République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 – Guelma

Faculté de Mathématiques et de l'Informatique et Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire de Fin d'Etude
Master Académique en Mathématiques
Option : EDP

THEME

Fonction de Green et quelques applications

Présenté par :

Doubabi Amel

Dirigé par :

Dr F.Ellaggoune

Jury :
Examinateur 1 : Dr F .Z .Aissaoui ....**Univ-Guelma**
Examinateur 2 : Dr K .Fernane...**Univ-Guelma**

Session Juin 2012

Dédicaces

A ma très chère défunte mère, c'est à toi que je dois tout. Ce travail est le fruit de la rigueur de ton éducation. Que ton âme repose eu paix.

A mon très cher père qui a toujours été là pour moi et qui m'a donné un magnifique modèle de labeur et de persévérance.
J'espère qu'il trouvera dans ce travail toute ma reconnaissance et tout mon amour.

A mes frères ; l'ainé ***Houssem*** *à qui je lui souhaite une réussite dans sa vie professionnelle ainsi qu'à* ***Si abd errahmane*** *mon frère cadet que je considère comme mon fils je lui souhaite de tout mon cœur une réussite à son baccalauréat avec une très bonne moyenne.*

A mes grands parents maternels Youma ***Fatima*** *et Baba* ***Amar*** *de vivre longtemps possible en très bonne santé.*

A mes oncles et ma tante chacun par son prénom : ***Mouhamed el haddi, Yazid, Ahmed, Ali, Badredine, Houcine, Nawel*** *et* ***Abd elatif*** *de mener la belle vie avec l'ensemble des membres de leurs famille.*

A mes amies d'enfance : ***Nadia, Zahra*** *et* ***Souléf*** *ainsi qu'à leurs familles.*

A mes camarades d'auditoires et tous ceux du département de Mathématique.

Remerciments

Je tiens à exprimer toutes mes reconnaissances au Docteur . **Ellaggoune Fateh** de m'avoir proposé ce sujet de recherche et d'avoir dirigé mon travail.

Je lui témoigne aussi ma gratitude pour son soutien, sa grande disponibilité et surtout ses conseils et ses encouragements tout au long de mes recherches.

J'exprime également mes chaleureux remerciements au Docteur **F. Z. Aissaoui** et au Docteur **K. Fernane** pour l'honneur qu'ils m'ont fait d'avoir accepté de faire partie de ce jury.

Résumé

On va étudier dans ce mémoire la notion de la fonction de Green et son application pour les équations différentielles ordinaires et quelques équations différentielles partielles comme l'équation de Laplace et de poisson, d'où son intérêt principal est la représentation intégrale de la solution de ces équations différentielles, car la fonction de Green joue un rôle fondamental pour le passage d'une équation différentielle à une équation intégrale.

Mots clés : équations différentielles ordinaires (EDO), équation de Laplace, fonction de Green, distribution de Dirac.

Abstract

We will study in this paper the concept of Green's function and its application to ordinary differential equations
and some partial differential equations as Laplace equation and Poisson, where his main interest is the integral representation of the solution these differential equations, because the Green function plays a fundamental role in the passage of a differential equation to an integral equation.

Keys words : ordinary differential equations, equations of Laplace, Green's function, Dirac distribution.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

La modélisation de la plupart des problèmes physiques, biologiques, ..., conduisent naturellement à une ou plusieurs équations fonctionnelles qui s'écrivent sous la forme :

$$Au = f,$$

où A est un opérateur $\begin{cases} \text{différentiel,} \\ \text{intégral,} \\ \text{Intégro-différentiel.} \end{cases}$

L'opérateur A est défini sur un espace fonctionnel X, u est l'inconnu appartenant à X, son image f donnée dans un autre espace Y.

Donc on cherche u qui vérifie l'équation :

$$Au = f,$$

avec ses condition aux limites et initiales.

Comment peut-on résoudre ce problème ?

La méthode classique (surtout en absence d'ordinateur) consiste à chercher à tout prix une expression explicite de la solution u, exacte ou approchée d'où l'introduction de nombreux techniques ou notions comme :

1) Solution approchée (méthode numérique).

2) Fonction spéciales (fonction de Bessel).

3) Fonction de Green.

Et ce travail est consacré à l'étude de l'existence de la solution (même l'unicité) via la dernière technique qui est très intéressante et son intérêt principal est la représentation intégrale de la solution, où il ne faut pas croire qu'il est facile de construire directement la fonction de Green dans un ouvert, il est cependant possible de tirer des conséquences utiles de son existence.

Donc les questions qui se posent sont les suivants :

1) Que peut-on dire sur l'existence et l'unicité de cette fonction ?

2) Quelles propriétés doit être vérifié ?

Chapitre 2

Notions préliminaires

Il ne s'agit pas ici de refaire un cours sur les équations différentielles, mais de rappeler des résultats essentiels sur ces équations surtout du $2^{ème}$ ordre pour les introduire, la notion de la fonction de Green, dont l'usage est très utile en physique.

Définition 1.1 :

∘ *Un **opérateur différentiel** est un opérateur agissant sur des fonctions différentiables.*

- Lorsque la fonction a une seule variable, l'opérateur différentiel est construit à partir des dérivées ordinaires.

- Lorsque la fonction a plusieurs variables, l'opérateur différentiel est construit à partir des dérivées partielles.

∘ *On appelle **équation différentielle** toute relation entre une fonction et certaines de ses dérivées.*

∘ *On appelle **ordre** de l'équation différentielle l'ordre le plus élevé de ces dérivées qui intervient dans l'équation.*

∘ *L'équation différentielle est dite **linéaire** si la fonction inconnue est linéaire par rapport à ses dérivées et si les coefficients qui les lient ne dépend que de $(x, y, ...)$; sinon elle est non linéaire.*

2.1 Equations différentielles ordinaires

2.1.1 Equations différentielles du premier ordre

Définition 1.2 :

Une équation différentielle du premier ordre est une relation entre une fonction y (supposée inconnue) ; sa dérivée y' et la variable x. Elle est de la forme suivante :

$$y' = f(x, y) \qquad \text{"forme explicite".} \tag{1.1}$$

$$F(x, y, y') = 0 \qquad \text{"forme implicite".} \tag{1.2}$$

Nous supposons donnés un domaine Ω de $\mathbb{R}^2$ et une fonction (réelle) f continue dans Ω.

Remarque 1.1 :

Nous dirons que y est une solution de l'équations différentielle $y' = f(x, y)$ si y est une fonction numérique réelle définie et continûment dérivable dans un intervalle $]a, b[$ de $\mathbb{R}$ $(a < b)$ telle que :

i) $x \in \,]a, b[\, \rightarrow (x, y(x)) \in \Omega$.

ii) $x \in \,]a, b[\, \rightarrow y'(x) = f(x, y(x))$.

Exemples 1.1 :

1) y une fonction réelle définie et continue sur $]a, b[$.

$$y' = g(x), \text{ où } \; \Omega = \{(x, y);\; x \in \,]a, b[\text{ et } f(x, y) = g(x)\}. \tag{1.3}$$

Cette équation signifie que y est une primitive de g dans $]a, b[$ c'est à dire que si on fixe $c \in \,]a, b[$, on a :

$$y(x) = \gamma + \int_c^x g(t)dt, \tag{1.4}$$

où γ est un nombre arbitraire, on voit donc que l'équation différentielle considérée possède une infinité de solutions, cependant la solution est complètement déterminée dés qu'on impose la condition supplémentaire $y(c) = \gamma$ où c, γ sont données.

2) On suppose que $\Omega = \mathbb{R}^2$,

$f(x, y) = 3\,|y|^{\frac{2}{3}}$ et $c = \gamma = 0$.

$$\begin{cases} y' = 3\,|y|^{\frac{2}{3}} \\ y(0) = 0 \end{cases} \qquad \text{(problème de Cauchy).} \tag{1.5}$$

On remarque que :

$$\begin{cases} y_1(x) = 0, & x \in \mathbb{R}, \\ y_2(x) = x^3, & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

sont des solutions du problème.

Cet exemple montre qu'en général la condition supplémentaire $y(c) = \gamma$ peut ne pas être suffisante pour que y soit complètement déterminer.

Il est important de remarquer que dans cet exemple la fonction f n'est pas continûment dérivable par rapport à y car on a :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} 2y^{-\frac{1}{3}} & \text{si } y > 0, \\ -2y^{-\frac{1}{3}} & \text{si } y < 0. \end{cases} \tag{1.6}$$

Et c'est pour cela qu'on a trouvé deus solutions.

Résultats :

1) Si f est continue et admet une dérivée partielle continue par rapport à y, le problème de Cauchy admet une solution unique (Théorème de Cauchy).

2) Si f est continue, le problème de Cauchy admet au moins une solution (Théorème de Cauchy Pears).

Voici quelques méthodes pratiques pour résoudre les E.D.O du premier ordre :

a) Résolution des équations linéaires :

Ce sont les équations de la forme :

$$y'(x) = g(x) + h(x)y = f(x, y), \tag{1.7}$$

avec $\Omega =]a, b[\times \mathbb{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in]a, b[\,, y \in \mathbb{R}\}$.

Où g et h sont des fonctions réelles continues définies sur $]a, b[$, la solution qui vérifie $y(c) = \gamma$ est données par :

$$y(x) = \gamma \exp\left[\int_c^x h(t)dt\right] + \int_c^x g(s)\left[\exp\int_c^x h(t)dt\right] ds. \tag{1.8}$$

Dans le cas particulier ou $g = 0$, l'équation est dite "sans second membre" :

$$\frac{dy}{dx} = y' = h(x)y, \tag{1.9}$$

qui a pour solution vérifiant $y(c) = \gamma$:

$$y(x) = \gamma \exp\int_c^x h(t)dt. \tag{1.10}$$

(1.8) se déduit de (1.10) par la méthode de la variation de la constante.

En effet, on voit facilement d'après (1.10) que :

$$y(x) = \Phi(x) \exp\int_c^x h(t)dt, \tag{1.11}$$

où on a remplacé γ par $\Phi(x)$.

Et si on remplace y par (1.11) dans (1.7) on trouve $\Phi'(x)$ et par intégration, on obtient $\Phi(x)$ et par conséquent l'équation (1.8).

b) Résolution des équations ou f ne dépend pas de x :

Ce sont les équations de la forme :

$$y' = f(y), \tag{1.12}$$

et $\Omega = \mathbb{R} \times \left]\alpha, \beta\right[$, où f est une fonction réelle continue et définie sur $\left]\alpha, \beta\right[$. On considère une primitive $\Phi(x)$ de $\dfrac{1}{f}$.

$$\Phi(y) = \int_{\gamma}^{y} \frac{dt}{f(t)}, \qquad \gamma \in \left]\alpha, \beta\right[. \tag{1.13}$$

On en déduit que Φ est bijective sur $\left]\alpha, \beta\right[$ donc

$$x = \Phi(y) \Leftrightarrow y = \Psi(x),$$

où Ψ est l'inverse de Φ.

On considère l'équation

$$\frac{y'}{f(y(x))} = 1 \Rightarrow y'(x)\Phi'(y(x)) = 1,$$

et donc

$$\Phi(y(x)) = \lambda + x, \lambda \in \mathbb{R}.$$

On conclut que

$$y(x) = \Psi(\lambda + x) = \Psi(x - c), \tag{1.14}$$

car λ est déterminée par $y(c) = \gamma \Rightarrow \Phi(\gamma) = \lambda + c \Rightarrow \lambda = -c$.

c) Equations à variables séparées :

Ce sont les équations de la forme :

$$\begin{cases} y' = f(y)g(x) \\ y(c) = \gamma \end{cases} \quad , \ \Omega =]a,b[\times]\alpha,\beta[, \tag{1.15}$$

donc $\dfrac{y'}{f(y(x))} = g(x)$ et d'après (b) on déduit que

$$\Phi(y(x)) = \lambda + \int_c^x g(t)dt,$$

avec

$$y(c) = \gamma \Rightarrow \Phi(\gamma) = \lambda = 0 \Rightarrow \Phi(y) = \int_c^x g(t)dt.$$

On conclut que :

$$y(x) = \Psi\left(\int_c^x g(t)dt\right). \tag{1.16}$$

d) Equation homogènes :

Ce sont les équations de la forme :

$$y' = f(\frac{y}{x}), \tag{1.17}$$

où f continue et définie sur $]a,b[$, et

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{y}{x} \in]a,b[,\ x \neq 0\}.$$

On définie

$$z = \frac{y}{x}. \tag{1.18}$$

On a donc $y = xz$, d'où $y' = z'x + z \Rightarrow z$ est solution de

$$z' = \frac{f(z) - z}{x} = \frac{F(z)}{x}.$$

Cette dernière est à variables séparées, donc on peut la résoudre en utilisant (c).

e) Equation de Bernoulli :

C'est de la forme :

$$y' = h(x)y + g(x)y^{\alpha} \qquad \text{(équation non linéaire)}, \tag{1.19}$$

avec $\alpha \neq 0,\ 1$.

Par changement de variable, on se ramène à :

$$z = y^{1-\alpha} \Rightarrow z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'. \tag{1.20}$$

On divise (1.19) par y^{α} on trouve :

$$z' = [(1-\alpha)h(x)]\, z + [(1-\alpha)g(x)] = H(x)z + G(x). \tag{1.21}$$

On obtient une équation linéaire de la forme (a).

f) Equation de Ricatti :

C'est l'équation de la forme :

$$y' = h(x)y + k(x)y^2 + g(x). \tag{1.22}$$

- Si $k(x) = 0 \Rightarrow$ équation linéaire (a).
- Si $g(x) = 0 \Rightarrow$ équation de Bernoulli avec $\alpha = 2$.

On a une solution particulière y_1, posons

$$y = y_1 + z. \tag{1.23}$$

On remplace (1.23) dans (1.22) il reste :

$$z' = (h(x) + 2k(x)y_1)z + k(x)z^2.$$

On obtient donc une équation de Bernoulli.

Il y a aussi plusieurs méthodes pour résolus des différents types des équations du 1^{er}ordre.

2.1.2 Equations différentielles du second ordre

Soient $]a,b[\subset \mathbb{R}$ et les fonctions réelles g, h et k définies sur $]a,b[$, l'équation du second ordre est de la forme :

$$y'' = g(x) + h(x)y + k(x)y', \tag{1.24}$$

y est deux fois continûment dérivables sur $]a,b[$.

Théorème 1.1 :

Soit $c \in \,]a,b[$ et soit γ et δ réels donnés,il existe une unique solution de l'équation (1.24) telle que : $y(c) = \gamma$, $y'(c) = \delta$.

a) Equation à coefficients variables

a.1) Sans second membre : C'est l'équation de la forme :

$$y'' - h(x)y - k(x)y' = 0. \tag{1.25}$$

On désigne par N l'ensemble des solutions de (1.25).

Définitions 1.3 :

1) On appelle "système fondamental de solution de l'équation (1.25) toute base de N.

2) Soient y_1, $y_2 \in N$, on appelle wronskien de y_1 et y_2 la fonction

$$\begin{aligned} x \quad \rightarrow \quad w(x) &= \det \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \\ &= y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x). \end{aligned} \tag{1.26}$$

Théorème 1.2 :

Le couple de fonction $(y_1,\ y_2)$ est un système fondamental si seulment si $w(x)$ ne s'annule pas en aucun point de $]a, b[$.

a.2) Avec second membre : Dans le cas général avec $g \neq 0$, on fixe $\{y_1$ *et* $y_2\}$ le système fondamental de l'équation. On peut alors calculer y en appliquant le :

Théorème1.3 :

Toutes les solutions sont de la forme :

$$y(x) = \Phi_1(x)y_1(x) + \Phi_2(x)y_2(x), \tag{1.27}$$

où $\Phi_1(x)$ et $\Phi_2(x) \in C(]a, b[, \mathbb{R})$ sont solution de :

$$\begin{cases} \Phi_1'(x)y_1(x) + \Phi_2'(x)y_2(x) = 0, \\ \Phi_1'(x)y_1'(x) + \Phi_2'(x)y_2'(x) = g(x). \end{cases} \tag{1.28}$$

Alors : $\Phi_1'(x) = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ g(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}}{w(x)}$, $\Phi_2'(x) = \dfrac{\begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & g(x) \end{vmatrix}}{w(x)}$.

b) Equation a coefficients constants :

b.1) Sans second membre : Ce sont les équations de la forme :

$$y''(x) - ky'(x) - hy(x) = 0 \ , \ h, k \in \mathbb{R}. \tag{1.29}$$

On cherche des solutions sous la forme :

$$y(x) = e^{px}. \tag{1.30}$$

Donc $y'(x) = pe^{px}$ et $y''(x) = p^2 e^{px}$. Par conséquent p doit être solution de l'équation caractéristique : $p^2 - kp - h = 0$.

b.2) Avec second membre ($g(x) \neq 0$) : 1) Si g est définie par $g(x) = p(x)e^{rx}$ avec p est un polynôme de degrés n alors il existe un polynôme $\Phi(x)$ telle que :

$$y_0 = \Phi(x)e^{rx}, \tag{1.31}$$

soit solution.

2) Si $g(x) = \alpha e^{rx} \cos sx + \beta e^{rx} \sin sx$ on a :

∘ Si $r + is$ n'est pas racine du caractéristique alors la solution est :

$$y_0 = Ae^{rx} \cos sx + Be^{rx} \sin sx. \tag{1.32}$$

∘ Sinon la solution est :

$$y_0 = x(Ae^{rx} \cos sx + Be^{rx} \sin sx). \tag{1.33}$$

2.2 Equations différentielles partielles

Définition 1.4 :

Une équation aux dérivées partielles est une relation faisant intervenir les variables indépendants x, y, ...la fonction u et ses dérivées partielles. Par exemple si u est une fonction de deux variables, une E.D.P peut s'écrire par la relation

$$F(x, y, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{x^3y}, ...) = 0. \tag{1.34}$$

2.2.1 Classifications mathématiques des EDP du second ordre

Ce sont les équations de la forme :

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = g(x, y), \tag{1.35}$$

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}), \tag{1.36}$$

et A, B, C, ..., F sont les coefficients de l'EDP, ils sont en fonction de x et y et peuvent être des constants.

Selon le signe du discriminant

$$\Delta = B^2 - 4AC. \tag{1.37}$$

Nous obtenons le classement suivant :

1) Si $\Delta < 0$, l'EDP est dite elliptique comme l'équation de Laplace de la forme :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{1.38}$$

2) Si $\Delta > 0$, l'EDP est dite hyperbolique comme l'équation des ondes.

3) Si $\Delta = 0$, l'EDP est dite parabolique comme l'équation de la chaleur.

2.2.2 Classification des problèmes aux limites

1) Si l'équation est elliptique, on a un problème d'équilibre ou de valeur aux limites.

2) Si l'équation est parabolique, on a un problème de valeurs initiales.

3) Si l'équation est hyperbolique, on a un problème de valeurs propres.

2.2.3 Types de conditions aux limites

1) Lorsque on a

$$u(t,x,y) = u_0(t,x,y), \qquad (x,y) \in \Gamma, \tag{1.39}$$

Γ est la frontière du domaine Ω. la condition aux limites est dite de type de "Dirichlet".

2) Lorsque on a

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t,x,y) = u_0(t,x,y), \qquad (x,y) \in \Gamma, \tag{1.40}$$

la condition aux limites est dite de type de "Newmann".

2.3 Définition de la fonction de Green

On appelle fonction de Green en physique ce que les mathématiciens appellent solution élémentaire ou fondamentale d'une E.D.P ou E.D.O de la forme :

$$Du(x) = f(x). \tag{1.41}$$

Les fonctions de Green de cette équation sont les fonctions satisfaisantes l'équation où la source f a été remplacée par $\delta(x-\xi)$. Si on note $G(x,\xi)$ la fonction de Green, alors par définition on a :

$$DG(x,\xi) = \delta(x-\xi), \tag{1.42}$$

où D est un opérateur différentiel et $\delta(x-\xi)$ est la distribution de Dirac.

Donc la méthode des fonctions de Green fait un usage intensif de la fonction (distribution) de Dirac.

2.3.1 Distribution de Dirac

Elle est utilisée pour formuler des solutions à certaines équations aux dérivées partielles. On définit une distribution de Dirac δ comme suit :

$$\delta : \begin{cases} D(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ \varphi \to \langle \delta, \varphi \rangle = \delta(\varphi) = \varphi(0), \quad \varphi \in D(\mathbb{R}). \end{cases} \quad D(\mathbb{R}) = C_c^{\infty}(\mathbb{R}). \tag{1.43}$$

Cette distribution vérifiée la propriété fondamentale, que pour toute fonction $u(x)$ à support compact :

$$\int f(\xi)\delta(x-\xi)d\xi = f(x). \tag{1.44}$$

Chapitre 3

Fonction de Green pour les E.D.O

Les fonctions de Green interviennent dans la résolution de certaines équations différentielles. Nous concéderons ici leur existence et unicité dans la résolution, des équations différentielles ordinaires surtout du second ordre et on va expliquer ça à l'aide de quelques exemples.

3.1 Cas généraux de la fonction de Green

Théorème général :

Soit

$$\begin{aligned} D[u] &\equiv (q_0(x)\frac{d^n u}{dx^n}(x) + q_1(x)\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}(x) + ...q_n(x)u(x) = 0. \\ V_k[u] &\equiv \alpha_k u(a) + ... + \alpha_k^{(n-1)}\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}(a) + \beta_k u(b) + ... + \beta_k^{(n-1)}\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}(b) = 0 \quad (k = 1, 2.., n). \end{aligned}$$

Si l'équation homogène $D[u]$ avec ses conditions aux limites $V_k[u]$ (homogène ou non étant linéairement indépendants) n'admet que la solution $u \equiv 0$, alors il existe *une unique fonction de Green $G(x, \xi)$ pour ce problème (supposons que $q_0(x) \neq 0$ et $(x, \xi) \in [a, b] \times [a, b]$).*

3.1.1 Cas où les conditions aux limites sont homogènes

Soit (2.1) le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} q_0(x)\dfrac{d^n u}{dx^n}(x) + q_1(x)\dfrac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}(x) + ...q_n(x)u(x) = f(x), \qquad (**) \\ \text{avec les conditions aux limites :} \\ \alpha_1 u(a) + \alpha_1^{(1)}\dfrac{du}{dx}(a) + ... + \alpha_1^{(n-1)}\dfrac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}(a) + \beta_1 u(b) + ... + \beta_1^{(n-1)}\dfrac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}(b) = 0, \\ \alpha_2 u(a) + \alpha_2^{(1)}\dfrac{du}{dx}(a) + ... + \alpha_2^{(n-1)}\dfrac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}(a) + \beta_2 u(b) + ... + \beta_2^{(n-1)}\dfrac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}(b) = 0, \\ \\ \alpha_n u(a) + \alpha_n^{(1)}\dfrac{du}{dx}(a) + ... + \alpha_n^{(n-1)}\dfrac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}(a) + \beta_n u(b) + ... + \beta_n^{(n-1)}\dfrac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}(b) = 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Théorème 2.1 :

On suppose réalisées les conditions ci dessus et on envisage l'équation (**) ayant pour second membre une fonction f continus par morceaux sur $[a,b]$.

Alors il existe une solution unique de (**) vérifiant leur conditions aux limites,elle est donnée par :

$$u(x) = \int_a^b G(x,\xi)f(\xi)d\xi. \tag{2.2}$$

Preuve :

Si $G(x,\xi)$ est connue, alors la solution de $Du(x) = f(x)$ s'écrit sous la forme :

$$u(x) = (G*f)(x) = \int_a^b G(x-\xi)f(\xi)d\xi = \int_a^b G(x,\xi)f(\xi)d\xi, \tag{2.3}$$

car :

$$\begin{aligned} Du(x) &= \int_a^b [DG(x-\xi)]\, f(\xi)d\xi \quad (D \text{ agissant la variable } x) \\ &= \int_a^b \delta(x-\xi)f(\xi)d\xi = f(x). \end{aligned}$$

3.1.2 Cas où les conditions aux limites sont séparées et non homogènes

Soit

$$\left\{\begin{array}{l} q_0(x)\dfrac{d^2u}{dx^2}(x) + q_1(x)\dfrac{du}{dx}(x) + q_2(x)u(x) = f(x), \\ \alpha_1 u(a) + \alpha_2 \dfrac{du}{dx}(a) = A, \\ \beta_1 u(b) + \beta_2 \dfrac{du}{dx}(b) = B. \end{array}\right. \tag{2.4}$$

Théorème 2.2 :

Un système régulier dont le système homogène associé (H) n'admet que la solution $u \equiv 0$*, soit* $G(x,\xi)$ *la fonction de Green correspondante et* $G_1(x)$ *la solution de (H) telle que :*

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_1 u(a) + \alpha_2 \dfrac{du}{dx}(a) = 1, \\ \beta_1 u(b) + \beta_2 \dfrac{du}{dx}(b) = 0. \end{array}\right. \tag{2.5}$$

Et $G_2(x)$ *la solution de (H) telle que :*

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_1 u(a) + \alpha_2 \dfrac{du}{dx}(a) = 0, \\ \beta_1 u(b) + \beta_2 \dfrac{du}{dx}(b) = 1. \end{array}\right. \tag{2.6}$$

$G_1(x)$ *et* $G_2(x)$ *existes et ils sont uniques, la solution du (2.4) est unique et égale à :*

$$u(x) = \int_a^b G(x,\xi) f(\xi) d\xi + AG_1(x) + BG_2(x). \tag{2.7}$$

3.1.3 Détermination de la fonction de Green

Cette fonction de Green $G(x,\xi)$ est caractérisée par les propriétés suivantes :

1) $\forall \xi \in \,]a,b[$, G est solution de l'équation homogène dans l'intervalles $[a,\xi[$ et $]\xi,b]$ $(DG = 0)$.

2) $G(x,\xi)$ est continue.

3) $G(x,\xi)$ possède des dérivées continues jusqu'à l'ordre $n-2$ par rapport à $x \in [a,b]$.

4) Sa dérivée d'ordre $n-1$ par rapport à x existe est continue sauf aux point $x=\xi$, à ce point il y a discontinuité de cette dérivée, le saut valant $\dfrac{1}{q_0(\xi)}$.

5) G doit vérifier les conditions aux frontières.

Preuve du théorème général :

Soient $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., $u_n(x)$ les solutions linéairement indépendantes de (*). Voir la propriété (1), sur les intervalles $[a,\xi[$ et $]\xi,b]$ la fonction cherchée $G(x,\xi)$ doit être de la forme :

$$G(x,\xi) = \begin{cases} a_1u_1(x) + a_2u_2(x) + ... + a_nu_n(x), & \text{pour } \ a \leq x < \xi, \\ b_1u_1(x) + b_2u_2(x) + ... + b_nu_n(x), & \text{pour } \ \xi < x \leq b, \end{cases} \tag{2.8}$$

ici $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n$ sont des fonctions de ξ. De la continuité au point $x=\xi$ de la fonction $G(x,\xi)$ et d'après la propriété (3), nous avons :

$$\begin{cases} [b_1u_1(\xi) + b_2u_2(\xi) + ... + b_nu_n(\xi)] - [a_1u_1(\xi) + a_2u_2(\xi) + ... + a_nu_n(\xi)] = 0, \\ [b_1u_1'(\xi) + b_2u_2'(\xi) + ... + b_nu_n'(\xi)] - [a_1u_1'(\xi) + a_2u_2'(\xi) + ... + a_nu_n'(\xi)] = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \left[b_1\dfrac{d^{n-2}u_1(\xi)}{d\xi^{n-2}} + ... + b_n\dfrac{d^{n-1}u_1(\xi)}{d\xi^{n-1}}\right] - \left[a_1\dfrac{d^{n-2}u_1(\xi)}{d\xi^{n-2}} + ... + a_n\dfrac{d^{n-2}u_1(\xi)}{d\xi^{n-2}}\right] = 0. \end{cases}$$

Et d'après la propriété (4), on a :

$$\left[b_1\frac{d^{n-1}u_1(\xi)}{d\xi^{n-1}} + ... + b_n\frac{d^{n-1}u_1(\xi)}{d\xi^{n-1}}\right] - \left[a_1\frac{d^{n-1}u_1(\xi)}{d\xi^{n-1}} + ... + a_n\frac{d^{n-1}u_1(\xi)}{d\xi^{n-1}}\right] = \frac{1}{q_0(\xi)}.$$

Posons :

$$c_k(\xi) = b_k(\xi) - a_k(\xi) \ (k = 1, 2, ..., n). \tag{2.9}$$

Il vient le système d'équations linéaires :

$$
\left\{
\begin{array}{c}
c_1 u_1(\xi) + c_2 u_2(\xi) + ... + c_n u_n(\xi) = 0, \\
c_1 u_1'(\xi) + c_2 u_2'(\xi) + ... + c_n u'_n(\xi) = 0, \\
.... \\
c_1 \dfrac{d^{n-2} u_1(\xi)}{d\xi^{n-2}} + c_2 \dfrac{d^{n-2} u_2(\xi)}{d\xi^{n-2}} + ... + c_n \dfrac{d^{n-2} u_1(\xi)}{d\xi^{n-2}} = 0, \\
c_1 \dfrac{d^{n-1} u_1(\xi)}{d\xi^{n-1}} + c_2 \dfrac{d^{n-1} u_2(\xi)}{d\xi^{n-1}} + ... + c_n = \dfrac{1}{q_0(\xi)}.
\end{array}
\right.
\tag{2.10}
$$

Le déterminant du système est égal le wronskien, il n'est pas donc nul. Aussi le système détermine t-il de manière unique les fonctions $c_k(\xi)$.

Déterminant les fonctions $a_k(\xi)$ et $b_k(\xi)$ moyennant les conditions aux limites. Mettons :

$$V_k(u) = A_k(u) - B_k(u), \tag{2.11}$$

où

$$
\begin{aligned}
A_k(u) &= \alpha_k u(a) + \alpha_k^{(1)} \frac{du}{dx}(a) + ... + \alpha_k^{(n-1)} \frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}(a), \\
B_k(u) &= \beta_k u(b) + \beta_k^{(1)} \frac{du}{dx}(b) + ... + \beta_k^{(n-1)} \frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}(b),
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

et d'après la propriété (5) nous obtenons alors

$$V_k(G) = a_1 A_k(u_1) + a_2 A_k(u_2) + ... + a_n A_k(u_n) + b_1 B_k(u_1) + b_2 B_k(u_2) + ... + b_n B_k(u_n) = 0 \ \ (k = 1, 2, ..., n$$

Et comme

$$a_k = b_k - c_k, \tag{2.13}$$

nous avons :

$$(b_1 - c_1) A_k(u_1) + (b_2 - c_2) A_k(u_2) + ... + (b_n - c_n) A_k(u_n) + b_1 B_k(u_1) + b_2 B_k(u_2) + ... + b_n B_k(u_n) = 0.$$

d'où, d'après (2.11) :

$$b_1V_k(u_1) + ... + b_nV_k(u_n) = c_1A_k(u_1) + ... + c_nA_k(u_n). \tag{2.14}$$

Notons que le système (2.14) est linéairement indépendant (hypothèse).

Ainsi, le système (2.14) admet une solution unique en $b_1(\xi), ..., b_n(\xi)$, et comme $a_k(\xi) = b_k(\xi) - c_k(\xi)$, donc les quantités a_k sont définies de façon unique. Donc on a démontré l'existence et l'unicité de la fonction de Green $G(x, \xi)$.

Exemple 2.1 :

On va résoudre le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u}{dx^2}(x) + \dfrac{du}{dx}(x) = 1 \qquad x \in [0,1], \\ u(0) = 0, \\ u(1) = 0. \end{cases}$$

L'équation homogène associée est :

$$\frac{d^2u}{dx^2}(x) + \frac{du}{dx}(x) = 0.$$

La solution générale de cette équation est :

$$u(x) = A + Be^{-x}.$$

Les conditions aux limites imposent : $A + B = 0$ et $A + Be^{-1} = 0$ qui est satisfait si seulement si $A = 0$ et $B = 0$ donc :

$$u(x) = 0,$$

donc $\exists! G(x, \xi)$.

D'après (1) on pose alors :

$$G(x,\xi)=\begin{cases} a_0(\xi)+a_1(\xi)e^{-x}, & 0\le x\le \xi,\\ b_0(\xi)+b_1(\xi)e^{-x}, & \xi\le x\le 1.\end{cases}$$

On doit satisfaire :

(2), ce qui impose :

$$a_0+a_1e^{-\xi}=b_0+b_1e^{-\xi}.$$

(4), ce qui impose :

$$\frac{\partial G}{\partial x}(\xi^+,\xi)-\frac{\partial G}{\partial x}(\xi^-,\xi)=1 \textit{ par suite } -b_1e^{-\xi}+a_1e^{-\xi}=1.$$

(5), ce qui impose :

$$a_0+a_1=0 \textit{ et } b_0+b_1e^{-1}=0.$$

On déduit sans difficulté de ces relations :

$$a_0=\frac{e-e^{-\xi}}{1-e},\ a_1=\frac{e-e^{-\xi}}{e-1},\ b_0=\frac{1-e^{\xi}}{1-e},\ b_1=\frac{e(1-e^{\xi})}{e-1}.$$

Alors :

$$G(x,\xi)=\begin{cases} \dfrac{1-ee^{-x}}{1-e}(1-e^{\xi}), & 0\le x\le \xi,\\ \dfrac{1-e^{-x}}{1-e}(1-e^{\xi}), & \xi\le x\le 1.\end{cases}$$

Alors la solution de notre problème est :

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_0^x \frac{1-ee^{-x}}{1-e}(1-e^{\xi})d\xi+\int_x^1\frac{1-e^{-x}}{1-e}(1-e^{\xi})d\xi\\ &= \frac{1}{1-e}(e+x-xe-ee^{-x}).\end{aligned}$$

3.2 Cas particuliers de la fonction de Green

Soit sur l'intervalle $[a, b]$ le problème de la forme :

$$\frac{d}{dx}\{p(x)\frac{du}{dx}(x)\} + q(x)u(x) = f(x), \tag{2.15}$$

avec les conditions aux limites séparées :

$$\begin{cases} \alpha_1 u(a) + \alpha_2 \frac{du}{dx}(a) = A, \\ \beta_1 u(b) + \beta_2 \frac{du}{dx}(b) = B. \end{cases} \tag{2.16}$$

Ce problème est qualifié régulier car $[a, b]$ est un intervalle borné sur lequel p et q sont bornées et $p(x) \neq 0$, $\forall x \in [a, b]$ sinon il est un problème singulier.

3.2.1 Problème régulier à solution nulle (unique)

On considère le problème de type précédent ; on suppose que le problème homogène (H) associé n'a pas d'autre solution que $u \equiv 0$. On sait qu'il existe une seule fonction de Green $G(x, \xi)$.

Soit u_1 la solution de (H) telle que :

$$u_1(a) = \alpha_2 \; et \; \frac{du_1}{dx}(a) = -\alpha_1. \tag{2.17}$$

u_2 la solution de (H) telle que :

$$u_2(b) = \beta_2 \; et \; \frac{du_2}{dx}(b) = -\beta_1. \tag{2.18}$$

Alors, en notant $w(u_1, u_2)$ le wronskien des fonction u_1 et u_2, $p(\xi)w(u_1, u_2)(\xi)$ et une constante non nulle et la fonction de Green est la fonction symétrique suivante :

$$G(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{1}{p(\xi)w(u_1,u_2)(\xi)}u_1(x)u_2(\xi) & si\ \ x\leq\xi,\\ \dfrac{1}{p(\xi)w(u_1,u_2)(\xi)}u_2(x)u_1(\xi) & si\ \ x\geq\xi.\end{cases} \tag{2.19}$$

3.2.2 Problème régulier à solution non nulle

On suppose que le problème homogène à une solution u_0 ($Du=0$ comme $u\neq 0$, on note $u=u_0$) non nulle ; on fixe :

$$\int_a^b [u_0(x)]^2\,dx = 1. \tag{2.20}$$

Théorème 2.3 :

Soit (2.15) et (2.16) avec $A=0$ et $B=0$ alors :

i) (2.15) a une solution vérifiant (2.16) si seulement si :

$$\int_a^b u_0(x)f(x)dx = 0. \tag{2.21}$$

ii) Il existe une fonction de Green $G(x,\xi)$, caractérisée par les propriétés ci après :

1) $G(x,\xi)$ est continue.

2) Sa dérivée par rapport à x existe est continue sauf aux point $x=\xi$, a ce point il y a discontinuité de cette dérivée, le saut valant $\dfrac{1}{p(\xi)}$.

3) G doit vérifier les conditions aux frontières.

4) $\forall\xi\in\,]a,b[$, $\dfrac{d}{dx}\{p(x)\dfrac{dG}{dx}(x,\xi)\}+q(x)G(x,\xi)=-u_0(x)u_0(\xi)$ sur chacun des intervalles $[a,\xi[$ et $]\xi,b]$.

5) $\forall\xi\in\,]a,b[$, $\int_a^b G(x,\xi)u_0(x)dx=0$.

iii) G est symétrique et si

$$\int_a^b u_0(x)f(x)dx = 0.$$

Toute solution de (2.15) vérifions (2.16) est de la forme :

$$u(x) = \int_a^b G(x,\xi)f(\xi)d\xi + ku_0(x), \quad k = cte. \tag{2.22}$$

Exemple 2.2 :

On va résoudre le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} e^x \dfrac{d^2u}{dx^2}(x) + e^x \dfrac{du}{dx}(x) = e^x & x \in [0,1], \\ u(0) = 0, \\ u(1) = 0. \end{cases}$$

On a $p(x) = e^x \neq 0$, $\forall x \in [0,1]$, la solution générale de l'équation homogène (H) associée s'écrit encore :

$$u(x) = A + Be^{-x}.$$

Soit u_1 la solution de (H) telle que :

$$u_1(0) = \alpha_2 = 0 \text{ et } \frac{du_1}{dx}(0) = -\alpha_1 = -1,$$

donc : $A + B = 0$ et $-B = -1$, d'où la fonction

$$u_1(x) = -1 + e^{-x}.$$

Soit u_2 la solution de (H) telle que :

$$u_2(1) = \beta_2 = 0 \text{ et } \frac{du_2}{dx}(1) = -\beta_1 = -1,$$

qui donne : $A + Be^{-1} = 0$ et $-Be^{-1} = -1$, d'où la fonction

$$u_2(x) = -1 + ee^{-x}.$$

On calcule $w(u_1, u_2)(\xi)$ on trouve :

$$w(u_1, u_2)(\xi) = (e-1)e^{-\xi},$$

et comme $p(\xi) = e^{\xi}$, on vérifie bien que :

$$p(\xi)w(u_1, u_2)(\xi) = (e-1) = cte.$$

On déduit la fonction de Green :

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{(1-e^{-x})(-1+ee^{-\xi})}{e-1}, & 0 \leq x \leq \xi, \\ \dfrac{(1-ee^{-x})(-1+e^{-\xi})}{e-1}, & \xi \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Donc la solution du problème est donnée par :

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_0^x \frac{(-1+ee^{-x})}{e-1}(-1+e^{-\xi})e^{\xi}d\xi + \int_x^1 \frac{(ee^{-\xi}-1)}{e-1}(-1+e^{-x})e^{\xi}d\xi \\ &= \frac{1}{1-e}(e + x - xe - ee^{-x}). \end{aligned}$$

Chapitre 4

Equation de Laplace

Le but de ce chapitre est d'étudier un exemple des équations elliptiques "l'équation de Laplace", de donner une formule de représentation intégrale explicite des solutions de cette équation à l'aide de la fonction de Green et d'étudier les propriétés de cette équation.

Parmi les équations les plus importantes de la théorie des équations aux dérivées partielles se trouve sans aucun doute l'équation de Laplace :

$$\Delta u = 0, \tag{3.1}$$

et l'équation de Poisson :

$$\Delta u = f. \tag{3.2}$$

4.1 Fonctions harmoniques

Définition 3.1 :

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, On appelle fonction harmonique toute fonction $u \in C^2(\Omega)$ vérifiant l'équation de Laplace sur Ω.

Nous allons obtenir quelques propriétés de base des fonctions harmoniques. Nous intégrerons sur des hypersurfaces Γ qui seront les bords de domaines Ω. dE sera la mesure de surface sur Γ et $\vec{\eta}$ sera le vecteur normal unitaire sur Γ pointant à l'extérieure de Ω.

4.1.1 Formules et lemme de Green

Formule d'Ostrogradski-Gauss : La formule que nous allons rappeler est désignée quelque fois sous le nom formule du flux ou de la divergence.

Théorème 3.1 :

Soit $\vec{v}(x,y,z)$ *un vecteur de classe* C^1 *dans* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, *continu sur* $\Omega \cup \Gamma$, *de coordonnées* v_1, v_2, v_3 *alors :*

$$\iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}\right) dxdydz = \iint_{\Gamma} \langle \vec{v}, \vec{\eta} \rangle \, dE, \tag{3.3}$$

et de même pour $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

On appelle divergence de $\vec{v}$ *la fonction*

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \ldots\ldots + \frac{\partial v_n}{\partial x_n}. \tag{3.4}$$

Remarque 3.1 :

La dérivée de φ dans la direction $\vec{v}$ est égale à $\langle \nabla\varphi, \vec{v} \rangle$.

Nous allons appliquer la formule d'Ostrogradski à divers vecteurs $\vec{v}$.

Première formule de Green :

Soit d'abord

$$\vec{v} = \nabla\varphi, \tag{3.5}$$

alors :

$$\operatorname{div} \vec{v} = \Delta\varphi \text{ car } \langle \vec{v}, \vec{n} \rangle = \langle \nabla\varphi, \vec{\eta} \rangle = \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}.$$

Soit φ est de classe C^2 dans Ω, on obtient :

Théorème 3.2 :

$$\iiint_{\Omega} \Delta\varphi(x,y,z)dxdydz = \iint_{\Gamma} \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}dE. \text{ Pour } \Omega \text{ dans } \mathbb{R}^3, \tag{3.6}$$

$$\iint_{\Omega} \Delta\varphi(x,y)dxdy = \int_{\Gamma} \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}ds. \text{ Pour } \Omega \text{ dans } \mathbb{R}^2. \tag{3.7}$$

Seconde formule de Green :

Soit φ et ψ deux fonctions de classe $C^2(\Omega)$ et on prend :

$$\overrightarrow{v} = \varphi\nabla\psi, \tag{3.8}$$

alors :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\overrightarrow{v} &= \frac{\partial}{\partial x}(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial z}) \\ &= \langle\nabla\varphi, \nabla\psi\rangle + \varphi\Delta\psi. \end{aligned}$$

Théorème 3.3 :

$$\iiint_{\Omega} \varphi\Delta\psi dxdydz + \iiint_{\Omega} \langle\nabla\varphi, \nabla\psi\rangle\, dxdydz = \iint_{\Gamma} \varphi\frac{\partial\psi}{\partial\eta}dE. \ \Omega \text{ dans } \mathbb{R}^3, \tag{3.9}$$

$$\iint_{\Omega} \varphi\Delta\psi dxdy + \iint_{\Omega} \langle\nabla\varphi, \nabla\psi\rangle\, dxdy = \int_{\Gamma} \varphi\frac{\partial\psi}{\partial\eta}ds. \ \Omega \text{ dans } \mathbb{R}^2. \tag{3.10}$$

Troisième formule de Green :

En change φ et ψ dans la formule précédente, on intégre et par soustraction, on démontre ce théorème.

Théorème 3.4 :

$$\iiint\limits_{\Omega}(\varphi\Delta\psi-\psi\Delta\varphi)dxdydz = \iint\limits_{\Gamma}(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial\eta}-\psi\frac{\partial\varphi}{\partial\eta})dE.\ \Omega \text{ dans } \mathbb{R}^3, \tag{3.11}$$

$$\iint\limits_{\Omega}(\varphi\Delta\psi-\psi\Delta\varphi)dxdy = \int\limits_{\Gamma}(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial\eta}-\psi\frac{\partial\varphi}{\partial\eta})ds.\ \text{Pour } \Omega \text{ dans } \mathbb{R}^2. \tag{3.12}$$

Lemme de Green :

Soit $u \in C^2(\Omega)$ telle que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ et de frontière Γ, on suppose que les dérivées premières de u sont continues sur $\Omega \cup \Gamma$.

Soit $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un point de Ω et

$$r^2 = (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2, \text{ le carré de la distance entre } M \text{ et } M_0, \tag{3.13}$$

alors :

$$u(x_0,y_0,z_0) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\Gamma}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\eta}-u\frac{\partial}{\partial\eta}(\frac{1}{r})\right]dE-\iiint\limits_{\Omega}\frac{1}{r}\Delta u dxdydz.\ \Omega \text{ dans } \mathbb{R}^3 \tag{3.14}$$

$$u(x_0,y_0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}\left[(\ln\frac{1}{r})\frac{\partial u}{\partial\eta}-u\frac{\partial}{\partial\eta}(\ln\frac{1}{r})\right]ds-\iint\limits_{\Omega}(\ln\frac{1}{r})\Delta u dxdy.\ \Omega \text{ dans } \mathbb{R}^2 \tag{3.15}$$

Si u est harmonique dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^3$, contenant la boule de rayon R centrée au M_0, alors $\forall\rho < R$:

$$u(x_0,y_0,z_0) = \frac{1}{4\pi\rho^2}\iint\limits_{S_\rho}u(x,y,z)dE,\ S_\rho \text{ la sphère de centre } M_0 \text{ et de rayon } \rho. \tag{3.16}$$

4.1.2 Principe du maximum

Théorème 3.5 :

Soit Ω un ouvert connexe borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière $\partial\Omega$. Soit u une fonction continue *sur $\Omega \cup \partial\Omega$, harmonique dans Ω et non constante.*

Soit A le maximum de u sur $\Omega \cup \partial\Omega$, alors :

$$\forall p \in \Omega, \ u(p) < A. \tag{3.17}$$

Corollaire 3.1 :

1- Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ tel que $\overline{\Omega}$ soit compact et si u est harmonique et à valeurs réelles sur Ω et continue sur $\overline{\Omega}$, alors la borne supérieure de u sur $\overline{\Omega}$ est atteinte sur Γ.

2- Si Ω est un connexe de $\mathbb{R}^n$ le principe du maximum pour les fonctions harmoniques montre qu'une fonction satisfaisant une équation aux dérivées partielles du second ordre d'un certain type sur un domaine de $\mathbb{R}^n$ et qui atteint son maximum à l'intérieur du domaine est nécessairement constante.

Théorème d'unicité :

Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ tel que $\overline{\Omega}$ soit compact et si u_1 et u_2 sont deux fonctions harmoniques continues sur $\overline{\Omega}$ telle que :

$$u_1 = u_2 \quad \text{sur } \Gamma, \text{ alors } u_1 = u_2 \quad \text{sur } \Omega. \tag{3.18}$$

4.2 Action du laplacien sur les fonctions radiales

Définition 3.2 :

*On dit qu'une fonction $u(x)$ est **radiale** si elle ne dépend que de $r = \|x\|$.*

Elle est naturellement définie sur une couronne $I \times \sum$ où $I \in [0, \infty[$ et $\sum$ la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ telle que :

$$\sum = \left\{ \sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_n) \in \mathbb{R}^n, |\sigma| = (\sigma_1^2, ..., \sigma_n^2)^{\frac{1}{2}} = 1. \right\},$$

σ est le volume de la boule unité.

Proposition 3.1 :

1) Il est clair qu'une fonction définie sur une couronne est radiale si seulement s'elle est invariante par rotation.

Puisque Δ est invariant par rotation, si u est une fonction radiale, Δu est aussi radiale.

2) Pour u est de classe C^2 et si $u(x) = \phi(r)$, alors on a la formule du Laplacien pour une fonction radiale :

$$\Delta u(x) = \phi''(r) + \frac{n-1}{r}\phi'(r). \tag{3.19}$$

Corollaire 3.2 :

Toute fonction radiale est harmonique sur une couronne $(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ si seulement s'elle est de la forme :

$$u(x) = c \log \|x\| + c_0, \quad si\ n = 2, \tag{3.20}$$

$$u(x) = c + c_0 \|x\|^{2-n}, \quad si\ n \geq 3. \tag{3.21}$$

4.3 Solutions fondamentales du Laplacien dans $\mathbb{R}^n$

Théorème 3.6 :

Posons

$$E(x) = \frac{1}{2\pi} \log \|x\|, \quad si\ n = 2, \tag{3.22}$$

$$E(x) = \frac{1}{(2-n)\sigma_n} \|x\|^{2-n}, \quad si\ n \geq 3. \tag{3.23}$$

Alors E est une solution élémentaire ou fondamentale du Laplacien dans $\mathbb{R}^n$, c'est a dire que

$$\Delta E = \delta, \tag{3.24}$$

au sens des distributions.

Donc on peut conclut que la solution de l'équation de poisson

$$\Delta u = f,$$

dans $\mathbb{R}^n$ est de la forme

$$u(x) = E * f. \tag{3.25}$$

4.4 Fonction de Green pour Laplacien

On peut naturellement définir des fonctions de Green pour des autres opérateurs différentiels elliptiques que le Laplacien, en remplaçant Δ par un opérateur D dans la définition.

Définition 3.3 :

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $G(x, \xi)$ une fonction de $\Omega \times \overline{\Omega}$ à valeurs réelles.

On dit que $G(x, \xi)$ est une fonction de Green pour Ω si elle vérifiée :

1) Pour chaque $x \in \Omega$, la fonction $\xi \to H(\xi)$ vérifiée

$$H_x(\xi) = E(x - \xi) - G(x, \xi), \tag{3.26}$$

est harmonique dans Ω et continue dans $\overline{\Omega}$.

2)

$$G(x, \xi) = 0, \forall x \in \Omega \text{ et } \forall \xi \in \Gamma. \tag{3.27}$$

On peut toujours prendre

$$E(x) = \frac{1}{(2-n)\sigma_n} \|x - \xi\|^{2-n},$$

avec la modification habituelle pour $n = 2$.

4.4.1 L'existence et l'unicité de la fonction de Green

La fonction de Green si elle existe, elle doit être unique car $G(x,\xi)$ est solution du problème de Dirichlet suivant :(pour x fixé dans Ω)

$$\begin{cases} \Delta_y(E(x-\xi)-G(x,\xi))=0, & \forall\xi\in\Omega, \\ E(x-\xi)-G(x,\xi)=E(x-\xi), & \forall\xi\in\Gamma. \end{cases} \tag{3.28}$$

Et comme la solution du problème de Dirichlet, si elle existe elle est unique (d'après le corollaire du maximum et leur théorème d'unicité), alors $G(x,\xi)$ $(G(x,\xi)=E(x-\xi)-H(\xi))$ si elle existe elle est unique.

Remarque 3.2 :

Si l'équation elliptique a des conditions aux limite de type Newman, le problème est mal posé c'est pour ça une seule condition au bord est suffisante pour l'existence de la solution.

Proposition 3.2 :

Soit G la fonction de Green. Alors pour toute fonction $u\in C^2(\Omega)$ vérifiant l'équation :

$$\begin{aligned} \Delta u &= f \quad sur\ \Omega\ (où\ f\in C(\overline{\Omega})), \\ u &= g \quad sur\ \Gamma. \end{aligned} \tag{3.29}$$

On a :

$$u(x)=\int\limits_{\Omega}G(x,\xi)f(\xi)d\xi+\int\limits_{\Gamma}g(\xi)\frac{\partial G}{\partial\eta_\xi}(x,\xi)ds(\xi). \tag{3.30}$$

Preuve :

On a :

$$G(x,\xi)=E(x-\xi)-H_x(\xi), \tag{3.31}$$

avec $E(x-\xi)$ est un solution élémentaire de Δ sur $\mathbb{R}^n$ et $H(\xi)$ est une fonction de classe $C^2(\overline{\Omega})$ harmonique dans Ω est égale à $E(x-\xi)$ sur Γ. D'après la troisième formule de

Green nous avons :

$$0 = \int\limits_{\Omega} H_x(\xi)\Delta u(\xi)d\xi + \int\limits_{\Gamma} \frac{\partial H_x}{\partial \eta}(\xi)u(\xi)ds(\xi) - \int\limits_{\Gamma} H_x(\xi)\frac{\partial u}{\partial \eta}(\xi)ds(\xi), \tag{3.32}$$

et de plus on a par définition

$$\int\limits_{\Omega}(u(\xi)\Delta_\xi E(x,\xi)-E(x,\xi)\Delta u(\xi))d\xi = \lim_{\epsilon\to 0}\int\limits_{\Omega_\epsilon}(u(\xi)\Delta_\xi E(x,\xi)-E(x,\xi)\Delta u(\xi))d\xi.\ (\Omega_\epsilon = \Omega\backslash B_\epsilon(x)), \tag{3.33}$$

avec $\epsilon > 0$ et suffisamment petit pour que $B_\epsilon \subset U$. Appliquons la formule de Green aux domaine Ω_ϵ, nous avons

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega_\epsilon}(u(\xi)\Delta_\xi E(x,\xi) - E(x,\xi)\Delta u(\xi))d\xi \quad &= \quad \int\limits_{\Gamma}(u(\xi)\partial_{\vec{\eta},\xi}E(x,\xi) - E(x,\xi)\partial_{\vec{\eta},\xi}u(\xi))ds(\xi) + \\ &\int\limits_{\Gamma_\epsilon}(u(\xi)\partial_{\vec{\eta},\xi}E(x,\xi) - E(x,\xi)\partial_{\vec{\eta},\xi}u(\xi))ds(\xi)\end{aligned} \tag{3.34}$$

Comme

$$\Delta_\xi E(x,\xi) = 0.$$

On va calculer

$$\int\limits_{\Gamma_\epsilon}(u(\xi)\partial_{\vec{\eta},\xi}E(x,\xi) - E(x,\xi)\partial_{\vec{\eta},\xi}u(\xi))ds(\xi). \tag{3.35}$$

On a :

$$\left|\int\limits_{\Gamma_\epsilon(x)} E(x,\xi)\partial_{\vec{\eta},\xi}u(\xi)ds(\xi)\right| \leq c\epsilon^{n-1}\max_{\Gamma_\epsilon(0)}|E|, \tag{3.36}$$

tend vers 0 et que

$$\int_{\Gamma_\epsilon(x)} u(\xi)\partial_{\vec{\eta},\xi}E(x,\xi) = \frac{1}{surface\ \Gamma_\epsilon(x)}\int u(\xi)ds(\xi), \tag{3.37}$$

tend vers $u(x)$ quand $\epsilon \to 0$, on en déduit que

$$u(x) = \int_\Gamma (u(\xi)\partial_{\vec{\eta},\xi}E(x,\xi) - E(x,\xi)\partial_{\vec{\eta},\xi}u(\xi))ds(\xi) + \int_\Omega E(x,\xi)\Delta u(\xi)d\xi. \tag{3.38}$$

Additionnons maintenant cette formule (3.38) avec (3.32) et utilisons la formule (3.31) nous obtenons le résultat que nous voulons :

$$u(x) = \int_\Omega G(x,\xi)f(\xi)d\xi + \int_\Gamma g(\xi)\frac{\partial G}{\partial \eta_\xi}(x,\xi)ds(\xi). \tag{3.39}$$

Propriétés :

1) G est symétrique sur $\Omega \times \Omega$:

$$G(x,\xi) = G(\xi,x), \quad \forall(x,\xi) \in \Omega \times \Omega. \tag{3.40}$$

2) Pour chaque $\xi \in \Omega$, la fonction :

$$x \to E(x-\xi) - G(x,\xi),$$

est harmonique dans Ω.

Bibliographie

[1] **M.S Agranovich**, *"Elliptique opérateurs on closed manifolds"*, Moscou **1990.**

[2] **H. Brezis**, *"Analyse fonctionnelle : Théorie et applications"*, Dunod, **1987**.

[3] **R. Dautray . J. L. Lions,** *"Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques", tome 2 et 4"*, Masson **1987**.

[4] **Encyclopidia**, *"Universalis"*, France **1998**.

[5] **P. Grisvard**, *"Calcul différentiel et équations différentielles"*, O.P.U, Alger **1980**.

[6] **M. Kasnov, A.Kissélev, G.Makarenko,** *"Equations Intégrales"*, Moscou **1977**.

[7] **Khac_Khoan,** *"Distributions-analyse de Fourier-opérateurs aux dérivées partielles"*, **1972**.

[8] **J-Louis Lions**, *"Oeuvres choisies de Jacques-Louis Lions : Tome 1, Equations aux dérivées partielles, Interpolation"*, EDP Sciences, **2003**.