

M/S No. 047

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique

Université 8 Mai 1945 – Guelma

Faculté de Mathématiques et de l'Informatique et Sciences de
la Matière

Département de Mathématiques



Mémoire de Fin d'Etude
Master Académique en Mathématiques
Option : Analyse

THEME

Méthodes numériques pour l'équation de
Boltzmann linéaire

Présenté par :

Boudjehem Amina

Jury :

R. Mellale
A. Frioui

Session Juin 2012

Université 8 Mai 1945, Guelma

Mémoire de Master II

Méthodes numériques pour
l'équation de Boltzmann linéaire

Présenté par :

Boudjehem Amina

Sous la direction :

Dr HITTA Amara
Maître de Conférences -A-

juin 2012

Introduction

L'équation de Boltzmann linéaire (1872) est une équation intégro-différentielle de la théorie cinétique qui décrit, entre autres, l'évolution d'un gaz.

Elle est utilisée pour étudier le comportement hors équilibre d'une collection de particules à une composition uniforme et une température et une densité constantes, cette composition peut être en fonction de la position et du temps.

La première solution analytique complète a été obtenue dans le cas des interactions de type "sphères dures" par Ukai dans les années 1970, mais seulement pour des solutions proches de l'équilibre.

La plus grande avancée reste la théorie des solutions renormalisées de Ronald DiPerna et de la médaille Fields Pierre-Louis Lions qui fournit l'existence de solution, même loin de l'équilibre. Leur régularité et unicité reste un Problème ouvert très important.

Il est impossible de calculer explicitement les solutions des équations aux dérivées partielles d'où la nécessité de recourir au calcul numérique pour estimer ces solutions.

Les méthodes de résolution numérique permettent d'obtenir des valeurs numériques discrètes (en particulier en nombre fini) qui approchent, d'une manière à préciser, la solution exacte.

L'une de ces méthodes est celle **des différences finis**. Elle discrétise le Problème en représentant des fonctions par un nombre fini de valeurs. Notre but est d'utiliser cette méthode des différences à la recherche d'une solution approchée de l'équation de Boltzmann linéaire :

Nous commençons par considérer l'équation de transport dans le cas stationnaire sans collision puis avec collision.

Ainsi, nous allons décrire une méthode de différences finis en espace et en vitesse, appelée **méthode S_N** utilisée, plus généralement, pour résoudre des modèles de transport plus complets. Les points du maillage seront **équirépartis** en x , mais pas nécessairement en vitesse. On parlera, aussi, du schéma dit **diamant** qui n'est pas positif dans de nombreux cas, c'est à dire qu'il peut donner des valeurs négatives de la solution même si les sources sont positives, ce qui peut être gênant du point de vue physique. Pour remédier à cela on utilise un autre schéma dit **décentré amont**.

Le plan de ce mémoire est le suivant:

- ① Dans le **premier chapitre**, on donne la définition de l'équation de Boltzmann linéaire et traite le problème de Cauchy et d'autres aspects de résolution de cette équation dans le cas continu.
- ② Dans le **deuxième chapitre**, on traitera le côté numérique pour résoudre l'équation de Boltzmann à savoir : l'utilisation de la méthode des différences finis pour approcher la solution.
- ③ Dans le **troisième chapitre**, on énumère d'autres méthodes numériques pour résoudre l'équation de Boltzmann linéaire, à savoir : Méthode intégrale, Méthode de flux pair etc

Chapitre 1

Problème de Cauchy pour l'équation de Boltzmann

1.1 Définition et notations

L'équation de Boltzmann est donnée par la formule

$$(\partial_t + v \nabla_x)u(t, x, v) + \sigma(t, x, v)f(t, x, v) = Ku(t, x, v) + Q(t, x, v)$$

sachant que l'on a :

- ① $u \equiv u(t, x, v)$ est une fonction de distribution inconnue qu'on supposera continue sur $]0, T[\times \Omega \times \mathbb{R}^N$. Elle représente la densité des particules se trouvant à l'instant t à la position x et sont animées de la vitesse v .
- ② On notera $Ku(t, x, v) := \int_{\mathbb{R}^N} k(t, x, v, w)u(t, x, w)d\mu(w)$.
*- μ = mesure de Radon positive sur \mathbb{R}^N .
- $(v_w)_{w \in V} =$ famille de vitesses $\in \mathbb{R}$*
- ③ Le taux d'absorption $\sigma \equiv \sigma(t, x, v) \geq 0$ et le taux de transition $k \equiv k(t, x, v) \geq 0$ sont des fonctions données sous des conditions qui restent à définir.

- ④ La mesure de Radon $\mu \geq 0$ est définie sur \mathbb{R}^N .
- ⑤ La fonction $Q \equiv Q(t, x, v)$ est continue bornée sur $]0, T[\times \Omega \times \mathbb{R}^N$.

D'une manière pratique, on écrit cette équation sous la forme abrégée :

$$(\partial_t + v \nabla_x)u + \sigma u = Ku + Q.$$

Définition 1.1.1 La fonction u est dite **solution généralisée** de l'équation de Boltzmann linéaire si et seulement si, pour tout $(t, x, v) \in]0, T[\times \Omega \times \mathbb{R}^N$ la fonction

$$s \mapsto u(t + s, x + sv, v)$$

est de classe C^1 pour $x + sv \in \Omega$ et vérifie pour tout $s \in \mathbb{R}$:

$$\frac{d}{ds}u(t + s, x + sv, v) + \sigma(t + s, x + sv, v)u(t + s, x + sv, v) = (Ku + Q)(t + s, x + sv, v).$$

Ceci dit, On va étudier **le problème de Cauchy** dans le cadre des solutions généralisées.

1.2 Existence et unicité pour le problème de Cauchy

Soit X un espace topologique, on notera par $C_b(X)$ l'espace des fonctions continues et bornées sur X et à valeurs dans \mathbb{R} .

Commençons par un résultat d'existence et unicité de la solution généralisée du problème de Cauchy pour l'équation de Boltzmann linéaire posée dans l'espace des phases $X = \mathbb{R}_x^N \times \mathbb{R}_v^N$.

Théorème 1.2.1 Soient une donnée initiale $u_0 \equiv u_0(x, v) \in C_b(X)$ et un terme source $Q \equiv Q(t, x, v) \in C_b([0, T] \times X)$.

Supposons que $0 \leq \sigma \in C_b([0, T] \times X)$ et $0 \leq k \in C_b([0, T] \times X \times \mathbb{R}_w^N)$ tels que

$$\sup_{(t,x,v) \in [0,T] \times X} \int_{\mathbb{R}^N} k(t, x, v, w) d\mu < \infty,$$

alors le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} \partial_t u + v \nabla_x u + \sigma u = Ku + Q, t \in]0, T[, x, v \in \mathbb{R}^N \\ u|_{t=0} = u_0. \end{cases}$$

admet une unique solution généralisée $u \in C_b([0, T] \times X)$.

Remarque. En réalité, la méthode des caractéristiques conduit aux deux formulations intégrales suivantes pour l'équation de Boltzmann linéaire :

① **Première formulation intégrale** : Pour tout $(t, x, v) \in [0, T] \times X$,

$$\begin{aligned} u(t, x, v) &= \exp\left(-\int_0^t \sigma(s, x + (s-t)v, v) ds\right) u_0(x - tv, v) \\ &+ \int_0^t (Ku + Q)(s, x + (s-t)v, v) \exp\left(-\int_s^t \sigma(\tau, x + (\tau-t)v, v) d\tau\right) ds \end{aligned}$$

② **Deuxième formulation intégrale** : Pour tout $(t, x, v) \in [0, T] \times X$,

$$u(t, x, v) = u_0(x - tv, v) + \int_0^t (Ku + Q - \sigma u)(s, x + (s-t)v, v) ds$$

Pour obtenir la première formulation, on applique la méthode des caractéristiques à l'équation de transport $(\partial_t + v \cdot \nabla_x)u + \sigma u = S$ avec $S = Ku + Q$. Autrement dit, on écrit que

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(u(t+s, x+sv, v) \exp\left(\int_0^s \sigma(t+\tau, x+\tau v, v) d\tau\right) \right) \\ = (Ku + Q)(t+s, x+sv, v) \exp\left(\int_0^s \sigma(t+\tau, x+\tau v, v) d\tau\right) \end{aligned}$$

Superviseur : Mr Hitta Amara

Pour obtenir la seconde formulation, on applique cette fois la méthode des caractéristiques à l'équation de transport $(\partial_t + v\nabla_x)u = S$ avec $S = Ku - \sigma u + Q$. C'est-à-dire que l'on écrit que

$$\frac{d}{ds}u(t+s, x+sv, v) = (Ku - \sigma u + Q)(t+s, x+sv, v). \quad \blacksquare$$

La **démonstration du théorème** ci-dessus est basée sur un argument de **point fixe** pour la première formulation intégrale. Autrement dit, on cherche une fonction $u \in C_b([0, T] \times X)$ telle que $u = U[u_0, Q] + \tau u$ en posant

$$\tau g(t, x, v) := \int_0^t Kg(s, x + (s-t)v, v) \exp\left(-\int_s^t \sigma(\tau, x + (\tau-t)v, v) d\tau\right) ds$$

et

$$U[u_0, Q](t, x, v) = u_0 \exp\left(-\int_0^t \sigma(\tau, x + (\tau-t)v, v) d\tau\right) \int_0^t Q(s, x + (s-t)v, v) \exp\left(-\int_s^t \sigma(\tau, x + (\tau-t)v, v) d\tau\right) ds$$

Démonstration: Nous allons chercher la solution généralisée u sous la forme d'une série

$$u := \sum_{n \geq 0} \tau^n U[u_0, Q].$$

Commençons par vérifier la convergence de cette série. Les hypothèses du théorème, notamment le fait que $\sigma \geq 0$, impliquent que

$$\|U[u_0, Q]\|_{L^\infty([0, T] \times X)} \leq \|u_0\|_{L^\infty(X)} + T\|Q\|_{L^\infty([0, T] \times X)}$$

Notons

$$M = \sup_{(t, x, v) \in [0, T] \times X} \int_{\mathbb{R}^N} k(t, x, v, w) d\mu(w) < +\infty.$$

Alors, pour tout $g \in L^\infty([0, T] \times X)$, on a p.p. en $(t, x, v) \in [0, T] \times X$:

$$\begin{aligned} |\tau^n g(t, x, v)| &\leq \int_0^t |K\tau^{n-1}g|(s, x + (s-t)v, v) ds \\ &\leq M \int_0^t \|\tau^{n-1}g(s, \cdot, \cdot)\|_{L^\infty(X)} ds \end{aligned}$$

Superviseur : Mr Hitta Amara

de sorte que, p.p.en $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} \|\tau^n g(t, \cdot, \cdot)\|_{L^\infty(X)} &\leq M \int_0^t \|\tau^{n-1} g(t_1, \cdot, \cdot)\|_{L^\infty(X)} dt_1 \\ &\leq M^n \int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{n-1}} \|g(t_n, \cdot, \cdot)\|_{L^\infty(X)} dt_n \dots dt_1 \\ &\leq \frac{(M)^n}{n!} \|g\|_{L^\infty(X)}. \end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout $n \geq 1$, l'application linéaire τ^n est continue de l'espace de Banach $X_T := L^\infty([0, T] \times X)$ dans lui-même, et sa norme vérifie, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\|\tau^n\|_{L(X_T)} \leq \frac{(MT)^n}{n!}.$$

En particulier, d'après ce qui précède

$$\begin{aligned} \|\tau^n U[u_0, Q]\|_{X_T} &\leq \frac{(MT)^n}{n!} \|U[u_0, Q]\|_{X_T} \\ &\leq \frac{(MT)^n}{n!} (\|u_0\|_{L^\infty(X)} + T\|Q\|_{X_T}) \end{aligned}$$

de sorte que la série $\sum_{n \geq 0} \tau^n U[u_0, Q]$ converge normalement dans X_T . De plus, on vérifie (par exemple en appliquant le théorème de la convergence dominée) que chacun des termes $\tau^n U[u_0, Q]$, $n \geq 0$, est continu sur $[0, T] \times X$. Donc la série $u = \sum_{n \geq 0} \tau^n U[u_0, Q]$ converge uniformément sur $[0, T] \times X$, et donc sa somme est continue comme limite uniforme d'une suite de fonctions continues. Autrement dit

$$u \in X_T \cap C([0, T] \times X) = C_b([0, T] \times X)$$

Evidemment, comme l'application τ est linéaire et continue sur X_T , on a

$$\begin{aligned} u &= U[u_0, Q] + \sum_{n \geq 1} \tau^n U[u_0, Q] \\ &= U[u_0, Q] + \tau \left(\sum_{n \geq 0} \tau^n U[u_0, Q] \right) \\ &= U[u_0, Q] + \tau u \end{aligned}$$

ce qui montre que la fonction u définie par la série ci-dessus vérifie bien la 1ère formulation intégrale de l'équation de Boltzmann linéaire sur $[0, T] \times X$. En particulier,

posons $S = Ku + Q \in C_b([0, T] \times X)$. On vient de montrer que

$$u(t, x, v) = \exp\left(-\int_0^t \sigma(s, x + (s-t)v, v) ds\right) u_0(x - tv, v) + \int_0^t S(s, x + (s-t)v, v) \exp\left(\int_s^t \sigma(\tau, x + (\tau-t)v, v) d\tau\right) ds$$

ce qui, d'après le théorème (1.2.1), équivaut à dire que, pour tout $v \in \mathbb{R}^N$, la fonction $(t, x) \mapsto u(t, x, v)$ est la solution généralisée du problème de Cauchy

$$\begin{cases} (\partial_t + v \nabla_x) u(\cdot, \cdot, v) + \sigma(\cdot, \cdot, v) u(\cdot, \cdot, v) = S(\cdot, \cdot, v), \\ u(\cdot, \cdot, v)|_{t=0} = u_0(\cdot, v). \end{cases}$$

Donc la fonction u définie par la série ci-dessus est bien solution généralisée de l'équation de Boltzmann linéaire. Montrons que c'est la seule. S'il existait deux solutions généralisées u_1 et u_2 du problème de Cauchy ci-dessus pour l'équation de Boltzmann linéaire, l'on a

$$\begin{cases} u_1 = U[u_0, Q] + \tau u_1, \\ u_2 = U[u_0, Q] + \tau u_2, \end{cases}$$

de sorte que, par linéarité de l'application τ , l'on aurait $(u_2 - u_1) = \tau(u_2 - u_1)$. On conclut alors que $u_1 = u_2$ grâce au lemme ci-dessous. ■

Lemme 1.2.1 *Avec les mêmes hypothèses et notations que dans le théorème ci-dessus, l'unique élément $g \in X_T$ vérifiant $g = \tau g$ est $g = 0$*

Démonstration : Si $g \in X_T$ vérifie $g = \tau g$ alors $g = \tau g = \tau(\tau g) = \tau^n g$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or, on a établi dans la démonstration du théorème que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|\tau\|_{L(X_T)}^n \leq \frac{(MT)^n}{n!}.$$

Comme $\frac{(MT)^n}{n!} \rightarrow 0$ pour tout $T \geq 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$, on conclut que

$$\|g\|_{X_T} \leq \|\tau^n\|_{L(X_T)} \|g\|_{X_T} \leq \frac{(MT)^n}{n!} \|g\|_{X_T} \rightarrow 0$$

lorsque $n \rightarrow +\infty$, d'où le résultat. ■

1.3 Estimation L^∞ pour le problème de Cauchy

il est important de savoir estimer la solution généralisée d'un problème de Cauchy pour l'équation de Boltzmann linéaire à partir de bornes sur sa donnée initiale et sur le terme source. En réalité, il est encore plus important de disposer de ces informations dans le cas de l'équation de Boltzmann linéaire.

Proposition 1.3.1 Soient une donnée initiale $f_0 \equiv f_0(x, v) \in C_b(X)$ et un terme source $Q \equiv Q(t, x, v) \in C_b([0, T] \times X)$. Supposons que $0 \leq a \in C_b([0, T] \times \mathbb{R}^N_x \times \mathbb{R}^N_v)$ et $0 \leq k \in C_b([0, T] \times \mathbb{R}^N_x \times \mathbb{R}^N_v \times \mathbb{R}^N_w)$, et que de plus

$$\sup_{(t,x,v) \in [0,T] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} k(t, x, v, w) d\mu(w) < +\infty$$

Si on a

$$f_0 \geq 0 \text{ sur } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \text{ et } Q \geq 0 \text{ sur } [0, T] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$$

la solution généralisée $f \in C_b([0, T] \times X)$ du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f + af = Kf + Q, t \in]0, T[, x, v \in \mathbb{R}^N, \\ f|_{t=0} = f_0, \end{cases}$$

vérifie

$$f \geq 0 \text{ sur } [0, T] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$$

$$\begin{cases} \left[v \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma(x)u \right] (x, v) = f(x, v) & \text{pour } (x, v) \in] -\ell, +\ell[\times] -1, +1[\\ u(-\ell, v) = 0 & \text{pour } v > 0 \\ u(+\ell, v) = 0 & \text{pour } v < 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

où

- $\sigma(x) \geq 0$ est la section efficace d'absorption.
- $f(x, v)$ est le terme source.
- $2\ell > 0$ est la largeur du domaine géométrique.
- Les conditions aux limites sont de type Dirichlet ou vide (pas de particules rentrantes).

Remarque. La méthode des caractéristiques nous fournit la solution exacte de ce Problème. ■

Néanmoins, nous allons décrire une méthode de différences finis en espace et en vitesse, appelée **méthode S_N** utilisée, plus généralement, pour résoudre des modèles de transport plus complets.

Les points du maillage seront **équirépartis** en x , mais pas nécessairement en vitesse. Pour cela, considérons une famille finie (v_k) de vitesses non nulles discrétisant l'intervalle $[-1, +1]$.

Pour $j \in \{0, 1, \dots, N\}$, posons

$$x_{j+\frac{1}{2}} = -\ell + j\Delta x \quad \text{et} \quad \Delta x = \frac{2\ell}{N}. \quad (2.2)$$

Le schéma dit **diamant**, utilise les points milieux définis par

$$x_j = -\ell + \left(j - \frac{1}{2} \right) \Delta x \quad \text{pour } j \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

Pour tout indice de vitesse k , on note u_j^k une approximation de $u(x_j, v_k)$ où $j \in \{1, \dots, N\}$.

Ainsi, le **schéma diamant** est donné par

$$v_k \frac{u_{j+1/2}^k - u_{j-1/2}^k}{\Delta x} + \sigma_j u_j^k = f_j^k \quad (2.3)$$

et la **formule "diamant"** :

$$u_j^k = \frac{u_{j+1/2}^k - u_{j-1/2}^k}{2}. \quad (2.4)$$

Les σ_j et f_j^k seront, respectivement, les approximations de $\sigma(x)$ et $f(x_j, v_k)$.

La résolution de (2.1) est totalement explicite : En effet, pour $v_k > 0$ on résout (2.1) selon les valeurs de j croissantes en partant de la condition aux limites

$$u_{1/2}^k = 0 \text{ pour } v_k > 0$$

et en écrivant

$$u_{j+1/2}^k = \frac{(2v_k - \sigma_j \Delta x) u_{j-1/2}^k + 2\Delta x f_j^k}{2v_k + \sigma_j \Delta x} \text{ pour } j \geq 1 \quad (2.5)$$

tandis que pour $v_k < 0$ on résout (2.1) selon les valeurs de j décroissantes en partant de la condition aux limites

$$u_{N+1/2}^k = 0 \text{ pour } v_k < 0$$

et en écrivant

$$u_{j-1/2}^k = \frac{(-2v_k - \sigma_j \Delta x) u_{j+1/2}^k + 2\Delta x f_j^k}{-2v_k + \sigma_j \Delta x} \text{ pour } j \leq N. \quad (2.6)$$

Ceci met en évidence la supposition que la vitesse v est non nulle qui ne permet pas de résoudre (2.1) par cet algorithme de marche en espace.

Supposons désormais, pour simplifier, que l'absorption $\sigma(x)$ est constante, c'est à dire que $\sigma_j \equiv \sigma \geq 0$ pour tout indice j . Pour $v_k > 0$, on en déduit de (2.5)-(2.6) les formules exactes de la solution discrète :

$$u_{j+1/2}^k = \frac{2\Delta x}{2v_k + \sigma\Delta x} \sum_{i=1}^j (A_k)^{j-i} f_i^k \text{ avec } A_k = \frac{2v_k - \sigma\Delta x}{2v_k + \sigma\Delta x}$$

et pour $v_k < 0$:

$$u_{j-1/2}^k = \frac{2\Delta x}{-2v_k + \sigma\Delta x} \sum_{i=1}^j (A_k)^{i-j} f_i^k \text{ avec } A_k = \frac{-2v_k - \sigma\Delta x}{-2v_k + \sigma\Delta x}$$

Lemme 2.1.1 *Le schéma diamant (2.3) est consistant et précis d'ordre 2 en espace. De plus il est stable au sens L^∞ , c'est-à-dire que, pour tout $j \in \{0, 1, \dots, N\}$, on a :*

$$|u_{j+1/2}^k| \leq \frac{2\ell}{|v_k|} \max_{x \in (-\ell, +\ell)} |f(x, v_k)|.$$

Démonstration : Par un développement de Taylor en x autour du point x_j il est évident que le schéma diamant est précis à l'ordre 2. Par ailleurs, on vérifie que $|A_k| \leq 1$ pour tout k , puisque $\sigma \geq 0$. Donc :

$$|u_{j+1/2}^k| \leq \frac{\Delta x}{|v_k|} N \max_{x \in (-\ell, +\ell)} |f(x, v_k)|$$

d'où le résultat de stabilité. ■

Lemme 2.1.2 *Le schéma diamant (2.3) vérifie le principe du maximum discret sous la condition*

$$\Delta x \leq \frac{2 \min_k |v_k|}{\sigma}$$

Démonstration : Il faut vérifier que, si $f_j^k \geq 0$ pour tout j , alors la solution discrète vérifie aussi $u_{j+1/2}^k \geq 0$ pour tout j . C'est vrai si $A_k \geq 0$ ce qui correspond à la condition annoncée lorsque k varie. ■

Le schéma diamant n'est donc pas positif dans de nombreux cas, c'est à dire qu'il peut donner des valeurs négatives de la solution même si les sources sont positives, ce qui peut être gênant du point de vue physique.

Pour remédier à cela on utilise un autre schéma dit **décentré amont** :

$$\begin{cases} v_k \frac{u_j^k - u_{j-1}^k}{\Delta x} + \sigma_j u_j^k = f_j^k \text{ pour } v > 0 \\ v_k \frac{u_{j+1}^k - u_j^k}{\Delta x} + \sigma_j u_j^k = f_j^k \text{ pour } v < 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

Dans ce cas, il vaut mieux revenir à l'ancienne définition des points x_j qui permet de décrire simplement la condition aux limites d'entrée

$$\begin{cases} u_0^k = 0 & \text{pour } v_k > 0 \\ u_{N+1}^k = 0 & \text{pour } v_k < 0. \end{cases}$$

Encore une fois on résout (2.7) pour les j croissants lorsque $v_k > 0$ et pour les j décroissants lorsque $v_k < 0$.

Lemme 2.1.3 *Le schéma décentré amont (2.7) vérifie le principe du maximum discret (sans condition sur les pas de discrétisation). Par ailleurs, il est consistant et précis à l'ordre 1 seulement.*

Démonstration : On réécrit le schéma sous la forme

$$u_j^k = \frac{v_k u_{j-1}^k + \Delta x f_j^k}{v_k + \sigma_j} \text{ pour } v_k > 0$$

et

$$u_j^k = \frac{-v_k u_{j+1}^k + \Delta x f_j^k}{-v_k + \sigma_j} \text{ pour } v_k < 0.$$

On vérifie par récurrence, que $f_j^k \geq 0$ implique $v_j^k \geq 0$ pour tout j . Par un développement de Taylor en x , le schéma décentré amont est précis à l'ordre 1 mais pas plus. ■

Par ailleurs le schéma centré, qui est instable pour l'équation de transport, est définis par :

$$v_k \frac{u_{j+1}^k - u_{j-1}^k}{2\Delta x} + \sigma_j u_j^k = f_j^k. \quad (2.8)$$

2.2 Formule d'intégration numérique

Cette section est consacrée au choix de la famille de vitesse discrètes (v_k) qui doivent appartenir à l'intervalle $[-1, +1]$ et être non nulles.

Lorsqu'on doit discrétiser des opérateurs de collision en transport il est nécessaire d'évaluer des intégrales par rapport à la vitesse v . Pour cela on introduit des poids $w_k \in \mathbb{R}$ et, pour toute fonction f , on approche son intégrale par une somme de Riemann

$$\int_{-1}^{+1} f(v) dv \approx \sum_k w_k f(v_k).$$

Par conséquent, la motivation principale du choix des vitesse discrètes (v_k) est la précision de cette formule d'intégration numérique ou quadratique.

Pour des raisons de symétrie, on se restreint à des distributions symétriques par rapport à l'origine, c'est à dire que les vitesses sont impaires et les poids pairs :

$$v_{-k} = -v_k, \quad w_{-k} = w_k \quad \text{pour tout } k.$$

On note $2K$ le nombre total de vitesses ordonnées ainsi

$$-1 \leq v_{-K} < v_{-K+1} < \dots < v_{-1} < 0 < v_1 < \dots < v_{K-1} < v_K \leq +1$$

Pour des raisons de positivité il est aussi souhaitable d'avoir des poids positifs $w_k \geq 0$.

vitesse conduit à des artefacts numériques connus sous le nom d'**effets de raie**. Certaines directions sont privilégiées, ce qui peut conduire à des solutions non monotones en espace.

Remarque : Pour éviter la singularité créée par la vitesse nulle dans la résolution de l'équation du transport on choisit la formule dite **double quadrature de Gauss**. L'idée est prendre sur chacun des intervalles $[-1, 0]$ et $[0, +1]$ une formule de quadrature de Gauss à K points et d'ordre $2K + 1$.

Remarque : Lorsque l'on définit la formule de quadrature (2.9) avec les vitesses discrètes v_k , qui sont les racines du polynôme de Legendre P_{2K} , et avec les poids w_k donnés par (2.14), la méthode des ordonnées discrètes, ou **méthode S_N** , est équivalente à la **méthode P_N** , ou méthode des polynômes de Legendre. L'idée de cette dernière est, à partir de l'équation de Boltzmann (2.1), de ne pas discrétiser en vitesse, mais plutôt d'approcher l'inconnue $u(x, v)$ dans la base des polynômes de Legendre

$$u(x, v) \approx \sum_{k=0}^{2K} (2k+1) \phi_k(x) P_k(v).$$

On utilise alors la propriété d'orthogonalité des polynômes P_k , ainsi que la relation (2.12) pour montrer que (2.1) peut être approché par un système d'équations différentielles ordinaires

$$\frac{k}{2k+1} \frac{d\phi_{k-1}}{dx} + \frac{k+1}{2k+1} \frac{d\phi_{k+1}}{dx} + \sigma(x) \phi_k = f_k(x), 0 \leq k \leq 2K$$

avec $f_k(x) = 1/2 \int_{-1}^{+1} f(x, v) P_k(v) dv$ et, par convention, $\phi_{2K+1} \equiv 0$.

Il n'y a plus alors qu'à discrétiser par différences finies ces équations différentielles ordinaires. ■

L'intérêt de la méthode P_N est que les noyaux de collision s'écrivent aussi très simplement dans la base des polynômes de Legendre. Les deux méthodes S_N et P_N sont équivalentes dans le cas uni-dimensionnel (voir [3]).

2.3 Le cas stationnaire avec collision

On considère maintenant l'équation de Boltzmann linéaire stationnaire dans les mêmes conditions que la section précédente mais en tenant compte désormais des collisions :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[v \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma(x)u \right] (x, v) = \frac{\sigma^*(x)}{2} \int_{-1}^{+1} u(x, v') dv' + f(x, v) \\ \text{pour } (x, v) \in (-\ell, +\ell) \times (-1, +1) \\ u(-\ell, v) = 0 \quad \text{pour } v > 0 \\ u(+\ell, v) = 0 \quad \text{pour } v < 0. \end{array} \right. \quad (2.15)$$

Pour que le Problème aux limites (2.15) soit bien posé, nous faisons l'hypothèse que le milieu est sous-critique, c'est-à-dire qu'il existe une constante $\sigma_0 > 0$ telle que

$$0 < \sigma_0 \leq \sigma(x) - \sigma^*(x) \text{ pour } x \in (-\ell, +\ell). \quad (2.16)$$

Nous décrivons la **méthode S_N des ordonnées discrètes** dans ce contexte.

Le maillage en espace est toujours défini par les points $x_{j+1/2}$ définis dans (2.2). Choisissons une des discrétisations symétriques en vitesse décrite par la **Formule d'intégration numérique**, (v_k) où l'indice $k \in [\{K, \dots, -1\} \cup \{1, \dots, K\}]^*$.

Les poids w_k sont aussi symétriques et positifs et la formule de quadrature étant (2.9).

Dans ce cas le **schéma diamant** est donné, pour $1 \leq j \leq N$, par

$$\left\{ \begin{array}{l} v_k \frac{u_{j+1/2}^k - u_{j-1/2}^k}{\Delta x} + \sigma_j u_j^k = \sigma^* \bar{u}_j + f_j^k \\ u_j^k = \frac{u_{j+1/2}^k + u_{j-1/2}^k}{2} \end{array} \right. \quad (2.17)$$

Où la deuxième ligne est la relation diamant (2.4) et \bar{u}_j est la moyenne angulaire définie par :

$$\bar{u}_j = \frac{1}{2} \sum_{k=-K, k \neq 0}^K w_k u_j^k. \quad (2.18)$$

Comme d'habitude σ_j, σ_j^* et f_j^k sont des approximations de $\sigma(x_j), \sigma^*(x_j)$ et $f(x_j, v_k)$ respectivement.

Les conditions aux limites de flux nul entrant sont

$$u_{1/2}^k = 0 \text{ pour } v > 0, \text{ et } u_{N+1/2}^k = 0 \text{ pour } v < 0$$

Comme pour le schéma sans collision (2.3)-(2.4) de la section précédente, la précision de (2.17)-(2.18) est d'ordre 2 en espace.

Lemme 2.3.1 La solution $u(x, v)$ de l'équation de transport (2.15) vérifie

$$\int_{-\ell}^{+\ell} \int_{-1}^{+1} |u(x, v)|^2 dx dv \leq \frac{1}{\sigma_0^2} \int_{-\ell}^{+\ell} \int_{-1}^{+1} |f(x, v)|^2 dx dv \quad (2.19)$$

Démonstration: On multiplie l'équation (2.15) par u et on intègre par parties. Le terme de transport devient

$$\int_{-\ell}^{+\ell} \int_{-1}^{+1} \sigma u^2 dx dv \leq \frac{1}{2} \int_{-\ell}^{+\ell} \sigma^* \left(\int_{-1}^{+1} u dv \right)^2 dx + \int_{-\ell}^{+\ell} \int_{-1}^{+1} f u dx dv$$

Or, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\left(\int_{-1}^{+1} u dv \right)^2 \leq 2 \int_{-1}^{+1} u^2 dx dv.$$

On en déduit

$$\sigma_0 \int_{-\ell}^{+\ell} \int_{-1}^{+1} |u(x, v)|^2 dx dv \leq \int_{-\ell}^{+\ell} \int_{-1}^{+1} (\sigma - \sigma^*) u^2 dx dv \leq \int_{-\ell}^{+\ell} \int_{-1}^{+1} f u dx dv$$

Une nouvelle application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz permet de conclure. ■

On adapte l'argument de la preuve du dernier lemme pour obtenir le résultat suivant de stabilité.

Lemme 2.3.2 Le schéma diamant (2.17)-(2.18) est inconditionnellement stable L^2 au sens où sa solution discrète u_j^k vérifie

$$\|(u_j^k)\| \leq \frac{1}{\sigma_0} \|(f_j^k)\| \quad (2.20)$$

Superviseur : Mr Hitta Amara

$$\|(u_j^k)\|^2 = \sum_{j=1}^N \Delta x \sum_{k=-K, k \neq 0}^K w_k |u_j^k|^2 \quad (2.21)$$

Démonstration: On multiplie (2.17) par

$$\Delta x w_k (u_{j+1/2}^k + u_{j-1/2}^k) = 2 \Delta x w_k u_j^k$$

et on somme sur j et k . Le terme de transport devient

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \sum_{k=-K, k \neq 0}^K w_k v_k \left((u_{j+1/2}^k)^2 - (u_{j-1/2}^k)^2 \right) \\ &= \sum_{k=-K, k \neq 0}^K w_k v_k (u_{N+1/2}^k)^2 - \sum_{k=-K, k \neq 0}^K w_k v_k (u_{1/2}^k)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

à cause des conditions aux limites imposées. Par conséquent, le reste de (2.17) donne

$$2 \sum_{j=1}^N \sum_{k=-K, k \neq 0}^K \Delta x \sigma_j w_k (u_j^k)^2 \leq 4 \sum_{j=1}^N \Delta x \sigma_j^* (\bar{u}_j)^2 + 2 \sum_{j=1}^N \sum_{k=-K, k \neq 0}^K \Delta x w_k u_j^k f_j^k$$

Or, par Cauchy-Schwarz et grâce à l'hypothèse de sous-criticité (2.16) :

$$\sigma_0 \sum_{j=1}^N \sum_{k=-K, k \neq 0}^K \Delta x w_k (u_j^k)^2 \leq \sum_{j=1}^N \sum_{k=-K, k \neq 0}^K \Delta x w_k u_j^k f_j^k$$

Une nouvelle application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz permet de conclure. ■

Nous revenons maintenant à la définition du schéma diamant et expliquons comment on peut calculer sa solution.

Solution discrète du schéma diamant :

Résoudre simultanément toutes les équations du schéma (2.17)-(2.18) revient à résoudre un grand système linéaire pour le vecteur inconnu ayant $2KN$ composantes $(u_{j+1/2}^k)$. Cela requiert beaucoup de place mémoire surtout en dimension 2 et 3.

Mais, on préfère utiliser une méthode itérative très simple, connue sous le nom **d'itération sur les sources**. Son principe est de supposer connu le membre de

droite de (2.17) (y compris la moyenne angulaire), de résoudre l'équation de transport sans collision par un schéma de la Section du cas stationnaire sans collision, de mettre à jour le membre de droite de (2.17), puis d'itérer ce procédé jusqu'à sa convergence.

Plus précisément, on note $n \geq 0$ le numéro d'itération. On initialise l'algorithme (dit d'itération sur les sources) en posant, pour $n = 0$

$$\bar{u}_j^0 = 0$$

puis à l'itération $n \geq 1$ on résout

$$v_k \frac{u_{j+1/2}^{k,n} - u_{j-1/2}^{k,n}}{\Delta x} + \sigma_j \frac{u_{j+1/2}^{k,n} + u_{j-1/2}^{k,n}}{2} = \sigma_j^* \bar{u}_j^{n-1} + f_j^k \quad (2.22)$$

et on met à jour la moyenne angulaire

$$\bar{u}_j^n = \frac{1}{2} \sum_{k=-K, k \neq 0}^K w_k \frac{u_{j+1/2}^{k,n} - u_{j-1/2}^{k,n}}{2}. \quad (2.23)$$

La résolution de (2.22) est identique à celle de (2.3)-(2.4) dans la section précédente et est donc très facile par simple remontée des caractéristiques.

L'intérêt de cet algorithme est qu'il ne nécessite aucun stockage de matrice ni résolution de système linéaire :

Lemme 2.3.3 *L'algorithme d'itération sur les sources (2.22)-(2.23) converge, lorsque n tend vers l'infini, vers la solution discrète du schéma (2.17)-(2.18).*

Démonstration : Afin d'étudier sa convergence lorsque n tend vers $+\infty$ nous réécrivons (2.22)-(2.23) sous une forme matricielle plus compacte. On note :

- U^n le vecteur de composantes $(u_{j+1/2}^{k,n})$, F le vecteur de composantes (f_j^k) .
- T la matrice de l'opérateur de transport discrétisé dans la membre de gauche de (2.22).
- K la matrice de l'opérateur de collision discrétisé défini par (2.23) que multiplie le coefficient σ^* .

Avec ces notations U^n est la solution de

$$TU^n = KU^{n-1} + F \quad (2.24)$$

La suite U^n converge, c'est à dire que la méthode itérative converge (pour tout second membre F), si et seulement si le rayon spectral de $T^{-1}K$ est strictement plus petit que 1 c'est-à-dire $\rho(T^{-1}K) < 1$. Comme

$$\rho(T^{-1}K) < 1 \leq \|T^{-1}K\| \leq \|T^{-1}\| \|K\|,$$

il suffit de montrer que $\|T^{-1}\| \|K\| < 1$, pour cela on s'inspire de la démonstration du Lemme(2.3.2).

Pour un second membre G on appelle U la solution de

$$TU = G \quad (2.25)$$

On multiplie (2.25) par U et on somme sur toutes les composantes, ce qui est équivalent à multiplier le terme de transport de (2.17) par $\Delta x w_k (u_{j+1/2}^k + u_{j-1/2}^k)$ et à sommer sur j et k , calcul que nous avons déjà fait dans la démonstration

$$\|U\| = \left(\sum_{j=1}^N \Delta x \sum_{k=-K, k \neq 0} w_k |u_j^k|^2 \right)^{1/2}.$$

On a montrer que

$$\sigma \|U\|^2 \leq G \cdot U \leq \|G\| \|U\|$$

c'est à dire

$$\|T^{-1}G\| = \|U\| \leq \frac{1}{\sigma} \|G\|$$

Par ailleurs, on vérifie que

$$\|KU\|^2 = (\sigma^*)^2 \sum_{j=1}^N \Delta x \sum_{k=-K, k \neq 0} w_k |\bar{u}_j|^2 = 2(\sigma^*)^2 \sum_{j=1}^N \Delta x |\bar{u}_j|^2$$

et, par Cauchy-Schwarz pour $\bar{u}_j = \frac{1}{2} \sum_{k=-K, k \neq 0} w_k u_j^k$:

$$\|KU\|^2 \leq (\sigma^*)^2 \sum_{j=1}^N \Delta x \sum_{k=-K, k \neq 0} w_k |u_j^k|^2 = (\sigma^*)^2 \|U\|^2$$

d'où l'on déduit que $\|T^{-1}\| \|K\| \leq \sigma^*/\sigma < 1$ à cause de l'hypothèse de sous-criticité (2.16). ■

2.4 Accélération par la diffusion

Dans cette section nous allons expliquer comment l'algorithme d'itération sur les sources (2.22)-(2.23) peut être accéléré afin qu'il converge en un plus petit nombre d'itérations, et ceci grâce à l'approximation du transport par la diffusion. Afin d'expliquer le principe de cette méthode d'accélération, commençons par réécrire l'équation de Boltzmann (2.15) sous la forme abstraite suivante :

$$Tu = Ku + f \quad (2.26)$$

où T est l'opérateur de transport, muni de ces conditions aux limites

$$\begin{cases} Tu = v \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma u & \text{pour } (x, v) \in (-\ell, +\ell) \times (-1, +1) \\ u(-\ell, v) = 0 & \text{pour } v > 0, u(+\ell, v) = 0 \text{ pour } v < 0, \end{cases}$$

et K est l'opérateur de collision

$$Ku(x, v) = \frac{\sigma^*(x)}{2} \int_{-1}^{+1} u(x, v') dv'$$

L'opérateur de moyennisation angulaire est défini par

$$\bar{u}(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} u(x, v') dv'$$

Introduisons un opérateur de diffusion D qui soit une approximation convenable du transport, il ne s'applique qu'à des fonctions $\bar{u}(x)$ ne dépendant pas de la vitesse v :

$$D\bar{u} = -\text{div}(D\nabla\bar{u}) + \sigma_D\bar{u}$$

et il est muni de conditions aux limites convenables.

Une version continue de l'algorithme d'itération sur les sources (2.22)-(2.23) s'écrit

$$\begin{cases} Tv^n = Ku^{n-1} + f \equiv K\bar{u}^{n-1} + f \\ u^n = v^n \end{cases} \quad (2.27)$$

où nous avons introduit une inconnue supplémentaire v^n .

L'idée est de modifier la relation donnant u^n en fonction de v^n .

Pour cela on remarque qu'en intégrant (2.26) et en additionnant/soustrayant l'opérateur D on a

$$D\bar{u} = \bar{f} - \overline{(T - K - D)u}$$

On propose alors le nouveau schéma itératif :

$$\begin{cases} T v^n = K \bar{u}^{n-1} + f \\ D \bar{u}^n = \bar{f} - \overline{(T - K - D)v^n} \end{cases}$$

que l'on peut réécrire plus simplement en remarquant que la seconde équation est équivalente à

$$D(\overline{u^n - v^n}) = \bar{f} - \overline{(T - K)v^n} = \overline{K(v^n - u^{n-1})} = K(v^n - u^{n-1})$$

où l'on a utilisé une moyenne de la première équation pour éliminer la source f . Ainsi donc, l'algorithme d'itération sur les sources accéléré par diffusion est

$$\begin{cases} T v^n = K \bar{u}^{n-1} + f \\ \bar{u}^n = \bar{v}^n + D^{-1} K(v^n - u^{n-1}) \end{cases} \quad (2.28)$$

Formellement, si l'opérateur de diffusion D "vaut l'infini", on retombe sur l'algorithme précédent (2.27). Sinon, comme D^{-1} et K sont des opérateurs positifs, la deuxième relation de (2.28) s'interprète comme une extrapolation entre \bar{v}^n et \bar{u}^{n-1} pour obtenir \bar{u}^n .

La résolution de (2.28) est un peu plus chère, à chaque itération, que celle de (2.27) puisqu'il faut résoudre d'abord une équation de transport pour obtenir v^n puis une équation de diffusion pour obtenir \bar{u}^n .

D'un point de vue algébrique et discret, l'algorithme précédent (2.27) s'interprétait selon (2.24) comme

$$T U^n = K U^{n-1} + F$$

où U^n est le vecteur des composantes de la discrétisation de u^n . Si on élimine v^n dans (2.28), sachant que

$$v^n = (I + D^{-1}K)^{-1}(\bar{u}^n + D^{-1}K u^{n-1})$$

ce nouvel algorithme est modifié (on dit préconditionné) comme suit

$$T(I + D^{-1}K)^{-1} (U^n + D^{-1}KU^{n-1}) = KU^{n-1} + F \quad (2.29)$$

La matrice d'itération de (2.29) est

$$T^{-1}K - D^{-1}K(I - T^{-1}K)$$

dont on espère que le rayon spectral est plus petit que celui de $T^{-1}K$, ce qui est vrai si on sait déjà que $\rho(T^{-1}K) < 1$ et que $D^{-1}K$ est suffisamment petit.

Bien sur, si la suite U^n , définie par (2.29), converge, alors elle converge vers la même limite que celle définie par (2.24).

2.5 Equation instationnaire ou cinétique

On considère l'équation complète de Boltzmann linéaire dépendant du temps (ou modèle cinétique) pour l'inconnue $u(t, x, v)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma(x)u = \frac{\sigma^*(x)}{2} \int_{-1}^{+1} u(x, v') dv' + f(x, v) \\ \text{pour } (t, x, v) \in \mathbb{R}^+ \times (-l, +l) \times (-1, +1) \\ u(t=0, x, v) = u^0(x, v) \text{ pour } (x, v) \in (-l, +l) \times (-1, +1) \\ u(-l, v) = 0 \text{ pour } v > 0 \text{ et } u(+l, v) = 0 \text{ pour } v < 0. \end{cases} \quad (2.30)$$

Pour que le Problème aux limites (2.30) soit bien posé nous supposons encore que le milieu est sous-critique, mais avec une hypothèse un peu plus faible que (2.16), à savoir,

$$0 \leq \sigma(x) - \sigma^*(x) \text{ pour } x \in (-l, +l) \quad (2.31)$$

Nous reprenons la **méthode** S_N dans ce contexte.

On note $u_j^{n,k}$ une approximation de la solution $u(t_n, x_j, v_k)$, le **schéma diamant** est donné, pour $1 \leq j \leq N$, par

$$\frac{u_j^{n+1,k} - u_j^{n,k}}{\Delta t} + v_k \frac{u_{j+1/2}^{n+1/2,k} - u_{j-1/2}^{n+1/2,k}}{\Delta x} + \sigma_j u_j^{n+1/2,k} = \sigma_j^* \bar{u}_j^{n+1/2} + f_j^{n+1/2} \quad (2.32)$$

avec les relations diamants

$$u_j^{n+1,k} + u_j^{n,k} = u_{j+1/2}^{n+1/2,k} + u_{j-1/2}^{n+1/2,k} - 2u_j^{n+1/2,k} = u_{j+1/2}^{n+1/2,k} + u_{j-1/2}^{n+1/2,k} \quad (2.33)$$

et la moyenne angulaire

$$\bar{u}_j^{n+1/2} = \frac{1}{2} \sum_{k=-K, k \neq 0}^K w_k u_j^{n+1/2,k} \quad (2.34)$$

Comme d'habitude σ, σ^* et $f_j^{n+1/2,k}$ sont des approximations de $\sigma(x_j), \sigma^*(x_j)$ et $f(t_{n+1/2}, x_j, v_k)$ respectivement.

La première relation diamant (2.33) permet d'éliminer l'inconnue $u_j^{n+1/2,k}$ tandis que la seconde relation diamant permet d'éliminer $u_j^{n+1/2}$ et d'obtenir un schéma implicite pour les valeurs $u_{j+1/2}^{n+1/2,k}$ en fonction des valeurs $u_j^{n,k}$:

$$v \frac{u_{j+1/2}^{n+1/2,k} - u_{j-1/2}^{n+1/2,k}}{\Delta x} + \left(\sigma_j + \frac{2}{\Delta t} \right) \frac{u_{j+1/2}^{n+1/2,k} + u_{j-1/2}^{n+1/2,k}}{2} \quad (2.35)$$

qui est égal à

$$\frac{\sigma^*}{2} (\bar{u})_{j+1/2}^{n+1/2,k} + \bar{u}_{j-1/2}^{n+1/2,k} + f_j^{n+1/2,k} + \frac{2}{\Delta t} u_j^{n,k}.$$

Lemme 2.5.1 *Le schéma diamant (2.32)-(2.33)-(2.34) est inconditionnellement stable L^2 au sens où, pour tout temps final $T > 0$, il existe une constante $C(T) > 0$ telle que la solution discrète $u_j^{n,k}$ vérifie pour tout $n \leq T/\Delta t$*

$$\|(u_j^{n,k})\|^2 \leq C(T) \left(\|(u_j^{0,k})\|^2 + \sum_{m=0}^n \Delta t \|f_j^{n+1/2,k}\|^2 \right) \quad (2.36)$$

avec la norme discrète définie par

$$\|(u_j^{n,k})\|^2 = \sum_{j=1}^N \Delta x \sum_{k=-K, k \neq 0} w_k |u_j^{n,k}|^2 \quad (2.37)$$

Chapitre 3

Autres méthodes numériques

3.1 Méthodes intégrales

Les méthodes intégrales de résolution numérique de l'équation de Boltzmann linéaire sont basées sur la formule de représentation intégrale de la solution que l'on rappellera d'une manière succincte.

Considérons l'équation (pour l'instant sans collision)

$$\begin{cases} \partial_t f(t, x) + v \cdot \nabla_x f(t, x) + \sigma(x) f(t, x) = S(t, x), x \in \mathbb{R}^N, t > 0 \\ f(0, x) = f^{in}(x), \end{cases} \quad (3.1)$$

qui admet une solution $f \in C^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N)$, donnée par **la formule de Duhamel** :

$$f(t, x) = f^{in}(x - tv) e^{-\theta(x, x - tv)} + \int_0^t e^{-\theta(x, x - (t-s)v)} S(t - s, x - sv) ds. \quad (3.2)$$

avec le **trajet optique** θ défini par

$$\theta(x, x - tv) = \int_0^t \sigma(x - sv) ds \quad (3.3)$$

Remarque. Par analogie avec la propagation de la lumière le long de ses rayons, le trajet optique $\theta(x, x - tv)$ est une mesure de l'absorption totale entre les points x et $x - t$. Le trajet optique est toujours positif et, plus il est grand, plus grande est l'atténuation d'une particule partie de $x - tv$ pour aller en x , c'est-à-dire la probabilité est plus grande pour que cette particule ait été absorbée en chemin. ■

La formule (3.2) permet de calculer une solution approchée de l'équation (3.1) **sans avoir utiliser la discrétisation** de l'opérateur de transport.

Evidemment, il y a un prix à payer qui est l'évaluation du trajet optique θ et le calcul de l'intégrale du terme source le long de la trajectoire.

C'est précisément le principe des **méthodes intégrales** de résolution numérique.

Désormais (3.2) devient (en indiquant à nouveau la dépendance en v) :

$$f(t, x, v) = \int_0^t e^{-\theta(x, x-(t-s)v)} \sigma^*(x - sv) \int_{|v|=1} f(t-s, x - sv, \acute{u}) d\acute{u} ds + f^{in}(x - tv, v) e^{-\theta(x, x-tv)} + \int_0^t e^{-\theta(x, x-(t-s)v)} Q(t-s, x - sv) ds. \quad (3.4)$$

On intègre cette équation par rapport à v pour faire apparaître la seule inconnue

$$\bar{f}(t, x) = \int_{|v|=1} f(t, x, v) dv$$

et on obtient

$$\begin{aligned} \bar{f}(t, x) = & \int_0^t \int_{|v|=1} e^{-\theta(x, x-(t-s)v)} \sigma^*(x - sv) \bar{f}(t-s, x - sv) dv ds \\ & + \int_{|v|=1} f^{in}(x - tv, v) e^{-\theta(x, x-tv)} \\ & + \int_0^t \int_{|v|=1} e^{-\theta(x, x-(t-s)v)} Q(t-s, x - sv) ds dv \end{aligned} \quad (3.5)$$

qui n'est rien d'autre qu'une formulation intégrale.

Remarquons que la double intégrale en (s, v) devient une intégrale en espace sur la boule de centre x et de rayon t . De manière abstraite, (3.5) est équivalent à une équation linéaire

$$\bar{f} = \tau \bar{f} + F[f^{in}, Q] \quad (3.6)$$

Où τ est un opérateur intégral et $F[f^{in}, Q]$ est un second membre fixé.
L'idée des méthodes intégrales est de discrétiser (3.6) et de se ramener ainsi à la résolution d'un système linéaire pour calculer une approximation de la solution exacte f .

3.2 Méthode de flux pair

Nous expliquons brièvement le principe de la méthode de flux pair qui permet d'utiliser tout l'arsenal des formulations variationnelles et des méthodes d'éléments finis comme études dans le cours [5].

On suppose que tous les coefficients, ainsi que le terme source, de l'équation de Boltzmann linéaire sont isotropes, c'est-à-dire indépendants de la variable de vitesse. Par ailleurs, on se place dans un cas stationnaire.

Autrement dit, on considère l'équation

$$v \nabla_x f(x, v) + \sigma(x) f(x, v) - \sigma^*(x) \int_{|v'|=1} f(x, v') dv' = S(x) \quad (3.7)$$

Où, pour simplifier, on a pris la sphère unité comme espaces des vitesses.

On introduit deux nouvelles inconnues:

le **flux pair** défini par :

$$f^+(x, v) = \frac{1}{2} (f(x, v) + f(x, -v)) \quad (3.8)$$

et le **flux impair** :

$$f^-(x, v) = \frac{1}{2} (f(x, v) - f(x, -v)) \quad (3.9)$$

Bien sûr, on trouve que

$$f(x, v) = f^+(x, v) + f^-(x, v) \quad \text{et} \quad f(x, -v) = f^+(x, v) - f^-(x, v).$$

On écrit l'équation (3.7) pour la vitesse $-v$

$$-v \nabla_x f(x, -v) + \sigma(x) f(x, -v) - \sigma^*(x) \int_{|v'|=1} f(x, v') dv' = S(x) \quad (3.10)$$

Par addition de (3.7) et (3.10) on obtient

$$v \nabla_x f^-(x, v) + \sigma(x) f^+(x, v) - \sigma^*(x) \int_{|v'|=1} f^+(x, v') dv' = S(x) \quad (3.11)$$

$$\text{car } \int_{|v'|=1} f dv' = \int_{|v'|=1} f^+ dv'$$

$$v \nabla_x f^+(x, v) + \sigma(x) f^-(x, v) = 0 \quad (3.12)$$

L'équation (3.12) permet de calculer f^- en fonction du courant de f^+ sous l'hypothèse que le coefficient d'absorption $\sigma(x) > 0$ est strictement positif.

En reportant dans (3.11) on obtient une équation du deuxième ordre pour f^+

$$-v \nabla_x \left(\frac{1}{\sigma(x)} v \nabla_x f^+(x, v) \right) + \sigma(x) f^+(x, v) - \sigma^*(x) \int_{|v'|=1} f^+ dv' = S(x) \quad (3.13)$$

Si on note D le domaine spatial, les conditions aux limites de flux nul pour (3.7)

$$f(x, v) = 0 \text{ pour } (x, v) \in \Gamma^- = (x, v) \in \partial D \times |v| = 1 \text{ tel que } v \cdot n < 0$$

deviennent

$$0 = f^+(x, v) + f^-(x, v) = f^+(x, v) - \frac{1}{\sigma(x)} v \cdot \nabla_x f^+(x, v) \text{ pour } v \cdot n(x) < 0.$$

Mais la condition aux limites de flux nul est dit aussi que $f(x, -v) = 0$ pour $v \cdot n(x) > 0$ et donc que

$$0 = f^+(x, v) - f^-(x, v) = f^+(x, v) + \frac{1}{\sigma(x)} v \cdot \nabla_x f^+(x, v) \text{ pour } v \cdot n(x) > 0.$$

On vérifie aisément qu'au total la condition aux limites est équivalente à

$$v \cdot \nabla_x f^+(x, v) + \text{sign}(v \cdot n(x)) \sigma(x) f^+(x, v) = 0 \text{ pour } x \in \partial D \quad (3.14)$$

On introduit alors la forme bilinéaire symétrique

$$a(f, g) = \int_D \int_{|v|=1} \left(\frac{1}{\sigma(x)} v \cdot \nabla_x f v \cdot \nabla_x g + \sigma(x) f g \right) dx dv$$

$$\begin{aligned}
& - \int_D \sigma^*(x) \left(\int_{|v|=1} f dv \right) \left(\int_{|v|=1} g dv \right) dx \\
& + \int_{\partial D} \int_{|v|=1} f g |n \cdot v| dx dv
\end{aligned} \tag{3.15}$$

et la forme linéaire

$$L(g) = \int_D \int_{|v|=1} g(x, v) S(x) dx dv \tag{3.16}$$

Lemme 3.2.1 Soit une fonction régulière $f^+(x, v)$. Alors $f^+(x, v)$ est une solution de l'équation (3.13) avec la condition aux limites (3.14) si et seulement si $f^+(x, v)$ est une solution de la formulation variationnelle :

$$\text{Trouver } f^+ \in W \text{ tel que } a(f^+, g) = L(g) \quad \forall g \in W \tag{3.17}$$

avec l'espace

$$W = \{g(x, v) \in L^2(D \times \{|v|=1\}) \text{ et } v \cdot \nabla_x g \in L^2(D \times \{|v|=1\})\}.$$

Démonstration : On multiplie l'équation (3.13) par une fonction test $g(x, v)$ et on intègre par partie pour obtenir

$$\begin{aligned}
& \int_D \int_{|v|=1} \left(\frac{1}{\sigma(x)} v \cdot \nabla_x f^+ v \cdot \nabla_x g + \sigma(x) f g \right) dx dv \\
& - \int_D \sigma^*(x) \left(\int_{|v|=1} f^+ dv \right) \left(\int_{|v|=1} g dv \right) dx - \int_{\partial D} \int_{|v|=1} f^+ g |n \cdot v| dx dv \\
& = \int_D \int_{|v|=1} g(x, v) S(x) dx dv.
\end{aligned}$$

Comme d'habitude on a supposé que la mesure dv est normalisée de manière que $\int_{|v|=1} dv = 1$. En remplaçant $v \cdot \nabla_x f^+$ par la valeur de la condition aux limites dans l'intégrale de bord, on trouve bien la formulation variationnelle (3.16). Réciproquement, le même calcul en sens inverse permet de passer de la formulation variationnelle à l'équation (3.13) avec la condition aux limite (3.14). ■

A partir de la formulation variationnelle (3.16) il est classique de construire des méthodes d'éléments finis (voir par exemple [5]).

Signalons, enfin, l'utilisation de la méthode des éléments finis pour la formulation variationnelle en flux pair de l'équation de Boltzmann. Il est aussi possible d'utiliser directement les éléments finis pour l'équation de Boltzmann sous sa forme usuelle. Nous renvoyons pour cela aux travaux de P. Lesaint et P.A. Raviart.

Les algorithmes probabilistes de type Monte-Carlo (méthode de Monte-carlo) sont aussi très populaires pour la résolution de l'équation de Boltzmann. Il sont basés sur l'interprétation probabiliste de l'équation de Boltzmann.

Bibliographie

1. WIKIPÉDIA.
2. ALLAIRE & GOLSE. "*Transport et diffusion*". Ecole Polytechnique, 2010.
3. LEWIS.E & MILLER.W. "*computational methods of neutron transport*". Wiley, New yourk 1984.
4. TERRASSE.I & ABOUD.T. "*Modélisation des phénomènes de Propagation d'Ondes*". Cours de 3ème année à l'école Polytechnique, 2008.
5. ALLAIRE.G. "*Analyse numérique et optimisation*". Edition de l'école Polytechnique, Palaiseau 2005.