Stokes, n'est pas forcément cylindrique, c'est-à-dire les variables de l'espace ne vivent pas a priori dans un domaine borné fixé. L'étude des espaces fonctionnels sera plus délicate puisque l'on considéra des familles d'espaces dépendant du temps.

L'idée est alors d'établir une relation entre ce domaine $\widehat{Q}$ et un autre domaine qui sera cette fois-ci, cylindrique et qui nous permettra de nous ramener à des équations de Navier-Stokes sur un domaine borné de $\mathbb{R}^3$.

2.4 Réduction à un domaine cylindrique

On veut se ramener au cas où le domaine est cylindrique de sorte que la variable d'espace puisse être dans un domaine qui soit cette fois-ci, indépendant du temps.

Les points de Ω_0 sont représentés par $y = (y_1, y_2, y_3)$
on représente par Q le cylindre :

$$Q = \Omega_0 \times [0, T]$$

et sa frontière par Σ donnée par :

$$\Sigma = \Gamma_0 \times [0, T]$$

ou Γ_0 et la frontiére de Ω_0

On fait alors les hypothèses suivantes :

Hypothèse 2 :

Il existe un difféomorphisme $\varphi_t = (\beta_{ij}(t)), \quad i, j = \{1, 2, 3\}$ *entre* Ω_t *et* Ω_0 *telle que*

$\varphi_t : \Omega_t \longrightarrow \Omega_0 \qquad x \longmapsto \varphi_t(x) = y.$

Explicitement :

$\varphi_t(x) = (\varphi_{t,1}(x), \varphi_{t,2}(x), \varphi_{t,3}(x)) = (y_1, y_2, y_3)$

et

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_{11}(t) & \beta_{12}(t) & \beta_{13}(t) \\ \beta_{21}(t) & \beta_{22}(t) & \beta_{23}(t) \\ \beta_{31}(t) & \beta_{32}(t) & \beta_{33}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Supposons aussi que les fonctions : $\overrightarrow{\gamma}(x_0;t)$; $\overrightarrow{a}_t(x) = a(x;t)$; $\varphi_t(x)$ *sont toutes au moins deux fois continuement dérivables, c'est-à-dire* $\overrightarrow{\gamma}, \overrightarrow{a}, \varphi \in C^2$.

□

Donc on a le difféomorphisme entre $\widehat{Q}$ et Q donnée par :

$$(x,t) \in \widehat{Q} \longrightarrow (y,t) \in Q \quad \text{avec} \quad y = \varphi_t(x) \quad \text{et} \quad 0 \leq t \leq T$$

.

Chapitre 3

Une transformation du problème

Rappelons que par hypothèse φ_t est le difféomorphisme entre Ω_t et Ω_0. Pour l'étude des équations de Navier-Stokes dans un domaine variable, les propriétés de ce difféomorphisme jouent le rôle essentiel pour que le problème soit bien formulé. On pose :

$$(J_\varphi)_{jk} = \frac{\partial \varphi_{t,k}(x)}{\partial x_j} = (\beta_{kj}(t)).$$

car on a :

$$\varphi_{t,k}(x) = y_k = \sum_{k=1}^{3} \beta_{kj}(t) x_j$$

Remarque : Dans la suite, on utilisera souvent les opérateurs de dérivation suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial y_k}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial y_k} = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \varphi_{t,k}}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial y_k} = \sum_{k=1}^{3} \beta_{kj}(t) \frac{\partial}{\partial y_k},$$

$$\frac{\partial}{\partial t_{(t,x)}} = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \varphi_{t,k}}{\partial t} \frac{\partial}{\partial y_k} + \frac{\partial}{\partial t_{(t,y)}} = \sum_{k=1}^{3} \beta_{kj}(t) \frac{\partial}{\partial y_k} \frac{\partial}{\partial t_{(t,y)}},$$

ou $\frac{\partial}{\partial t_{(t,x)}}$ est la dérivée partielle par rapport à t dans le système des coordonnées (t,x), $(x \in \Omega_t)$.

Lemme 3.1. : *On a :*

$$\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial y_k}\left[\beta_{kj}\frac{1}{\det J_\varphi}\right] = 0, \ \ j = 1, 2, 3$$

Démonstration :

Soit $\tilde{\vartheta}$ une fonction de $\mathcal{C}^1(\Omega_0)$ telle que son support est contenu dans Ω_0 et $\vartheta = \tilde{\vartheta} o \varphi_t^{-1}$.

Soient f, g deux fonctions de $\mathcal{C}^1(\Omega_t)$ telles que $fg = \vartheta$ dans Ω_t.

Puisque le déterminant Jacobien de $y \to x$ est $\frac{1}{\det J_\varphi}$, le déterminant Jacobien de $x \to y$ est $\det J_\varphi$.

En désignant $\tilde{f}(y) = f(\varphi_t^{-1}(y))$ etc...,on a

$$\int_{\Omega_t} f\frac{\partial g}{\partial x_i}dx = \int_{\Omega_0} \tilde{f}\frac{\partial \tilde{g}}{\partial x_i}\frac{1}{\det J_\varphi}dy.$$

Comme

$$\frac{\partial \tilde{g}}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial \varphi_{t,k}}{\partial x_i}\frac{\partial \tilde{g}}{\partial y_k} = \sum_{k=1}^{3}\beta_{ki}(t)\frac{\partial \tilde{g}}{\partial y_k},$$

L'intégrale est égale à

$$\int_{\Omega_0} \tilde{f}(y)\sum_{k=1}^{3}\beta_{ki}(t)\frac{\partial \tilde{g}}{\partial y_k}\frac{1}{\det J_\varphi}dy,$$

on a donc

$$\int_{\Omega_t} f\frac{\partial g}{\partial x_i}dx = \int_{\Omega_0} \tilde{f}\sum_{k=1}^{3}\beta_{ki}(t)\frac{\partial \tilde{g}}{\partial y_k}\frac{1}{\det J_\varphi}dy.$$

De manière analogue on a

$$-\int_{\Omega_t} \frac{\partial f}{\partial x_i}g dx = -\int_{\Omega_0} \tilde{g}\sum_{k=1}^{3}\beta_{ki}(t)\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y_k}\frac{1}{\det J_\varphi}dy,$$

et par l'intègration par parties on obtient :

$$-\int_{\Omega_0}\tilde{g}\sum_{k=1}^{3}\beta_{ki}(t)\frac{\partial\tilde{f}}{\partial y_k}\frac{1}{\det J_\varphi}dy =$$

$$= -\sum_{k=1}^{3}\int_{\Omega_0}\tilde{g}\beta_{ki}(t)\frac{\partial\tilde{f}}{\partial y_k}\frac{1}{\det J_\varphi}dy$$

$$= -\sum_{k=1}^{3}\int_{\partial\Omega_0}\tilde{g}\beta_{ki}(t)\tilde{f}\frac{1}{\det J_\varphi}ds + \sum_{k=1}^{3}\int_{\Omega_0}\tilde{f}\frac{\partial}{\partial y_k}\left(\beta_{ki}(t)\frac{1}{\det J_\varphi}\tilde{g}\right)dy.$$

$$= -\sum_{k=1}^{3}\int_{\partial\Omega_0}\tilde{g}\tilde{f}\beta_{ki}(t)\frac{1}{\det J_\varphi}ds + \sum_{k=1}^{3}\int_{\Omega_0}\tilde{f}\frac{\partial}{\partial y_k}\left(\beta_{ki}(t)\frac{\tilde{g}}{\det J_\varphi}\right)dy.$$

Comme $\tilde{\vartheta} = \tilde{g}\tilde{f}$ et $\tilde{\vartheta}$ est à support compact dans Ω_0 on a

$$\int_{\partial\Omega_0}\tilde{g}\tilde{f}\beta_{ki}(t)\frac{1}{\det J_\varphi}ds = 0.$$

Il s'ensuit que

$$-\int_{\Omega_t}\frac{\partial f}{\partial x_i}gdx = \sum_{k=1}^{3}\int_{\Omega_0}\tilde{f}\frac{\partial}{\partial y_k}\left(\beta_{ki}(t)\frac{\tilde{g}}{\det J_\varphi}\right)dy$$

$$= \sum_{k=1}^{3}\int_{\Omega_0}\tilde{f}\tilde{g}\frac{\partial}{\partial y_k}\left(\beta_{ki}(t)\frac{1}{\det J_\varphi}\right)dy + \sum_{k=1}^{3}\int_{\Omega_0}\tilde{f}\frac{\partial\tilde{g}}{\partial y_k}\beta_{ki}(t)\frac{1}{\det J_\varphi}dy.$$

D'ailleurs de la relation

$$\int_{\Omega_t}f\frac{\partial g}{\partial x_i}dx = \int_{\partial\Omega_t}fgds - \int_{\Omega_t}\frac{\partial f}{\partial x_i}gdx,$$

on déduit que

$$\int_{\Omega_t}f\frac{\partial g}{\partial x_i}dx = -\int_{\Omega_t}\frac{\partial f}{\partial x_i}gdx.$$

De cette manière nous sommes parvenus à l'égalité

$$\int_{\Omega_0}\tilde{f}\sum_{k=1}^{3}\beta_{ki}(t)\frac{\partial\tilde{g}}{\partial y_k}\frac{1}{\det J_\varphi}dy = \sum_{k=1}^{3}\int_{\Omega_0}\tilde{f}\tilde{g}\frac{\partial}{\partial y_k}\left(\beta_{ki}(t)\frac{1}{\det J_\varphi}\right)dy$$

$$+\sum_{k=1}^{3}\int_{\Omega_0}\tilde{f}\frac{\partial\tilde{g}}{\partial y_k}\beta_{ki}(t)\frac{1}{\det J_\varphi}dy.$$

Ce qui implique que :

$$\sum_{k=1}^{3}\int_{\Omega_0}\tilde{f}\tilde{g}\frac{\partial}{\partial y_k}\left(\beta_{ki}(t)\frac{1}{\det J_\varphi}\right)dy=0$$

comme $\forall\tilde{f}\tilde{g}=\tilde{\vartheta}$, on a :

$$\sum_{k=1}^{3}\int_{\Omega_0}\tilde{\vartheta}\frac{\partial}{\partial y_k}\left(\beta_{ki}(t)\frac{1}{\det J_\varphi}\right)dy=0.$$

Or, comme ϑ est arbitraire, on déduit que

$$\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial y_k}\left(\beta_{ki}(t)\frac{1}{\det J_\varphi}\right)=0.$$

Le lemme est démontré.□

3.1 Lemme fondamentale

3.1.1 Conservation de la divergence

Pour l'étude des équations de Navier-Stokes dans un domaine variable, du point de vue technique, il est essentiel d'utiliser une fonction à divergence nulle, qui remplace le vecteur vitesse v. Cette fonction est donnée par le lemme suivant, qui est une conséquence du lemme 3.1.

Lemme 3.2. *On pose*

$$w=\frac{(J_\varphi)^T}{\det J_\varphi}v$$

Alors on a

$$\nabla_y\cdot w=0 \quad \textit{si et seulement si} \quad \nabla_x\cdot v=0.$$

Démonstration

On sait que :

$$\nabla_y \cdot w = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial w_k}{\partial y_k}$$

$$\nabla_x \cdot v = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = \sum_{k,j=1}^{3} \frac{\partial \varphi_{t,k}}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial y_k} = \sum_{k,j=1}^{3} \beta_{kj}(t) \frac{\partial v_j}{\partial y_k}.$$

Rappelons les relations

$$J_\varphi = (J_\varphi)_{jk} = \frac{\partial \varphi_{t,k}(x)}{\partial x_j} = (\beta_{kj}(t))$$

et

$$(J_\varphi)^T = (J_\varphi)_{kj} = \frac{\partial \varphi_{t,j}(x)}{\partial x_k} = (\beta_{jk}(t))$$

$$\begin{aligned}
\nabla_y \cdot w = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial w_k}{\partial y_k} &= \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial y_k} (\frac{(J_\varphi)^T}{\det J_\varphi} v) \\
&= \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial y_k} \left(\frac{\beta_{jk}(t)}{\det J_\varphi} v_k \right) \\
&= \sum_{(k,j)=1}^{3} \frac{\partial}{\partial y_k} (\beta_{jk}(t) \frac{1}{\det J_\varphi} v_k)
\end{aligned}$$

Cette derniére expression est la dérivée du produit de deux fonctions et donc on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial w_k}{\partial y_k} &= \sum_{(k,j)=1}^{3} \frac{\partial}{\partial y_k} (\beta_{jk}(t) \frac{1}{\det J_\varphi}) v_k + \sum_{(k,j)=1}^{3} \beta_{jk}(t) \frac{1}{\det J_\varphi} \frac{\partial v_k}{\partial y_j} \\
&= \sum_{(k,j)=1}^{3} \frac{\partial}{\partial y_k} (\beta_{jk}(t) \frac{1}{\det J_\varphi}) v_k + \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{\det J_\varphi} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \\
&= \sum_{(k,j)=1}^{3} \frac{\partial}{\partial y_k} (\beta_{jk}(t) \frac{1}{\det J_\varphi}) v_k + \frac{1}{\det J_\varphi} \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial v_k}{\partial x_k}
\end{aligned}$$

car

$$\frac{\partial}{\partial x_k}=\sum_{j=1}^{3}\beta_{jk}(t)\frac{\partial}{\partial y_k},$$

Comme d'aprés le lemme 3.1 on a

$$\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial y_k}(\beta_{jk}(t)\frac{1}{\det J_\varphi})=0$$

on a également

$$\sum_{(k,j)=1}^{3}\frac{\partial}{\partial y_k}(\beta_{jk}(t)\frac{1}{\det J_\varphi})v_j=0$$

En substituant cette relation dans l'égalité précédent, on obtient

$$\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial w_k}{\partial y_k}=\frac{1}{\det J_\varphi}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial v_k}{\partial x_k},$$

C'est à dire

$$\nabla_y\cdot w=\frac{1}{\det J_\varphi}\nabla_x\cdot v,$$

alors $\nabla_y\cdot w=0$ si et seulement si $\nabla_x\cdot v=0.\square$

3.1.2 Lemme de Ladyzhenskaya

Le lemme de Ladyzenskaya garantira la possibilité d'appliquer les méthodes d'analyse fonctionnelle à notre problème :

Lemme 3.3

Soit donnée une fonction $\vec{a}=\vec{a}(x)$ sur Γ_t à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ telle que

$$\int_{\Gamma_t}\vec{a}\cdot\vec{n}ds=0,$$

où $\vec{n}$ est le vecteur normal à Γ_t orienté vers l'extérieur. Supposons que $\vec{a}\in C^2(\Gamma_t)$ alors il existe une fonction $\vec{v}_a$ définie dans Ω_t à valeur dans

$\mathbb{R}^3$ *tel que :*

$$\nabla \cdot \vec{v}_a = 0 \quad dans \quad \Omega_t, \quad \vec{v}_{a|\Gamma_t} = \vec{a}$$

et

$$\|\vec{v}_a\|_{H^2(\Omega_t)} \leq c\|\vec{a}\|_{C^2(\Gamma_t)}$$

ou c est une constante strictement positif.

Démonstration : Voir[3].

3.2 Transformation des équations

Maintenant on va écrire le sytème d'équations de Navier-Stokes dans les coordonnées cylindrique (y, t).

On a

$$\varphi_t(.) : \Omega_t \longrightarrow \Omega_0, \quad x \longmapsto \varphi_t(x) = y = y(x, t)$$

et :

$$y_i = \sum_{k=1}^{3} \beta_{ik}(t) x_k \tag{3.1}$$

ce qui implique :

$$\frac{\partial y_k}{\partial x_i} = \frac{\partial \varphi_{t,k}}{\partial x_i} = \beta_{ki}(t) \tag{3.2}$$

et On a :

$$v = (v_1, v_2, v_3)$$

$$\triangle v = (\triangle v_1, \triangle v_2, \triangle v_3)$$

$$v \nabla v = \sum_{k=1}^{3} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i}$$

On pose

$$a_{lr}(t) = \sum_{j=1}^{3} \beta_{lj}(t)\beta_{rj}(t) \tag{3.3}$$

On rappelle en outre les relations que le changement de variables implique que :

$$\frac{\partial v_i}{\partial t_{(t,x)}} = \sum_{k=1}^{3} \beta_{ki}(t)\frac{\partial v_i}{\partial y_k}\frac{\partial}{\partial t_{(t,y)}}, \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} &= \frac{\partial \varphi_{t,1}}{\partial x_j}\frac{\partial v_i}{\partial y_1} + \frac{\partial \varphi_{t,2}}{\partial x_j}\frac{\partial v_i}{\partial y_2} + \frac{\partial \varphi_{t,2}}{\partial x_j}\frac{\partial v_i}{\partial y_3} \\ &= \beta_{1j}(t)\frac{\partial v_i}{\partial y_1} + \beta_{2j}(t)\frac{\partial v_i}{\partial y_2} + \beta_{3j}(t)\frac{\partial v_i}{\partial y_3} \\ &= \sum_{k=1}^{3} \beta_{kj}(t)\frac{\partial v_i}{\partial y_k} \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} &= \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right] = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\beta_{1j}(t)\frac{\partial v_i}{\partial y_1} + \beta_{2j}(t)\frac{\partial v_i}{\partial y_2} + \beta_{3j}(t)\frac{\partial v_i}{\partial y_3}\right] \\ &= \beta_{1j}(t)\frac{\partial \varphi_{t,1}}{\partial x_j}\frac{\partial^2 v_i}{\partial y_1 \partial y_2} + \beta_{1j}(t)\frac{\partial \varphi_{t,2}}{\partial x_j}\frac{\partial^2 v_i}{\partial y_2 \partial y_2} + \beta_{1j}(t)\frac{\partial \varphi_{t,3}}{\partial x_j}\frac{\partial^2 v_i}{\partial y_3 \partial y_2} \\ &+ \beta_{2j}(t)\frac{\partial \varphi_{t,1}}{\partial x_j}\frac{\partial^2 v_i}{\partial y_1 \partial y_3} + \beta_{2j}(t)\frac{\partial \varphi_{t,2}}{\partial x_j}\frac{\partial^2 v_i}{\partial y_2 \partial y_3} + \beta_{2j}(t)\frac{\partial \varphi_{t,3}}{\partial x_j}\frac{\partial^2 v_i}{\partial y_3 \partial y_3} \\ &+ \beta_{3j}(t)\frac{\partial \varphi_{t,1}}{\partial x_j}\frac{\partial^2 v_i}{\partial y_1 \partial y_1} + \beta_{3j}(t)\frac{\partial \varphi_{t,2}}{\partial x_j}\frac{\partial^2 v_i}{\partial y_2 \partial y_1} + \beta_{3j}(t)\frac{\partial \varphi_{t,3}}{\partial x_j}\frac{\partial^2 v_i}{\partial y_3 \partial y_1} \\ &= \beta_{1j}(t)\beta_{1j}(t)\frac{\partial^2 v_i}{\partial y_1^2} + \beta_{2j}(t)\beta_{1j}(t)\frac{\partial^2 v_i}{\partial y_2 \partial y_1} + \beta_{3j}(t)\beta_{1j}(t)\frac{\partial^2 v_i}{\partial y_3 \partial y_1} \\ &+ \beta_{1j}(t)\beta_{2j}(t)\frac{\partial^2 v_i}{\partial y_1 \partial y_2} + \beta_{2j}(t)\beta_{2j}(t)\frac{\partial^2 v_i}{\partial y_2^2} + \beta_{3j}(t)\beta_{2j}(t)\frac{\partial^2 v_i}{\partial y_3 \partial y_2} \\ &+ \beta_{1j}(t)\beta_{3j}(t)\frac{\partial^2 v_i}{\partial y_1 \partial y_3} + \beta_{2j}(t)\beta_{3j}(t)\frac{\partial^2 v_i}{\partial y_2 \partial y_3} + \beta_{3j}(t)\beta_{3j}(t)\frac{\partial^2 v_i}{\partial y_3^2}. \end{aligned}$$

On faisant la somme sur j, et on utilisant la relation (3.3), on trouve :

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} &= a_{11}(t)\frac{\partial^2 v_i}{\partial y_1^2} + a_{21}(t)\frac{\partial^2 v_i}{\partial y_2 \partial y_1} + a_{31}(t)\frac{\partial^2 v_i}{\partial y_3 \partial y_1}\\ &+ a_{12}(t)\frac{\partial^2 v_i}{\partial y_1 \partial y_2} + a_{22}(t)\frac{\partial^2 v_i}{\partial y_2^2} + a_{32}(t)\frac{\partial^2 v_i}{\partial y_3 \partial y_2}\\ &+ a_{13}(t)\frac{\partial^2 v_i}{\partial y_1 \partial y_3} + a_{23}(t)\frac{\partial^2 v_i}{\partial y_2 \partial y_3} + a_{33}(t)\frac{\partial^2 v_i}{\partial y_3^2}.\end{aligned} \tag{3.6}$$

Ce qui implique :

$$\triangle v_i = \sum_{l,r=1}^{3} a_{lr}(t)\frac{\partial^2 v_i}{\partial y_l \partial y_r} \tag{3.7}$$

Calculons maintenant $(v\cdot\nabla)v$:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{3} v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j} &= v_1\sum_{k=1}^{3}\beta_{k1}(t)\frac{\partial v_i}{\partial y_k} + v_2\sum_{k=1}^{3}\beta_{k2}(t)\frac{\partial v_i}{\partial y_k} + v_3\sum_{k=1}^{3}\beta_{k3}(t)\frac{\partial v_i}{\partial y_k}\\ &= \sum_{k,j=1}^{3}\beta_{kj}(t)v_j\frac{\partial v_i}{\partial y_k}\end{aligned} \tag{3.8}$$

Donc on a

$$(v\cdot\nabla)v = \sum_{i=1}^{3} v_i\frac{\partial v}{\partial x_i} = \sum_{k,i=1}^{3}\beta_{ki}(t)v_j\frac{\partial v}{\partial y_k} \tag{3.9}$$

Calculons maintenat ∇p en coordonées cylindrique (y,t) :

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial \varphi_{t,k}}{\partial x_k}\frac{\partial p}{\partial y_k} = \sum_{k=1}^{3}\beta_{ki}(t)\frac{\partial p}{\partial y_k} \tag{3.10}$$

Alors :

$$\nabla_x p = (\varphi_t)^T\cdot\nabla_y p \tag{3.11}$$

De plus on a :

$$\nabla \cdot v = \sum_{k,i=1}^{3} \beta_{ki} \frac{\partial v}{\partial y_k} \tag{3.12}$$

En substituant (3.4),(3.7),(3.8) et (3.10) dans (2.2) on trouve

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_i}{\partial t_{(t,y)}} + \displaystyle\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial v_i}{\partial y_k}\frac{\partial \varphi_{t,k}}{\partial t} + \sum_{k,l=1}^{3} \beta_{lk}(t) v_k \frac{\partial v_i}{\partial y_l} \\ + \displaystyle\sum_{k=1}^{3} \beta_{ki}(t) \frac{\partial p}{\partial y_k} = f_i + \nu \sum_{l,r=1}^{3} a_{lr}(t) \frac{\partial^2 v_i}{\partial y_l \partial y_r} \quad i = 1,2,3 \\ \displaystyle\sum_{k,i=1}^{3} \beta_{ki} \frac{\partial v_i}{\partial y_k} = 0 \end{cases} \tag{3.13}$$

Mintenant pour utiliser la propriété démontré dans le lemme (3.2), nous voulons transformer encore l'équation en utilisant la fonction w au lieu de v, pour cela on pose :

$$\psi_{ij} = (J_{\varphi}^{-1})_{ij}, \quad i,j = 1,2,3.$$

et

$$w = \frac{(J_{\varphi})^T}{\det J_{\varphi}} v \;\Rightarrow\; v = \det J_{\varphi} (J_{\varphi}^T)^{-1} w$$

ou

$$v_i = \Big(\det J_{\varphi} \sum_{j=1}^{3} \psi_{ji} w_j \Big).$$

En substituant $v_i = \det J_{\varphi} \sum_{j=1}^{3} \psi_{ji} w_j$ dans l'équation de Navier-Stokes citées ci-dessus on obtient :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t_{(t,y)}}\Big(\det J_\varphi \sum_{j=1}^{3} \psi_{ji} w_j\Big) + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial y_k}\Big(\det J_\varphi \sum_{j=1}^{3} \psi_{ji} w_j\Big)\frac{\partial \varphi_{t,k}}{\partial t} \\
&+ \sum_{k,l=1}^{3} \beta_{lk}(t)\Big(\det J_\varphi \sum_{j=1}^{3} \psi_{jk} w_j\Big)\frac{\partial}{\partial y_l}\Big(\det J_\varphi \sum_{j=1}^{3} \psi_{ji} w_j\Big) \\
&+ \sum_{k=1}^{3} \beta_{ki}(t)\frac{\partial p}{\partial y_k} = f_i + \nu \sum_{l,r=1}^{3} a_{lr}(t)\frac{\partial^2}{\partial y_l \partial y_r}\Big(\det J_\varphi \sum_{j=1}^{3} \psi_{ji} w_j\Big)
\end{aligned} \tag{3.14}$$

$$\sum_{k,i=1}^{3} \beta_{ki}\frac{\partial}{\partial y_k}\Big(\det J_\varphi \sum_{j=1}^{3} \psi_{ji} w_j\Big) = 0 \tag{3.15}$$

On rappelle que l'on a

$$\sum_{l=1}^{3} \psi_{il}\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_l} = \sum_{l=1}^{3} \psi_{il}\beta_{kl}(t) = \delta_{ik}$$

car ψ_{il} est la matrice inverse de $\dfrac{\partial \varphi_k}{\partial x_l}$:

$$\Big(\big(J_\varphi\big)^{-1} J_\varphi = I\Big)$$

En multipliant l équation précédent (3.14) par ψ_{hi} et on fait la somme sur i on obtient :

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{3} \psi_{hi}\frac{\partial}{\partial t_{(t,y)}}\Big(\det J_\varphi \sum_{j=1}^{3} \psi_{ji} w_j\Big) + \sum_{i=1}^{3} \psi_{hi} \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial y_k}\Big(\det J_\varphi \sum_{j=1}^{3} \psi_{ji} w_j\Big)\frac{\partial \varphi_{t,k}}{\partial t} \\
&+ \sum_{i=1}^{3} \psi_{hi} \sum_{k,l=1}^{3} \beta_{lk}(t)\Big(\det J_\varphi \sum_{j=1}^{3} \psi_{jk} w_j\Big)\frac{\partial}{\partial y_l}\Big(\det J_\varphi \sum_{j=1}^{3} \psi_{ji} w_j\Big) \\
&+ \sum_{i=1}^{3} \psi_{hi} \sum_{k=1}^{3} \beta_{ki}(t)\frac{\partial p}{\partial y_k} \\
&= \sum_{i=1}^{3} \psi_{hi} f_i + \sum_{i=1}^{3} \psi_{hi}\nu \sum_{l,r=1}^{3} a_{lr}(t)\frac{\partial^2}{\partial y_l \partial y_r}\Big(\det J_\varphi \sum_{j=1}^{3} \psi_{ji} w_j\Big)
\end{aligned} \tag{3.16}$$

On compte tenu de :

$$\sum_{l=1}^{3}\psi_{il}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_l}=\sum_{l=1}^{3}\psi_{il}\beta_{kl}(t)=\delta_{ik}$$

cette équation ce réduit à :

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{3}\psi_{hi}\frac{\partial}{\partial t_{(t,y)}}\Big(\det J_\varphi\sum_{j=1}^{3}\psi_{ji}w_j\Big)+\sum_{i=1}^{3}\psi_{hi}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial y_k}\Big(\det J_\varphi\sum_{j=1}^{3}\psi_{ji}w_j\Big)\frac{\partial\varphi_{t,k}}{\partial t}\\&+\sum_{i=1}^{3}\psi_{hi}\sum_{k,l=1}^{3}\beta_{lk}(t)\Big(\det J_\varphi\sum_{j=1}^{3}\psi_{jk}w_j\Big)\frac{\partial}{\partial y_l}\Big(\det J_\varphi\sum_{j=1}^{3}\psi_{ji}w_j\Big)\\&+\sum_{k=1}^{3}\delta_{hk}\frac{\partial p}{\partial y_k}=\sum_{i=1}^{3}\psi_{hi}f_i+\sum_{i=1}^{3}\psi_{hi}\nu\sum_{l,r=1}^{3}a_{lr}(t)\frac{\partial^2}{\partial y_l\partial y_r}\Big(\det J_\varphi\sum_{j=1}^{3}\psi_{ji}w_j\Big)\end{aligned}\tag{3.17}$$

Donc le problème de Navier-Stokes transformé dans les coordonnées cylindrique (t,y) est :

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{3}\psi_{hi}\frac{\partial}{\partial t_{(t,y)}}\Big(\det J_\varphi\sum_{j=1}^{3}\psi_{ji}w_j\Big)+\sum_{i=1}^{3}\psi_{hi}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial y_k}\Big(\det J_\varphi\sum_{j=1}^{3}\psi_{ji}w_j\Big)\frac{\partial\varphi_{t,k}}{\partial t}\\+\sum_{i=1}^{3}\psi_{hi}\sum_{k,l=1}^{3}\beta_{lk}(t)\Big(\det J_\varphi\sum_{j=1}^{3}\psi_{jk}w_j\Big)\frac{\partial}{\partial y_l}\Big(\det J_\varphi\sum_{j=1}^{3}\psi_{ji}w_j\Big)\\+\sum_{k=1}^{3}\delta_{hk}\frac{\partial p}{\partial y_k}\\=\sum_{i=1}^{3}\psi_{hi}f_i+\sum_{i=1}^{3}\psi_{hi}\nu\sum_{l,r=1}^{3}a_{lr}(t)\frac{\partial^2}{\partial y_l\partial y_r}\Big(\det J_\varphi\sum_{j=1}^{3}\psi_{ji}w_j\Big) & sur\quad Q\\ \nabla_y\cdot w=0 & sur\quad Q\\ \sum_{j=1}^{3}\psi_{ji}w_j=\frac{a}{\det J_\varphi} & sur\quad \Sigma\end{cases}\tag{3.18}$$

Chapitre 4

Approximation de Galerkin

4.1 Quadre fonctionnel

Pour les éléments de l'Analyse fonctionnelle définissons des espaces de Banach et de Hilbert ,en particulier espaces de Lebesgue et de Sobolev, et leur propriétés fondamentales , nous les renvoyons aux manuels d'Analyse fonctionnelle

Désignons par $\mathcal{V}$ l'ensemble des fonctions définies sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ à divergence nulle et à support compact, c'est-à-dire

$$\mathcal{V} = \{u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3) | \nabla \cdot u = 0, \quad supp(u) \subset \Omega\}. \tag{4.1}$$

Désignons par V^0 la fermeture de $\mathcal{V}$ par rapport à la topologie de $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ c'est-à-dire

$$V^0 = \overline{\mathcal{V}}^{L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)} \tag{4.2}$$

On remarque que V^0 est un sous-espace fermé de $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ En effet, si u et v appartiennent à V^0 , il existe deux suites $\{u^k\}_{k=1}^\infty$ et $\{v^k\}_{k=1}^\infty$ telles que

$$u^k, v^k \in \mathcal{V}, \quad \|u^k - u\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)}, \|v^k - v\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)} \longrightarrow 0 \quad \text{pour} \quad k \to 0 \tag{4.3}$$

Donc, quelques soient deux nombres réels α et β ,on a

$$\|\alpha u^k + \beta v^k - (\alpha u + \beta v)\|_{L^2(\Omega,\mathbb{R}^3)}$$

$$\leq |\alpha|\|u^k - u\|_{L^2(\Omega,\mathbb{R}^3)} + |\beta|\|v^k - v\|_{L^2(\Omega,\mathbb{R}^3)} \to \infty \quad \text{pour} \quad k \to \infty \tag{4.4}$$

ce qui signifie que $\alpha u + \beta v \in V^0$. Comme V^0 est frmé par déffnition, il s'ensuit qu'il est un sous-espace fermé de $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$. Désignons par G le complémentaire orthogonal de V^0 dans l'espace de Hilbert $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ c'est-à-dire

$$G = (V^0)^{\perp} = \{u \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^3) | \langle u, v\rangle_{L^2(\Omega,\mathbb{R}^3)} = 0 \forall \; v \in V^0\} \tag{4.5}$$

Comme on le connait bien de la théorie générale des espaces de hilbert, étant le complémentaire d'un ensemble, G est un sous-espace fermé de $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ et on a

$$L^2(\Omega, \mathbb{R}^3) = V^0 \oplus G \tag{4.6}$$

C'est-à-dire,quelque soit l'élément $u \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ il y a un élément $u^0 \in V^0$ et un élément $u^1 \in G$ tels que

$$u = u^0 + u^1 \tag{4.7}$$

et les éléments $u^0 \in V^0$ et $u^1 \in G$ qui satisfont à cette égalité sont uniques. On a outre

$$\|v\|^2_{L^2(\Omega,\mathbb{R}^3)} = \|u^0\|^2_{L^2(\Omega,\mathbb{R}^3)} + \|u^1\|^2_{L^2(\Omega,\mathbb{R}^3)} \tag{4.8}$$

On voit aisément que, si $\varphi \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$; alors on a

$$\langle \nabla\varphi, v\rangle_{L^2(\Omega,\mathbb{R}^3)} \quad \forall v \in V^0 \tag{4.9}$$

En effet, si $v \in V^0$; il existe une suite $\{v^k\}_{k=1}^{\infty}$ telle que $v^k \in \mathcal{V}$ et $v^k \to v$ dans $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ On a donc

$$\langle \nabla\varphi, v\rangle_{L^2(\Omega,\mathbb{R}^3)} = \lim_{k\to\infty} \langle \nabla v, v\rangle_{L^2(\Omega,\mathbb{R}^3)} = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega \nabla\varphi \cdot v^k dx =$$

$$[\lim_{k\to\infty} \int_\Omega \varphi v^k \cdot ndS - \lim_{k\to\infty} \int_\Omega \varphi\nabla \cdot v^k dx] = 0 \qquad (4.10)$$

où n désigne la normale extérieure à la frontière $\partial\Omega$ tandi que dS est l'élément de surface sur $\partial\Omega$

La relation montrée dans (5.9) peut être exprimée par

$$\{u \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^3) | \exists\varphi \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^3), \quad u = \nabla\varphi\} \subset G. \qquad (4.11)$$

Mais en réalité dans cette relation on a aussi l'égalité, c'est-à-dire, on a le théorème suivant.

Théorème 4.1.1 *Le sous-espace G est formé par les fonction $u = \nabla\varphi$ avec $\varphi \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$*

Pour la démonstration voir [2] (Chap.I,Th.1). Ce théorème requiert des argumentations assez techniques. Il est bon de

rappeler que, même si les fonctions $u \in L^(\Omega, \mathbb{R}^3)$ n'ont ni ses dérivées $\frac{\partial u}{\partial x_j}$ ni sa trace $u|_{\partial\Omega}$ sur la frontière $\partial\Omega$; pour les fonctions $v \in V^0$ on a

$$\nabla \cdot v = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega, \qquad v \cdot n = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \qquad (4.12)$$

dans le sens faible, c'est-à-dire dans le sens de distribution. En effet, de (5.9) il résulte que, si $v \in V^0$ on a

$$\int_\Omega v \cdot \nabla\varphi dx = 0. \qquad (4.13)$$

quelque soit $\varphi \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ En faisant formellement l'intégration par parties, on a

$$\int_\Omega \varphi \nabla \cdot v dx - \int_\Omega \varphi(v \cdot n) dS = -\int_\Omega v \cdot \nabla \varphi dx = 0 \qquad (4.14)$$

quelque soit $\varphi \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ donc, comme $\varphi \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ est arbitraire, on peut dire que

$$\nabla \cdot v = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega, \qquad v \cdot n = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \qquad (4.15)$$

dans le sens de distribution. On désigne par V^1 la fermeture de $\mathcal{V}$ par rapport à la norme $\|v|\_H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ c'est-à-dire

$$V^1 = \overline{\mathcal{V}}^{H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)} \qquad (4.16)$$

Désignons par $\widetilde{V}^1$ la fermeture de l'ensemble $\mathcal{V}$ (introduit dans (5.2)) par rapport à la norme $\|v\|_{\tilde{H}^1(\Omega)}$ introduit ci-dessus, c'est-à-dire

$$\widetilde{V}^1 = \overline{\mathcal{V}}^{\tilde{H}^1(\Omega)}. \qquad (4.17)$$

On on introduit en outre le produit scalaire

$$\langle v, w \rangle_{\tilde{H}^1(\Omega)} = \int_\Omega \sum_{j,k=1}^{3} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \frac{\partial w_j}{\partial x_k} dx. \qquad (4.18)$$

et la norme

$$\|v\|_{\tilde{H}^1(\Omega)} = \sqrt{\langle v, v \rangle_{\tilde{H}^1(\Omega)}} \qquad (4.19)$$

Il n'est pas difficile de constater que $\widetilde{V}^1$ est un espace de Hilbert muni del produit scalaire et de la norme définis dans (4.18), (4.19) ~~et 2~~

$$\langle v, w \rangle_{\widetilde{V}^1} = \langle v, w \rangle_{\tilde{H}^1(\Omega)}, \qquad \|v\|_{\tilde{H}^1(\Omega)}.$$

pour $v \in \widetilde{V}^1$

On remarque que, $\int$ si est borné, la norme $\|v\|_{\widetilde{H}^1(\Omega)}$ dans $\mathcal{V}$ est équivalente à la norme de l'espace de Sobolev

$$\|v\|_{H^1(\Omega,\mathbb{R}^3)} = (\int_\Omega \sum_{j=1}^{3} v_j^2 dx + \sum_{j,k=1}^{3} |\frac{\partial v_j}{\partial x_k}|^2 dx)^{\frac{1}{2}}$$

Donc dans ce cas $\widetilde{V}^1$ coïncide avec la fermeture V^1 de $\mathcal{V}$ par rapport à la norme $\|v\|_{H^1(\Omega,\mathbb{R}^3)}$ Or ; il est bon de préciser que, pour que la norme $\|v\|_{H^1(\Omega)}$ soit équivalente à la norme de l'espace de Sobolev $\|v\|_{H^1(\Omega,\mathbb{R}^3)}$ dans $\mathcal{V}$,il suffit que l'inégalité de Poincaré

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

soit valable et donc il suffit que le domaine soit borné dans une direction. Dans le cas où le domaine n'est pas borné de sorte que cette inégalité ne soit pas vérifiée, l'espace $\widetilde{V}^1$ est plus grand que V^1 , c'est-à-dire

$$V^1 \subset \widetilde{V}^1, \qquad V^1 \neq \widetilde{V}^1.$$

4.2 Méthode d'approximation de Galerkin

Dans la suite nous voulons construire l'approximation de Galarkin pour les équations de Navier-Stockes dans un domaine varriable . L'approximation de Galerkin pour les équation de Navier-Stokes usuelles s'applique à un domaine fixé avec les conditions aux limites homogènes ($v = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_0$) pour cela, avent de construire cette approximation de Galerkin pour notre problème en doit trnsformer les conditions aux lmites homogèmes pour ce

faire nous utilisons le lemme de ladyzenskeya cié dans le chapitre précédent.
En vertu de ce lemme nous définissons l'opérateur

$$A : \mathbb{C}^2(\Gamma_0) \longrightarrow \mathbb{C}^2(\Gamma_t)$$

qui, à la fonction a donnée sur $\partial\Omega_t$, associe une fonction v_a sur Ω_t comme dans le lemme de Ladyzhonskaya.

On pose maintenent :

$u = w - v_a$ où $a = w$ sur Γ_0.

Remarque :

si $w \in H^1(\Omega_0)$ et $a \in \mathbb{C}^2(\Gamma_0)$ alors on a $u \in V^1$.

Démonstration :

La remarque résullte du lemme de Ladyzenskaya.

Donc pour trouver w, il nous suffit de trouver $u \in V^1$, de sorte que notre problème est réduit à la recherche de u.Le champ de vitesse $v(t,x)$ à un instant t d'un fluide visqueux et incompressible avec la condition $v = 0$ sur la frontière Γ_t doit appartenir à $\widetilde{V}^1$ qui est un espace de Hilbert séparable ; une des idées naturelles pour obtenir la solution $v(t,x)$ du système d'équations (2.2)(de navier stokes) serait celle de son approximation par les fonctions $v^{[n]}(t,x)$; $n = 1, 2, \ldots$, appartenant aux sous-espaces V_n de dimension finie. Or, il y a différentes possibilités de construire les sous-espaces de dimensions finies de l'espace de Hilbert $\widetilde{V}^1$. Mais l'utilisation de la suite de sous-espaces V_n engendrés par $e_1, e_2, \ldots, e_n$ avec des éléments e_k de la base orthonormale $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ de V_0 construite pour l'équation de stokes (voir le th 2.2 de [2]) sera particulièrement utile. Pour cela dans la suite nous allons utiliser ces sous-espaces V_n pour construire une suite de solutions approchées $v^{[n]}(t,x)$, dite

approximation de Galerkin, pour le système d'équation (2.2) ~~(.) (.)(de ns)~~.
Pour la condition initiale, on devra précier l'espace auquel $u_0 = u(0, x)$ appartiendra. Même s'il y a plusieurs possibilités de choix, pour notre exposition nous supposons, au moins pour le moment, que :

$$u_0 \in V_0$$

Soit $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ la base orthonormale de V_0 introduite dans le théorème 2.2 de [], pour laquelle on a :

$$-P_{V^0}\Delta e_k = \lambda_k e_k$$

Pour u dans V_0 on a :

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k e_k(x) \qquad , C_k = \langle u, e_k \rangle_{V^0}$$

Donc la solution $u(t, x)$, si elle existe, à chaque instante t , peut être représentés dans la forme :

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k(t) e_k(x) \qquad , C_k = \langle u(t, .), e_k \rangle_{V^0}$$

On remarque que, si u est de cette forme ; on a :

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, e_k \right\rangle = \frac{d}{dt} C_k(t),$$

Nous rappelons les équations de Navier-Stokes transformées dans les coordonnées cylindrique (t, y) :

$$\sum_{i=1}^{3}\psi_{hi}\frac{\partial}{\partial t_{(t,y)}}\Big(\det J_\varphi\sum_{j=1}^{3}\psi_{ji}w_j\Big)+\sum_{i=1}^{3}\psi_{hi}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial y_k}\Big(\det J_\varphi\sum_{j=1}^{3}\psi_{ji}w_j\Big)\frac{\partial\varphi_{t,k}}{\partial t}$$
$$+\sum_{i=1}^{3}\psi_{hi}\sum_{k,l=1}^{3}\beta_{lk}(t)\Big(\det J_\varphi\sum_{j=1}^{3}\psi_{jk}w_j\Big)\frac{\partial}{\partial y_l}\Big(\det J_\varphi\sum_{j=1}^{3}\psi_{ji}w_j\Big)$$
$$+\sum_{k=1}^{3}\delta_{hk}\frac{\partial p}{\partial y_k}=\sum_{i=1}^{3}\psi_{hi}f_i+\sum_{i=1}^{3}\psi_{hi}\nu\sum_{l,r=1}^{3}a_{lr}(t)\frac{\partial^2}{\partial y_l\partial y_r}\Big(\det J_\varphi\sum_{j=1}^{3}\psi_{ji}w_j\Big)$$

Ici on substitue w par : $w=u+v_a$

Donc $w_j=(u_j+v_{aj})$

$$\sum_{i=1}^{3}\psi_{hi}\frac{\partial}{\partial t_{(t,y)}}\Big(\det J_\varphi\sum_{j=1}^{3}\psi_{ji}(u_j+v_{aj})\Big)+\sum_{i=1}^{3}\psi_{hi}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial y_k}\Big(\det J_\varphi\sum_{j=1}^{3}\psi_{ji}(u_j+v_{aj})\Big)$$
$$\frac{\partial\varphi_{t,k}}{\partial t}+\sum_{i=1}^{3}\psi_{hi}\sum_{k,l=1}^{3}\beta_{lk}(t)\Big(\det J_\varphi\sum_{j=1}^{3}\psi_{jk}(u_j+v_{aj})\Big)\frac{\partial}{\partial y_l}\Big(\det J_\varphi\sum_{j=1}^{3}\psi_{ji}(u_j+v_{aj})\Big)$$
$$+\sum_{k=1}^{3}\delta_{hk}\frac{\partial p}{\partial y_k}=\sum_{i=1}^{3}\psi_{hi}f_i+\sum_{i=1}^{3}\psi_{hi}\nu\sum_{l,r=1}^{3}a_{lr}(t)\frac{\partial^2}{\partial y_l\partial y_r}\Big(\det J_\varphi\sum_{j=1}^{3}\psi_{ji}(u_j+v_{aj})\Big)$$

On sépare les termes qui contiennent u_j et v_{aj} on trouve :

$$\sum_{i=1}^{3}\psi_{hi}\frac{\partial}{\partial t_{(t,y)}}\Big(\det J_\varphi\sum_{j=1}^{3}\psi_{ji}u_j\Big)+\sum_{i=1}^{3}\psi_{hi}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial y_k}\Big(\det J_\varphi\sum_{j=1}^{3}\psi_{ji}u_j\Big)\frac{\partial\varphi_{t,k}}{\partial t}$$
$$+\sum_{i=1}^{3}\psi_{hi}\sum_{k,l=1}^{3}\beta_{lk}(t)\Big(\det J_\varphi\sum_{j=1}^{3}\psi_{jk}u_j\Big)\frac{\partial}{\partial y_l}\Big(\det J_\varphi\sum_{j=1}^{3}\psi_{ji}u_j\Big)$$
$$+\sum_{i=1}^{3}\psi_{hi}\sum_{k,l=1}^{3}\beta_{lk}(t)\Big(\det J_\varphi\sum_{j=1}^{3}\psi_{jk}u_j\Big)\frac{\partial}{\partial y_l}\Big(\det J_\varphi\sum_{j=1}^{3}\psi_{ji}v_{aj}\Big)$$
$$+\sum_{i=1}^{3}\psi_{hi}\sum_{k,l=1}^{3}\beta_{lk}(t)\Big(\det J_\varphi\sum_{j=1}^{3}\psi_{jk}v_{aj}\Big)\frac{\partial}{\partial y_l}\Big(\det J_\varphi\sum_{j=1}^{3}\psi_{ji}u_j\Big)$$
$$+\sum_{i=1}^{3}\psi_{hi}\frac{\partial}{\partial t_{(t,y)}}\Big(\det J_\varphi\sum_{j=1}^{3}\psi_{ji}v_{aj}\Big)+\sum_{i=1}^{3}\psi_{hi}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial y_k}\Big(\det J_\varphi\sum_{j=1}^{3}\psi_{ji}v_{aj}\Big)\frac{\partial\varphi_{t,k}}{\partial t}$$
$$+\sum_{i=1}^{3}\psi_{hi}\sum_{k,l=1}^{3}\beta_{lk}(t)\Big(\det J_\varphi\sum_{j=1}^{3}\psi_{jk}v_{aj}\Big)\frac{\partial}{\partial y_l}\Big(\det J_\varphi\sum_{j=1}^{3}\psi_{ji}v_{aj}\Big)$$
$$+\sum_{k=1}^{3}\delta_{hk}\frac{\partial p}{\partial y_k}=\sum_{i=1}^{3}\psi_{hi}f_i+\sum_{i=1}^{3}\psi_{hi}\nu\sum_{l,r=1}^{3}a_{lr}(t)\frac{\partial^2}{\partial y_l\partial y_r}\Big(\det J_\varphi\sum_{j=1}^{3}\psi_{ji}u_j\Big)$$
$$+\sum_{i=1}^{3}\psi_{hi}\nu\sum_{l,r=1}^{3}a_{lr}(t)\frac{\partial^2}{\partial y_l\partial y_r}\Big(\det J_\varphi\sum_{j=1}^{3}\psi_{ji}v_{aj}\Big)$$

Or tous les termes qui ne contiennent pas u doivent être amenés au deuxième membre de sorte qu'on obtient une équation en u avec le deuxième

$$\int_{\Omega_0} \sum_{h=1}^{3} \Big[\sum_{i=1}^{3} \psi_{hi} \frac{\partial}{\partial t_{(t,y)}} \Big(\det J_\varphi \sum_{j=1}^{3} \psi_{ji} u_j \Big) + \sum_{i=1}^{3} \psi_{hi} \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial y_k} \Big(\det J_\varphi \sum_{j=1}^{3} \psi_{ji} u_j \Big) \frac{\partial \varphi_{t,k}}{\partial t}$$
$$+ \sum_{i=1}^{3} \psi_{hi} \sum_{k,l=1}^{3} \beta_{lk}(t) \Big(\det J_\varphi \sum_{j=1}^{3} \psi_{jk} u_j \Big) \frac{\partial}{\partial y_l} \Big(\det J_\varphi \sum_{j=1}^{3} \psi_{ji} u_j \Big)$$
$$+ \sum_{i=1}^{3} \psi_{hi} \sum_{k,l=1}^{3} \beta_{lk}(t) \Big(\det J_\varphi \sum_{j=1}^{3} \psi_{jk} u_j \Big) \frac{\partial}{\partial y_l} \Big(\det J_\varphi \sum_{j=1}^{3} \psi_{ji} v_{aj} \Big)$$
$$+ \sum_{i=1}^{3} \psi_{hi} \sum_{k,l=1}^{3} \beta_{lk}(t) \Big(\det J_\varphi \sum_{j=1}^{3} \psi_{jk} v_{aj} \Big) \frac{\partial}{\partial y_l} \Big(\det J_\varphi \sum_{j=1}^{3} \psi_{ji} u_j \Big)$$
$$- \nu \sum_{i=1}^{3} \psi_{hi} \sum_{l,r=1}^{3} a_{lr}(t) \frac{\partial^2}{\partial y_l \partial y_r} \Big(\det J_\varphi \sum_{j=1}^{3} \psi_{ji} u_j \Big) + \sum_{k=1}^{3} \delta_{hk} \frac{\partial p}{\partial y_k} \Big] e_{k',h} dy = \int_{\Omega_0} \sum_{h=1}^{3} e_{k,h} g_h dy, \tag{4.16}$$

pour toutes les fonctions $e_{k'}$, $k' = 1, ..., n$. Ceci nous donne un système d'équations différentielles ordinaires dont les inconnues sont les fonctions $C_k^{[n]}$. Même si ce système d'équations est non-linéaire, d'après le théorème d'existence et unicité de la solution des équations différentielles ordinaires, il existe un intervalle suffisamment petit $[0, t_2]$ dans lequel il existe une seule solution $C_k^{[n]}(t)$, $k = 1, ..., n$, de ce système d'équations. Pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution dans l'intervalle donné a priori $[0, t_1]$, il suffit de démontrer que la norme de la solution demeure bornée. Pour l'obtenir, remarquons que, si on multiplie (4.16) par $C_k^{[n]}(t)$, c'est-à-dire, si on considère :

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_0}\sum_{h=1}^{3}\Big[\sum_{i=1}^{3}\psi_{hi}\frac{\partial}{\partial t_{(t,y)}}\Big(\det J_\varphi\sum_{j=1}^{3}\psi_{ji}u_j\Big)+\sum_{i=1}^{3}\psi_{hi}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial y_k}\Big(\det J_\varphi\sum_{j=1}^{3}\psi_{ji}u_j\Big)\frac{\partial\varphi_{t,k}}{\partial t}\\
&+\sum_{i=1}^{3}\psi_{hi}\sum_{k,l=1}^{3}\beta_{lk}(t)\Big(\det J_\varphi\sum_{j=1}^{3}\psi_{jk}u_j\Big)\frac{\partial}{\partial y_l}\Big(\det J_\varphi\sum_{j=1}^{3}\psi_{ji}u_j\Big)\\
&+\sum_{i=1}^{3}\psi_{hi}\sum_{k,l=1}^{3}\beta_{lk}(t)\Big(\det J_\varphi\sum_{j=1}^{3}\psi_{jk}u_j\Big)\frac{\partial}{\partial y_l}\Big(\det J_\varphi\sum_{j=1}^{3}\psi_{ji}v_{aj}\Big)\\
&+\sum_{i=1}^{3}\psi_{hi}\sum_{k,l=1}^{3}\beta_{lk}(t)\Big(\det J_\varphi\sum_{j=1}^{3}\psi_{jk}v_{aj}\Big)\frac{\partial}{\partial y_l}\Big(\det J_\varphi\sum_{j=1}^{3}\psi_{ji}u_j\Big)\\
&-\nu\sum_{i=1}^{3}\psi_{hi}\sum_{l,r=1}^{3}a_{lr}(t)\frac{\partial^2}{\partial y_l\partial y_r}\Big(\det J_\varphi\sum_{j=1}^{3}\psi_{ji}u_j\Big)+\sum_{k=1}^{3}\delta_{hk}\frac{\partial p}{\partial y_k}\Big]e_{k,h}C_k^{[n]}(t)dy\\
&=\int_{\Omega_0}\sum_{h=1}^{3}e_{k',h}C_{k'}^{[n]}(t)gdy,
\end{aligned}\tag{4.17}$$

et si on somme ces équations pour tous $k'=1,2,0...,n$ compte tenu de la relation :

$$\sum_{k'=1}^{n}e_{k'}(x)C_{k'}^{[}n](t)=u^{[n]}(t,x)$$

On obtient l'équation :

$$\int_{\Omega_0}\sum_{h=1}^{3}\Big[\sum_{i=1}^{3}\psi_{hi}\frac{\partial}{\partial t_{(t,y)}}\Big(\det J_\varphi\sum_{j=1}^{3}\psi_{ji}u_j\Big)$$
$$+\sum_{i=1}^{3}\psi_{hi}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial y_k}\Big(\det J_\varphi\sum_{j=1}^{3}\psi_{ji}u_j\Big)\frac{\partial\varphi_{t,k}}{\partial t}$$
$$+\sum_{i=1}^{3}\psi_{hi}\sum_{k,l=1}^{3}\beta_{lk}(t)\Big(\det J_\varphi\sum_{j=1}^{3}\psi_{jk}u_j\Big)\frac{\partial}{\partial y_l}\Big(\det J_\varphi\sum_{j=1}^{3}\psi_{ji}u_j\Big)$$
$$+\sum_{i=1}^{3}\psi_{hi}\sum_{k,l=1}^{3}\beta_{lk}(t)\Big(\det J_\varphi\sum_{j=1}^{3}\psi_{jk}u_j\Big)\frac{\partial}{\partial y_l}\Big(\det J_\varphi\sum_{j=1}^{3}\psi_{ji}v_{aj}\Big) \tag{4.18}$$
$$+\sum_{i=1}^{3}\psi_{hi}\sum_{k,l=1}^{3}\beta_{lk}(t)\Big(\det J_\varphi\sum_{j=1}^{3}\psi_{jk}v_{aj}\Big)\frac{\partial}{\partial y_l}\Big(\det J_\varphi\sum_{j=1}^{3}\psi_{ji}u_j\Big)$$
$$-\nu\sum_{i=1}^{3}\psi_{hi}\sum_{l,r=1}^{3}a_{lr}(t)\frac{\partial^2}{\partial y_l\partial y_r}\Big(\det J_\varphi\sum_{j=1}^{3}\psi_{ji}u_j\Big)+\sum_{k=1}^{3}\delta_{hk}\frac{\partial p}{\partial y_k}\Big]u_h^{[n]}dy$$
$$=\int_{\Omega_0}\sum_{h=1}^{3}u_h^{[n]}g\,dy,$$

Nous voulons montrer que l'équation (4.18) a une structure analogue à l'équation de l'approximation de Galerkin pour les équations de Navier-Stokes. Pour cela nous montrons les remarques suivantes :

Remarque 1 :

$$\sum_{k=1}^{3}\int_{\Omega_0}\sum_{h=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}\psi_{hi}\frac{\partial}{\partial t_{(t,y)}}\Big(\det J_\varphi\sum_{j=1}^{3}\psi_{ji}(u_i^{[n]})\Big)e_{k,h}C_k^{[n]}(t)dy=$$
$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_0}\Big(\frac{\partial}{\partial t_{(t,y)}}\det J_\varphi\Big)\sum_{i=1}^{3}\Big[\sum_{j=1}^{3}\psi_{ji}(u_i^{[n]})\Big]^2dy+\frac{1}{2}\frac{d}{dt_{(t,y)}}\det J_\varphi\sum_{i=1}^{3}\Big[\sum_{j=1}^{3}\psi_{ji}(u_i^{[n]})\Big]^2dy. \tag{4.19}$$

Démonstration

En effet on a

$$\sum_{k=1}^{3}\int_{\Omega_0}\sum_{h=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}\psi_{hi}\frac{\partial}{\partial t_{(t,y)}}\Big(\det J_\varphi\sum_{j=1}^{3}\psi_{ji}(u_i^{[n]})\Big)e_{k,h}C_k^{[n]}(t)dy$$

$$=\int_{\Omega_0}\sum_{i=1}^{3}\Big(\frac{\partial}{\partial t_{(t,y)}}\Big(\det J_\varphi\sum_{j=1}^{3}\psi_{ji}(u_i^{[n]})\Big)\Big)\sum_{i=1}^{3}\psi_{hi}\sum_{k=1}^{3}e_{k,h}C_k^{[n]}(t)dy$$

$$=\int_{\Omega_0}\sum_{i=1}^{3}\Big(\frac{\partial}{\partial t_{(t,y)}}\Big(\det J_\varphi\sum_{j=1}^{3}\psi_{ji}(u_i^{[n]})\Big)\Big)\sum_{i=1}^{3}\psi_{hi}u^{[n]}(t,x)dy$$

$$=\int_{\Omega_0}\frac{\partial}{\partial t_{(t,y)}}(\det J_\varphi)\sum_{i=1}^{3}\Big[\sum_{j=1}^{3}\psi_{ji}(u_j^{[n]})\Big]^2dy$$

$$+\int_{\Omega_0}\det J_\varphi\sum_{h=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}\psi_{hi}u_h^n\frac{\partial}{\partial t_{(t,y)}}\sum_{j=1}^{3}\psi_{ji}(u_j^{[n]})dy$$

$$=\int_{\Omega_0}\frac{\partial}{\partial t}(\det J_\varphi)\sum_{i=1}^{3}\Big[\sum_{j=1}^{3}\psi_{ji}(u_j^{[n]})\Big]^2dy+\frac{1}{2}\int_{\Omega_0}\det J_\varphi\frac{\partial}{\partial t}\sum_{i=1}^{3}\Big[\sum_{j=1}^{3}\psi_{ji}(u_j^{[n]})\Big]^2dy$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\Omega_0}\frac{\partial}{\partial t}(\det J_\varphi)\sum_{i=1}^{3}\Big[\sum_{j=1}^{3}\psi_{ji}(u_j^{[n]})\Big]^2dy+\frac{1}{2}\int_{\Omega_0}\frac{\partial}{\partial t}\Big[\det J_\varphi\sum_{i=1}^{3}\Big[\sum_{j=1}^{3}\psi_{ji}(u_j^{[n]})\Big]^2\Big]dy$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\Omega_0}\frac{\partial}{\partial t}(\det J_\varphi)\sum_{i=1}^{3}\Big[\sum_{j=1}^{3}\psi_{ji}(u_j^{[n]})\Big]^2dy+\frac{1}{2}\cancel{\frac{\partial}{\partial t}}\int_{\Omega_0}\det J_\varphi\sum_{i=1}^{3}\Big[\sum_{j=1}^{3}\psi_{ji}(u_j^{[n]})\Big]^2dy$$

Et l'égalité (4.19) est démontrée.

Remarque 2.

On a :

$$-\int_{\Omega_0}\sum_{h=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}\psi_{hi}\sum_{l,r=1}^{3}a_{lr}(t)\frac{\partial^2}{\partial y_l\partial y_r}\Big(\det J_\varphi\sum_{j=1}^{3}\psi_{ji}u_j\Big)\sum_{k=1}^{3}e_{k,h}C_k^{[n]}(t)dy$$

$$= \int_{\Omega_0} \frac{1}{\det J_\varphi} \sum_{i,m=1}^{3} \Big(\sum_{r=1}^{3} \beta_{rm}(t) \frac{\partial}{\partial y_r} \Big(\det J_\varphi \sum_{j=1}^{3} \psi_{ji} u_j^{[n]} \Big)^2 dy,$$

où

$$a_{lr}(t) = \sum_{m=1}^{3} \beta_{lm}(t)\beta_{rm}(t)$$

□

Démonstration :

on a :

$$-\int_{\Omega_0} \sum_{h=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} \psi_{hi} \sum_{l,r=1}^{3} a_{lr}(t) \frac{\partial^2}{\partial y_l \partial y_r} \Big(\det J_\varphi \sum_{j=1}^{3} \psi_{ji} u_j^{[n]} \Big) \sum_{k=1}^{3} e_{k,h} C_k^{[n]}(t) dy$$

$$= -\int_{\Omega_0} \sum_{h=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} \psi_{hi} \sum_{l,r=1}^{3}\sum_{m=1}^{3} \beta_{lm}(t)\beta_{rm}(t) \frac{\partial^2}{\partial y_l \partial y_r} \Big(\det J_\varphi \sum_{j=1}^{3} \psi_{ji} u_j^{[n]} \Big) \sum_{k=1}^{3} e_{k,h} C_k^{[n]}(t) dy$$

$$= -\int_{\Omega_0} \sum_{h=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} \psi_{hi} \sum_{l,r=1}^{3}\sum_{m=1}^{3} \beta_{lm}(t) \frac{\partial}{\partial y_l} \beta_{rm}(t) \frac{\partial}{\partial y_r} \Big(\det J_\varphi \sum_{j=1}^{3} \psi_{ji} u_j^{[n]} \Big) \sum_{k=1}^{3} e_{k,h} C_k^{[n]}(t) dy$$

$$= -\int_{\Omega_0} \sum_{h=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} \psi_{hi} \sum_{l,m=1}^{3} \beta_{lm}(t) \frac{\partial}{\partial y_l} \Big(\sum_{r=1}^{3} \beta_{rm}(t) \frac{\partial}{\partial y_r} \Big(\det J_\varphi \sum_{j=1}^{3} \psi_{ji} u_j^{[n]} \Big) \Big) \sum_{k=1}^{3} e_{k,h} C_k^{[n]}(t) dy$$

$$= \int_{\Omega_0} \sum_{i=1}^{3}\sum_{m=1}^{3} \Big(\sum_{r=1}^{3} \beta_{rm}(t) \frac{\partial}{\partial y_r} \Big(\det J_\varphi \sum_{j=1}^{3} \psi_{ji} u_j^{[n]} \Big) \sum_{l=1}^{3} \frac{\partial}{\partial y_l} \Big(\beta_{lm}(t) \sum_{h=1}^{3} \psi_{hi} u_h^{[n]} \Big) dy = \Lambda$$

On rappelle que d'aprés le lemme 3.1 on a :

$$\sum_{l=1}^{3} \frac{\partial}{\partial y_l} \Big[\beta_{lm}(t) \frac{1}{\det J_\varphi} \Big] = 0 \qquad m = 1, 2, 3$$

Donc on a :

$$\sum_{l=1}^{3}\frac{\partial}{\partial y_l}\Big(\beta_{lm}(t)\sum_{h=1}^{3}\psi_{hi}u_h^{[n]}\Big)=\frac{1}{\det J_\varphi}\sum_{l=1}^{3}\beta_{lm}(t)\frac{\partial}{\partial y_l}\Big(\det J_\varphi\sum_{h=1}^{3}\psi_{hi}u_h^{[n]}\Big)$$

A l'aide de cette égalité on obtient

$$\Lambda=\int_{\Omega_0}\sum_{i,m=1}^{3}\frac{1}{\det J_\varphi}\sum_{r=1}^{3}\beta_{rm}(t)\frac{\partial}{\partial y_r}\Big(\det J_\varphi\sum_{j=1}^{3}\psi_{ji}u_j^{[n]}\Big)\times$$
$$\sum_{l=1}^{3}\beta_{lm}(t)\frac{\partial}{\partial y_l}\Big(\det J_\varphi\sum_{h=1}^{3}\psi_{hi}u_h^{[n]}\Big)dy$$
$$=\int_{\Omega_0}\frac{1}{\det J_\varphi}\sum_{i,m=1}^{3}\Big(\sum_{r=1}^{3}\beta_{rm}(t)\frac{\partial}{\partial y_r}\Big(\det J_\varphi\sum_{j=1}^{3}\psi_{ji}u_j^{[n]}\Big)^2dy$$

D'où la démostration de la deuxième remarque

Les deux relations que nous avons demontrées, jointes à l'hypothèse de la petitesse de φ , nous donnerons la possibilité de traiter $u^{[n]}$ d'une manière analogue a l'approximation de Galerkin de l'équation de Navier-Stokes.

Remarque3.

On a

$$\sum_{k'=1}^{n}\int_{\Omega_0}\sum_{i=1}^{3}\psi_{hi}\sum_{k,l=1}^{3}\beta_{lk}(t)\Big(\det J_\varphi\sum_{j=1}^{3}\psi_{jk}u_j^{[n]}\Big)\frac{\partial}{\partial y_l}\Big(\det J_\varphi\sum_{j=1}^{3}\psi_{ji}u_j^{[n]}\Big)e_{k',h}C_{k'}^{[n](t)dy}=0$$

Démonstration.

$$\sum_{k'=1}^{n}\int_{\Omega_0}\sum_{h,i=1}^{3}\psi_{hi}\sum_{k,l=1}^{3}\beta_{lk}(t)\Big(\det J_\varphi\sum_{j=1}^{3}\psi_{jk}u_j^{[n]}\Big)\frac{\partial}{\partial y_l}\Big(\det J_\varphi\sum_{j=1}^{3}\psi_{ji}u_j^{[n]}\Big)e_{k',h}C_{k'}^{[n](t)dy}$$

$$=\int_{\Omega_0}\sum_{h,i=1}^{3}\psi_{hi}\sum_{k,l=1}^{3}\beta_{lk}(t)\det J_\varphi\Big(\sum_{j=1}^{3}\psi_{jk}u_j^{[n]}\Big)\frac{\partial}{\partial y_l}\Big(\det J_\varphi\sum_{j=1}^{3}\psi_{ji}u_j^{[n]}\Big)u_h^{[n]}dy$$

$$= \int_{\Omega_0} \sum_{l=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \beta_{lk} \sum_{j=1}^{3} \psi_{jk} u_j^{[n]} \Big) \det J_\varphi \sum_{h,i=1}^{3} \psi_{hi} u_h^{[n]} \Big) \frac{\partial}{\partial y_l} \Big(\det J_\varphi \sum_{j=1}^{3} \psi_{ji} u_j^{[n]} \Big) dy$$

$$\frac{\partial}{\partial y_l} \Big(\det J_\varphi \sum_{j=1}^{3} \psi_{ji} u_j^{[n]} \Big) dy$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \sum_{l=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \beta_{lk} \sum_{j=1}^{3} \psi_{jk} u_j^{[n]} \Big) \frac{\partial}{\partial y_l} \Big(\sum_{i=1}^{3} \Big(\det J_\varphi \sum_{j=1}^{3} \psi_{ji} u_j^{[n]} \Big)^2 \Big] dy$$

$$= -\frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \sum_{l=1}^{3} \frac{\partial}{\partial} \Big(\sum_{j,k=1}^{3} \beta_{lk}(t) \psi_{jk} u_j^{(n]} \Big) \sum_{i=1}^{3} \Big(\det J_\varphi \sum_{j=1}^{3} \psi_{ji} u_j^{[n]} \Big)^2 dy$$

On rappelle que :

$$\sum_{k=1}^{3} \beta_{lk} \psi_{jk} = \delta_{lj}$$

Et donc

$$\sum_{l=1}^{3} \frac{\partial}{\partial y_l} \Big(\sum_{j,k=1}^{3} \beta_{lk}(t) \psi_{jk} u_j^{(n]} \Big) = \sum_{l=1}^{3} \frac{\partial}{\partial y_l} \Big(\sum_{j=1}^{3} \delta_{lj} u_j^{(n]} \Big)$$

$$= \sum_{l=1}^{3} \frac{\partial}{\partial y_l} u_l^{[n]} = \nabla \cdot u^{[n]} = 0.$$

On en déduit donc l'égalité énoncée dans la remarque.□

Puisque les autres terme ne sont pas trés mauvais, en utilisant le même type de calcul, on peut espéré arrivée à une bonne estimation de l'approximation de Galerkin.

Bibliographie

D. Quemada : caractéristique générale de la circulation sanguine dans les petits vaisseaux.

[1] Journale de physique, Colloque C1, supplément au num 1 Tome37, 1976.

[2] H.Fuijita Yashima :*Mécanique des fluide newtoniennes.* Cours de l'université de Guelma, 2010.

[3] O.A.Ladyzenshkaya :*problèmes mathématiquesde dynamique des fluides visqueux* [Edition Russe]. Nauka, Mouscou 1970 ; the théorie of viscous.

[4] H.Brézis :*Analyse Fonctionnelle théorie et appllication.* Masson, Paris, 1987.

[5] J.Lions :*Quelques méthodes de résolution des problème aux limits non linéaire.* Dunod-VGauthier-Villard.

[6] P-L.Lions :*Mathematical topics in fluide mecanics.* Oxford Univ-Press, Oxford,vol2, 1996 ; vol2, 1998.

[7] V.P.Mikhailov :*Equations aux dérivées partielles.* (traduit de Russe).Mir, Mouscou.1980.

[8] R.Teman :*Navier-Stokes equation, theory and numerical analysis.* North-Holland Publ, Amesterdam, 1977.