République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 – Guelma

Faculté de Mathématiques et de l'Informatique et Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire de Fin d'Etude
Master Académique en Mathématiques
Option : EDP

THEME

Estimation d'Erreur et Taux de Convergence du Procédé Alternatif de Schwarz pour un Problème de Valeur aux limite en Dimension un-Cas Dirichlet et Neumann

Présenté par :
Badraoui Sihem

Dirigé par : ***Dr. Mehri -A***

Jury :
Dr. Benrabah-R
Dr .Boussetila-N

Session Juin 2012

Table des matières

1 Procédé Alternatif de Schwarz pour un Problème aux Limites de Dirichlet **7**

1.1 Position du Problème 7

1.2 Procédé Alternatif de Schwarz 7

1.3 Estimations d'Erreur 9

1.4 Valeur Maximale du Facteur de Convergence 14

1.5 Taux de Convergence 15

1.6 Cas $q = 0$ 16

1.7 Problème d'Ordre 2, Cas Général 17

1.8 Probème Discret 19

1.8.1 Calcul du Facteur de Convergence 21

1.8.2 Estimations d'Erreur Discrète 23

1.8.4 Calcul de la Valeur Maximale du Facteur de Convergence 24

1.8.5 Cas Particulier $q = 0$ 25

1.8.6 Taux de Convergence 26

2 Procédé Alternatif de Schwarz pour un Problème aux Limites de Neumann **27**

2.1 Position du Problème 27

2.2 Procédé Alternatif de Schwarz Pour les Problèmes (2) et (3) . 28

2.3 Estimation d'Erreur 28

2.4 Valeur Minimale du Facteur de Convergence 32
2.5 Procédé Alternatif de Schwarz Pour les Problèmes (4) et (5) . 33
2.6 Estimation d'Erreur 34
2.7 Calcul du Facteur de Convergence 34

3 Expérimentations Numériques **38**

Résumé

Dans ce mémoire nous étudions l'estimation de l'erreur et la convergence de la solution du procédé alternatif de Schwarz pour un problème de valeurs aux limites en dimension un avec conditions de Dirichlet (resp. Neumann) au bord. Nous introduisons aussi la méthode numérique des différences finies et nous estimons un facteur de convergence de la solution.

établissons

Introduction

Les méthodes alternées de Schwarz ont subit depuis leur introduction par Schwarz en 1890 un développement intense et trés accéléré durant les trois dernières décennies. Ceci est dû pincipalement au développement concidérable qu' a vécu le monde des ordinateurs durant cette période.
Ces méthodes appelées aussi " méthodes de décomposition en sous domaines" permettent principalement dans le cas numérique de réduire des systèmes matricielles de grandes tailles à des systèmes matricielles de petites tailles faciles et moins coûteux de point de vue résolution numérique. Elles permettent aussi de transformer des problémes aux limites posés sur des régions à géométrie irrégulière à un ensemble de problèmes posés sur des sous domaines réguliers et simples.
La première idée à été introduite par Schwarz, c'est pourquoi une attention particulière a été accordée et un nombre important de travaux réalisés depuis plus de trois décennies sur la méthode alternée de Schwarz en particulier et les méthodes de décomposition en sous domaines sur les équations aux dérivées partielles, et plus précisément avec recouvrement pour un problème elliptique modèle avec la condition de Dirichlet au bord.
Quand aux diverses et importantes raisons qui ont conduit à la popularité de ces méthodes, cela peut être résumé dans le fait qu'elles,

1. sont bien adaptées aux machines parallèles dont le développement et les caractéristiques ne cessent de s'accroître,
2. possédent un intérêt mathématique intrinsèque,
3. peuvent s'appliquer à des problèmes définis sur des géométries complexes,
4. possèdent une base théorique solide,
5. facilitent l'utilisation des schémas numériques différents pour chaque sous problème, par exemple, élément finis, différences finies.........,

6. et peuvent être combinées avec une résolution par d'autres méthodes telles les méthodes multigrilles ou le rafinement local du maillage.

Ces méthodes peuvent être vues comme des algorithmes de type " diviser pour régner".

Dans notre travail nous allons appliquer cette méthode à un problème de valeurs aux limites en dimension un. Dans le premier chapitre nous définissons le procédé alternatif de Schwarz pour un problème de valeurs aux limites avec condition de Dirichlet, nous prouvons un théorème d'estimation d'erreur, puis nous introduisons la méthode des différences finies. Au deuxième chapitre nous établissons le procédé de Schwarz pour un problème aux limites avec condition de Neumann au bord, nous démontrons un résultat de convergence de la solution, puis nous appliquons la méthode des différences finies. Et pour valider notre théorie nous présentons un test numérique d'un problème aux limites en une dimension avec condition de Dirichlet.

Chapitre 1

Procédé Alternatif de Schwarz pour un Problème aux Limites de Dirichlet

1.1 Position du Problème

Soit l'équation differentielle du $2^{\text{ème}}$ordre définit sur un intervalle borné $]0,1[$, avec des conditions aux limites de Dirichlet,

$$\begin{cases} -\frac{d^2y}{dx^2} + q^2y = f(x), & dans \ \ \Omega \\ y(0) = a \\ y(1) = b \end{cases} \tag{1}$$

où q est une constante f, a et b sont données.

On sait que ce problème admet une solution unique et on peut la calculer par des méthodes analytiques ou numériques. Dans ce travail nous allons appliquer une autre méthode plus générale et moins coûteuse, c'est la méthode du procédé alternatif de Schwarz en abregé "PAS"

1.2 Procédé Alternatif de Schwarz

On divise le domaine Ω en deux sous domaines Ω_1 et Ω_2 tel que

$$\Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \varnothing$$

on pose $\Omega_1 =]0, x_k[\,, \Omega_2 =]x_l, 1[\,$,où $x_l < x_k$, on note la distance

$$d = \; dist(x_l, x_k)$$

et

$$x_k = x_l + d$$

ainsi le problème (1) est équivalent aux deux sous problèmes suivants,

$$\left\{ \begin{array}{c} -\frac{d^2y}{dx^2} + q^2y = f \qquad dans\ \Omega_1 \\ y(0) = a \\ y(x_k) = z(x_k) \end{array} \right. \tag{2}$$

et

$$\left\{ \begin{array}{c} -\frac{d^2z}{dx^2} + q^2z = f(x) \qquad dans\ \Omega_2 \\ z(x_l) = y(x_l) \\ z(1) = b \end{array} \right. \tag{3}$$

où la solution y du problème initial (1) est définie par

$$y = \left\{ \begin{array}{l} y \ \text{ dans } \Omega_1 \\ z \text{ dans } \Omega_2 \end{array} \right.$$

Les points x_l et x_k sont appelés pseudo frontières locales. Nous définissons le procédé alternatif de schwarz comme suit :
Etant donné $z^{(0)}(x_k)$ valeur initiale, trouvons la suite $y^{(i+1)}$ sur Ω_1 solution de

$$\left\{ \begin{array}{c} -\frac{d^2y^{(i+1)}}{dx^2} + q^2y^{(i+1)} = f(x) \quad dans\ \Omega_1 \\ y^{(i+1)}(0) = a \\ y^{(i+1)}(x_k) = z^{(i)}(x_k) \quad i = 0, 1, 2, \ldots \end{array} \right. \tag{4}$$

et la suite $z^{(i+1)}$sur Ω_2 solution de

$$\left\{ \begin{array}{c} -\frac{d^2z^{(i+1)}}{dx^2} + q^2z^{(i+1)} = f(x) \quad dans\ \Omega_2 \\ z^{(i+1)}(x_l) = y^{(i+1)}(x_l) \\ z^{(i+1)}(1) = b \quad i = 0, 1, 2, \ldots \end{array} \right. \tag{5}$$

1.3 Estimations d'Erreur

On note $y^*(x)$ la solution exacte du problème (1), l'erreur de la solution du problème (4) par

$$e^{(i)}(x) = y^*(x) - y^{(i)}(x)$$

et celle du problème (5) par

$$E^{(i)}(x) = y^*(x) - z^{(i)}(x)$$

par soustraction de (1) et (4), (1) et (5), nous obtenons deux sous problèmes relatifs à l'erreur

$$\begin{cases} -\frac{d^2e^{(i+1)}}{dx^2} + q^2e^{(i+1)} = 0 \quad dans\ \Omega_1 \\ e^{(i+1)}(0) = 0 \\ e^{(i+1)}(x_k) = E^{(i)}(x_k) \end{cases} \tag{6}$$

et

$$\begin{cases} -\frac{d^2E^{(i+1)}}{dx^2} + q^2E^{(i+1)} = 0 \quad dans\ \Omega_2 \\ E^{(i+1)}(x_l) = e^{(i+1)}(x_l) \\ E^{(i+1)}(1) = 0 \end{cases} \tag{7}$$

calculons les solutions de (6) et (7). On pose $e^{(i+1)}(x) = e^{rx}$, de l'équation caractéristique on obtient

$$\begin{aligned} -r^2 + q^2 &= 0 \\ &\Rightarrow r^2 = q^2 \\ &\Rightarrow r_{1,2} = \pm q \\ e^{(i+1)}(x) &= c_1e^{qx} + c_2e^{-qx} \\ e^{(i+1)}(0) &= 0 \\ &\Rightarrow c_1 + c_2 = 0 \\ &\Rightarrow c_2 = -c_1 \\ e^{(i+1)}(x_k) &= E^{(i)}(x_k) \Rightarrow \\ c_1e^{qx_k} - c_1e^{-qx_k} &= E^{(i)}(x_k) \\ &\Rightarrow c_1 = \frac{E^{(i)}(x_k)}{e^{qx_k} - e^{-qx_k}} = \frac{E^{(i)}('x_k)}{2\sinh qx_k} \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} e^{(i+1)}(x) &= \frac{E^{(i)}(x_k)}{2\sinh qx_k}e^{qx} - \frac{E^{(i)}(x_k)}{2\sinh qx_k}e^{-qx} \\ &= \frac{2\sinh qx}{2\sinh qx_k}E^{(i)}(x_k) \end{aligned}$$

donc

$$e^{(i+1)}(x) = \frac{\sinh qx}{\sinh qx_k}E^{(i)}(x_k) \quad sur \quad \overline{\Omega}_1. \tag{8}$$

De la même manière on pose $E^{(i+1)}(x) = e^{rx}$, de l'équation caractéristique on trouve

$$\begin{aligned} -r^2 + q^2 &= 0 \\ &\Rightarrow r^2 = q^2 \\ &\Rightarrow r_{1;2} = \pm q \\ E^{(i+1)}(x) &= c_1 e^{qx} + c_2 e^{-qx} \\ E^{(i+1)}(1) &= 0 \\ c_1 e^q + c_2 e^{-q} &= 0 \\ &\Rightarrow c_2 = -c_1 e^{2q} \\ E^{(i+1)}(x_l) &= c_1 e^{qx_l} - c_1 e^{2q} e^{-qx_l} \\ &= e^{(i+1)}(x_l) \\ &\Rightarrow c_1 = \frac{e^{(i+1)}(x_l)}{e^{qx_l} - e^{2q}e^{-qx_l}} \\ E^{(i+1)}(x) &= \left[\frac{e^{qx}}{e^{qx_l} - e^{2q}e^{-qx_l}} - \frac{e^{2q}e^{-qx}}{e^{qx_l} - e^{2q}e^{-qx_l}}\right] e^{(i+1)}(x_l) \\ &= \frac{e^q\left[e^{-q}e^{qx} - e^q e^{-qx}\right]}{e^q\left[e^{-q}e^{qx_l} - e^q e^{-qx_l}\right]} e^{(i+1)}(x_l) \\ &= \frac{e^{q(-1+x)} - e^{q(1-x)}}{e^{q(-1+x_l)} - e^{q(1-x_l)}} e^{(i+1)}(x_l) \end{aligned}$$

donc

$$E^{(i+1)}(x) = \frac{\sinh q(1-x)}{\sinh q(1-x_l)} e^{(i+1)}(x_l) \quad sur \ \overline{\Omega}_2. \tag{9}$$

nous démontrons un théorème d'estimation d'erreur.

Théorème 1.3.1 *Les erreurs relatives aux problèmes* (4) *et* (5) *satisfont les estimations suivantes*

$$\left|e^{(i+1)}(x)\right| \leq \rho_q(x_l,x_k)\left|E^{(i-1)}(x_k)\right| \quad dans\ \Omega_1, \forall i=1,2,\ldots \tag{10}$$

$$\left|E^{(i+1)}(x)\right| \leq \rho_q(x_l,x_k)\left|e^{(i)}(x_l)\right| \quad dans\ \Omega_2, \forall i=0,1,2,.. \tag{11}$$

où ρ_q *est le facteur de convergence*

$$\rho_q(x_l,x_k) = \left(\frac{\sinh qx_l}{\sinh qx_k}\right)\left(\frac{\sinh q(1-x_k)}{\sinh q(1-x_l)}\right) \tag{12}$$

Preuve. Associons les conditions aux limites aux solutions (8) et (9)

$$\begin{aligned} e^{(i+1)}(x_l) &= \frac{\sinh qx_l}{\sinh qx_k}E^{(i)}(x_k) \\ &= \frac{\sinh qx_l}{\sinh qx_k}\cdot\frac{\sinh q(1-x_k)}{\sinh q(1-x_l)}e^{(i)}(x_l) \end{aligned}$$

on pose

$$\rho_q(x_l,x_k) = \frac{\sinh qx_l}{\sinh qx_k}\cdot\frac{\sinh q(1-x_k)}{\sinh q(1-x_l)}$$

$$e^{(i+1)}(x_l) = \rho_q(x_l,x_k)e^{(i)}(x_l) \tag{13}$$

de même

$$\begin{aligned} E^{(i+1)}(x_k) &= \frac{\sinh q(1-x_k)}{\sinh q(1-x_l)}e^{(i+1)(x_l)} \\ &= \frac{\sinh q(1-x_k)}{\sinh q(1-x_l)}\cdot\frac{\sinh qx_l}{\sinh qx_k}E^{(i)}(x_k) \end{aligned}$$

on pose

$$\rho_q(x_l,x_k) = \frac{\sinh qx_l}{\sinh qx_k}\cdot\frac{\sinh q(1-x_k)}{\sinh q(1-x_l)}$$

donc

$$E^{(i+1)}(x_k) = \rho_q(x_l, x_k)E^{(i)}(x_k) \tag{14}$$

$$\begin{aligned} e^{(i+1)}(x) &= \frac{\sinh qx}{\sinh qx_k} E^{(i)}(x_k) \\ &= \frac{\sinh qx}{\sinh qx_k} \rho_q(x_l, x_k) E^{(i-1)}(x_k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left|e^{(i+1)}(x)\right| &\leq \left|\frac{\sinh qx}{\sinh qx_k}\right| \rho_q(x_l, x_k) \left|E^{(i-1)}(x_k)\right| \\ &\leq \rho_q(x_l, x_k) \left|E^{(i-1)}(x_k)\right| \end{aligned}$$

q constante positive

avec

$$\left|\frac{\sinh qx}{\sinh qx_k}\right| \leq 1, \forall x \in]0, x_k[$$

sh est une fonction croissante.

et

$$\begin{aligned} E^{(i+1)}(x) &= \frac{\sinh(1-x)}{\sinh(1-x_l)} e^{(i+1)}(x_l) \\ &= \frac{\sinh(1-x)}{\sinh(1\_x_l)} \rho_q(x_l, x_k) e^{(i)}(x_l) \end{aligned}$$

$x_l \leq x < 1$

$$\begin{aligned} \left|E^{(i+1)}(x)\right| &\leq \left|\frac{\sinh q(1-x)}{\sinh q(1(-x_l)}\right| \rho_q(x_l, x_k) \left|e^{(i)}(x_l)\right| \\ &\leq \rho_q(x_l, x_k) \left|e^{(i)}(x_l)\right| \end{aligned}$$

telle que

$$\left|\frac{\sinh(1-x)}{\sinh(1-x_l)}\right| \leq 1, \forall x \in]x_l, 1[.$$

C.Q.F.D. ■

Corollaire 1.3.1 *On a les estimations suivantes*

1.1 module

$$\left|e^{(i)}(x)\right| \leq (\rho_q(x_l, x_k))^{(i-1)} \left|E^{(0)}(x_k)\right| \quad dans \Omega_1$$

et

$$\left|E^{(i)}(x)\right| \leq (\rho_q(x_l, x_k))^{(i-1)} \left|E^{(0)}(x_k)\right| \quad dans\ \Omega_2$$

En effet, de l'estimation (10), on a

$$\left|e^{(i)}(x)\right| \leq \rho_q(x_l, x_k)\left|E^{(i-2)}(x_k)\right|$$

appliquons (14) on aura

$$\begin{aligned}
\left|e^{(i)}(x)\right| &\leq \rho_q(x_l, x_k)\rho_q(x_l, x_k)\left|E^{(i-3)}(x_k)\right| \\
&\leq \left[\rho_q(x_l, x_k)\right]^2\left|E^{(i-3)}(x_k)\right| \\
&\leq \left[\rho_q(x_l, x_k)\right]^3\left|E^{(i-4)}(x_k)\right| \\
&\leq \ldots \leq \left[\rho_q(x_l, x_k)\right]^m\left|E^{(i-m-1)}(x_k)\right|
\end{aligned}$$

on pose $m = i - 1$, alors

$$\left|e^{(i)}(x)\right| \leq \left[\rho_q(x_l, x_k)\right]^{i-1}\left|E^{(0)}(x_k)\right| \quad dans \quad \Omega_1 \ , \forall i = 1, 2, \ldots \tag{15}$$

de façon similaire, de l'estimation (11) on a

$$\left|E^{(i)}(x)\right| \leq \rho_q(x_l, x_k)\left|e^{(i-1)}(x_l)\right|$$

appliquons (15) on obtient

$$\begin{aligned}
\left|E^{(i)}(x)\right| &\leq \rho_q(x_;, x_k)\left[\rho_q(x_l, x_k)\right]^{i-2}\left|E^{(0)}(x_k)\right| \\
&\leq \left[\rho_q(x_l, x_k)\right]^{i-1}\left|E^{(0)}(x_k)\right|
\end{aligned}$$

$$\left|E^{(i)}(x)\right| \leq \left[\rho_q(x_l, x_k)\right]^{i-1}\left|E^{(0)}(x_k)\right| \quad dans \quad \Omega_2 \ , \forall i = 1, 2, \ldots$$

Nous donnons maintenant un théorème de convergence des suites de Schwarz $(y^{(i+1)})$ et $(z^{(i+1)})$ vers la solution exacte du problème (1).

Théorème 1.3.2 *On a*

$$\lim_{i \to \infty} e^{(i)}(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega_1$$

et

$$\lim_{i \to \infty} E^{(i)}(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega_2$$

plus précisément, on a

$$\lim_{i \to \infty} y^{(i)} = y^*, \forall x \in \Omega_1$$

et

$$\lim_{i \to \infty} z^{(i)} = y^*, \forall x \in \Omega_2.$$

Preuve. Puisque le facteur de convergence $0 \leq \rho < 1$, alors du corollaire précédent on obtient le résultat. ∎

1.4 Valeur Maximale du Facteur de Convergence

Posons

$$x_k = x_l + d$$

de l'expression (12), on aura

$$\rho_q(x_l, x_l + d) = \left(\frac{\sinh qx_l}{\sinh q(x_l + d)}\right)\left(\frac{\sinh q(1 - x_l - d)}{\sinh q(1 - x_l)}\right) \tag{16}$$

soit d fixe

$$\begin{aligned} \rho_q(x_l, x_l + d) &= \frac{\cosh q(1-d) - \cosh q(2x_l - 1 + d)}{\cosh q(1+d) - \cosh q(2x_l - 1 + d)} \\ \frac{\partial \rho_q}{\partial x_l} &= \frac{2q \sinh q(2x_l - 1 + d)\left[\cosh q(1-d) - \cosh q(1+d)\right]}{\left(\cosh q(1+d) - \cosh q(2x_l - 1 + d)\right)^2} \end{aligned}$$

posons

$$\frac{\partial \rho_q}{\partial x_l} = 0$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad 2q \sinh q(2x_l - 1 + d) = 0 \\ &\Rightarrow \quad q(2x_l - 1 + d) = 0, q \neq 0 \end{aligned}$$

donc,on obtient

$$x_l = \frac{1-d}{2} \tag{17}$$

dans ce cas le facteur de convergence $\rho_q(x_l, x_l+d)$ atteint sa valeur maximale ???

$$\begin{aligned}
\max_{x_l\in\Omega} \rho_q(x_l, x_l+d) &= \rho_q(\frac{1-d}{2}, \frac{1+d}{2}) \\
&= \left(\frac{\sinh q(\frac{1-d}{2})}{\sinh q(\frac{1-d}{2}+d)}\right)\left(\frac{\sinh q(1-\frac{1-d}{2}-d)}{\sinh q(1-\frac{1-d}{2})}\right) \\
&= \left(\frac{\sinh q(\frac{1-d}{2})}{\sinh q(\frac{1+d}{2})}\right)\left(\frac{\sinh q(\frac{1-d}{2})}{\sinh q(\frac{1+d}{2})}\right)
\end{aligned}$$

$$\rho_q(\frac{1-d}{2}, \frac{1+d}{2}) = \left(\frac{\sinh q(\frac{1-d}{2})}{\sinh q(\frac{1+d}{2})}\right)^2 \tag{18}$$

1.5 Taux de Convergence

Corollaire 1.5.1 *Le taux de convergence du procédé alternatif de Schwarz vérifie*

$$R \geq -\ln \rho_q(\frac{1-d}{2}, \frac{1+d}{2}).$$

En effet

$$\rho_q(x_k, x_l) \leq \rho_q(\frac{1-d}{2}, \frac{1+d}{2})$$

$$\Rightarrow -\ln \rho_q(x_k, x_l) \geq -\ln \rho_q(\frac{1-d}{2}, \frac{1+d}{2})$$

$$\Rightarrow R \geq -\ln \rho_q(\frac{1-d}{2}, \frac{1+d}{2})$$

rapide.

1.6 Cas $q = 0$

Le problème est

$$\begin{cases} -\frac{d^2y}{dx^2} = f(x) \quad dans\ \Omega \\ y(0) = a \\ y(1) = b \end{cases}$$

de (12) et en utilisant la règle de l'Hopital on obtient

$$\begin{aligned} \rho_0(x_l, x_k) &= \lim_{q \to 0} \rho_q(x_l, x_k) \\ &= \lim_{q \to 0} \frac{[\sinh qx_l \cdot \sinh q(1 - x_k)]'}{[\sinh qx_k \sinh q(1 - x_l)]'} \\ &= \lim_{q \to 0} \frac{x_l \cosh qx_l \sinh q(1 - x_k) + (1 - x_k) \sinh qx_l \cosh q(1 - x_k)}{x_k \cosh qx_k \sinh q(1 - x_l) + (1 - x_l) \sinh qx_k \cosh q(1 - x_l)} \\ &= \frac{x_l(1 - x_k)}{x_k(1 - x_l)} \end{aligned}$$

ainsi

$$\rho_0(x_l, x_k) = \frac{x_l(1 - x_k)}{x_k(1 - x_l)} \tag{19}$$

pour

$$x_l = \frac{1 - d}{2}$$

on a

$$\rho_0\left(\frac{1 - d}{2}, \frac{1 + d}{2}\right) = \left(\frac{1 - d}{1 + d}\right)^2 \tag{20}$$

qui est la valeur maximale du facteur de convergence $\rho_0(x_l, x_k)$.

1.7 Problème d'Ordre 2, Cas Général

Soit le problème sous la forme générale

$$\begin{cases} -\frac{d^2y}{dx^2} + 2b\frac{dy}{dx} + q^2y = f(x) \quad dans\ \Omega \\ y(0) = a \\ y(1) = b \end{cases} \tag{21}$$

Appliquons le procédé alternatif de Schwarz au probème (21) et calculons les erreurs relatives aux deux sous problèmes dans Ω_1 et Ω_2.
Soit le problème

$$\begin{cases} -\frac{d^2e^{i(+1)}}{dx^2} + 2b\frac{de^{(i+1)}}{dx} + q^2e^{(i+1)} = 0 \quad dans\ \Omega_1 \\ e^{(i+1)}(0) = 0 \\ e^{(i+1)}(x_k) = E^{(i)}(x_k) \end{cases}$$

de l'équation caractéristique on trouve

$$-r^2 + 2br + q^2 = 0$$

$$\begin{aligned} \Delta &= 4b^2 + 4q^2 > 0 \\ r_1 &= \frac{-2 - 2\sqrt[2]{b^2+q^2}}{-2} = b + \sqrt[2]{b^2+q^2} \\ r_2 &= b - \sqrt[2]{b^2+q^2} \end{aligned}$$

$$e^{(i+1)}(x) = c_1e^{b+\sqrt[2]{b^2+q^2}x} + c_2e^{b-\sqrt[2]{b^2+q^2}x}$$

de plus

$$e^{(i+1)}(0) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = -c_1$$

et

$$e^{(i+1)}(x_k) = E^{(i)}(x_k) \Rightarrow c_1(e^{(b+\sqrt{b^2+q^2})x_k} - e^{(b-\sqrt{b^2+q^2})x_k}) = E^{(i)}(x_k)$$

$$\Rightarrow c_1 = \frac{E^{(i)}(x_k)}{e^{(b+\sqrt{b^2+q^2})x_k} - e^{(b-\sqrt{b^2+q^2})x_k}}$$

$$e^{(i+1)}(x) = \frac{E^{(i)}(x_k)}{e^{bx_k}\left[e^{\sqrt{b^2+q^2}x_k} - e^{-\sqrt{b^2+q^2}x_k}\right]}\left[e^{bx}(e^{\sqrt{b^2+q^2}x} - e^{-\sqrt{b^2+q^2}x}\right]$$

donc

$$e^{(i+1)}(x) = e^{-b(x_k-x)}\frac{\sinh\sqrt{b^2+q^2}x}{\sinh\sqrt{b^2+q^2}x_k}E^{(i)}(x_k),\ sur\ \overline{\Omega}_1 \tag{22}$$

Soit le problème

$$\begin{cases} -\frac{d^2E^{(i+1)}}{dx^2} + 2b\frac{dE^{(i+1)}}{dx} + q^2E^{(i+1)} = 0 \quad dans\ \Omega_2 \\ E^{(i+1)}(x_l) = e^{(i+1)}(x_l) \\ E^{(i+1)}(1) = 0 \end{cases}$$

de la même manière on obtient

$$E^{(i+1)}(x) = e^{-b(x_l-x)}\frac{\sinh\sqrt{b^2+q^2}(1-x)}{\sinh\sqrt{b^2+q^2}(1-x_l)}e^{(i+1)}(x_l) \quad sur\overline{\Omega}_2. \tag{23}$$

Si on pose le facteur de convergence

$$\rho_{bq}(x_l,x_k) = e^{-2b(x_k-x_l)}\left(\frac{\sinh\sqrt{b^2+q^2}x_l}{\sinh\sqrt{b^2+q^2}x_k}\right)\left(\frac{\sinh\sqrt{b^2+q^2}(1-x_l)}{\sinh\sqrt{b^2+q^2}(1-x_k)}\right) \tag{24}$$

alors

$$\begin{aligned} e^{(i+1)}(x_l) &= e^{-b(x_k-x_l)}\left(\frac{\sinh\sqrt{b^2+q^2}x_l}{\sinh\sqrt{b^2+q^2}x_k}\right)E^{(i)}(x_k) \\ &= e^{-b(x_k-x_l)}\left(\frac{\sinh\sqrt{b^2+q^2}x_l}{\sinh\sqrt{b^2+q^2}x_k}\right)e^{-b(x_k-x_l)}\left(\frac{\sinh\sqrt{b^2+q^2}(1-x_k)}{\sinh\sqrt{b^2+q^2}(1-x_l}\right)e^{(i)}(x_l) \\ &= e^{-2b(x_k-x_l)}\left(\frac{\sinh\sqrt{b^2+q^2}x_l}{\sinh\sqrt{b^2+q^2}x_k}\right)\left(\frac{\sinh\sqrt{b^2+q^2}(1-x_k)}{\sinh\sqrt{b^2+q^2}(1-x_l)}\right)e^{(i)}(x_l) \end{aligned}$$

ce qui donne

$$e^{(i+1)}(x_l) = \rho_{bq}(x_l,x_k)e^{(i)}(x_k) \tag{25}$$

de la même façon on trouve

$$E^{(i+1)}(x_k) = \rho_{bq}(x_l,x_k)E^{(i)}(x_l) \tag{26}$$

la méthode est converge
dans ce cas

Théorème 1.7.1 *(estimations d' erreur) : Les erreurs données par les expessions (22) et (23) satisfont les estimations suivantes*

$$\begin{aligned} \left|e^{(i+1)}(x)\right| &\leq \rho_{bq}(x_l, x_k) \left|E^{(i-1)}(x_k)\right| \quad \textit{dans } \Omega_1 \\ \left|E^{(i+1)}(x)\right| &\leq \rho_{bq}(x_l, x_k) \left|e^{(i)}(x_l)\right| \quad \textit{dans } \Omega_2 \end{aligned}$$

Preuve. On procède de la même manière que dans le théorème précédent.

■

1.8 Probème Discret

Dans cette partie nous approchons le problème de valeurs aux limites par un autre problème discrét en utilisant la méthode des différences finies. On divise l'intervalle $]0,1[$ en N sous intervalles de longueur (le pas) $h = \frac{1}{N}$. On considère les points du réseau $x_j = jh$, $j = 1, 2, ..., N-1$.La dérivée seconde $\frac{d^2y}{dx^2}$ est remplacée par les différences finies centraux

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y_{j-1} - 2y_j + y_{j+1}}{h^2}, \quad j = 1, 2, ..., N-1$$

en substituant dans le problème (1), nous obtenons le système linéaire

$$\left\{ \begin{array}{c} -y_{j-1} + (2 + q^2h^2)y_j - y_{j+1} = h^2 f_j, \quad j = 1, 2, ..., N-1 \\ y_0 = a \\ y_N = b \end{array} \right. \tag{27}$$

où

$$y_j = y(x_j) = y(jh)$$

on considère les deux points x_l et x_k de la pseudo frontières tels que $l < k$ et $k = l + D$, on note $2Q = (2 + q^2h^2)$, alors le problème (27) est équivalent à la résolution des deux systèmes suivants

$$\left\{ \begin{array}{c} -y_{j-1} + 2Qy_j - y_{j+1} = h^2 f_j, \quad j = 1, 2, ..., k-1 \\ y_0 = a \\ y_k = z_k \end{array} \right. \tag{28}$$

$x_k = kh$

D : Nombre des point entre x_l et x_k

et

$$\left\{\begin{array}{l} -z_{j-1}+2Qz_j-z_{j+1}=h^2f_j, \quad j=l+1,...,N-1 \\ z_l=y_l \\ z_N=b \end{array}\right. \tag{29}$$

où $Q \geq 1$. On définit le procédé alternatif de Schwarz discrét comme suit. Etant donné $z_k^{(0)}$ valeur initiale, trouvons les suites discrétes de Schwarz $y_j^{(i+1)}(resp\ z_j^{(i+1)})$ solutions de

$$\left\{\begin{array}{l} -y_{j-1}^{(i+1)}+2Qy_j^{(i+1)}-y_{j+1}^{(i+1)}=h^2f_j, \quad j=1,2,...,k-1 \\ y_0^{(i+1)}=a \\ y_k^{(i+1)}=z_k^{(i)}, \quad i=0,1,... \end{array}\right. \tag{30}$$

et

$$\left\{\begin{array}{l} -z_{j-1}^{(i+1)}+2Qz_j^{(i+1)}-z_{j+1}^{(i+1)}=h^2f_j, \quad j=l+1,l+2,..,N-1 \\ z_l^{(i+1)}=y_l^{(i+1)} \\ z_N^{(i+1)}=b, \quad i=0,1,... \end{array}\right. \tag{31}$$

On désigne par y_j^* la solution discrète de (27) et les erreurs par

$$\begin{aligned} e_j^{(i)} &= y_j^*-y_j^{(i)} \\ E_j^{(i)} &= y_j^*-z_j^{(i)} \end{aligned}$$

ainsi les erreurs satisfont les systèmes suivants

$$\left\{\begin{array}{l} -e_{j-1}^{(i+1)}+2Qe_j^{(i+1)}-e_{j+1}^{(i+1)}=0, \quad j=1,2,...,k-1 \\ e_0^{(i+1)}=0 \\ e_k^{(i+1)}=E_k^{(i)}, \quad i=0,1,... \end{array}\right. \tag{32}$$

et

$$\left\{\begin{array}{l} -E_{j-1}^{(i+1)}+2QE_j^{(i+1)}-E_{j+1}^{(i+1)}=0, \quad j=l+1,l+2,...,N-1 \\ E_l^{(i+1)}=e_l^{(i+1)} \\ E_N^{(i+1)}=0, \quad i=0,1,... \end{array}\right. \tag{33}$$

1.8.1 Calcul du Facteur de Convergence

On note par

$$\begin{aligned} r_1 &= Q + \sqrt{Q^2 - 1} \\ r_2 &= Q - \sqrt{Q^2 - 1} \\ r_1 + r_2 &= 2Q \\ r_1 \cdot r_2 &= 1 \end{aligned}$$

cherchons la solution du système (32).On a par exemple pour $k = 4$, $j = 1, 2, 3$

$$\begin{cases} e_0^{(i+1)} + (r_1 + r_2)e_1^{(i+1)} - e_2^{(i+1)} = 0 \\ e_1^{(i+1)} + (r_1 + r_2)e_2^{(i+1)} - e_3^{(i+1)} = 0 \\ e_2^{(i+1)} + (r_1 + r_2)e_3^{(i+1)} - e_4^{(i+1)} = 0 \\ e_0^{(i+1)} = 0 \\ e_4^{(i+1)} = E_4^{(i)} \end{cases}$$

en utilisant la méthode de Gramer, la solution est

$$\begin{aligned} e_1^{(i+1)} &= \frac{E_4^{(i)}}{(r_1 + r_2)\left[(r_1 + r_2)^2 - 2\right]} \\ &= \frac{E_4^{(i)}}{r_1^3 + r_2^3 + r_1 + r_2} \\ &= \frac{r_1 - r_2}{(r_1 - r_2)(r_1^3 + r_2^3 + r_1 + r_2)} E_4^{(i)} \\ &= \frac{r_1 - r_2}{r_1^4 - r_2^4} E_4^{(i)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_2^{(i+1)} &= \frac{(r_1 + r_2)E_4^{(i)}}{(r_1 + r_2)\left[(r_1 + r_2)^2 - 2\right]} \\ &= \frac{r_1^2 - r_2^2}{r_1^4 - r_2^4} E_4^{(i)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_3^{(i+1)} &= \frac{[(r_1+r_2)^2-1]}{(r_1+r_2)\,[(r_1+r_2)^2-2]}E_4^{(i)} \\ &= \frac{r_1^3-r_2^3}{r_1^4-r_4^4}E_4^{(i)} \end{aligned}$$

par induction sur j, la solution de (32) et (33) est :

$$e_j^{(i+1)} = \frac{r_1^j-r_2^j}{r_1^k-r_2^k}E_k^{(i)}, \quad j=1,2,...,k-1 \tag{34}$$

et

$$E_j^{(i+1)} = \frac{r_1^{N-j}-r_2^{N-j}}{r_1^{N-l}-r_2^{N-l}}e_l^{(i+1)}, \quad j=l+1,...,N-1 \tag{35}$$

ainsi on a

$$\begin{aligned} e_l^{(i+1)} &= \frac{r_1^l-r_2^l}{r_1^k-r_2^k}E_k^{(i)} \\ &= \left(\frac{r_1^l-r_2^l}{r_1^k-r_2^k}\right)\left(\frac{r_1^{N-k}-r_2^{N-k}}{r_1^{N-l}-r_2^{N-l}}\right)e_l^{(i)} \end{aligned}$$

et

$$E_k^{(i+1)} = \left(\frac{r_1^l-r_2^l}{r_1^k-r_2^k}\right)\left(\frac{r_1^{N-k}-r_2^{N-k}}{r_1^{N-l}-r_2^{N-l}}\right)E_k^{(i)}$$

si on pose

$$\rho_q^* = \left(\frac{r_1^l-r_2^l}{r_1^k-r_2^k}\right)\left(\frac{r_1^{N-k}-r_2^{N-k}}{r_1^{N-l}-r_2^{N-l}}\right)$$

donc

$$e_l^{(i+1)} = \rho_q^*(l,k)e_l^{(i)} \tag{36}$$

et

$$E_k^{(i+1)} = \rho_q^*(l,k)E_k^{(i)} \tag{37}$$

où $\rho_q^*(l,k)$ est le facteur de convergence.

1.8.2 Estimations d'Erreur Discrète

Théorème 1.8.1 *On a les estimations suivantes*

$$\left|e_j^{(i+1)}\right| \leq \rho_q^*(l,k)\left|E_k^{(i-1)}\right|, \quad j = 1,2,...,k-1$$

et

$$\left|E_j^{(i+1)}\right| \leq \rho_q^*(l,k)\left|e_l^{(i)}\right|, \quad j = l+1, l+2, ..., N-1.$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned}
e_j^{(i+1)} &= \frac{r_1^j - r_2^j}{r_1^k - r_2^k} E_k^{(i)} \\
&= \left(\frac{r_1^j - r_2^j}{r_1^k - r_2^k}\right)\left(\frac{r_1^{N-k} - r_2^{N-k}}{r_1^{N-l} - r_2^{N-l}}\right) e_l^{(i)} \\
&= \rho_q^*(l,k) e_l^{(i)} \\
&= \rho_q^*(l,k) \frac{r_1^l - r_2^l}{r_1^k - r_2^k} E_k^{(i-1)}
\end{aligned}$$

≤ 2 ???

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad & \left|e_j^{(i+1)}\right| \leq \rho_q^*(l,k)\left|\frac{r_1^l - r_2^l}{r_1^k - r_2^k}\right|\left|E_k^{(i-1)}\right| \\
\Rightarrow \quad & \left|e_j^{(i+1)}\right| \leq \rho_q^*(l,k)\left|E_k^{(i-1)}\right|, \quad j = 1,2,...,k-1
\end{aligned}$$

de même

$$\begin{aligned}
E_j^{(i+1)} &= \frac{r_1^{N-j} - r_2^{N-j}}{r_1^{N-l} - r_2^{N-l}} e_l^{(i+1)} \\
&= \left(\frac{r_1^{N-j} - r_2^{N-j}}{r_1^{N-l} - r_2^{N-l}}\right)\left(\frac{r_1^l - r_2^l}{r_1^k - r_2^k}\right) E_k^{(i)} \\
&= \rho_q^*(l,k) E_k^{(i)} \\
&= \rho_q^*(l,k) \frac{r_1^{N-k} - r_2^{N-k}}{r_1^{N-l} - r_2^{N-l}} e_l^{(i)}
\end{aligned}$$

??

$$\Rightarrow \quad \left|E_j^{(i+1)}\right| \leq \rho_q^*(l,k)\left|\frac{r_1^{N-k}-r_2^{N-k}}{r_1^{N-l}-r_2^{N-l}}\right|\left|e_l^{(i)}\right|$$

$$\Rightarrow \quad \left|E_j^{(i+1)}\right| \leq \rho_q^*(l,k)\left|e_l^{(i)}\right|, \quad j=l+1,l+2,...,N-1$$

■

Ce corollaire prouve la convergence des solutions discrètes

Corollaire 1.8.3 *On a les estimations suivantes*

$$\left|e_j^{(i+1)}\right| \leq \left(\rho_q^*(l,k)\right)^i \left|E_k^{(0)}\right|, \quad j=1,2,...,k-1 \tag{38}$$

et

$$\left|E_j^{(i+1)}\right| \leq \left(\rho_q^*(l,k)\right)^i \left|E_k^{(0)}\right|, \quad j=l+1,l+2,...,N-1 \tag{39}$$

Remarque
la méthode
est bien cge
$\rho_q < 1$

1.8.4 Calcul de la Valeur Maximale du Facteur de Convergence

On a $k=l+D$,ainsi on peut écrire

$$\rho_q^*(l,l+D)=\left(\frac{r_1^l-r_2^l}{r_1^{l+D}-r_2^{l+D}}\right)\left(\frac{r_1^{N-l-D}-r_2^{N-l-D}}{r_1^{N-l}-r_2^{N-l}}\right) \tag{40}$$

il est facile de vérifier que ρ_q^* atteint son maximaum si

$$l=\frac{N-D}{2}$$

ie

$$\max_{0<l<N}\rho_q^*(l,l+D)=\rho_q^*\left(\frac{N-D}{2},\frac{N+D}{2}\right)$$

$$\rho_q^*(\frac{N-D}{2},\frac{N+D}{2})=\left[\frac{r_1^{\frac{N-D}{2}}-r_2^{\frac{N-D}{2}}}{r_1^{\frac{N+D}{2}}-r_2^{\frac{N+D}{2}}}\right]^2 \tag{41}$$

1.8.5 Cas Particulier $q = 0$

si $q = 0$ c. à.d. $Q = 1$ et $r_1 = r_2 = 1$, alors on a

$$\rho_0^*(l,k) = \lim_{r_1 \to r_2} \rho_q^*(l,k)$$

$$\begin{aligned}
\lim_{r_1 \to r_2} \rho_q^*(l,k) &= \lim_{r_1 \to r_2} \left(\frac{r_1^l - r_2^l}{r_1^k - r_2^k}\right)\left(\frac{r_1^{N-k} - r_2^{N-k}}{r_1^{N-l} - r_2^{N-l}}\right) \\
&= \lim_{r_1 \to r_2} \frac{r_1^{l+N-k} - r_1^l r_2^{N-k} - r_2^l r_1^{N-k} + r_2^{l+N-k}}{r_1^{k+N-l} - r_1^k r_2^{N-l} - r_2^k r_1^{N-l} + r_2^{k+N-l}}
\end{aligned}$$

on applique la règle de l'Hopital deux fois on obtient

$$\begin{aligned}
\lim_{r_1 \to r_2} \rho_q^*(l,k) &= \lim_{r_1 \to r_2} \frac{(l+N-k) r_1^{l+N-k-1} - l r_2^{N-k} r_1^{l-1} - (N-k) r_2^l r_1^{N-k-1}}{(k+N-l) r_1^{k+N-l-1} - k r_2^{N-l} r_1^{k-1} - (N-l) r_2^k r_1^{N-l-1}} \\
&= \frac{2l(N-k)}{2k(N-l)} \\
&= \frac{lh(Nh-kh)}{kh(Nh-lh)}
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\rho_0^*(l,k) = \frac{x_l(1-x_k)}{x_k(1-x_l)} = \rho_0^*(x_l, x_k) \tag{42}$$

par conséquent, on a

$$\begin{aligned}
\rho_0^*\left(\frac{N-D}{2}, \frac{N+D}{2}\right) &= \left(\frac{N-D}{N+D}\right)^2 \\
&= \left(\frac{Nh-Dh}{Nh+Dh}\right)^2 \\
&= \left(\frac{1-d}{1+d}\right)^2
\end{aligned}$$

$$\rho_0^*\left(\frac{N-D}{2}, \frac{N+D}{2}\right) = \rho_0^*\left(\frac{1-d}{2}, \frac{1+d}{2}\right) \tag{43}$$

1.8.6 Taux de Convergence

Corollaire 1.8.7 *Le taux de convergence du procédé alternatif de Schwarz est*

$$R \geq -\ln \rho_q^* \left(\frac{N-D}{2}, \frac{N+D}{2} \right).$$

Chapitre 2

Procédé Alternatif de Schwarz pour un Problème aux Limites de Neumann

2.1 Position du Problème

Soit le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -\frac{d^2y}{dx^2} + q^2 y = f(x) \quad dans \quad \Omega =]0,1[\\ \frac{dy}{dx}\big|_{x=0} = a \\ \frac{dy}{dx}\big|_{x=1} = b \end{cases} \tag{1}$$

où q est une constante. On garde les mêmes notations du paragraphe précédent. Le problème (1) est équivalent aux deux formes suivantes
la première est :

$$\begin{cases} -y^{''} + q^2 y = f(x) \quad dans \ \Omega_1 \\ y^{'}(0) = a \\ y(x_k) = z(x_k) \end{cases} \tag{2}$$

et

$$\begin{cases} -z^{''} + q^2 z = f(x) \quad dans \ \Omega_2 \\ z(x_l) = y(x_l) \\ z^{'}(1) = b \end{cases} \tag{3}$$

la deuxième est :

$$\left\{\begin{array}{c} -y^{''}+q^2y=f(x) \quad dans\ \Omega_1 \\ y^{'}(0)=a \\ y^{'}(x_k)=z^{'}(x_k) \end{array}\right. \tag{4}$$

et

$$\left\{\begin{array}{c} -z^{''}+q^2z=f(x) \quad dans\ \Omega_2 \\ z^{'}(x_l)=y^{'}(x_l) \\ z^{'}(1)=b \end{array}\right. \tag{5}$$

2.2 Procédé Alternatif de Schwarz Pour les Problèmes (2) et (3)

Le procédé alternatif de Schwarz pour les problèmes (2) et (3) est définit comme suit : Trouvons la suite $y^{(i+1)}$ sur Ω_1 solution de

$$\left\{\begin{array}{c} -y^{(i+1)''}+q^2y^{(i+1)}=f(x) \quad dans\ \Omega_1 \\ y^{(i+1)'}(0)=a \\ y^{(i+1)}(x_k)=z^{(i)}(x_k) \end{array}\right. \tag{6}$$

et la suite $z^{(i+1)}$ sur Ω_2 solution de

$$\left\{\begin{array}{c} -z^{(i+1)''}+q^2z^{(i+1)}=f(x) \quad dans\ \Omega_2 \\ z^{(i+1)}(x_l)=y^{(i+1)}(x_l) \\ z^{(i+1)'}(1)=b \end{array}\right. \tag{7}$$

où $z^{(0)}(x_k)$ est la donnée initiale

2.3 Estimation d'Erreur

On note la solution de (1) par $y^*(x)$ et les erreurs par

$$\begin{array}{rcl} e^{(i)}(x) & = & y^*(x)-y^{(i)}(x) \\ E^{(i)}(x) & = & y^*(x)-z^{(i)}(x) \end{array}$$

alors les erreurs satisfont les problèmes suivants

$$\begin{cases} -e^{(i+1)''} + q^2 e^{(i+1)} = 0, \, dans \ \Omega_1 \\ e^{(i+1)'}(0) = 0 \\ e^{(i+1)}(x_k) = E^{(i)}(x_k) \end{cases} \tag{8}$$

et

$$\begin{cases} -E^{(i+1)''} + q^2 E^{(i+1)} = 0, \, dans \ \Omega_2 \\ E^{(i+1)}(x_l) = e^{(i+1)}(x_l) \\ E^{(i+1)'}(1) = 0 \end{cases} \tag{9}$$

les solutions des problèmes (8) et (9) sont données par les expressions suivantes

$$e^{(i+1)}(x) = \frac{\cosh qx}{\cosh qx_k} E^{(i)}(x_k) \quad sur \ \overline{\Omega}_1 \tag{10}$$

$$E^{(i+1)}(x) = \frac{\cosh q(1-x)}{\cosh q(1-x_{l)}} e^{(i+1)}(x_l) \quad sur \ \overline{\Omega}_2 \tag{11}$$

Théorème 2.3.1 *Les erreurs relatives aux problèmes (6) et (7) vérifient les estimations suivantes*

$$\left|e^{(i+1)}(x)\right| \leq \rho_q(x_l, x_k) \left|E^{(i-1)}(x_k)\right| \quad dans \ \Omega_1 \tag{12}$$

et

$$\left|E^{(i+1)}(x)\right| \leq \rho_q(x_l, x_k) \left|e^{(i)}(x_l)\right| \quad dans \ \Omega_2 \tag{13}$$

où

$$\rho_q(x_l, x_k) = \left(\frac{\cosh qx_l}{\cosh qx_k}\right)\left(\frac{\cosh q(1-x_k)}{\cosh q(1-x_{l)}}\right) \tag{14}$$

est le facteur de convergence.

Preuve. Associons les conditions aux limites aux erreurs (10) et (11)

$$\begin{aligned} e^{(i+1)}(x_l) &= \frac{\cosh qx_l}{\cosh qx_k} E^{(i)}(x_k) \\ &= \frac{\cosh qx_l}{\cosh qx_k} \frac{\cosh q(1-x_k)}{\cosh q(1-x_l)} e^{(i)}(x_l) \end{aligned}$$

on pose

$$\frac{\cosh qx_l}{\cosh qx_k} \frac{\cosh q(1-x_k)}{\cosh q(1-x_l)} = \rho_q(x_l, x_k)$$

cela implique que

$$e^{(i+1)}(x_l) = \rho_q(x_l, x_k) e^{(i)}(x_l) \tag{15}$$

de même

$$\begin{aligned} E^{(i+1)}(x_k) &= \frac{\cosh q(1-x_k)}{\cosh q(1-x_l)} e^{(i+1)}(x_l) \\ &= \frac{\cosh q(1-x_k)}{\cosh q(1-x_l)} \frac{\cosh qx_l}{\cosh qx_k} E^{(i)}(x_k) \end{aligned}$$

on pose

$$\frac{\cosh q(1-x_k)}{\cosh q(1-x_l)} \frac{\cosh qx_l}{\cosh qx_k} = \rho_q(x_l, x_k)$$

ce qui donne

$$E^{(i+1)}(x_k) = \rho_q(x_l, x_k) E^{(i)}(x_k) \tag{16}$$

donc

$$\begin{aligned} e^{(i+1)}(x) &= \frac{\cosh qx}{\cosh qx_k} E^{(i)}(x_k) \\ &= \frac{\cosh qx}{\cosh qx_k} \rho_q(x_l, x_k) E^{(i-1)}(x_k) \end{aligned}$$

$$\left| e^{(i+1)}(x) \right| \leq \left| \frac{\cosh qx}{\cosh qx_k} \right| \rho_q(x_l, x_k) \left| E^{(i-1)}(x_k) \right|$$

avec

$$\left| \frac{\cosh qx}{\cosh qx_k} \right| \leq 1, \forall x \in]0, x_k[$$

et

$$
\begin{aligned}
E^{(i+1)}(x) &= \frac{\cosh q(1-x)}{\cosh q(1-x_{l})} e^{(i+1)}(x_l) \\
&= \frac{\cosh q(1-x)}{\cosh q(1-x_{l})} \rho_q(x_l, x_k) e^{(i)}(x_l)
\end{aligned}
$$

$$
\left|E^{(i+1)}(x)\right| \leq \left|\frac{\cosh q(1-x)}{\cosh q(1-x_l}\right| \rho_q(x_l, x_k) \left|e^{(i)}(x_l)\right|
$$

tel que

$$
\left|\frac{\cosh q(1-x)}{\cosh q(1-x_{l})}\right| \leq 1, \forall x \in]x_l, 1[
$$

■

Corollaire 2.3.1 *On a les estimations d'erreurs suivantes*

$$
\left|e^{(i+1)}(x)\right| \leq \left[\rho_q(x_l, x_k)\right]^i \left|E^{(0)}(x_k)\right| \qquad dans\ \Omega_1 \tag{17}
$$

$$
\left|E^{(i+1)}(x)\right| \leq \left[\rho_q(x_l, x_k)\right]^i \left|E^{(0)}(x_k)\right| \qquad dans\ \Omega_2 \tag{18}
$$

En effet, on a

$$
\begin{aligned}
\left|e^{(i+1)}(x)\right| &\leq \rho_q(x_l, x_k) \left|E^{(i-1)}(x_k)\right| \\
&\leq \rho_q(x_l, x_k)\rho_q(x_l, x_k) \left|E^{(i-2)}(x_k)\right| \\
&= \left[\rho_q(x_l, x_k)\right]^2 \left|E^{(i-2)}(x_k)\right| \\
&\leq \ldots \leq \left[\rho_q(x_l, x_k)\right]^m \left|E^{(i-m)}(x_k)\right|
\end{aligned}
$$

si on pose $m = i$ alors

$$
\left|e^{(i+1)}(x)\right| \leq \left[\rho_q(x_l, x_k)\right]^i \left|E^{(0)}(x_k)\right| \quad dans\ \Omega_1\ ,\ \forall i = 0, 1, 2, \ldots
$$

et de la même façon, on obtient

$$
\begin{aligned}
\left|E^{(i+1)}(x)\right| &\leq \rho_q(x_l, x_k) \left|e^{(i)}(x_l)\right| \\
&\leq \rho_q(x_l, x_k) \left[\rho_q(x_l, x_k)\right]^{i-1} \left|E^{(0)}(x_k)\right|
\end{aligned}
$$

$$
\left|E^{(i+1)}(x)\right| \leq \left[\rho_q(x_l, x_k)\right]^i \left|E^{(0)}(x_k)\right| \quad dans\ \Omega_2\ ,\ \forall i = 0, 1, \ldots
$$

2.4 Valeur Minimale du Facteur de Convergence

on a

$$\rho_q(x_l, x_k) = \left(\frac{\cosh qx_l}{\cosh qx_k}\right)\left(\frac{\cosh q(1-x_k)}{\cosh q(1-x_l)}\right)$$

posons

$$x_k = x_l + d$$

$$\rho_q(x_l, x_l+d) = \left(\frac{\cosh qx_l}{\cosh q(x_l+d)}\right)\left(\frac{\cosh q(1-x_l-d)}{\cosh q(1-x_l)}\right)$$

$$\frac{\partial \rho_q}{\partial x_l} = \frac{2q\sinh q(2x_l-1+d)\left[\cosh q(1+d)-\cosh q(1-d)\right]}{\left[\cosh q(1+d)-\cosh q(2x_l-1+d)\right]^2}$$

soit

$$\frac{\partial \rho_q}{\partial x_l} = 0 \tag{19}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow\ 2q\sinh q(2x_l-1+d)\left[\cosh q(1+d)-\cosh q(1-d)\right] = 0\\
&\Rightarrow\ 2q\sinh q(2x_l-1+d) = 0\\
&\Rightarrow\ q(2x_l-1+d) = 0\ ,\ q \neq 0\\
&\Rightarrow\ (2x_l-1+d) = 0
\end{aligned}$$

on obtient alors

$$x_l = \frac{1-d}{2} \tag{20}$$

donc

$$x_k = \frac{1+d}{2} \tag{21}$$

dans ce cas le facteur de convergence $\rho_q(x_l, x_k)$ atteint sa valeur minimale

$$\min_{x_l\in\Omega} \rho_q(x_l, x_l+d) = \rho_q\left(\frac{1-d}{2}, \frac{1+d}{2}\right)$$

et

$$\rho_q\left(\frac{1-d}{2},\frac{1+d}{2}\right)=\left(\frac{\cosh(\frac{1-d}{2})}{\cosh(\frac{1+d}{2})}\right)^2 \tag{22}$$

Corollaire 2.4.1 *Le taux de convergence du procédé altenatif de Schwarz est*

$$R\leq -\ln\rho_q\left(\frac{1-d}{2},\frac{1+d}{2}\right)$$

en effet

$$\begin{aligned}\rho_q(x_l,x_k) &\geq \rho_q\left(\frac{1-d}{2},\frac{1+d}{2}\right)\\ -\ln\rho_q(x_l,x_k) &\leq -\ln\rho_q\left(\frac{1-d}{2},\frac{1+d}{2}\right)\end{aligned}$$

ce qui implique que

$$R\leq -\ln\rho_q\left(\frac{1-d}{2},\frac{1+d}{2}\right)$$

2.5 Procédé Alternatif de Schwarz Pour les Problèmes (4) et (5)

Maintenant nous appliqouns le procédé alternatif de Schwarz pour les problèmes (4) et (5).Soit les suites $y^{(i+1)}$, $z^{(i+1)}$ tels que

$$\left\{\begin{array}{c} -y^{(i+1)''}+q^2y^{(i+1)}=f \quad dans\ \Omega_1\\ y^{(i+1)'}(0)=a\\ y^{(i+1)'}(x_k)=z^{(i)'}(x_k)\end{array}\right. \tag{24}$$

et

$$\left\{\begin{array}{c} -z^{(i+1)''}+q^2z^{(i+1)}=f \quad dans\ \Omega_2\\ z^{(i+1)'}(x_l)=y^{(i+1)'}(x_l)\\ z^{(i+1)'}(1)=b\end{array}\right. \tag{25}$$

2.6 Estimation d'Erreur

Soit les problèmes suivants

$$\begin{cases} -e^{(i+1)''} + q^2 e^{(i+1)} = 0 \quad dans\ \Omega_1 \\ e^{(i+1)'}(0) = 0 \\ e^{(i+1)'}(x_k) = E^{(i)'}(x_k) \end{cases} \tag{26}$$

et

$$\begin{cases} -E^{(i+1)''} + q^2 E^{(i+1)} = 0 \quad dans\ \Omega_2 \\ E^{(i+1)'}(x_l) = e^{(i+1)'}(x_l) \\ E^{(i+1)'}(1) = 0 \end{cases} \tag{27}$$

par un calcul simple les solutions sont données par les formules suivants

$$e^{(i+1)}(x) = \frac{1}{q}\frac{\cosh qx}{\sinh qx_k} E^{(i)'}(x_k) \quad sur\ \overline{\Omega}_1 \tag{28}$$

et

$$E^{(i+1)}(x) = -\frac{1}{q}\frac{\cosh q(1-x)}{\sinh q(1-x_l)} e^{(i+1)'}(x_l) \quad sur\ \overline{\Omega}_2 \tag{29}$$

donc

$$e^{(i+1)'}(x) = \frac{\sinh qx}{\sinh qx_k} E^{(i)'}(x_k) \quad sur\ \overline{\Omega}_1 \tag{30}$$

et

$$E^{(i+1)'}(x) = \frac{\sinh q(1-x)}{\sinh q(1-x_l)} e^{(i+1)'}(x_l) \quad sur\ \overline{\Omega}_2 \tag{31}$$

2.7 Calcul du Facteur de Convergence

Associons les conditions aux limites aux expressions (30) et (31)

$$\begin{aligned} e^{(i+1)'}(x_l) &= \frac{\sinh qx_l}{\sinh qx_k} E^{(i)'}(x_k) \\ &= \left(\frac{\sinh qx_l}{\sinh qx_k}\right)\left(\frac{\sinh q(1-x_k)}{\sinh q(1-x_l)}\right) e^{(i)'}(x_l) \end{aligned}$$

si on pose

$$\left(\frac{\sinh qx_l}{\sinh qx_k}\right)\left(\frac{\sinh q(1-x_k)}{\sinh q(1-x_l)}\right) = \overline{\rho}_q(x_l, x_k)$$ qui est le facteur d'orge.

alors

$$e^{(i+1)'}(x_l) = \overline{\rho}_q(x_l, x_k)e^{(i)'}(x_l) \tag{32}$$

de la même manière on trouve

$$E^{(i+1)'}(x_k) = \overline{\rho}_q(x_l, x_k)E^{(i)'}(x_k) \tag{33}$$

Théorème 2.7.1 *Les erreurs relatives aux problèmes (24) et (25) vérifient les estimations suivantes*

$$\left|e^{(i+1)}(x)\right| \leq \left[\overline{\rho}_q(x_l, x_k)\right]^i a_q(x_k)\left|E^{(0)'}(x_k)\right|, \text{ dans } \Omega_1$$

et

$$\left|E^{(i+1)}(x)\right| \leq \left[\overline{\rho}_q(x_l, x_k)\right]^i a_q(1-x_l)\left|E^{(0)'}(x_k)\right|, \text{ dans } \Omega_2$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned}
e^{(i+1)}(x) &= \frac{1}{q}\frac{\cosh qx}{\sinh qx_k}E^{(i)'}(x_k) \\
&= \frac{1}{q}\frac{\cosh qx}{\sinh qx_k}\overline{\rho}_q(x_l, x_k)E^{(i-1)'}(x_k) \\
&= \frac{1}{q}\frac{\cosh qx}{\sinh qx_k}\overline{\rho}_q(x_l, x_k)\overline{\rho}_q(x_l, x_k)E^{(i-2)'}(x_k) \\
&= \frac{1}{q}\frac{\cosh qx}{\sinh qx_k}\left[\overline{\rho}_q(x_l, x_k)\right]^2 E^{(i-2)'}(x_k)
\end{aligned}$$

par induction sur i

$$e^{(i+1)}(x) = \frac{1}{q}\frac{\cosh qx}{\sinh qx_k}\left[\overline{\rho}_q(x_l, x_k)\right]^m E^{(i-m)'}(x_k)$$

pour $m = i$

$$e^{(i+1)}(x) = \frac{1}{q}\frac{\cosh qx}{\sinh qx_k}\left[\overline{\rho}_q(x_l, x_k)\right]^i E^{(0)'}(x_k)$$

$$\left|e^{(i+1)}(x)\right| \leq \frac{1}{q}\frac{\cosh qx}{\sinh qx_k}\left[\overline{\rho}_q(x_l,x_k)\right]^i\left|E^{(0)'}(x_k)\right|$$

de plus on a

$$\begin{aligned} x &\in \Omega_1, i.e\;\; 0 \leq x \leq x_k \\ &\Rightarrow \cosh x \leq \cosh x_k \\ &\Rightarrow \frac{\cosh qx}{\sinh qx_k} \leq \frac{\cosh qx_k}{\sinh qx_k} \end{aligned}$$

on pose

$$a_q(x) = \frac{1}{q}\frac{\cosh qx}{\sinh qx}$$

donc

$$\left|e^{(i+1)}(x)\right| \leq \left[\overline{\rho}_q(x_l,x_k)\right]^i a_q(x_k)\left|E^{(0)'}(x_k)\right|$$

de la même façon

$$\begin{aligned} E^{(i+1)}(x) &= -\frac{1}{q}\frac{\cosh q(1-x)}{\sinh q(1-x_l)}e^{(i+1)'}(x_l) \\ &= -\frac{1}{q}\frac{\cosh q(1-x)}{\sinh q(1-x_l)}\overline{\rho}_q(x_l,x_k)e^{(i)'}(x_l) \\ &= -\frac{1}{q}\frac{\cosh q(1-x)}{\sinh q(1-x_l)}(\overline{\rho}_q(x_l,x_k))^2e^{(i-1)'}(x_l) \end{aligned}$$

par induction sur i

$$E^{(i+1)}(x) = -\frac{1}{q}\frac{\cosh q(1-x)}{\sinh q(1-x_l)}(\overline{\rho}_q(x_l,x_k))^m e^{(i-m+1)'}(x_l)$$

pour $m = i$, on obtient

$$\begin{aligned} E^{(i+1)}(x) &= -\frac{1}{q}\frac{\cosh q(1-x)}{\sinh q(1-x_l)}\left[\overline{\rho}_q(x_l,x_k)\right]^i e^{(1)'}(x_l) \\ &= -\frac{1}{q}\frac{\cosh q(1-x)}{\sinh q(1-x_l)}\left[\overline{\rho}_q(x_l,x_k)\right]^i \frac{\sinh qx_l}{\sinh qx_k}E^{(0)'}(x_k) \\ &= -\frac{1}{q}\left[\frac{\cosh q(1-x)}{\sinh q(1-x_l)}\frac{\sinh qx_l}{\sinh qx_k}\right]\left[\overline{\rho}_q(x_l,x_k)\right]^i E^{(0)'}(x_k) \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\left|E^{(i+1)}(x)\right| \leq \frac{1}{q}\left[\frac{\cosh q(1-x)}{\sinh q(1-x_l)}\frac{\sinh qx_l}{\sinh qx_k}\right]\left[\overline{\rho}_q(x_l,x_k)\right]^i\left|E^{(0)'}(x_k)\right|$$

on a

$$\frac{1}{q}\left[\frac{\cosh q(1-x)}{\sinh q(1-x_l)}\frac{\sinh qx_l}{\sinh qx_k}\right] = \frac{1}{q}\left[\frac{\cosh q(1-x)}{\sinh q(1-x_l)}\frac{\sinh qx_l}{\sinh q(x_l+d)}\right] = g$$

$$\begin{aligned}
x &\in \Omega_2, \quad i.e \quad x_l \leq x \leq 1 \\
&\Rightarrow -x_l \geq -x \geq -1 \\
&\Rightarrow 1 - x_l \geq 1 - x \geq 0 \\
&\Rightarrow \cosh q(1-x_l) \geq \cosh q(1-x)
\end{aligned}$$

donc

$$\frac{1}{q}\frac{\cosh q(1-x)}{\sinh q(1-x_l)} \leq \frac{1}{q}\frac{\cosh q(1-x_l)}{\sinh q(1-x_l)}$$

de plus la fonction $\cosh x$ est croissante pour $x > 0$ $[(\cosh x)' = \sinh x > 0\ ,\forall x > 0]$,ce qui donne

$$\begin{aligned}
x_l &\leq x_l + d \\
&\Rightarrow \sinh qx_l \leq \sinh q(x_l+d) \\
&\Rightarrow \frac{\sinh qx_l}{\sinh q(x_l+d)} \leq 1
\end{aligned}$$

donc

$$g \leq \frac{1}{q}\frac{\cosh q(1-x_l)}{\sinh q(1-x_l)}$$

on pose

$$a_q(1-x_l) = \frac{1}{q}\frac{\cosh q(1-x_l)}{\sinh q(1-x_l)}$$

alors

$$\left|E^{(i+1)}(x)\right| \leq \left[\overline{\rho}_q(x_l,x_k)\right]^i a_q(1-x_l)\left|E^{(0)'}(x_k)\right|$$

C.Q.F.D. ■

Chapitre 3

Expérimentations Numériques

Dans cette section nous considérons un test numérique simple. Soit le problème aux limites de Dirichlet

$$\begin{cases} -\frac{d^2y}{dx^2} + q^2 y = \sin\frac{\pi}{2}x, & dans\ \ \Omega \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

on prend $x_k = 4/7$, $x_l = 3/7$, $\Omega_1 =]0, 4/7[$, $\Omega_2 =]3/7, 1[$, $z^{(0)} = 0$, et le test d'arrêt $epsilon = 1e-06$. Où à chaque macro-itération (itération de Schwarz) nous avons employé sur chaque sous domaine, la méthode itérative de Gauss Seidel.

Table 3.1

h	$it3$	$it2$	$it1$	$temps(s)$
1/7	18	15	16	$2.028e-01$
1/14	18	58	58	$2.184e-02$
1/28	18	200	199	$8.112e-01$
1/56	18	666	665	$4.664e+00$
1/112	18	2115	2052	$3.0904e+01$

$it3$, indique le macro-itération de Schwarz (itération extérieure),
$it1, it2$, indiquent les micro-itérations de la méthode itérative de Gauss Seidel pour chaque sous-problème (itérations intérieures).
On remarque que le facteur de convergence est $\rho_q(x_l, x_k) = 0.536766 < 1$.

Table 3.2

h	$1/7$	$1/14$	$1/28$
$y^{(18)}(1/7)$	$2.90747e-02$	$2.90093e-02$	$2.896860e-02$
$z^{(18)}(4/7)$	$5.42008e-02$	$7.60865e-02$	$7.714485e-02$
	$1/56$	$1/112$	*solution exacte*
$y^{(18)}(1/7)$	$2.88625e-02$	$2.88631e-02$	$2.899788e-02$
$z^{(18)}(4/7)$	$7.719038e-02$	$7.719022e-02$	$7.749180e-02$

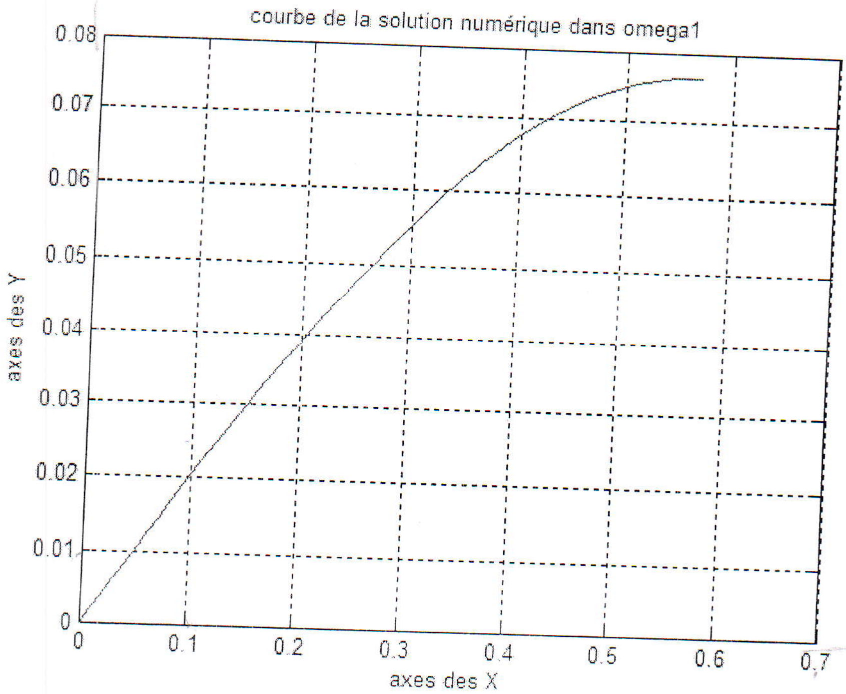
on remarque que la solution numérique en ces deux points converge

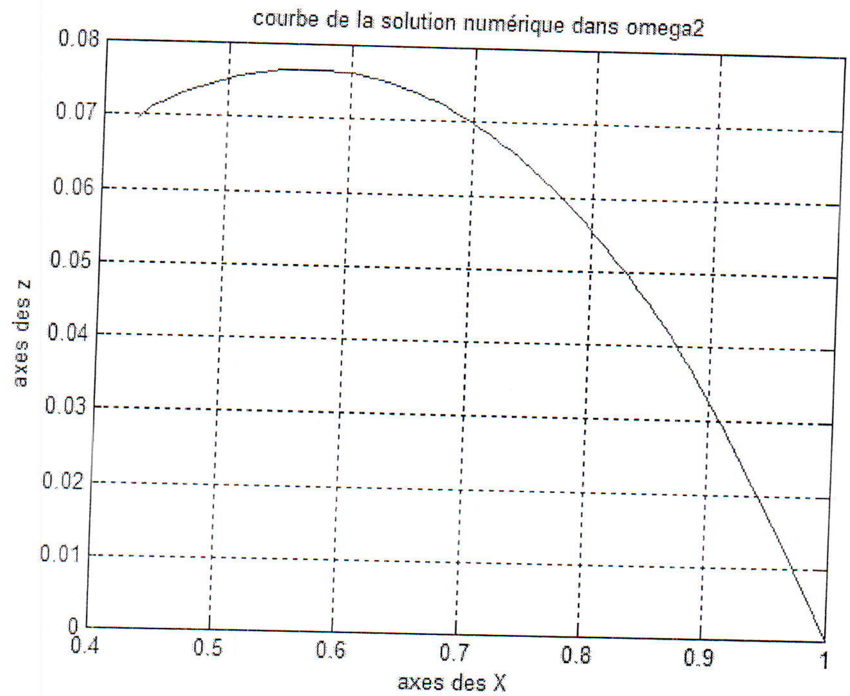
$g^d h \longrightarrow 0$

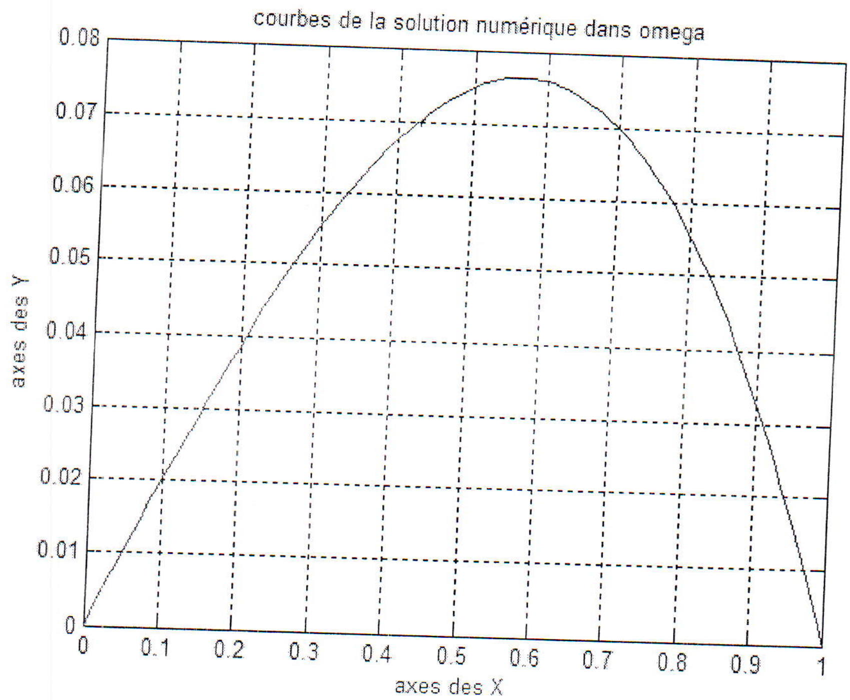
cas ex ⟶ cas numériq

y(i) en solution

$y^{(2)} = 0,01$




courbe de la solution numérique dans omega2
axes des z
axes des X
0.08
0.07
0.06
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
0
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1


courbes de la solution numérique dans omega
axes des Y
axes des X
0.08
0.07
0.06
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% PROCEDE ALTERNATIF DE SCHWARZ - METHODE DES DIFFERENCES FINIES
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function[y,z]= differencesfinies(n1,n2,q,maxit1,maxit2,maxit3)
 t=cputime; timetot=0; epsilon =1e-6;  p2= inf;  format long, % p= inf, format
short e;
%This program solves the obstacle problem
%
% -d/dx(d/dx(u))+q*q*u=f   dans (0,1)
% u(0)=0, u(1)=0
%ffunc = inline('sin(pi/2*x)'x'); % right hand side f
%   maxit = 10000; % maximum number of iterations


%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% calcul des matrices et des membres de droites
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
h=4/7/n1;  xl=3/7; xk=4/7;  %h2=4/7/n2;
for i=1:n1-1
     k1(i,i)=2+q*q*h^2;
     k2(i,i)=2+q*q*h^2;
end
for i=1:n1-2
     k1(i,i+1)=-1;
     k2(i,i+1)=-1;
     k1(i+1,i)=-1;
     k2(i+1,i)=-1;
end
for i=1:n1-1
F1(i,1)=h*h*sin((pi/2)*(i*h));
F2(i,1)=h*h*sin((pi/2)*(xl+i*h));
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% SOLUTION EXACTE
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
for i=1:n1-1
    uu1(i,1)=4/(pi^2+4*q^2)*(-sinh(q*i*h)/sinh(q)+sin((pi/2)*i*h));
    uu2(i,1)=4/(pi^2+4*q^2)*(-sinh(q*(xl+i*h))/sinh(q)+sin((pi/2)*(xl+i*h)));
end
y1=zeros(n1-1,1);
z1=zeros(n1-1,1);
it3=0;
while (it3 < maxit3)
   f1=F1; f2=F2;
%-------------------------------------------------------------------------------
% Solves  probleme one
%-------------------------------------------------------------------------------

f1(n1-1,1)=F1(n1-1,1)+z1(n1/4,1);

uold1 = zeros(n1-1,1);
y = uold1;
it1 = 0;

%-------------------------------------------------------------------------------
```

```
% Gauss-seidel method  for probleme one
%-----------------------------------------------------------------------------------
    while (it1 < maxit1)

        for i=1:n1-1
        y(i) =  (f1(i) - k1(i,1:i-1)*y(1:i-1) ...
                           - k1(i,i+1:n1-1)*uold1(i+1:n1-1)) ...
                          / k1(i,i);
        end

        relerr1 = norm(y-uold1,p2);
        if (relerr1 < epsilon )
            break;
        else
            uold1 = y;
        end
         it1 = it1+1 ;
    end

  it1;  relerr1; y;


      % y=k1\F1
     %  y=inv(k1)*f1;

%-----------------------------------------------------------------------------------
%solves probleme two
%-----------------------------------------------------------------------------------
f2(1,1)=F2(1,1)+y(3*n1/4,1);
uold2 = zeros(n2-1,1);
z = uold2;
it2 = 0;

 %-----------------------------------------------------------------------------------
% Gauss seidel method for probleme two
%-----------------------------------------------------------------------------------
    while (it2 < maxit2)

       for i=1:n1-1
        z(i) =  (f2(i) - k2(i,1:i-1)*z(1:i-1) ...
                         - k2(i,i+1:n2-1)*uold2(i+1:n2-1)) ...
                        / k2(i,i);

       end

        relerr2 = norm(z-uold2,p2);

        if (relerr2 < epsilon )
            break;
        else
            uold2 = z;
        end
         it2 = it2+1 ;

   end
```

```
it2;  relerr2;  z;

    % z=k2\F2
  %   z=inv(k2)*f2;

%-------------------------------------------------------------------------
% test d'arret des itérations de SCHWARZ
%-------------------------------------------------------------------------

  relerr11=norm(y-y1,p2);
% relerr1=norm(y-u1,p2)
  relerr21=norm(z-z1,p2) ;
 %  relerr2=norm(z-u2,p2)
    if and(relerr11 < epsilon  , relerr21 < epsilon )
        break;
    else
        y1=y;
        z1=z;
    end
    it3=it3+1;
end
 it3,it1,it2, relerr1, relerr2,relerr11,relerr21, uu1,uu2
 erreurexacty=norm(uu1-y,inf),  erreurexactz=norm(uu2-z,inf)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%  graghe de la solution
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
y=[0;y;z(n1/4,1)]; z=[y(3*n1/4);z;0];
x1=[0:h:4/7]; x2=[3/7:h:1];
x1=x1(:);x2=x2(:);
figure(1),  plot(x1,y,'r'), grid on,
xlabel('axes des X'); ylabel('axes des Y');
title(' courbe de la solution numérique dans omega1')
figure(2),   plot(x2,z), grid on
xlabel('axes des X'); ylabel('axes des z');
title(' courbe de la solution numérique dans omega2')
figure(3),  plot(x1,y,'r'), hold on, plot(x2,z), grid on,
xlabel('axes des X'); ylabel('axes des Y');
title(' courbes de la solution numérique dans omega')
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% CALCUL DU TEMPS DE CALCUL
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
temps=cputime-t, time(it3)=cputime-t;  timetot=timetot+time(it3);
facteurconv=(sinh(q*xl)/sinh(q*xk))*(sinh(q*(1-xk))/sinh(q*(1-xl)))
```

Bibliographie

[1] D. J. Evans ,K. L. Shan, S. J. Ping and C. Y. Ping, The Convergence Rate of the Schwarz Alternating Procedure (I) : For One Dimentional Problems, Intern. J. Computer Math., 1986, Vol. 20, pp. 157-170.

[2] D. J. Evans and K. L. Shan, The Convergence Rate of the Schwarz Alternating Procedure (III) : For Neumann Problems, Intern. J. Computer Math., 1987, Vol. 21, pp. 85-108.

[3] A. Mehri et S. Samira, Analyse Numérique et Mathématique de la Méthode Alterné de Schwarz pour une Classe d'Inéquation Quasi-Variationnelle Elliptique, Journées des Jeunes Chercheurs JJC11, Université d'Annaba 24-26 Octobre 2011.