République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 – Guelma

Faculté de Mathématiques et de l'Informatique et Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire de Fin d'Etude
Master Académique en Mathématiques
Option : **EDP**

THEME

Méthodes de perturbations

Présenté par :

HAMICI FATIHA

Dirigé par:

Mme. BADI SABRINA

Jury :

R. Chemlal

B. Mefteh

Session Juin 2012

Remerciements

En premier lieu, je tiens à remercier très sincèrement mon encadreur ***Mme. Badi Sabrina****, pour la qualité du projet qu'elle m'a proposé. Ses précieux conseils, commentaires concis et pertinents ont grandement amélioré ce mémoire.*

Je remercie chaleureusement mes ***parents*** *pour m'avoir éduqué dans un milieu où la connaissance, l'effort et l'indépendance sont importants pour m'avoir encouragé et supporté pendant toutes ces années d'études, je désirerais exprimer toute ma gratitude et mon amour.*

Je termine avec un remerciement bien particulier à toute personne qui a contribué de près ou de loin à ma réussite.

Dédicace

je dédie ce modeste travail à deux personnes qui sont les plus chères au monde et qui m'ont comblés de leur amour et leur affection.
A ma **mère** *qui m'a toujours soutenu depuis mon premier pas jusqu'à ce jour et qui a toujours su trouver les mots qu'ils fallaient pour m'encourager.*
A mon **père** *qui a tout fait pour que nous ne manquions de rien.*
A mon **frère** *et à ma* **soeur** *qui n'ont pas cessés de m'aimer.*
A tous mes **enseignants** *qui ont contribué à ma formation.*
A toute la famille ***Hamici***.
A tous mes collègues et amies, particulièrement : ***Amel, Adila, Wafa, Fayrouz, Hanane, Kenza, Amira***.
A la promotion 2011-2012.
A toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à réaliser ce travail.

"Une cause très petite, qui nous échappe, détermine un effet considérable que nous ne pouvons pas ne pas voir, et alors nous disons que cet effet est dû au hasard. Si nous connaissions exactement les lois de la nature et la situation de l'Univers à l'instant initial, nous pourrions prédire exactement la situation de ce même Univers à un instant ultérieur. Mais, lors même que les lois naturelles n'auraient plus de secret pour nous, nous ne pourrions connaître la situation initiale qu'approximativement. Si cela nous permet de prévoir la situation ultérieure avec la même approximation, c'est tout ce qu'il nous faut, nous disons que le phénomène a été prévu, qu'il est régi par des lois; Mais il n'en est pas toujours ainsi, il peut arriver que de petites différences dans les conditions initiales en engendrent de très grandes dans les phénomènes finaux; Une petite erreur sur les premières produirait une erreur énorme sur les derniers. La prédiction devient alors impossible."

Jules-Henri Poincaré — Sciences et Méthodes

Table des matières

Résumé

Dans ce travail, nous nous intéressons à une technique qui dite méthode de perturbation qui permet de déterminer une solution approximative d'une équation différentielle ordinaire non linéaire, nous nous limitons à des équations différentielles d'ordre 2, du type :

$$\begin{cases} L(y, \dot{y}, \ddot{y}) = \varepsilon f(y, \dot{y}) \\ 0 < \varepsilon \ll 1 \end{cases}$$

nous expliciterons des méthodes de perturbations régulières ainsi que de méthodes de perturbations singulières en donnant les avantages et les inconvénients de chaque méthode.

Abstract

In this work we investigate a technique that can be used to find an approximate solution of a system of differential equations, we will explain methods of regular and singular perturbations in giving the advantages and disadvantages of each method.

In this work we focus on a technique called perturbation method which allows to determine an approximate solution of a odinary nonlinear differential equation, we restrict ourselves to differential equations of order 2, of the type :

$$\begin{cases} L(y, \dot{y}, \ddot{y}) = \varepsilon f(y, \dot{y}) \\ 0 < \varepsilon \ll 1 \end{cases}$$

we explicit regular perturbation methods and methods of singular perturbations in giving the advantages and disadvantages of each method.

Introduction générale

Beaucoup de problèmes importants en ingénierie, en sciences physiques et en sciences sociales ; une fois formulés en termes mathématiques, exigent la détermination d'une fonction qui satisfait une équation contenant cette fonction et un certain nombre de ses dérivées. De telles équations sont connues sous le nom d'équations différentielles. Les équations différentielles sont apparues dés le début du calcul différentiel ($16^{eme} - 17^{eme} siecle$), avec diverses motivations, géométriques ou mécaniques. Elles sont particulièrement importantes pour la description des mouvements, ou des systèmes dynamiques. En particulier elles apparaissent de façon spectaculaire dans l'œuvre de Newton qui a montré leur importance fondamentale dans l'explication des mouvements planértaires sous l'influence des forces gravitationnelles.

Dès le début du XVIIIe siècle, la théorie des perturbations a été utilisée par les astronomes pour les besoins de la mécanique céleste : en effet, les équations différentielles décrivant un système de N corps en interaction gravitationnelle n'a pas de solution exacte générale pour $N \geq 3$. Cet aspect de la théorie des perturbations a été synthétisé à la fin du XIXe siècle dans les ouvrages classiques de Laplace, Tisserand et Poincaré, avant de connaître de nouveaux développements dans la seconde moitié du XXe siècle avec l'avènement en 1954 de la " théorie KAM ", du nom de ses trois concepteurs : Kolmogorov, Arnold et Moser.

La méthode a par ailleurs été abondamment utilisée au XXe siècle pour les besoins de la physique quantique, d'abord en mécanique quantique non relativiste, puis en théorie quantique des champs perturbative.

Le sujet du travail proposé ci-dessous est l'étude théorique et approximative des équations non linéaires qui se notent sous la forme :

$$\begin{cases} L(y, \dot{y}, \ddot{y}) = \varepsilon f(y, \dot{y}) \\ 0 < \varepsilon \ll 1 \end{cases} \tag{1}$$

et l'application des méthodes régulières et singulières à savoir : méthode de Lindstedt, des échelles de temps multiples et de la moyenne.

Cette problématique est scindée en quatre chapitres :

Chapitre1 :

Ce chapitre va principalement porter sur la présentation de l'équation différentielle sous ses formes.

Chapitre2 :

Dans ce chapitre, nous allons développer et appliquer la méthode régulière sur l'équation (1). En particulier, la résolution de l'équation (1) ainsi que la convergence de la fonction approximative au résultat exact.

Chapitre3 :

L'objet de cette section est d'expliciter évidement les méthodes singulières et de présenter leurs agencements pendant la résolution l'équation (1).

Chapitre4 :

L'objet de ce chapitre est de comparer les différentes méthodes explicitées.

Chapitre 1

Notions préliminaires et généralités

Dans ce chapitre, on donne un rappel succinct de certaines notions fondamentales. On introduira dans ce rappel les définitions d'équation différentielle, solution périodique,...

1.1 Généralités

Définition :

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une application définie sur un ouvert Ω de $I \times \mathbb{R}^{n+1}$. On appelle équation différentielle ordinaire (EDO) d'ordre n une équation fonctionnelle de la forme :

$$f(t, u, u', \cdots, u^{(n)}) = 0 \tag{1.1}$$

On dit que l'EDO (1.1) *est sous forme implicite.*

Définition :

On dit qu'une EDO d'ordre n est sous forme normale (explicite) si elle est donnée par :

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \cdots, y^{(n-1)})$$

Définition :

Une EDO linéaire d'ordre n est une équation écrite sous forme :

$$a_0(t)y + a_1(t)y' + \cdots + a_n(t)y^{(n)} = b(t)$$

Dans le cas contraire on dira que l'équation différentielle est non linéaire.

Définition :

- *On dit qu'une EDO linéaire est à coefficients constants si les coefficients $a_i(t)$ sont tous constants ;*
- *On dit qu'une EDO linéaire est homogène si son second membre $b(t)$ est nulle, dans le cas contraire elle est dite non homogène.*

Remarque :

- *La solution générale d'une EDO dépend d'autant de constants arbitraires que l'ordre de l'EDO.*
- *Il apparaîtra dans les cas étudiés que la solution générale d'une EDO pourra prendre les formes suivantes :*
  - *Forme explicite :* $y = y(t) + c$;
  - *Forme implicite :* $f(t, y, c) = 0$;
  - *En coordonnées polaire :* $r = f(\theta) + c$.

1.2 Résolution d'une EDO linéaire d'ordre 2 sans second membre

On considère l'équation différentielle homogène :

$$a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R} \quad a \neq 0 \tag{1.2}$$

Pour résoudre ce type d'équation, on commence par chercher les solutions de la forme :

$$y = e^{\lambda x}$$

d'où

$$\dot{y} = \lambda e^{\lambda x}, \quad \ddot{y} = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

On substitue : $y, \dot{y}, \ddot{y}$ dans (1.2), on obtient :

$$(a\lambda^2 + b\lambda + c)e^{\lambda x} = 0 \Rightarrow a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

donc : $y = e^{\lambda x}$ est la solution de (1.2) si et seulement si λ est racine de l'équation

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \tag{1.3}$$

Cette dernière s'appelle : équation caractéristique de (1.2).

La solution générale de (1.2)repose sur le nombre et la nature des racines de l'équation (1.3) qui revient au même sur la valeur du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ de l'équation (1.3) :

- $\Delta > 0$: l'équation (1.3) a deux racines réelles distinctes :

$$\lambda_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad \lambda_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

  $\Rightarrow e^{\lambda_1 x}$ et $e^{\lambda_2 x}$ sont deux solutions de (1.2) et comme $W(e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}) \neq 0$ $*$; Alors la solution générale de (1.2) est :

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

- $\Delta = 0$: l'équation (1.3) a une racine double : $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{-b}{2a} \Rightarrow y_1 = e^{\frac{b}{2a}x}$ est une solution de (1.2). On utilise la méthode de réduction d'ordre pour obtenir une deuxième solution y_2 d'où

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_1 x}$$

- $\Delta < 0$: l'équation (1.3) a deux racines distinctes complexes et conjuguées

$$\lambda_1 = \gamma + i\mu, \quad \lambda_2 = \gamma - i\mu$$

  où $\gamma, \mu \in \mathbb{R}$. Alors la solution générale de (1.2) est :

$$y = c_1 e^{\gamma x} \cos \mu x + c_2 e^{\gamma x} \sin \mu x$$

(*)W : wronskien

1.3 Résolution d'une EDO linéaire d'ordre 2 avec second membre

Elles sont de la forme :

$$a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = g(x), \quad a \neq 0, \quad g(x) \neq 0 \tag{1.4}$$

Méthode de Lagrange :

- Pour appliquer cette méthode, il faut connaître un système fondamentale de solution y_1, y_2 de l'équation homogène :

$$a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = 0 \tag{1.5}$$

dans ce cas la solution générale de (1.5) est :

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

- Le principe de la méthode de Lagrange est de remplacer les composantes c_1 et c_2 par des fonctions $U_1(x)$ et $U_2(x)$ inconnues qu'on va déterminer de tel que $y_p = U_1 y_1 + U_2 y_2$ vérifie l'équation non homogène (1.4)
- Pour trouver $U_1(x)$ et $U_2(x)$ on a besoin de deux conditions, la $1^{\text{ère}}$ condition est

$$\dot{U}_1 y_1 + \dot{U}_2 y_2 = 0$$

qu'on appelle équation arbitraire de compatibilité. Dans ce cas, on pose :

$$y_p = U_1 y_1 + U_2 y_2 \Rightarrow \dot{y}_p = U_1 \dot{y}_1 + U_2 \dot{y}_2$$

et

$$\ddot{y}_p = \dot{U}_1 \dot{y}_1 + U_1 \ddot{y}_1 + \dot{U}_2 \dot{y}_2 + U_2 \ddot{y}_2$$

On substitue $\ddot{y}_p, \dot{y}_p$ et y_p dans (1.4), on trouve :

$$\dot{U}_1 \dot{y}_1 + \dot{U}_2 \dot{y}_2 = \frac{g(x)}{a}$$

qui représente la $2^{\text{ème}}$ condition. On obtient alors un système :

$$\begin{cases} \dot{U}_1 y_1 + \dot{U}_2 y_2 = 0 \\ \dot{U}_1 \dot{y}_1 + \dot{U}_2 \dot{y}_2 = \frac{g(x)}{a} \end{cases}$$

Le déterminant de ce dernier système n'est autre que le wronskien qui est non nul, d'où la solution unique de ce système est :

$$\begin{cases} \dot{U}_1(x) = -\frac{y_2 g((x)}{aW(y_1,y_2)} \\ \dot{U}_2(x) = \frac{y_1 g((x)}{aW(y_1,y_2)} \end{cases} (\Rightarrow y_p = y_1 \int -\frac{y_2 g((x)}{aW(y_1, y_2)} dx + y_2 \int \frac{y_1 g((x)}{aW(y_1, y_2)} dx)$$

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_p$$

Remarque : *En général, il n'y a pas de méthode générale pour résoudre les équations différentielles non linéaires. La méthode de perturbation est une technique qui permet de trouver une solution approximative d'une équation différentielle non linéaire ou d'un système d'équations différentielles non linéaires.*

1.4 Introduction au méthode de perturbation

La théorie de perturbation est une méthode mathématique générale qui permet de trouver une solution approchée d'une équation mathématique (E_ε) dépendante d'un paramètre ε lorsque la solution de l'équation (E_0), correspondant à la valeur $\varepsilon = 0$, est connue exactement. L'équation mathématique (E_ε) peut être une équation algébrique, une équation différentielle, une équation aux valeurs propres, ... La méthode consiste à chercher la solution approchée de l'équation (E_ε) sous la forme d'un développement en série des puissances du paramètre ε, cette solution approchée étant supposée être une approximation d'autant meilleure de la solution exacte, mais inconnue, que la valeur absolue du paramètre ε est plus "petite" ($\varepsilon \ll 1$).

Dans ce travail on va considérer les équations (E_ε) comme étant des équations différentielles. On va appliquer la théorie de perturbation pour résoudre des équations différentielles non linéaires du second ordre sous la forme

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y + \varepsilon f(y, \frac{dy}{dt}) = 0 \quad (E_\varepsilon)$$

où ε est un petit paramètre et f est une fonction analytique non linéaire de y et $\frac{dy}{dt}$. Pour bien comprendre le principe de cette méthode, on considère cet exemple :

Exemple 1 *:*

Soit le problème à valeuur initiale

$$\frac{dy_\varepsilon}{dt} + y_\varepsilon = \varepsilon, \quad y_\varepsilon(0) = 1$$

Sa solution est :

$$y_\varepsilon(t) = \varepsilon + (1-\varepsilon)e^{-t}$$

La solution du problème non perturbé

$$\frac{dy}{dt} + y = 0, \quad y(0) = 1$$

est :

$$y(t) = e^{-t}$$

et la différence entre la solution du problème non perturbé et problème perturbé est :

$$|y_\varepsilon(t) - y(t)| = |\varepsilon - \varepsilon e^{-t}| = \varepsilon|1 - e^{-t}| \leq \varepsilon, \quad \forall t \geq 0.$$

On remarque que la solution approchée tends vers la solution exacte.

Exemple 2 :

La situation est différente pour le problème

$$\frac{dy_\varepsilon}{dt} - y_\varepsilon = \varepsilon, \quad y_\varepsilon(0) = 1$$

La solution est :

$$y_\varepsilon(t) = -\varepsilon + (1+\varepsilon)e^t$$

Le problème non perturbé :

$$\frac{dy}{dt} - y = 0, \quad y(0) = 1$$

a la solution : $y(t) = e^t$

$$|y_\varepsilon(t) - y(t)| = \varepsilon|1 - e^t|.$$

sur l'intervalle $0 \leq t \leq 1$, l'erreur est de l'ordre de ε. Ce n'est pas le cas pour $t > 1$ où la différence croît sans être bornée.

1.5 Solution périodique

On dit que $y(t)$ est une solution périodique pour l'équation

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y + \varepsilon f(y, \frac{dy}{dt}) = 0$$

s'il existe un constante positive $T > 0$ qui vérifie :

$$y(T) = y(0) \tag{1.6}$$

on qualifie de période le plus petit T vérifiant (1.6)

Remarque :

Les multiples de la périodicité est aussi une période.

Chapitre 2

Méthode de perturbation régulière

2.1 Définition

Supposons que on a problème (E_ε) avec un petit paramètre $0 < \varepsilon \ll 1$ et la solution $y(\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Si

$$\lim_{\varepsilon \to 0} y(\varepsilon) = y(0)$$

alors on dit que le problème (E_ε) est régulier.

Soit l'équation différentielle du second ordre, non linéaire, perturbée, contenant un petit paramètre $0 < \varepsilon \ll 1$ suivante :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y + \varepsilon f(y, \frac{dy}{dt}) = 0 \tag{2.1}$$

On suppose qu'une solution de l'équation (2.1) peut-être écrite sous la forme d'un développement en série des puissances du paramètre ε comme suit :

$$y = y_0(t) + \varepsilon y_1(t) + \varepsilon^2 y_2(t) + \ldots + \varepsilon^n y_n(t) + \ldots \tag{2.2}$$

où les coefficients des puissances du paramètre ε sont des fonctions de la variable indépendante t.

On justifie l'équation (2.2) par le premier résultat trouvé par Poincaré et qui montre que si une équation différentielle contienne des termes avec un paramètre, alors la solution est une fonction analytique de ce paramètre. Ainsi, si ε est suffisamment petit, les séries qui sont trouvées par l'équation (2.2) convergent. Les fonctions y_n sont trouvées par substitution de l'équation (2.2) dans l'équation différentielle (2.1) et qu'on détermine récursivement en résolvant un ensemble infini d'équations différentielles linéaire non homogène.

Ceci est l'avantage majeur de cette méthode car elle permet de remplacer l'équation différentielle non linéaire (2.1) par un système d'équations différentielles linéaires.

Nous introduisons l'idée de base de la théorie de perturbation régulière par l'exemple suivant :

Exemple 3 :

Soit un système qui est modelé initialement par l'équation :

$$\dot{y} + 2y = 0, \quad y(0) = 1$$

Ce système après perturbation est devenu :

$$\dot{y} + 2y + \varepsilon y^2 = 0, \quad y(0) = \cosh \varepsilon \tag{2.3}$$

où ε est le paramètre de perturbation $0 < \varepsilon \ll 1$.

On cherche la solution :

$$y(t, \varepsilon) = y_0(t) + \varepsilon y_1(t) + \varepsilon^2 y_2(t) + \cdots \tag{2.4}$$

En substituant (2.4) dans (2.3), on obtient :

$$(\dot{y}_0 + 2y_0) + \varepsilon(\dot{y}_1 + 2y_1 + y_0^2) + \varepsilon^2(\dot{y}_2 + 2y_2 + 2y_0 y_1) + \cdots = 0$$

$$\begin{aligned} y_0(0) + \varepsilon y_1(0) + \varepsilon^2 y_2(0) + \cdots &= \cosh \varepsilon \\ &= 1 + \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^4}{24} + \cdots \end{aligned}$$

En regroupant les termes de même puissance de ε, on a le système suivant :

à l'ordre ε^0 : $\dot{y}_0 + 2y_0 = 0, \quad y_0(0) = 1$

à l'ordre ε^1 : $\dot{y}_1 + 2y_1 = -y_0^2, \quad y_1(0) = 0$

à l'ordre ε^2 : $\dot{y}_2 + 2y_2 = -2y_0 y_1, \quad y_2(0) = \frac{1}{2}$

On trouve en résolvant une à une ces dernières équations :

$$\begin{aligned} y_0(t) &= e^{-2t}, \\ y_1(t) &= \frac{1}{2}(e^{-4t} - e^{-2t}), \\ y_2(t) &= \frac{1}{4}(3e^{-2t} + e^{-6t} - 2e^{-4t}) \end{aligned}$$

La solution est :

$$y(t) = e^{-2t} + \frac{\varepsilon}{2}(e^{-4t} - e^{-2t}) + \frac{\varepsilon^2}{4}(3e^{-2t} + e^{-6t} - 2e^{-4t}) + \cdots$$

On voit que le coefficient de chaque ε^n est borné et comme $0 < \varepsilon \ll 1$ la contribution du $(\mathrm{n}+1)^{\text{ème}}$ terme est petite comparée au $\mathrm{n}^{\text{ième}}$. En vu de cela, nous pouvons tronquer le développement aprés le second terme et considérer ceci comme une solution approximative de l'équation (2.3)

Remarques :

Si nous obtenons $y_1(t) = 0$ dans le développement on utilise $y_0(t) + \varepsilon^2 y_2(t)$ comme solution approximative, Plus généralement si : $y_1(t) = \cdots = y_{n-1}(t) = 0$; alors la solution approximative est : $y_0(t) + \varepsilon^n y_n(t)$.

Notons que le dévelopement de perturbation remplace l'équation (2.3) qui est non linéaire par un système d'équation linéaire non homogènes. Ceci est l'un des avantages majeur de cet approche car il n'y a pas de méthode génerale pour résoudre les équations différentielles non linéaire.

Cette technique faite pour une équation peut-être utilisée pour chercher une solution approximative d'un système d'équations.

Exemple 4 *:*

Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + y + \varepsilon y^2 \\ \dot{y} = x - 2y + \varepsilon x^2 \\ x(0) = y(0) = 1, \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \end{cases}$$

Posons :

$$\begin{cases} x = x_0 + \varepsilon x_1 + \cdots \\ y = y_0 + \varepsilon y_1 + \cdots \end{cases}$$

On remplace dans le système, on obtient à l'ordre ε^0 :

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = -2x_0 + y_0 \\ \dot{y}_0 = x_0 - 2y_0 \\ x_0 = y_0 = 1 \end{cases}$$

à l'ordre ε^1 :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + y_1 + y_0^2 \\ \dot{y}_1 = x_1 - 2y_1 + x_0^2 \\ x_1 = y_1 = 0 \end{cases}$$

...

On obtient :

$$\begin{cases} x_0 = y_0 = e^{-t} \\ x_1 = y_1 = e^{-t} - e^{-2t} \end{cases}$$

Alors :

$$\begin{cases} x(t) = e^{-t} + \varepsilon(e^{-t} - e^{-2t}) + o(\varepsilon^2) \\ y(t) = e^{-t} + \varepsilon(e^{-t} - e^{-2t}) + o(\varepsilon^2) \end{cases}$$

Parfois la méhode de perturbation régulière ne donne pas les fonctions $y_n(t)$ bornées. Dans ce cas nous utilisons la méthode des perturbations singulières.

Comme exemple pour cette idée, on considère l'équation différentielle non linéaire suivante qu'on appelle équation de Duffing :

$$\ddot{y} + y + \varepsilon y^3 = 0, \quad \varepsilon > 0 \tag{2.5}$$

Avec conditions initiales :

$$y(0) = A \quad et \quad \dot{y}(0) = 0$$

On cherche la solution sous la forme de l'équation (2.2). En substituant l'équation (2.2) dans (2.5), on obtient :

$$(\ddot{y}_0 + \varepsilon\ddot{y}_1 + \varepsilon^2\ddot{y}_2 + \ldots) + (y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \cdots) + \varepsilon(y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \cdots)^3 = 0$$

et en assemblant les termes de la même puissance de ε, ceci donne :

$$(\ddot{y}_0 + y_0) + \varepsilon(\ddot{y}_1 + y_1 + y_0^3) + \varepsilon^2(\ddot{y}_2 + y_2 + 3y_0^2 y_1) + \varepsilon^3(\cdots) + \cdots = 0 \tag{2.6}$$

Puisque l'équation (2.6) est un développement en séries de puissance de ε identiquement nul, les différents coefficients de puissance de ε doivent être tous nul. Ainsi on trouve un système infini d'équations différentielles linéaire non homogène à résoudre :

$$\begin{array}{rcl} \ddot{y}_0 + y_0 & = & 0 \\ \ddot{y}_1 + y_1 & = & -y_0^3 \\ \ddot{y}_2 + y_2 & = & -3y_0^2 y_1 \\ \vdots \quad \vdots & = & \vdots \\ \ddot{y}_n + y_n & = & f_n(y_0, y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}) \\ \vdots \quad \vdots & = & \vdots \end{array}$$

où f_n est un polynôme en $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$. On remarque que ce système peut-être résolu récursivement.

Les conditions initiales $y(0) = A$ et $\dot{y}(0) = 0$, après substitution de l'équation (2.2) conduisent aux conditions initiales suivantes (dépendent de $y_n(t)$) :

$$\begin{array}{ll} y_0(0) = A & \\ y_i = 0 & pour \quad i \geq 1 \\ \dot{y}_k(0) = 0 & pour \quad k \geq 0 \end{array} \tag{2.7}$$

- A l'ordre zéro de ε : est facile à trouver et qui est :

$$y_0(t) = A \cos t$$

- A l'ordre 1 : L'équation pour y_1 est :

$$\ddot{y}_1 + y_1 = -y_0^3 = -(\frac{3A^2}{4}) \cos t - (\frac{A^3}{4}) \cos 3t$$

Qui est linéaire non homgène, sa solution particulière est :

$$y_1^p = (\frac{A^3}{32}) \cos 3t - (\frac{3A^3}{8}) t \sin t$$

Par conséquent, sa solution générale est :

$$y_1(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t + (\frac{A^3}{32}) \cos 3t - (\frac{3A^3}{8}) t \sin t$$

Les conditions initiales de l'équation (2.7) permettent de déterminer les constantes C_1 et C_2 on trouve :

$$y_1(t) = (\frac{A^3}{32})(\cos 3t - \cos t) - (\frac{3A^3}{8}) t \sin t$$

Ainsi, à l'ordre ε , la solution de l'équation (2.5) est donnée par :

$$y = A \cos t + \varepsilon(\frac{A^3}{32})[(\cos 3t - \cos t) - 12t \sin t] \tag{2.8}$$

Malheureusement, l'équation (2.8) montre que $y(t)$ n'est pas bornée quand $t \to \infty$, mais aussi non périodique ce dernier inconvénient montre qu'une simple application de l'équation (2.2) conduit à de sérieux problèmes si notre but était de trouver des solutions périodiques.

2.2 Terme Séculaire

Les calculs de de partie précédent ont montré que nous ne pouvons pas essayer une solution de la forme (2.2) pour obtenir une solution périodique de l'équation (2.1) si nous ne retenir qu'un nombre fini de termes. C'est parce que le rapprochement qui en résulte peut être apériodique. Ce manque de périodicité vient du fait que, même si y est une fonction périodique de t, le maintien de seulement un nombre fini de termes dans l'équation (2.2) peut donner une fonction qui n'est pas périodique. De telle situation est arrivée si on prend le développement d'une fonction périodique $\sin(1+\varepsilon)t$

$$\sin(1+\varepsilon)t = \sin t + \varepsilon t \cos t - (\frac{\varepsilon^2 t^2}{2}) \sin t + \cdots$$

Si nous retenons un nombre fini de termes de membre de droite, on obtient une fonction qui est non périodique et non bornées quand $t \to \infty$.

Les termes $t^n \cos t$ ou $t^n \sin t$ s'appellent termes séculaires ; c'est claire que l'existence de telle expressions qui est devenu non bornées quand $t \to \infty$ détruisent la périodicité de l'expression.

Une technique pour éviter les termes séculaires est donnée par Lindstedt qui est l'une de méthode des perturbations singulières.

Chapitre 3

Méthode de perturbation singulière

En la théorie de la perturbation un problème de perturbation singulière est un problème contenant un petit paramètre qui ne peut pas être approximatif par mettre le paramètre à valeur nul. C'est en contraste à un problème de perturbation régulière pour laquelle approximation peut-être obtenu par simplement mettre le petit paramètre à zéro.

La théorie de la perturbation singulière est un riche des domaine pour les mathématiciens. Dans cette partie nous allons introduit : méthode de Lindstedt, méthode des échelles de temps multiples, méthode de la moyenne.

3.1 Méthode de Lindstedt

La méthode de Lindstedt s'applique aux équations de la forme :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y + \varepsilon f(y, \frac{dy}{dt}) = 0 \tag{3.1}$$

La base de la méthode consiste d'introduire une transformation de la variable indépendant. Cette transformation nous permet d'éviter les termes séculaires dans les solutions sous forme de série de perturbation de l'équation (3.1).

L'idée fondamentale de cette méthode consiste à faire un changement d'échelle de temps en introduisant une nouvelle variable $\tau = \omega t$ et les deux y et ω sont développés en série des puissances du paramètre ε comme suit :

$$y(\tau, \varepsilon) = y_0(\tau) + \varepsilon y_1(\tau) + \varepsilon^2 y_2(\tau) + \cdots + \varepsilon^n y_n(\tau) + \cdots \tag{3.2}$$

$$\omega(\varepsilon) = 1 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \ldots + \varepsilon^n\omega_n + \ldots \tag{3.3}$$

où les ω_k sont des constantes inconnues.

Si on substitue les équations (3.2) et (3.3) dans l'équation (3.1) et on met les différents coefficients des puissances de ε nulles, et si on utilise la notation :

$$\dot{y} = \frac{dy}{d\tau} \qquad \ddot{y} = \frac{d^2y}{d\tau^2}$$

et

$$f_y(y,\dot{y}) = \frac{\partial f(y,\dot{y})}{\partial y}, \qquad f_{\dot{y}}(y,\dot{y}) = \frac{\partial f(y,\dot{y})}{\partial \dot{y}}$$

alors on obtient pour les y_n les équations suivantes :

$$\ddot{y}_0 + y_0 = 0 \tag{3.4}$$

$$\ddot{y}_1 + y_1 = -2\omega_1\ddot{y}_0 - f(y_0,\dot{y}_0) \tag{3.5}$$

$$\ddot{y}_2 + y_2 = -2\omega_1\ddot{y}_1 - (\omega_1^2 + 2\omega_2)\ddot{y}_0 - f_y(y_0,\dot{y}_0)y_1 + f_y(y_0,\dot{y}_0)(\omega_1\dot{y}_0 + \dot{y}_1) \tag{3.6}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\ddot{y}_n + y_n = G_n(y_0, y_1, \cdots, y_{n-1}; \dot{y}_0, \dot{y}_1, \cdots, \dot{y}_{n-1}) \tag{3.7}$$

Si $f(y, \frac{dy}{dt})$ est une fonction polynomiale de y et $\frac{dy}{dt}$, alors G_n est aussi une fonction polynomiale de ses arguments.

Notons que la condition de la périodicité en nouveau variable τ écrit comme :

$$y(\tau) = y(\tau + 2\pi)$$

La condition correspondant pour les y_n est :

$$y_n(\tau) = y_n(\tau + 2\pi)$$

Le second membre du système linéarisé ne doit pas contenir des multiples de $\cos\tau$ et $\sin\tau$, sinon il y aura des termes séculaires.

L'élimination de ces termes permet de déterminer les parametres ω_k.

D'où cette détermination et avec les conditions initiales, on peut résoudre facilement les équations différentielles (3.4), (3.5), (3.6) et (3.7).

Finalement, on trouve la solution de la forme (3.2) de l'équation (3.1).

Illustrons la méthode avec les deux exemples suivants :

Exemple 5 : ***l'équation de Duffing*** :

Soit l'équation de Duffing :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y + \varepsilon y^3 = 0 \tag{3.8}$$

avec conditions initiales

$$y(0) = A \quad et \quad \frac{dy(0)}{dt} = 0 \tag{3.9}$$

Posons $\tau = \omega t$, on obtient :

$$\omega^2 \frac{d^2y}{d\tau^2} + y + \varepsilon y^3 = 0; \quad y(0) = A, \quad \dot{y}(0) = 0 \tag{3.10}$$

où $y = y(\tau)$. On pose

$$\begin{aligned} y(\tau, \varepsilon) &= y_0(\tau) + \varepsilon y_1(\tau) + \varepsilon^2 y_2(\tau) + \ldots + \varepsilon^n y_n(\tau) + \cdots \\ \omega(\varepsilon) &= 1 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \ldots + \varepsilon^n\omega_n + \cdots \end{aligned}$$

les conditions initiales deviennent :

$$\begin{cases} y(0) = A \Rightarrow y_0(0) = A, & y_n(0) = 0, \quad \forall n \geq 1 \\ \dot{y}(0) = 0 \Rightarrow \dot{y}_0(0) = 0, & \dot{y}_n(0), \quad \forall n \geq 1 \end{cases}$$

Après substitution on a :

$$(1+\varepsilon\omega_1+\varepsilon^2\omega_2+\cdots)^2(\ddot{y}_0+\varepsilon\ddot{y}_1+\varepsilon^2\ddot{y}_2+\cdots)+(y_0+\varepsilon y_1+\varepsilon^2 y_2+\cdots)+\varepsilon(y_0+\varepsilon y_1+\varepsilon^2 y_2+\cdots)^3 = 0$$

En identifiant les termes de même puissance de ε on obtient :

ε^0 : $\ddot{y}_0 + y_0 = 0, \quad y_0(0) = A, \quad \dot{y}_0(0) = 0$

ε^1 : $\ddot{y}_1 + y_1 = -y_0^3 - 2\omega_1\ddot{y}_0, \quad y_1(0) = \dot{y}_1(0) = 0$

ε^2 : $\ddot{y}_2 + y_2 = -3y_0^2 y_1 - 2\omega_1\ddot{y}_1 - (\omega_1^2 + 2\omega_2)\ddot{y}_0, \quad y_2(0) = \dot{y}_2(0) = 0$

. : ....

La première équation a pour solution générale :

$$y_0(\tau) = A\cos\tau$$

On porte alors cette dernière expression dans la seconde équation différentielle, et on trouve sa solution générale :

$$\ddot{y}_1 + y_1 = 2\omega_1 A\cos\tau - A^3\cos^3\tau$$

On réutilise la formule trigonométrique :

$$\cos^3\tau = \frac{1}{4}(3\cos\tau + \cos 3\tau)$$

D'où :

$$\ddot{y}_1 + y_1 = (2\omega_1 A - \frac{3A^3}{4})\cos\tau - (\frac{A^3}{4})\cos 3\tau$$

Le terme séculaire peut-être éliminer si le coefficient de $\cos\tau$ est nul, en posant :

$$2\omega_1 A - \frac{3A^3}{4} = 0 \quad i.e \quad \omega_1 = \frac{3A^2}{8}$$

Alors la solution de la deuxième équation est :

$$y_1(\tau) = (\frac{A^3}{32})(-\cos\tau + \cos 3\tau)$$

La troisième équation devient :

$$\ddot{y}_2 + y_2 = (\frac{21A^4}{128} + 2\omega_2)A\cos\tau + N.S.T$$

N.S.T : non secular terms

On a utilisé :

$$\cos^2\tau = \frac{1+\cos 2\tau}{2} \quad et \quad \cos 2\tau\cos 3\tau = \frac{1}{2}(\cos\tau + \cos 5\tau)$$

D'où :

$$\ddot{y}_2 + y_2 = (\frac{21A^4}{128} + 2\omega_2)A\cos\tau + (\frac{3A^5}{16})\cos 3\tau - (\frac{3A^5}{128})\cos 5\tau$$

Pour éliminer le terme séculaire on pose :

$$\omega_2 = -\frac{21A^4}{256}$$

La solution de la troisième équation est :

$$y_2(\tau) = (\frac{A^5}{1024})(23\cos\tau - 24\cos 3\tau + \cos 5\tau)$$

Alors la solution d'équation (3.8) est :

$$y(\tau) = A\cos\tau + \varepsilon(\frac{A^3}{32})(-\cos\tau + \cos 3\tau) + \varepsilon^2(\frac{A^5}{1024})(23\cos\tau - 24\cos 3\tau + \cos 5\tau) + \ldots$$

Où $\tau = \omega t$ et

$$\omega(\varepsilon) = 1 + \varepsilon(\frac{3A^2}{8}) - \varepsilon^2(\frac{21A^4}{256}) + \cdots$$

Exemple 6 : ***l'équation de Van der Pol :***

On considère l'équation de Van der Pol :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y - \varepsilon(1 - y^2)\frac{dy}{dt} = 0 \qquad (3.11)$$

avec conditions initiales données par l'équation (3.9) dans l'exemple précédent.

$$\begin{aligned}
&\tau = \omega t \\
&\omega^2\ddot{y}(\tau) + y(\tau) - \varepsilon(1 - y^2(\tau))\omega\dot{y}(\tau) = 0 \\
&\omega(\varepsilon) = 1 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \ldots + \varepsilon^n\omega_n + \cdots \\
&y(\tau, \varepsilon) = y_0(\tau) + \varepsilon y_1(\tau) + \varepsilon^2 y_2(\tau) + \ldots + \varepsilon^n y_n(\tau) + \cdots
\end{aligned}$$

Après substitution on a :

$$(1 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \cdots)^2(\ddot{y}_0 + \varepsilon\ddot{y}_1 + \varepsilon^2\ddot{y}_2 + \cdots) + (y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \cdots)$$

$$-\varepsilon(1 - (y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \cdots)^2)(1 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \cdots)(\dot{y}_0 + \varepsilon\dot{y}_1 + \varepsilon^2\dot{y}_2 + \cdots) = 0$$

Les équations différentielles pour $y_0(\tau), y_1(\tau)$ et$y_2(\tau)$, sont obtenues facilement et sont données par les expressions suivants :

$$\begin{aligned}
\ddot{y}_0 + y_0 &= 0 \\
\ddot{y}_1 + y_1 &= -2\omega_1\ddot{y}_0 + (1 - y_0^2)\dot{y}_0 \\
\ddot{y}_2 + y_2 &= -2\omega_1\ddot{y}_1 - (\omega_1^2 + 2\omega_2)\ddot{y}_0 - 2y_0y_1\dot{y}_0 + (1 - y_0^2)(\dot{y}_1 + \omega_1\dot{y}_0)
\end{aligned}$$

Avec les condiions iniiales :

$$\left\{\begin{array}{ll} y_0(0) = A, & \dot{y}_0(0) = 0 \\ y_1(0) = 0, & \dot{y}_1(0) = 0 \\ y_2(0) = 0, & \dot{y}_2(0) = 0 \end{array}\right.$$

La solution de la $1^{\text{ère}}$ équation est :

$$y_0(\tau) = A \cos \tau$$

En substituant cette solution dans la $2^{\text{ème}}$ équation et en simplifiant, on trouve :

$$\ddot{y}_1 + y_1 = 2\omega_1 A \cos \tau - A(1 - \frac{A^2}{4}) \sin \tau + \frac{A^3}{4} \sin 3\tau$$

En éliminant les termes séculaires :
avec $A \neq 0$

$$\left\{\begin{array}{l} \omega_1 = 0 \\ A^2 = 4 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \omega_1 = 0 \\ A = 2 \end{array}\right.$$

et

$$\ddot{y}_1 + y_1 = \frac{A^3}{4} \sin 3\tau = 2 \sin 3\tau, \quad y_1(0) = \dot{y}_1(0) = 0$$

cette équation a pour solution

$$y_1(\tau) = \frac{1}{4}(3 \sin \tau - \sin 3\tau)$$

La troisième équation devient :

$$\ddot{y}_2 + y_2 = (4\omega_2 + \frac{1}{4}) \cos \tau - \frac{3}{2} \cos 3\tau + \frac{5}{4} \cos 5\tau$$

On élimine le terme séculaire en posant :

$$4\omega_2 + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \omega_2 = -\frac{1}{16}$$

On obtient :

$$\ddot{y}_2 + y_2 = -\frac{3}{2} \cos 3\tau + \frac{5}{4} \cos 5\tau, \quad y_2(0) = \dot{y}_2(0) = 0$$

On a

$$y_2 = C_1 \cos \tau + C_2 \sin \tau - \frac{5}{96} \cos 5\tau$$

D'où

$$y_2 = -\frac{13}{96}\cos\tau + \frac{1}{96}(18\cos 3\tau - 5\cos 5\tau)$$

L'équation (3.11) a une solution :

$$y(\tau) = 2\cos\tau + \frac{\varepsilon}{4}(3\sin\tau - \sin 3\tau) + \frac{\varepsilon^2}{96}(-13\cos\tau + 18\cos 3\tau - 5\cos 5\tau)$$

où :

$$\tau = \omega t, \quad \omega(\varepsilon) = 1 - \frac{\varepsilon^2}{16} + \cdots$$

Remarque 1 *:*

Cette méthode ne donne pas toutes les solutions du problème car nous avons supposé que chaque terme $y_n(t)$ était périodique ; la méthode de Lindstedt ne donne que les solutions périodiques.

Remarque 2 *:*

En général pour une valeur quelconque de A, il n'existe pas des solutions périodiques (pour d'autres équations pas pour Duffing)

3.2 Méthode des échelles de temps multiples

A la lumière des exemples précédents, on va construire la méthode des échelles multiples. Cette méthode rationalise l'approximation des Amplitudes Lentement Variables. Formellement, elle consiste à chercher une solution $y(t,\varepsilon)$ sous forme de développement asymptotique en échelles multiples $T_0, T_1, \cdots, T_n$ (considérées comme des variables indépendantes). Elle s'applique aux équations de la forme :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y + \varepsilon f(y, \frac{dy}{dt}) = 0 \tag{3.12}$$

On introduit les échelles de temps :

$$\begin{aligned} &T_0 = t = \varepsilon^0 t \\ &T_1 = \varepsilon^1 t \\ &T_2 = \varepsilon^2 t \\ &\cdots \\ &T_n = \varepsilon^n t \\ &T_{n+1} = \varepsilon^{n+1} t \\ &\cdots \end{aligned}$$

avec $T_{n+1} < T_n$
On cherche la solution $y(t,\varepsilon)$ sous la forme :

$$y = y_0(T) + \varepsilon y_1(T) + \varepsilon^2 y_2(T) + \cdots + \varepsilon^n y_n(T) + \cdots \tag{3.13}$$

Les opérations de dérivation s'écrivent :

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial T_0}\frac{\partial T_0}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial T_1}\frac{\partial T_1}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial T_2}\frac{\partial T_2}{\partial t} + \cdots$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2\frac{\partial}{\partial T_2} + \cdots$$

$$\Rightarrow D = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \cdots \tag{3.14}$$

Où $D = \frac{d}{dt}$, $D_n = \frac{\partial}{\partial T_n}$
On utilise (3.13) et (3.14), donc la dérivée première de y est :

$$\frac{dy}{dt} = D_0 y_0 + \varepsilon(D_0 y_1 + D_1 y_0) + \varepsilon^2(D_0 y_2 + D_1 y_1 + D_2 y_0) + \cdots \tag{3.15}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = D_0^2 y_0 + \varepsilon(D_0^2 y_1 + 2D_0 D_1 y_0) + \varepsilon^2(D_0^2 y_2 + 2D_0 D_1 y_1 + D_1^2 y_0 + 2D_0 D_2 y_0) + \cdots \tag{3.16}$$

Les conditions initiales :

$$\begin{cases} y(0) = A \\ \frac{dy(0)}{dt} = \end{cases}$$

devient, si on faire les calculs jusqu'à l'ordre ε^2 :

$$\begin{cases} y_0(0) = A \\ y_n(0) = 0, \quad n \geq 1 \\ \frac{\partial y_0(0)}{\partial T_0} = 0 \\ \frac{\partial y_1(0)}{\partial T_0} + \frac{\partial y_0(0)}{\partial T_1} = 0 \\ \frac{\partial y_2(0)}{\partial T_0} + \frac{\partial y_1(0)}{\partial T_1} + \frac{\partial y_0(0)}{\partial T_2} = 0 \end{cases} \tag{3.17}$$

Après, en substituant les équations (3.15) (3.16) dans l'équation (3.12), et regroupant les termes de même puissance de ε et on résoud les équations qui est trouvé. Mais ces équations peut-être contient des termes séculaires on impose alors leur élimination.

Finalement, on trouve la solution de la forme (3.13) de l'équation (3.12).

Exemple 7 *:*

Soit l'équation :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = -2\varepsilon\frac{dy}{dt} \tag{3.18}$$

Posons :

$$y(t) = y_0(t) + \varepsilon y_1(t) + \varepsilon^2 y_2(t) + \cdots + \varepsilon^n y_n(t) + \cdots$$

On obtient après substitutions :

Pour l'ordre zéro de ε : $\ddot{y}_0 + y_0 = 0$

Pour l'ordre un de ε : $\ddot{y}_1 + y_1 = -2\dot{y}_0$

Pour l'ordre deux de ε : $\ddot{y}_2 + y_2 = -2\dot{y}_1$

La première équation donne :

$$y_0 = A\cos(t+\phi)$$

où A et ϕ sont des constantes.

Une solution particulière de la 2^{eme} équation est :

$$y_1(t) = -At\cos(t+\phi)$$

Une solution particulière de la 3^{eme} équation est :

$$y_2(t) = \frac{1}{2}At^2\cos(t+\phi) + \frac{1}{2}At\sin(t+\phi)$$

d'où :

$$y(t) = A\cos(t+\phi) - \varepsilon At\cos(t+\phi) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 A[t^2\cos(t+\phi) + t\sin(t+\phi)] + \cdots$$

Pour approximer, il faut que $t, \varepsilon t, \varepsilon^2 t$ soient petits, plus clairement :

La solution exacte est :

$$y(t) = ae^{-\varepsilon t}\cos(\sqrt{1-\varepsilon^2}t + \phi)$$

On sait que :

$$f(\varepsilon) = f(0) + \varepsilon f'(0) + \frac{\varepsilon^2}{2!}f''(0) + \cdots$$

alors :

$$e^{-\varepsilon t} = 1 - \varepsilon t + \frac{\varepsilon^2 t^2}{2} - \cdots$$

et

$$\cos(\sqrt{1-\varepsilon^2}t + \phi) = \cos(t+\phi) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 t \sin(t+\phi) + \cdots$$

d'où :

$$y(t) = a\cos(t+\phi) - \varepsilon a t \cos(t+\phi) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 a[t^2\cos(t+\phi) + t\sin(t+\phi)] + \cdots$$

Quand on tronque $e^{-\varepsilon t}$, c'est εt qui est la variable importante et non t.
Quand on tronque $\cos(\sqrt{1-\varepsilon^2}t + \phi)$, c'est $\varepsilon^2 t$ qui est la variable importante et non t.

C'est pour cela que on définit les nouvelles variables :

$$\begin{aligned}
&T_0 = t = \varepsilon^0 t\\
&T_1 = \varepsilon^1 t\\
&T_2 = \varepsilon^2 t\\
&\cdots\\
&T_n = \varepsilon^n t\\
&T_{n+1} = \varepsilon^{n+1} t\\
&\cdots
\end{aligned}$$

On a $T_{n+1} < T_n$
Pour utiliser ces variables dans l'équation :

$$\ddot{y} + y = -2\varepsilon\dot{y}$$

on introduit :

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial T_0}\frac{\partial T_0}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial T_1}\frac{\partial T_1}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial T_2}\frac{\partial T_2}{\partial t} + \cdots$$

Alors

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial T_0} + \varepsilon\frac{\partial y}{\partial T_1} + \varepsilon^2\frac{\partial y}{\partial T_2} + \cdots$$

Ce implique que

$$\frac{dy}{dt} = (\frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2\frac{\partial}{\partial T_2} + \cdots)y$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2} + \cdots$$

$$\Rightarrow D = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \cdots$$

Où $D = \frac{d}{dt}, D_n = \frac{\partial}{\partial T_n}$
L'équation (3.18) s'écrit :

$$D^2 y + y = -2\varepsilon D y$$

Ce implique que :

$$(D^2 + 1) y = -2\varepsilon D y$$

Alors

$$[(D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \cdots)^2 + 1](y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \cdots) = -2\varepsilon (D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \cdots)(y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \cdots)$$

$$(D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \cdots)^2 + 1 = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \cdots + 1$$

En identifiant les coefficients d'une même puissance de ε, on trouve :

$$(D_0^2 + 1) y_0 = 0$$
$$(D_0^2 + 1) y_1 = -2 D_0 D_1 y_0 - 2 D_0 y_0$$

On a :

$$y_0 = A \cos(T_0 + \phi)$$

où

$$A = A(T_1, T_2, \cdots) \quad et \quad \phi = \phi(T_1, T_2, \cdots)$$

La deuxième équation s'écrit :

$$(D_0^2 + 1) y_1 = 2 D_1 [A \sin(T_0 + \phi)] + 2A \sin(T_0 + \phi)$$

Alors

$$(D_0^2 + 1) y_1 = 2(D_1 A + A) \sin(T_0 + \phi) + 2A(D_1 \phi) \cos(T_0 + \phi)$$

Pour avoir des solutions bornées, on doit supprimer les termes séculaires ;

La première équation donne :

$$\begin{cases} y_0 = A\cos(T_0+\phi) \\ A = A(T_1, T_2, \cdots), \quad \phi = \phi(T_1, T_2, \cdots) \end{cases}$$

La deuxième équation devient :

$$\begin{aligned}
(D_0^2+1)y_1 &= -2D_0D_1[A\cos(T_0+\phi)] - A^3\cos^3(T_0+\phi) \\
(D_0^2+1)y_1 &= 2D_1(A\sin(T_0+\phi)) - A^3\cos^3(T_0+\phi) \\
(D_0^2+1)y_1 &= 2[\dot{A}\sin(T_0+\phi) + A\dot{\phi}\cos(T_0+\phi)] - \frac{A^3}{4}(3\cos(T_0+\phi)+\cos(3(T_0+\phi)))
\end{aligned}$$

avec :

$$\dot{A} = D_1 A = \frac{\partial A}{\partial T_1}, \qquad \dot{\phi} = D_1\phi = \frac{\partial \phi}{\partial T_1}$$

$$(D_0^2+1)y_1 = 2\dot{A}\sin(T_0+\phi) + (2A\dot{\phi} - \frac{3A^3}{4})\cos(T_0+\phi) + N.S.T$$

N.S.T : non secular terms
Pour supprimer les termes séculaires, on pose :

$$\dot{A} = 0 \quad et \quad 2A\dot{\phi} - \frac{3A^3}{4} = 0$$

$$A = a(T_2, T_3, \cdots) = a$$

$$\Rightarrow 2a\dot{\phi} - \frac{3a^2}{4} = 0 \Rightarrow \dot{\phi} = \frac{3a^2}{8}$$

alors :

$$\phi = \frac{3a^2}{8}T_1 + const$$

La solution générale est :

$$y(t) = a\cos(t + \frac{3a^2}{8}\varepsilon t + const) + \cdots$$

La méthode des échelles de temps multiples donne n'importe quelle solution et non seulement les solutions périodiques.

3.3 Méthode de la moyenne

la méthode de la moyenne donne n'importe quelle solution et non seulement les solution périodiques. Cette méthode s'aplique aux équations de la forme :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y + \varepsilon f(y, \frac{dy}{dt}) = 0, \quad 0 < \varepsilon \ll 1 \tag{3.19}$$

pour $\varepsilon = 0$, la solution générale est :

$$y(t) = A \sin(\omega t + \phi) \tag{3.20}$$

où A et ϕ sont des constantes. La méthode de la moyenne consiste à poser :

$$\begin{cases} y(t) = A(t)\sin(\omega t + \phi(t)) \\ \dot{y}(t) = A(t)\omega\cos(\omega t + \phi(t)) \end{cases} \tag{3.21}$$

où $A(t)$ et $\phi(t)$ varient lentement avec le temps et

$$x = \dot{y}$$

d'où

$$\dot{x} = -\omega^2 y - \varepsilon f(y, x) \tag{3.22}$$

nous cherchons une solution sous la forme :

$$\begin{cases} y(t) = A(t)\sin(\omega t + \phi(t)) \\ x(t) = A(t)\omega\cos(\omega t + \phi(t)) \end{cases} \tag{3.23}$$

or

$$x = \dot{y}$$

d'où

$$A(t)\omega\cos(\omega t + \phi(t)) = \dot{A}(t)\sin(\omega t + \phi(t)) + A(t)(\omega + \dot{\phi}(t))\cos(\omega t + \phi(t))$$

ainsi

$$\dot{A}(t)\sin(\omega t + \phi(t)) + A(t)\dot{\phi}(t)\cos(\omega t + \phi(t)) = 0 \tag{3.24}$$

substituons (3.23) dans (3.22), on aura :

$$\dot{A}(t)\omega\cos(\omega t+\phi(t))-A(t)\omega(\omega+\dot{\phi}(t))\sin(\omega t+\phi(t)) = -\omega^2 A(t)\sin(\omega t+\phi(t))-\varepsilon f(y,x)$$

En résolvant l'équation précédente et l'équation (3.24), on obtient :

$$\begin{cases} \dot{A}(t) = \frac{-\varepsilon}{\omega}\cos(\omega t+\phi(t))f(A(t)\sin(\omega t+\phi(t)), A(t)\omega\cos(\omega t+\phi(t))) \\ \dot{\phi}(t) = \frac{\varepsilon}{A(t)\omega}\sin(\omega t+\phi(t))f(A(t)\sin(\omega t+\phi(t)), A(t)\omega\cos(\omega t+\phi(t))) \end{cases} \tag{3.25}$$

La méthode de la moyenne consiste à remplacer $\dot{A}(t)$ et $\dot{\phi}(t)$ dans (3.25) par leurs valeurs moyennes sur une période $\frac{2\pi}{\omega}$. $A(t)$ et $\phi(t)$ sont considérés comme des constantes en prenant la moyenne. Ce procédé connu comme méthode de la moyenne conduit à :

$$\begin{cases} \dot{A}(t) = \frac{-\varepsilon}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\cos(\omega t+\phi)f(A\sin(\omega t+\phi), A\omega\cos(\omega t+\phi))\,dt \\ \dot{\phi}(t) = \frac{\varepsilon}{2\pi A}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\sin(\omega t+\phi)f(A\sin(\omega t+\phi), A\omega\cos(\omega t+\phi))\,dt \end{cases}$$

posons $\theta = \omega t+\phi$, on a :

$$\begin{cases} \dot{A} = \frac{-\varepsilon}{2\pi\omega}\int_0^{2\pi}\cos\theta f(A\sin\theta, A\omega\cos\theta)\,d\theta \\ \dot{\phi} = \frac{\varepsilon}{2\pi A\omega}\int_0^{2\pi}\sin\theta f(A\sin\theta, A\omega\cos\theta)\,d\theta \end{cases} \tag{3.26}$$

Les équation exactes de (3.25) sont remplacées par les équations approximatives de (3.26). Une fois les intégrales trouvées, on aura à résoudre des équations différentielles du 1$^{\text{er}}$ ordre pour $A(t)$ et $\phi(t)$. On a les formules qui peuvent être trouvées par integration par partie

$$I_{m,n} = \int_0^{2\pi}\sin^m(y)\cos^n(y)\,dy$$

$$I_{m,n} = \frac{m-1}{m+n}I_{m-2,n} \tag{3.27}$$

$$I_{m,n} = \frac{n-1}{m+n}I_{m,n-2} \tag{3.28}$$

Les équations (3.27) et (3.28) sont utilisées jusqu'à ce qu'on arrive à :

$$I_{0,0} = 2\pi$$

Notons que :

$$I_{m,n} \neq 0$$

seulement pour m et n pairs.

Exemple 9 :

Appliquons la méthode de la moyenne à l'équation de Van der pol :

$$\ddot{y} + y - \varepsilon(1 - y^2)\dot{y} = 0$$

où

$$f(y, \dot{y}) = -(1 - y^2)\dot{y}$$

et

$$\omega = 1$$

Le système (3.26) devient :
telle que :

$$f(A\sin\theta, A\cos\theta) = -(1 - A^2\sin^2\theta)A\cos\theta$$

$$\begin{cases} \dot{A} = \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi} A(1 - A^2\sin^2\theta)\cos^2\theta\, d\theta \\ \dot{\phi} = \frac{-\varepsilon}{2\pi A}\int_0^{2\pi} A(1 - A^2\sin^2\theta)\cos\theta\sin\theta\, d\theta \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} \dot{A}(t) &= \frac{\varepsilon A}{2\pi}(I_{0,2} - A^2 I_{2,2}) \\ \dot{A}(t) &= \frac{\varepsilon A}{2\pi}(\frac{1}{2}2\pi - A^2\frac{1}{4}\frac{1}{2}2\pi) \\ \dot{A}(t) &= \frac{\varepsilon A}{8}(4 - A^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int \frac{dA}{dt} &= \int \frac{\varepsilon A}{8}(4 - A^2) \\ \Rightarrow \int \frac{dA}{A(2-A)(2+A)} &= \frac{\varepsilon}{8}\int dt \end{aligned}$$

Après les calculs, on obtient :

$$\ln\left[\frac{A^2}{C(4 - A^2)}\right] = \varepsilon t$$

Supposons que $A(0) = A_0$ ce implique que : $C = \frac{A_0^2}{4 - A_0^2}$.

$$\Rightarrow A^2(t) = \frac{\frac{4A_0^2}{4-A_0^2}e^{\varepsilon t}}{1+\left(\frac{A_0^2}{4-A_0^2}\right)e^{\varepsilon t}}$$

d'où :

$$A(t) = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{4}{A_0^2}-1\right)e^{\varepsilon t}+1}}$$

Notons que $A(t) \to 2$ quand $t \to \infty$ est indépendamment de A_0

$$\dot{\phi}(t) = \frac{-\varepsilon}{2\pi}(I_{1,1} - A^2 I_{3,1}) = 0$$

Ce implique que :

$$\phi(t) = \phi_0 = \phi(0) = const$$

La solution approximative est :

$$y(t) = A\sin(t+\phi)$$

c.à.d

$$y(t) = \frac{2\sin(t+\phi_0)}{\sqrt{\left(\frac{4}{A_0^2}-1\right)e^{\varepsilon t}+1}}$$

Si $A = 2$, on a la solution :

$$y(t) = 2\sin(t+\phi_0)$$

c'est une solution périodique, de période $T = 2\pi$.

Chapitre 4

Avantages et inconvénients de chaque méthodes

Dans les chapitres précédent on a considéré un nombre de différentes techniques pour résoudre des équations différetielles non linéaires sous la forme :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y + \varepsilon f(y, \frac{dy}{dt}) = 0, \quad 0 < \varepsilon \ll 1 \tag{4.1}$$

où ε est un petit paramètre, $0 < \varepsilon \ll 1$, et f est une fonction polynomial non linéaire. Le but de ce chapitre est de donner une petit résumé sur les avantages et les inconvénients de ces différentes techniques.

4.1 Méthode de perturbation régulière

Le principal avantage de l'application de la méthode de perturbation régulière pour obtenir des solutions approchée de l'équation (4.1) est que la technique est simple à appliquer. En outre, la méthode nous permet d'obtenir des expansions uniformément valables pour les solutions périodiques.

le calcul des approximations d'ordre supérieur peut être compliqué.

4.2 Méthode de Lindstedt

L'avantage principale de cette méthode qu'est une technique pour éviter les termes séculaires.

La méthode de Lindstedt a deux inconvénients majeurs : Cette méthode ne donne pas toutes les solutions du problème, elle ne donne que les solutions périodiques.

L'inconvénient majeur de cette méthode est que les calculs d'ordre supérieur sont long et compliqué.

4.3 Méthode des échelles de temps multiples

La méthode des échelles de temps multiples a deux avantages majeurs :

Cette méthode peut être appliquée à des systèmes qui ont des termes dissipatifs (forces dissipatives sont des forces de la nature tels que l'énergie est perdue à partir d'un système de quand le mouvement a lieu.), par conséquent, la dépendance temporelle de l'amplitude peut être déterminée.

Dans les problèmes où plusieurs différents physiquement significatives des échelles de temps se produisent naturellement, la méthode des échelles de temps multiples permet la dépendance de la solution sur ces différentes échelles de temps pour être facilement obtenu. Cela permet souvent d'interpréter la signification physique de la solution et dans les comparaisons avec les données expérimentales. Cette méthode donne des résultats proches de la réalité ; c'est la méthode préféré des physiciens, chimistes,...

L'inconvénient majeur de la méthode des échelles de temps multiples, c'est que, en général, même pour obtenir des résultats de premier ordre, on doit résoudre un certain nombre de l'équation aux dérivées partielles. Les détails algébriques peuvent devenir très difficile pour une équation qui comporte une fonction $f(y, \frac{dy}{dt})$ non linéaire qui est une fonction compliquée de ses arguments.

4.4 Méthode de la moyenne

La méthode de la moyenne présente trois avantages majeurs :

Le calcul en première approximation se réduit à l'intégration de deux intégrales définies pour les dérivés de l'amplitude et la phase. L'amplitude et la phase peuvent être obtenus, en général, en utilisant des techniques d'intégration élémentaires du calcul.

Cette Méthode peut-être appliquée à des systèmes qui sont assortis de modalités d'amortissement ou des forces dissipatives (forces dissipatives sont des forces de la nature tels que l'énergie est perdue à partir d'un système de quand le mouvement a lieu.) et ne peut donc donner la dépendance temporelle de l'amplitude.

Si les cycles limites (cycle limite est une solution périodique isolée) et points limites existent pour une équation différentielle non linéaire donné, la méthode nous permet de les déterminer. En outre, nous pouvons obtenir le comportement du système à mesure qu'elle s'approche de ces cycles limites et les points.

L'inconvénient majeur de cette méthode est que les calculs d'ordre supérieur sont longs et compliqués et, en général, la quantité d'effort nécessaire pour calculer des termes d'ordre supérieur ne se justifie pas par la petite quantité de renseignements supplémentaires obtenus.

Conclusion

Tout au long de ce travail nous avons étudié certaines techniques de résolution concernant l'équations :

$$L(y, \dot{y}, \ddot{y}) = \varepsilon f(y, \dot{y})$$

qui sont :

– la méthode de pertrubation régulière ;

– les méthodes singulières.

En parcourant ces méthodes, on aperçoit que la méthode de perturbation régulière nous donne une solution différente (une solution trés lointaine de la réalité).

Ce qui fait que les méthodes singulières sont beaucoup meilleures comparées à celle de la méthode régulière. En travaillant sur la méthode de Lindstedt, on obtient uniquement des solutions périodiques, ce qui rendent la méthode inutile une fois qu'on n'a pas de solution périodique.

Cependant la méthode de la moyenne et des échelles de temps multiples donnent toutes les solutions possibles.

Par conséquent, il est préférable de choisir la méthode de résolution avant de travailler sans recourir aux inconvénients éventuels. D'ailleurs chaque méthode donne une solution approximative est s'avère acceptable comparée au résultat exact.

Bibliographie

[1] SZE-BI-HSU, *Ordinary Differential Equation With Applications.* Frank Hwang. Zhong-ci Shi and U Rothblum.

[2] ALI H. NAYEF, *Perturbation Methods.* John Wiley and Sons (New York-1973), réédité dans la collection : Wiley Classics Library, (2000), ISBN 0-471-39917-5.

[3] ALI H. NAYEF, *Introduction to Perturbation Techniques.* John Wiley and Sons (New York-1981), ISBN 0-471-31013-1.

[4] COURS DE 1^{ERE} ANNÉE MAGISTER : *option Systèmes Dynamiques et Equations Différentielles.* (2000-2001).

[5] DONALD R.SMITH, *Singular Perturbation :* An Introduction with Applications, Cambridge University Press, (1985), ISBN 0-521-30042-8.

[6] D.W. JORDON AND P.SMITH, *Nonlinear Ordinary Differential Equation.*

[7] HINCH EJ, *Perturbation Method.* Cambridge Texts in Applied Mathematics, Cambridge University Press, (1991), ISBN 0-521-37897-4.

[8] HINCH EJ, M.W AND S.SMALE, *Differential Equation.*

[9] L.PERKO, *Differential Equation and Dynamical system.*