République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 – Guelma

Faculté de Mathématiques et de l'Informatique et Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire de Fin d'Etude
Master Académique en Mathématiques
Option : EDP

THEME

Etude du problème de Stokes dans la formulation courant-tourbillon

Présenté par :

AIOUNI Hamza

Jury :

Dr :	M.Z. Aissaoui	président
prof :	H. Fujita Yashima	rapporteur
Mme :	R. Mellal	examinateur

Session Juin 2012

Étude de l'équation de Stokes dans la formulation courant-tourbillon

AIOUNI Hamza
Mémoire de master en mathématiques
Université de Guelma

14 juin 2012

❄ *Remerciment* ❄

Au nom d'Allah, le tout miséricordieux,

le très miséricordieux

La reconnaissance est la mémoire du cœur

≼ LE GRAND MERCI POUR ALLAH ≽

En préambule à ce mémoire, je souhaite adresser mes remerciements les plus sincères aux personnes qui m'ont apporté leur aide et qui ont contribué à l'élaboration de ce mémoire ainsi qu'à la réussite de cette formidable année universitaire.

Je remercier du fond du cœur ❤ **mes parents** ❤ *pour leur contribution, leur soutien et leur patience durant toutes mes études et qui m'ont toujours aidé et encouragé aux moments opportuns .*

Je tiens à remercier sincèrement le prof. Hisao Fujita Yashima qui en tant que Directeur de mémoire, s'est toujours montré à l'écoute et très disponible tout au long de la réalisation de ce mémoire, ainsi pour l'inspiration, l'aide et le temps qu'il a bien voulu me consacrer et sans qui ce mémoire n'aurait jamais vu le jour.

Mes remerciements s'adressent également à Monsieur Dr. Aissaoui Med Zine : directeure du Laboratoire de Mathématiques appliquées et de modélisation, (LMAM), pour sa générosité et la grande patience dont il a su faire preuve malgré ses charges académiques et professionnelles.

J'adresse également mes remerciements, à tous mes enseignants, qui m'ont donnés les bases de la science. Ensuite, je souhaite remercier l'ensemble

du laboratoire (LMAM) ; leur accueil chaleureux et leur aide précieuse ont contribué fortement à l'aboutissement de ce travail.

Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à tous mes proches, amis et collegues de qui m'ont toujours soutenue et encouragée.

☺**Merci à tous et à toutes.**

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

On appelle fluide tout milieu matériel continu, déformable, sans rigidité, qui peut s'écouler, c'est-à-dire subir de grandes variations de forme sous l'action de forces qui sont d'autant plus lentes. Parmi les fluides, on distingue les liquides, les gaz et les plasmas. On s'intéresse ici à l'écoulement d'un fluide visqueux incompressible dans le cas stationnaire.

On dit qu'un fluide est incompressible si sa masse volumique varie faiblement avec la pression ou la température. Et on dit que son ecoulement est stationnaire si toutes les variables et les données décrivant le mouvement sont indépendantes du temps.

Dans le deuxième chapitre de ce mémoire, on présente quelques espaces fonctionnels utiles dans toute la suite, les espaces de Sobolev, les espaces de Sobolev avec poids et les espaces reliés aux opérateurs div et rot, de plus on présente quelques théorèmes et résultats importants.

Dans le troisième chapitre qui contient la partie principale de notre travail, on s'intéresse à l'écoulement permanent d'un fluide visqueux incompressible, et on peut présenter cette écoulement par le problème de Stokes dans un domaine tridimensionnel Ω engendré par la rotation d'un domaine bidimensionnel Σ autour d'axe (oz). Comme le cas tridimensionnel pose beaucoup de problème surtout dans la simulation numérique, on pensera à la réduction dimensionnel et ceci par l'utilisation des coordonnées $(r, z) \in \Sigma$ et le cas des données axisymétriques, ce qui nous donne une nouvelle procédure dite formulation courant-tourbillon où les inconnues sont les fonctions scalaires courant(ω) et tourbillon ψ.

Dans le dernier chapitre, on donne une perspective pour l'étude du problème de l'éxistence et de l'unicité d'une solution faible de la formulation courant-toubillon du problème de Stokes.

Le présent travail a été réalisé en suivant des idées exposées dans [5].

Chapitre 2

Préliminaire

Avant d'entamer l'étude complète du problème de Stokes, on rappelle tout d'abord certaines notions utiles d'analyse fonctionnelle qui comporte le cadre fonctionnel du problème et quelques définitions, propriétés et résultats préliminaires.

2.1 Rappels mathématiques

2.1.1 Notions fondamentales sur les espaces de Sobolev :

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ muni de la frontière $\Gamma = \partial\Omega$ assez régulière. On définit d'abord les espaces appelés les *espaces de Lebesgue*. Soit p un élément de $[1, +\infty]$. On appelle *espace de Lebesgue* et on note $L^p(\Omega)$ l'espace vectoriel des classes de fonctions numériques v définies sur Ω à valeurs dans $\mathbb{C}$, mesurables au sens de Lebesgue, vérifiant les relations

$$\begin{cases} \int_\Omega |v(x)|^p dx < +\infty & \text{si } p < +\infty \\ \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |v(x)| < +\infty & \text{si } p = +\infty. \end{cases}$$

où $\operatorname{ess\,sup}_{x\in\Omega} |v(x)| = \inf\{M, |v(x)| \leq M\ p.p\}$.
On munit cet espace de la norme

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |v(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \qquad \text{pour} \quad p < +\infty,$$

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} = \operatorname{ess\,sup}_{x\in\Omega} |v(x)| \qquad \text{pour} \quad p = +\infty.$$

On rappelle que dans le cas où $p = 2$, l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega) = L^2(\Omega)$, qui est par définition l'espace des fonctions à carré intégrable définies sur Ω, est un espace de Hilbert muni du produit scalaire $(\cdot,\cdot)_{L^2(\Omega)}$ défini par

$$(v, w)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega v(x)\ \overline{w}(x) dx$$

et de la norme associée $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$définie par :

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} = (v, v)^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)},$$

c'est-à-dire :

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} = \left\{\int_\Omega v(x)^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Pour l'unicité de la pression, qu'on précisera plus tard, on introduit aussi l'espace :

$$L^2_0(\Omega) = \left\{v \in L^2(\Omega), \int_\Omega v(x)dx = 0\right\}$$

Soit p un élément de $[1, +\infty]$. On appelle *espace de Sobolev* d'ordre m, et on le note $W^{m,p}(\Omega)$, l'espace défini par

$$W^{m,p}(\Omega) = \{v \in L^p(\Omega) \mid D^\alpha v \in L^p(\Omega),\ \forall\alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq m\},$$

où D^α désigne la dérivée partielle d'ordre $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ définie par

$$D^\alpha v = \frac{\partial^{|\alpha|} v}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdot \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

où $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$.

L'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach pour la norme :

$$\|v\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha v\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \qquad \text{si } \ p < +\infty,$$

$$\|v\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha v\|_{L^\infty(\Omega)} \qquad \text{si } \ p = +\infty.$$

Dans le cas où $p = 2$, l'espace Sobolev $W^{m,p}(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$ est un espace de Hilbert, communément noté $H^m(\Omega)$, muni du produit scalaire

$$(v, w)_{H^m(\Omega)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \int_\Omega D^\alpha v D^\alpha \overline{w}\, dx.$$

Ce produit scalaire est conforme à la définition de la norme $\|\cdot\|_{H^m(\Omega)}$ précédement introduite ; en effet on a

$$\| v \|_{H^m(\Omega)} = \left[\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha v\|_{L^2(\Omega)}^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Particulièrement, pour $m = 1$, l'espace $H^1(\Omega)$ est défini comme suit

$$H^1(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega), \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \qquad i = 1...n \right\}.$$

On rappelle que son produit scalaire est

$$(v, w)_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega v(x)\overline{w}(x) dx + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial \overline{w}}{\partial x_i} dx,$$

et sa norme

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} = \left[\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^{n} \|\frac{\partial v}{\partial x_i}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

On introduit le sous-espace $H_0^1(\Omega)$ de $H^1(\Omega)$ défini par

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ v \in H^1(\Omega), v\mid_\Gamma = 0 \right\},$$

où Γ est la frontière de Ω. $H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert avec le même produit scalaire et la même norme que $H^1(\Omega)$, c'est à dire

$$(v,w)_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega v(x)\overline{w}(x)dx + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial \overline{w}}{\partial x_i}dx$$

et

$$\|v\|_{H_0^1(\Omega)} = \left[\|v\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \|\frac{\partial v}{\partial x_i}\|^2_{L^2(\Omega)}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{2.1}$$

Remarque : Si Ω est borné, alors l'espace de Hilbert $H_0^1(\Omega)$ peut être muni du produit sclaire

$$(v,w)_{\widetilde{H}_0^1(\Omega)} = \sum_{i-1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial \overline{w}}{\partial x_i}dx,$$

et du norme correspondante

$$\|v\|_{\widetilde{H}_0^1(\Omega)} = \left[\sum_{i=1}^{n} \|\frac{\partial v}{\partial x_i}\|^2_{L^2(\Omega)}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

qui est équivalente à la norme (2.1) de $H_0^1(\Omega)$

Preuve du remarque

Pour démontrer que les deux normes sont équivalentes, il faut montrer qu'il existe deux constantes $c_1, c_2 > 0$ tel que

$$c_1\|v\|_{\widetilde{H}_0^1(\Omega)} \leq \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \leq c_2\|v\|_{\widetilde{H}_0^1(\Omega)}. \tag{2.2}$$

On a

$$\begin{aligned}
\|v\|^2_{\widetilde{H}_0^1(\Omega)} &= \left[\sum_{i=1}^{n} \|\frac{\partial v}{\partial x_i}\|^2_{L^2(\Omega)}\right]^2 \\
&\leq \left[\sum_{i=1}^{n} \|\frac{\partial v}{\partial x_i}\|^2_{L^2(\Omega)}\right]^2 + \left[\|v\|^2_{L^2(\Omega)}\right]^2 \\
&\leq \|v\|^2_{H_0^1(\Omega)},
\end{aligned}$$

ce qui prouve la première inégalité de (2.2).

D'autre part, d'après l'inégalité de Poincaré on a

$$\begin{aligned}\|v\|^2_{H^1_0(\Omega)} &= \left[\sum_{i=1}^{n}\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\|^2_{L^2(\Omega)}\right]^2 + \left[\|v\|^2_{L^2(\Omega)}\right]^2\\ &\leq c\cdot\left[\sum_{i=1}^{n}\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\|^2_{L^2(\Omega)}\right]^2 + \left[\sum_{i=1}^{n}\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\|^2_{L^2(\Omega)}\right]^2\\ &\leq (c+1)\cdot\left[\sum_{i=1}^{n}\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\|^2_{L^2(\Omega)}\right]^2.\\ &\leq (c+1)\cdot\|v\|^2_{\tilde{H}^1_0(\Omega)},\end{aligned}$$

ce qui prouve la deuxième inégalité de (2.2).

L'équivalence des deux normes est démontrée ■.

Maintenant, on introduit les espaces de Sobolev des fonctions définies sur Ω à valeur dans $\mathbb{R}^N$ $(N > 1, \quad N \in \mathbb{N})$. On définit d'abord

$$L^2(\Omega;\mathbb{R}^N) = \left\{v = (v_1, v_2, \cdots, v_N), v_i \in L^2(\Omega), \quad i = 1\cdots N \right\},$$

muni de produit scalaire

$$(v, w)_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^N)} = \sum_{i=1}^{N}\int_\Omega v_i \quad w_i \quad dx.$$

et de la norme

$$\|v\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^N)} = \left[\sum_{i=1}^{N}\|v_i\|^2_{L^2(\Omega)}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

De la même manière, on définit

$$H^1(\Omega;\mathbb{R}^N) = \left\{v = (v_1, v_2, \cdots, v_N), v_i \in H^1(\Omega),, \quad i = 1\cdots N \right\},$$

muni de produit scalaire

$$(v, w)_{H^1(\Omega;\mathbb{R}^N)} = \sum_{i=1}^{N}\int_\Omega v_i \quad w_i\, dx + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n}\int_\Omega \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad \frac{\partial w_i}{\partial x_j}dx,$$

et de la norme

$$\|v\|_{H^1(\Omega;\mathbb{R}^N)} = \left[\sum_{i=1}^{N} \|v_i\|^2_{H^1(\Omega)}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

De même on définit

$$H_0^1(\Omega;\mathbb{R}^N) = \left\{v = (v_1, v_2, \cdots, v_N), v_i \in H_0^1(\Omega), \quad i = 1 \cdots N\ \right\},$$

qui a le même produit scalaire et la même norme que $H^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$.

On désigne par $H^{-1}(\Omega)$ l'espace dual de $H_0^1(\Omega)$ muni de la norme

$$\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{0 \neq v \in H_0^1(\Omega)} \frac{\langle f, v\rangle_\Omega}{\|v\|_{H^1(\Omega)}}.$$

Et on définit également

$$H^{-1}(\Omega;\mathbb{R}^N) = \left\{f = (f_1, f_2, \cdots, f_N), f_i \in H^{-1}(\Omega), i = 1 \cdots N\right\},$$

muni de la norme

$$\|f\|_{H^{-1}(\Omega;\mathbb{R}^N)} = \left(\sum_{i=1}^{N} \|f_i\|^2_{H^{-1}(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

2.1.2 Les espaces de Sobolev avec poids :

On considère un domaine $\Sigma \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ dont les éléments sont notés (r, z). Nous distinguons les deux parties de la frontière $\partial\Sigma$ de Σ ; on pose

$$\Gamma_0 = \{(r, z) \in \partial\Sigma | \ \ r = 0\},$$

$$\Gamma_1 = \{(r, z) \in \partial\Sigma | \ \ r > 0\}.$$

On a évidement

$$\partial\Sigma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1, \qquad \Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset.$$

On introduit premièrement l'espace :

$$L_1^2(\Sigma) = \left\{ v, \int_\Sigma |v(r,z)|^2 r dr dz < \infty \right\},$$

qui est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$(v,w)_{L_1^2(\Sigma)} = \int_\Sigma v(r,z) w(r,z) r dr dz,$$

et de la norme

$$\|v\|_{L_1^2(\Sigma)} = \left\{ \int_\Sigma v(r,z)^2 r dr dz \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Pour l'unicité de la pression, que l'on précisera plus tard, on introduit l'espace

$$L_{1,0}^2(\Sigma) = \left\{ v \in L_1^2(\Sigma), \int_\Sigma v(r,z) r dr dz = 0 \right\}.$$

Aussi, on définit l'espace de Hilbert $H_1^1(\Sigma)$ comme suit

$$H_1^1(\Sigma) = \left\{ v \in L_1^2(\Sigma), \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L_1^2(\Sigma), \text{pour } i = 1,2 \right\},$$

muni du produit scalaire

$$(v,w)_{H_1^1(\Sigma)} = \int_\Sigma v(r,z)\, w(r,w) r dr dz + \sum_{i=1}^{2} \int_\Sigma \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_i} r dr dz,$$

et de la norme

$$\|v\|_{H_1^1(\Sigma)} = \left[\|v\|_{L_1^2(\Sigma)}^2 + \sum_{i=1}^{2} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L_1^2(\Sigma)}^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \tag{2.3}$$

où $x_1 = r$, $x_2 = z$.

On introduit le sous-espace $H_{1,0}^1(\Sigma)$ de $H_1^1(\Sigma)$ défini par

$$H_{1,0}^1(\Sigma) = \{ v \in H_1^1(\Sigma), v|_{\Gamma_1} = 0 \}$$

qui est un espace de Hilbert muni de la même norme de $H_1^1(\Sigma)$ donnée dans (2.3) .

A ce propos on remarque que dans cette norme on ne peux pas imposer la condition $v\mid_{\Gamma_0}=0$, comme on le voit dans l'exemple suivant.

Exemple

Soit$\Sigma =]0, R_1[\times]0,1[$.

On considère la famille de fonctions $U_n = U_n(r,z)$, $n = 1, 2, ...$ définies par

$$U_n(r,z) = \theta(z)\psi_n(r)$$

où

$$\theta(z) = \begin{cases} 4z & \text{pour } 0 \leq z \leq \frac{1}{4} \\ 1 & \text{pour } \frac{1}{4} \leq z \leq \frac{3}{4} \\ 4(1-z) & \text{pour } \frac{1}{4} \leq z \leq 1 \end{cases}$$

$$\psi_n(r) = \begin{cases} nr & \text{pour } 0 \leq r \leq \frac{1}{n} \\ 1 & \text{pour} \frac{1}{n} \leq r \leq R_1 - 1 \\ R_1 - r & \text{pour} R_1 - 1 \leq r \leq R_1 \end{cases}$$

On remarque que $U_n \in H_1^1(\Sigma)$ pour tout n,

$$\begin{aligned} \|U_n\|^2_{H_1^1(\Sigma)} &= \int_\Sigma |U_n|^2 r dr dz + \int_\Sigma |\frac{\partial U_n}{\partial z}|^2 r dr dz + \int_\Sigma |\frac{\partial U_n}{\partial r}|^2 r dr dz \\ &\leq \int_\Sigma r dr dz + 2\int_0^{R_1}\int_0^{\frac{1}{4}} 16 r dr dz + \int_0^{\frac{1}{n}} n^2 r dr + \int_{R_1-1}^{R_1} r dr \end{aligned}$$

On a

$$\int_0^{\frac{1}{n}} n^2 r dr = n^2 \frac{r^2}{2}\mid_0^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$$

donc tous les termes du deuxième membre de l'inégalité sont bornés, alors, U_n converge ponctuellement vers $\overline{U}$

où

$\overline{U} = \theta(z)\psi_\infty(r)$

$$\psi_\infty(r) = \begin{cases} 1 & \text{pour } 0 \leq r \leq R_1 - 1 \\ R_1 - r & \text{pour } R_1 - 1 \leq r \leq R_1 \end{cases}$$

Remarque

On suppose que Σ est borné dans $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$.

L'espace de Hilbert $H^1_{1,0}(\Sigma)$ peut être muni du produit sclaire

$$(v, w)_{H^1_{1,0}(\Sigma)} = \sum_{i=1}^{2} \int_\Sigma \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_i} rdrdz,$$

et du norme

$$\|v\|_{H^1_{1,0}(\Sigma)} = \left[\sum_{i=1}^{2} \| \frac{\partial v}{\partial x_i} \|^2_{L^2_1(\Sigma)} \right]^{\frac{1}{2}}, \tag{2.4}$$

c'est-à-dire la norme définie dans (2.4) est équivalente à la norme de $H^1_{1,0}$ définie dans(2.3).

Démonstration Il est évident que

$$\|v\|_{\tilde{H}^1_{1,0}(\Sigma)} \leq \|v\|_{H^1_{1,0}(\Sigma)}$$

(voir (2.3), (2.4)).

Il nous reste à démontrer qu'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\|v\|_{H^1_{1,0}(\Sigma)} \leq c\|v\|_{\tilde{H}^1_{1,0}(\Sigma)} \tag{2.5}$$

ce qui revient à montrer qu'il existe une constante $c' > 0$ telle que

$$\|v\|_{L^2_1(\Sigma)} \leq c' \sum_{i=1}^{2} \int_\Sigma \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2 rdrdz$$

Pour simplifier la démonstration, supposons que
$\Sigma = \{(r,z) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} | z_0(r) < z < z_1(r), 0 < r < R_1\}$
(le cas général peut être traité avec la même idée).
Alors on a

$$\begin{aligned} \|v\|^2_{L^2_1(\Sigma)} &= \int_\Sigma v(r,z)^2 r dr dz \\ &= \int_0^{R_1} r \int_{z_0(r)}^{z_1(r)} v(r,z)^2 dz \ \ dr \end{aligned}$$

Or on a

$$v(r,z)^2 = v(r,z) \int_{z_0(r)}^{z} \frac{\partial v}{\partial z'} dz'$$

et donc

$$\begin{aligned} \int_{z_0(r)}^{z_1(r)} v^2 dz &= \int_{z_0(r)}^{z_1(r)} v(r,z) \int_{z_0(r)}^{z} \frac{\partial v}{\partial z'} dz' dz \\ &\leq \left(\int_{z_0(r)}^{z_1(r)} v^2 dz \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{z_0(r)}^{z_1(r)} \left(\frac{\partial v}{\partial z'} \right)^2 dz \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Par conséquent on a

$$\begin{aligned} \int_0^{R_1} r \int_{z_0(r)}^{z_1(r)} v(r,z)^2 dz &\leq \int_0^{R_1} \left(r \int_{z_0(r)}^{z_1(r)} v(r,z)^2 dz \right)^{\frac{1}{2}} \left(r \int_{z_0(r)}^{z_1(r)} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 dz \right)^{\frac{1}{2}} dr \qquad (2.6) \\ &\leq \left(\int_0^{R_1} r \int_{z_0(r)}^{z_1(r)} v(r,z)^2 dz dr \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{R_1} r \int_{z_0(r)}^{z_1(r)} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 dz dr \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|v\|_{L^2_1(\Sigma)} \left(\sum_{i=1}^{2} \int_\Sigma r \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 dr dz \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

De ces inégalités on déduit que

$$\|v\|^2_{L^2_1(\Sigma)} \leq \|v\|_{L^2_1(\Sigma)} \left(\sum_{i=1}^{2} \int_\Sigma r \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 dr dz \right)^{\frac{1}{2}}$$

ou

$$\|v\|^2_{L^2_1(\Sigma)} \leq \left(\sum_{i=1}^{2} \int_{\Sigma} r \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 drdz \right)^{\frac{1}{2}},$$

ce qui prouve l'inégalité (2.5)■

2.1.3 Propriétés des espaces reliés aux opérateurs div et rot :

Dans ce paragraphe, nous considérons Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$ avec une frontière Λ assez régulière.

Les principaux opérateurs différentiels(à savoir le gradient, la divergence et le rotation) peuvent se définir à l'aide de l'opérateur " nabla"

$$\nabla := \begin{pmatrix} \partial_{x_1} \\ \partial_{x_2} \\ \partial_{x_3} \end{pmatrix}$$

En effet, pour les fonctions ϕ à valeur réelles et pour les fonctions v à valeur dans $\mathbb{R}^3$ on définit

$$grad\,\phi = \nabla\phi, \qquad div\,v = \nabla \cdot v, \qquad rot\,v = \nabla \wedge v$$

Ces opérateurs sont bien définis lorsque ϕ (resp v) appartient à l'espace $D(\Omega)$ (resp $D(\Omega, \mathbb{R}^3)$)où $D(\Omega)$ est l'espace vectoriel des fonctions indéfiniment différentiables à support compact inclus dans Ω de $\mathbb{R}^3$,

et

$$D(\Omega, \mathbb{R}^3) - \{v - (v_1, v_2, v_3), v_i \in D(\Omega),\ i - 1, 2, 3\}$$

On note par $D'(\Omega)$ (resp $D'(\Omega, \mathbb{R}^3)$) l'espace dual de $D(\Omega)$ (resp $D(\Omega, \mathbb{R}^3)$) qui est l'espace des formes linéaire sur $D(\Omega)$(resp$D(\Omega, \mathbb{R}^3)$) à valeur dans $\mathbb{R}$.

On précise maintenant les opérateurs différentiels suivants

Pour $v = (v_1, v_2, v_3)^t$ on a

$$\nabla v = (\nabla v_1, \nabla v_2, \nabla v_3)^t,$$

avec

$$\nabla v_i = (\frac{\partial v_i}{\partial x_1}, \frac{\partial v_i}{\partial x_2}, \frac{\partial v_i}{\partial x_3}).$$

aussi

$$\nabla \cdot v = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial v_i}{\partial x_i}.$$

Pour $\phi \in \mathbb{R}$ on a

$$\nabla \phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \frac{\partial \phi}{\partial x_2}, \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \right).$$

On introduit l'espace de Hilbert suivant

$$H(div, \Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^3), div\, v \in L^2(\Omega) \right\},$$

muni du produit scalaire

$$(v, w)_{H(div,\Omega)} = \sum_{i=1}^{3} \int_\Omega v_i w_i \, dx + \int_\Omega div\, v \, div\, w \, dx,$$

et de la norme

$$\|v\|_{H(div,\Omega)} = \left[\|v\|^2_{L^2(\Omega,\mathbb{R}^3)} + \|div\, v\|^2_{L^2(\Omega)} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

On introduit aussi le sous-espace de$H(div, \Omega)$

$$H_0(div, \Omega) = \{ v \in H(div, \Omega), v \mid_\Lambda = 0 \},$$

qui est un espace de Hilbert pour le même produit scalaire et la même norme que$H(div, \Omega)$.

On définit maintenant le rotationel

alors

Pour $v \in \mathbb{R}^3$ on a

$$rot\, v = \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}, \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right).$$

On introduit l'espace de Hilbert suivant

$$H(rot, \Omega) = \{v \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^3), rot\, v \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)\},$$

muni du produit scalaire

$$(v, w)_{H(rot,\Omega)} = \sum_{i=1}^{3} \int_\Omega v_i w_i \, dx + \sum_{i=1}^{3} \int_\Omega (rot\, v)_i \, (rot\, w)_i \, dx,$$

et de la norme

$$\|v\|_{H(rot,\Omega)} = \left[\|v\|^2_{L^2(\Omega,\mathbb{R}^3)} + \|rot\, v\|^2_{L^2(\Omega)} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

On définit l'opérateur de Laplace noté : Δ comme suit

pour $v \in \mathbb{R}^3$ et $\phi \in \mathbb{R}$ on a

$$\Delta\, v = \left(\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_i^2}, \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_i^2}, \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_i^2} \right),$$

et

$$\Delta\phi = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i^2}.$$

2.1.4 Propriétés des espaces reliés aux opérateurs div_r et rot_r :

Maintenant, nous considérons le domaine Ω engendré par le rotation de Σ où $\Sigma \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$.

On définit les coordonnées r, θ et z de Ω avec celle cartésiennees x_1, x_2 et x_3 on a

$$\begin{cases} r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \\ \\ \theta = \arctan\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right) \\ \\ z = x_3 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} x_1 = r\cos\theta \\ \\ x_2 = r\sin\theta \\ \\ x_3 = z \end{cases}$$

Dans ce domaine on considère un champ de vitesse (u_1, u_2, u_3).

On définit la composante radiale w_r,la composante tangentielle w_θ et la composante verticale w_z par les relations

$$\begin{aligned} w_r &= u_1\cos\theta + u_2\sin\theta \\ w_\theta &= -u_1\sin\theta + u_2\cos\theta \\ w_z &= u_3 \end{aligned}$$

et les composantes du champ de vitesse par

$$\begin{cases} u_1 = w_r\cos\theta - w_\theta\sin\theta \\ \\ u_2 = w_r\sin\theta - w_\theta\cos\theta \\ \\ u_3 = w_z. \end{cases}$$

Dans la suite on suppose que : $w_\theta = 0$

alors, les composantes du champ de vitesse deviennent

$$\begin{cases} u_1 = w_r \cos\theta \\ u_2 = w_r \sin\theta \\ u_3 = w_z. \end{cases}$$

On rappelle que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x_1} = \cos\theta \dfrac{\partial}{\partial r} - \dfrac{\sin\theta}{r}\dfrac{\partial}{\partial\theta} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_2} = \sin\theta \dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{\cos\theta}{r}\dfrac{\partial}{\partial\theta} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_3} = \dfrac{\partial}{\partial z} \end{cases}$$

Maintenant on définit l'opérateur Δ_r dans les coordonnées (r, z), qui correspond à l'opérateur de Laplace Δ dans $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ engendré par la rotation de $\Sigma \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, c-est-à-dire

$$\begin{aligned}
\Delta_r &= \nabla \cdot \nabla \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right) \\
&= \left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}, \sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \\
&\quad \times \left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}, \sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \\
&= \left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \\
&\quad \left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\
&= \cos^2\theta\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\cos\theta\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\cos\theta\sin\theta}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta} + \frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial r} + \\
&\quad + \frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \sin^2\theta\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta} + \\
&\quad \frac{\cos\theta^2}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta\sin\theta}{r}\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial r} - \frac{\cos\theta\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos\theta^2}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\
&= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.
\end{aligned}$$

D'une manière analogue on définit l'opérateur div_r dans les coordonnées (r, z), qui correspond à l'opérateur div dans $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ engendré par la rotation de $\Sigma \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$,

c-est-à-dire

$$\begin{aligned}
div_r\, u &= \frac{\partial}{\partial x_1}u_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}u_2 + \frac{\partial}{\partial x_3}u_3 \\
&= \left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)(w_r\cos\theta) + \left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)(w_r\sin\theta) + \frac{\partial}{\partial z}w_z \\
&= \cos^2\theta\frac{\partial}{\partial r}w_r + \frac{\sin^2\theta}{r}w_r + \sin^2\theta\frac{\partial}{\partial r}w_r + \frac{\cos^2\theta}{r}w_r + \frac{\partial}{\partial z}w_z \\
&= \frac{\partial}{\partial r}w_r + \frac{w_r}{r} + \frac{\partial}{\partial z}w_z.
\end{aligned}$$

On introduit l'espace de Hibert définit sur Σ comme suit

$$H_1(div_r, \Sigma) = \left\{ v \in L_1^2(\Sigma, \mathbb{R}^2), div_r\, v \in L_1^2(\Sigma) \right\},$$

muni du produit scalaire

$$(v, w)_{H_1(div_r, \Sigma)} = \sum_{i=1}^{2} \int_{\Sigma} v_i\, w_i\, r dr dz + \int_{\Sigma} div_r v\; div_r w\, r dr dz,$$

et de la norme

$$\|v\|_{H_1(div_r, \Sigma)} = \left[\|v\|^2_{L_1^2(\Sigma, \mathbb{R}^2)} + \|div_r v\|^2_{L_1^2(\Sigma)} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

on introduit l'espace

$$V_1^1(\Sigma) = \left\{ v \in L_1^2(\Sigma), \partial_r v, \partial_z v, \frac{v}{r} \in L_1^2(\Sigma) \right\}.$$

Remarquons que les conditions $\frac{v}{r} \in L_1^2(\Sigma)$ et $v \in H_1^1(\Sigma)$ implique que

$$v\,|_{\Gamma_0} = 0.$$

Donc,on a le sous espace

$$V_{1,0}^1(\Sigma) = \left\{ v \in V_1^1(\Sigma),\ \ v\,|_{\Gamma_1} = 0 \right\} = \left\{ v \in V_1^1(\Sigma),\ \ v\,|_{\Gamma_0} = 0, v\,|_{\Gamma_1} = 0 \right\}.$$

2.1.5 Théorèmes et Résultats importants :

Lemme 2.1 *(lemme de Lax-Milgram)*

Soit H un espace de Hilbert, de norme $\|\cdot\|_H$, soit $a(\cdot,\cdot)$ une forme bilinéaire sur $H \times H$. On suppose qu'il existe deux constantes $M > 0$, $\alpha > 0$ telles que

$$|a(u, v)| \leq M\|u\|_H \|v\|_H \qquad \text{pour tout } u, v \in H,$$

$$|a(u, u)| \geq \alpha\|u\|_H^2 \qquad \text{pour tout } u \in H.$$

Alors, pour toute forme linéaire continue L sur H, il existe un unique $u \in H$ tel que

$$a(u,v) = L(v).$$

Preuve voir [1]

Théorème 2.1 *Pour toute fonction v de $L^2(\Sigma,\mathbb{R}^2)$ qui satisfait*

$$div\, v = 0,$$

il existe une fonction ψ dans $H^1(\Sigma)$ nommée fonction courant telle que

$$v = rot\varphi \tag{2.7}$$

Notons que, comme Σ est connexe, la fonction courant ψ de v est unique à une constante additive près.
En particulier, si $v \in H_0^1(\Sigma)$, alors on a

$$\frac{\partial\psi}{\partial\tau} = 0 \quad sur \quad \partial\Sigma, \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} = 0 \quad sur \quad \partial\Sigma, \tag{2.9}$$

où τ et n sont les vecteurs unitaires tangentiel et normal respectivement.
Note : *En vertu de (2.8)et du fait que ψ est déterminé à une constance additive près, on peut choisir ψ de telle sorte que*

$$\psi = 0 \quad sur \quad \partial\Sigma$$

Démonstration

Pour la densité de l'ensemble de fonctions régulières, il suffit de démontrer la relation suivante

$$v \in C^1(\Sigma), \nabla \cdot v = 0 \ \text{ dans } \Sigma \to \exists\, \varphi \in C^2(\Sigma), \quad rot\ \varphi = v \ \text{ dans } \Sigma.$$

cette propriété est un résultat classique, voir[3] page 251.

On démontre maintenant la deuxième partie du théorème

On a

$$v = rot\psi = \begin{pmatrix} \partial_z\psi \\ -\partial_r\psi \end{pmatrix}$$

$\tau = \begin{pmatrix} -n_z \\ n_r \end{pmatrix}$ et $n = \begin{pmatrix} n_r \\ n_z \end{pmatrix}$.

en effet, comme $v \in H_0^1(\Sigma)$ alors

$$v \cdot \tau \mid_{\partial\Sigma} = 0$$

ce qui implique que

$$v \cdot \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{pmatrix} = 0$$

c'est-à-dire

$$v \cdot \begin{pmatrix} -n_z \\ n_r \end{pmatrix} = 0$$

et d'aprés (2.7) on a

$$rot\,\psi \cdot \begin{pmatrix} -n_z \\ n_r \end{pmatrix} = 0$$

ce qui nous donne

$$-\partial_z\psi\, n_z - \partial_r\psi\, n_r = 0$$

qui implique

$$\partial_z\psi\, n_z + \partial_r\psi\, n_r = 0$$

d'où

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} = 0 \;\text{ sur }\; \partial\Sigma$$

w_θ est nulle définies ci-dessus, le système (3.1) s'écrira donc comme suit

$$\begin{cases} -\nu\left(\dfrac{\partial^2 w_r}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial w_r}{\partial r}-\dfrac{1}{r^2}w_r+\dfrac{\partial^2 w_r}{\partial z^2}\right)+\partial_r p=f_r \qquad \text{dans } \Sigma, \\ -\nu\left(\dfrac{\partial^2 w_z}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial w_z}{\partial r}+\dfrac{\partial^2 w_z}{\partial z^2}\right)+\partial_z p=f_z \qquad \text{dans } \Sigma, \\ \dfrac{\partial}{\partial r}w_r+\dfrac{w_r}{r}+\dfrac{\partial}{\partial z}w_z=0 \qquad \text{dans } \Sigma, \\ (w_r,w_z)=(0,0) \qquad \text{sur } \Gamma. \end{cases} \tag{3.2}$$

Par la suite, on présente une nouvelle forme du problème de Stokes (3.1) basée sur une formulation nommée formulation fonction courant-tourbillon. L'avantage de cette technique est que les nouvelles inconnues sont des fonctions scalaires, ce qui rend la discrétisation du problème moins coûteuse numériquement.

Proposition 3.1 *Une fonction u de $L^2(\Sigma,\mathbb{R}^2)$ satisfait :*

$$div_r u = 0 \qquad u\cdot n = 0 \quad sur \quad \Gamma$$

alors , il existe une fonction courant ψ de $V_1^1(\Sigma)$ telle que :

$$u = rot_r\psi \tag{3.3}$$

où

$$rot_r\psi = \left(\partial_z\psi, -\frac{1}{r}(\partial_r(r\psi))\right)^t$$

Cette fonction courant ψ est uniquement déterminée à une constante additive près.

Démonstration

Rappelons que

$$div_r u = \partial_r w_r + \frac{1}{r} w_r + \partial_z w_z$$

du troisième ligne du système (3.2), on peut écrire

$$\partial_r w_r + \frac{1}{r} w_r + \partial_z w_z = 0 \qquad \text{dans } \Sigma \tag{3.4}$$

on multiple (3.4) par r on obtient

$$r\partial_r w_r + w_r + r\partial_z w_z = 0$$

ce qui nous donne

$$\partial_r(rw_r) + \partial_z(rw_z) = div(ru) = 0. \tag{3.5}$$

donc, le vecteur $ru = (rw_r, rw_z)^t \in L_1^2(\Sigma, \mathbb{R}^2)$ est de divergence nul.
D'aprés le lemme 2.2 (la formule de divergence), on aura

$$\begin{aligned} \int_\Sigma div(ru) \;\; drdz &= \int_\Gamma (ru) \cdot nds \\ &= \langle (ru) \cdot n, 1 \rangle_\Gamma. \end{aligned} \tag{3.6}$$

De (3.5) et (3.6), on obtient

$$\langle (ru) \cdot n, 1 \rangle_\Gamma = 0 \tag{3.7}$$

à partir du théorème 2.1, il existe une fonction $\varphi \in H_1^1(\Sigma)$ associé à ru dite fonction courant, telle que

$$ru = rot \;\; \varphi \tag{3.8}$$

où

$$rot \;\; \varphi = \begin{pmatrix} \partial_z \varphi \\ -\partial_r \varphi \end{pmatrix}$$

posons $\varphi = r\psi$, on a

$$
\begin{aligned}
rot\varphi &= rot(r\psi) = \begin{pmatrix} \partial_z(r\psi) \\ -\partial_r(r\psi) \end{pmatrix} \\
\Rightarrow rot\varphi &= r\begin{pmatrix} \partial_z\psi \\ -\partial_r\psi - \frac{1}{r}\psi \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} \partial_z\psi \\ -\frac{1}{r}(\partial_r(r\psi)) \end{pmatrix} \qquad (3.9)
\end{aligned}
$$

De (3.8) et (3.9), on aura

$$
ru = rot(r\psi) = r\begin{pmatrix} \partial_z\psi \\ -\frac{1}{r}(\partial_r(r\psi)) \end{pmatrix}
$$

$$
\rightarrow \begin{cases} w_r = \partial_z\psi \\ w_z = -\frac{1}{r}(\partial_r(r\psi)) \end{cases}
$$

ou encore

$$
u = rot_r\psi \qquad (3.10)
$$

d'où le resultat.■

On introduit un nouveau inconnue ω appelée **tourbillon** définie comme le rot de la vitesse u :

$$
\omega = rotu, \qquad (3.11)
$$

en effet

$$
\begin{aligned}
\omega = rot\,u \quad &\Leftrightarrow \quad \omega = \partial_r w_z - \partial_z w_r \\
&\Rightarrow \quad rot_r\omega = rot_r(\partial_r w_z - \partial_z w_r)
\end{aligned}
$$

d'où

$$
\begin{aligned}
rot_r(\partial_r w_z - \partial_z w_r) &= \left(\partial_z(\partial_r w_z - \partial_z w_r), \frac{-1}{r}\partial_r(r(\partial_r w_z - \partial_z w_r))\right) \\
&= \left(\partial_z\partial_r w_z - \partial_z^2 w_r, \frac{-1}{r}(\partial_r w_z - \partial_z w_r + r\partial_r^2 w_z - r\partial_r\partial_z w_r)\right) \\
&= \left(\partial_z\partial_r w_z - \partial_z^2 w_r, -\partial_r^2 w_z - \frac{1}{r}\partial_r w_z + \frac{1}{r}\partial_z w_r + \partial_r\partial_z w_r\right)
\end{aligned}
$$

en utilisant les reletions (3.3),(3.11), (3.12), (3.13) et le théorème2.1, le problème (3.2), où les inconnues sont la vitesse u et la pression p, implique le systeme :

$$\begin{cases} \nu\, rot_r\omega + grad\, p = f, & \text{dans } \Sigma \\ \omega = -\Delta_r\psi, & \text{dans } \Sigma \\ \psi = 0 & \text{sur } \Gamma \\ \frac{\partial\psi}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases} \tag{3.14}$$

où les inconnues sont la fonction courant définie à partir du relation (3.3), la fonction tourbillon ω définie par (3.11) et la pression p.

3.3 La formulation courant-tourbillon du problème de Stokes :

Pour étudier le problème de Stokes dans la formulation courant-tourbillon, on va premièrement réduire les inconnues, c'est à dire découpler la vitesse u de la pression p dans le but d'éliminer cette dernière. la première équation du problème (3.14) est écrite sous la forme :

$$\nu\left(\partial_z\omega, \frac{-1}{r}\partial_r(r\omega)\right) + (\partial_r p, \partial_z p) = (f_r, f_z)$$

qui est équivalant aux équations

$$\begin{cases} \nu\partial_z\omega + \partial_r p = f_r \\ -\nu\frac{1}{r}\partial_r(r\omega) + \partial_r p = f_z \end{cases} \tag{3.15}$$

On dérive la première équation du système (3.15) par rapport à z et la deuxième par rapport à r. on obtient

$$\begin{cases} \nu\partial_z^2\omega + \partial_z\partial_r p = \partial_z f_r \\ \nu\partial_r\left(\frac{1}{r}\partial_r(r\omega)\right) + \partial_r\partial_z p = \partial_r f_z \end{cases} \tag{3.16}$$

et on soustrait la deuxième équation du système (3.16) de la première pour avoir

$$\nu\partial_z^2\omega + \nu\partial_r\left(\frac{1}{r}\partial_r(r\omega)\right) = \partial_z f_r - \partial_r f_z$$

c'est à dire que

$$\nu\left(\partial_r^2\omega + \frac{1}{r}\partial_r^2\omega - \frac{1}{r^2}\omega + \partial_z^2\omega\right) = \partial_z f_r - \partial_r f_z \tag{3.17}$$

ou simplement

$$\Delta_r\omega = \frac{-1}{\nu}rot f \tag{3.18}$$

La relation (3.18) permet d'écrire le problème (3.14) d'une façon plus simple comme suit :

$$\begin{cases} \Delta_r\omega = \frac{-1}{\nu}rot\, f & \text{dans } \Sigma \\ \omega = -\Delta_r\psi & \text{dans } \Sigma \\ \psi = 0 & \text{sur } \Gamma \\ \frac{\partial\psi}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases} \tag{3.19}$$

3.3.1 Étude de La formulation courant-tourbillon du problème de Stokes :

On pose

$$X = \{\theta \in L_1^2(\Sigma), \Delta_r\theta \in V^{-1}(\Sigma)\} \tag{3.20}$$

où $V^{-1}(\Sigma)$ est le dual de $V_{1,0}^1(\Sigma)$

On va chercher la fonction tourbillonω dans$X$ défini en (3.20) et la fonction courant ψ dans $V_{1,0}^1(\Omega)$ On multiplie la première équation du problème (3.19) par une fonction μ de $V_{1,0}^1(\Sigma)$ et on intègre sur Σ par rapport à la mesure $rdrdz$.

On obtient alors

$$(\Delta_r\omega,\mu)_{L^2_1(\Sigma)} = \frac{-1}{\nu}(rot\, f,\mu)_{L^2_1(\Sigma)} \qquad \text{pour} \quad \mu \in V^1_{1,0}(\Sigma) \tag{3.21}$$

où

$$\begin{aligned}
(rot\, f,\mu)_{L^2_1(\Sigma)} &= (\partial_r f_z - \partial_z f_r,\mu)_{L^2_1(\Sigma)}\\
&= (\partial_r f_z,\mu)_{L^2_1(\Sigma)} - (\partial_z f_r,\mu)_{L^2_1(\Sigma)}\\
&= -(f_z,\frac{1}{r}\partial_r(r\mu))_{L^2_1(\Sigma)} + (f_r,\partial_z\mu)_{L^2_1(\Sigma)} \qquad car \mu \in \quad V^1_{1,0}(\Sigma)\\
&= (f, rot_r\mu)_{L^2_1(\Sigma)}
\end{aligned}$$

Alors, de (3.21) il résulte que

$$(\Delta_r\omega,\mu)_{L^2_1(\Sigma)} = \frac{-1}{\nu}(f, rot_r\mu)_{L^2_1(\Sigma)} \qquad \text{pour} \quad \mu \in V^1_{1,0}(\Sigma) \tag{3.22}$$

De même, si on multiple la deuxième équation du problème (3.19) par la fonction φ de X, il resulte que :

$$(-\Delta_r\psi,\varphi)_{L^2_1(\Sigma)} = (\omega,\varphi)_{L^2_1(\Sigma)} \qquad \text{pour} \quad \varphi \in X \tag{3.23}$$

d'où,

$$\begin{aligned}
(-\Delta_r\psi,\varphi)_{L_1^2(\Sigma)} &= -(\partial_r^2\psi+\frac{1}{r}\partial_r\psi-\frac{1}{r^2}\psi+\partial_z^2\psi,\varphi)_{L_1^2(\Sigma)}\\
&= -(\partial_z^2\psi,\varphi)_{L_1^2(\Sigma)}-(\frac{1}{r}\partial_r\psi,\varphi)_{L_1^2(\Sigma)}+(\frac{1}{r^2}\psi,\varphi)_{L_1^2(\Sigma)}-(\partial_r^2\psi,\varphi)_{L_1^2(\Sigma)}\\
&= (\partial_z\psi,\partial_z\varphi)_{L_1^2(\Sigma)}+(\frac{1}{r}\psi,\partial_r\varphi)_{L_1^2(\Sigma)}+(\frac{1}{r^2}\psi,\varphi)_{L_1^2(\Sigma)}+(\partial_r\psi,\frac{1}{r}\partial_r(r\varphi))_{L_1^2(\Sigma)}\\
&= -(\psi,\partial_z^2\varphi)_{L_1^2(\Sigma)}+(\psi,\frac{1}{r}\partial_r\varphi)_{L_1^2(\Sigma)}+(\psi,\frac{1}{r^2}\varphi)_{L_1^2(\Sigma)}-(\psi,\frac{1}{r}\partial_r^2(r\varphi))_{L_1^2(\Sigma)}\\
&= -(\psi,\frac{1}{r}\partial_r^2(r\varphi)-\frac{1}{r}\partial_r\varphi-\frac{1}{r^2}\varphi+\partial_z^2\varphi)_{L_1^2(\Sigma)}\\
&= -(\psi,\frac{1}{r}\partial_r\varphi+\frac{1}{r}\partial_r\varphi+\partial_r^2\varphi-\frac{1}{r}\partial_r\varphi-\frac{1}{r^2}\varphi+\partial_z^2\varphi)_{L_1^2(\Sigma)}\\
&= -(\psi,\partial_r^2\varphi+\frac{1}{r}\partial_r\varphi-\frac{1}{r^2}\varphi+\partial_z^2\varphi)_{L_1^2(\Sigma)}\\
&= -(\psi,\Delta_r\varphi)_{L_1^2(\Sigma)}
\end{aligned}$$

alors (3.23) s'écrit :

$$(\omega,\varphi)_{L_1^2(\Sigma)}+(\Delta_r\varphi,\psi)_{L_1^2(\Sigma)}=0 \qquad \text{pour} \quad \varphi\in X \tag{3.24}$$

Réciproquement, en prenant μ dans $D(\Sigma)$ pour (3.22) et φ dans $D(\Sigma)$ pour (3.24).

On trouve la première équation et la deuxième du problème (3.19) au sens des distributions.

les conditions aux limites de cet problème étant assurées par l'appartenance de ψ à l'espace $V_{1,0}^1(\Sigma)$.

On peut étendre les relations (3.22) et (3.24) à toute les fonctions μ de $V_{1,0}^1(\Sigma)$ pour la première et φ de X pour la deuxième par la densité de $D(\Sigma)$ dans$V_{1,0}^1(\Sigma)$, aussi dans X.

On remarque que le problème (3.19) peut s'écrire dans la version faible sous la forme variationnelle suivante

$$\begin{cases} \text{trouver } \omega \text{ dans } X \text{ et } \psi \text{ dans } V^1_{1.0}(\Sigma) \text{ tels que :} \\ \forall \varphi \in X, (\omega, \varphi)_{L^2_1(\Omega)} + (\Delta_r \varphi, \psi)_{L^2_1(\Sigma)} = 0 \\ \forall \mu \in V^1_{1,0}(\Sigma),\ (\Delta_r \omega, \mu)_{L^2_1(\Sigma)} = \frac{-1}{\nu}(f, rot_r \mu)_{L^2_1(\Sigma)} \end{cases} \tag{3.25}$$

ou encore

$$\begin{cases} \text{trouver } \omega \text{ dans } X \text{ et } \psi \text{ dans } V^1_{1,0}(\Sigma) \text{ tels que :} \\ \forall \varphi \in X,\ a(\omega, \varphi) + b(\varphi, \psi) = 0 \\ \forall \mu \in V^1_{1,0}(\Sigma),\ b(\omega, \mu) = \frac{-1}{\nu}(f, rot_r \mu)_{L^2_1(\Sigma)} \end{cases} \tag{3.26}$$

avec $a(.,.)$ et $b(.,.)$ définies par :

$$a(\omega, \varphi) = (\omega, \varphi)_{L^2_1(\Sigma)} \qquad \text{pour } \varphi \in X \text{ et } \omega \in X$$

$$b(\omega, \mu) = (\Delta_r \omega, \mu)_{L^2_1(\Sigma)} \qquad \text{pour } \mu \in M \text{ et } \omega \in X$$

où $M = V^1_{1,0}(\Sigma)$, X est l'ensemble défini dans (3.20).

Chapitre 4

Perspective

Ce que nous avons établi dans les chapitres précedents constitue la base de la formulation courant-tourbillon du problème de Stokes. Sur cette base on pourrait même essayer d'établir l'existence et l'unicité de la solution du problème. A ce propos, dans [5] Mme Gasmi propose la stratégie suivante de l'étude :

Pour démontrer l'existence et l'unicité d'une solution ω, ψ du problème (3.25), il faudra démontrer les hypothèses suivantes

Soient X et M deux espaces de Hilbert

1. La forme bilinéaire $a(.,.)$ est continue sur $X \times X$ de norme $\| \cdot \|_X$et vérifie la propriété d'éllipticité pour une constante $\alpha > 0$.

$$a(v, v) \geq \alpha \parallel v \parallel_X^2 \qquad \text{pour} \quad v \in X$$

2. La forme bilinéaire $b(.,.)$ est continue sur $X \times M$ et vérifie la condition $\inf - \sup$ pour une constante $\beta > 0$:

$$\forall q \in M, \sup_{0 \neq v \in X} \frac{b(v, q)}{\|v\|_X} \geq \beta \parallel q \parallel_M$$

où β appelé constante de condition inf − sup tel que :

$$\beta = \inf_{0\neq\mu\in M} \sup_{0\neq\varphi\in X} \frac{b(\varphi,\mu)}{\|\varphi\|_X\|\mu\|_M}$$

donc, pour tout élément $f \in X'$ le problème (3.26) admet une solution unique(ω,ψ) dans $X \times M$

de plus, cette solution vérifie :

$$\|\omega\|_X \leq \frac{1}{\alpha}\|f\|_{X'} \text{ et } \|\psi\|_M \leq \frac{1}{\beta}(1+\frac{\gamma}{\alpha})\|f\|_{X'}$$

Pour compléter l'étude du problème de Stokes dans la formulation courant-tourbillon, on essayera à montrer l'existence et l'unicité de la pression p donnée par la première équation du problème (3.14) :

$$v\, rot_r\omega + grad\, p = f \Longleftrightarrow grad\, p = f - v\, rot_r\omega \qquad (4.1)$$

On suppose que la donnée f est un élément de $L^2_1(\Sigma,\mathbb{R}^2)$, et ω dans X solution avec ψ du problème(3.19)

En multipliant (4.1) par le gradient d'une fonction q de $H^1_1(\Sigma)$ et intégrant surΣ par rapport à la mesure $rdrdz$, on aboutira :

$$(grad\, p, grad\, q)_{L^2_1(\Sigma)} = (f, grad\, q)_{L^2_1(\Sigma)} - v\,(rot_r\omega, grad\, q)_{L^2_1(\Sigma)} \qquad (4.2)$$

Si on cherche la solution p de (4.2) dans l'espace $H^1_1(\Sigma)$, il est claire que cette solution p n'est définie qu'à une constante près, on va donc lui imposer d'être à moyenne nulle pour assurer son unicité, c'est à dire d'appartenir à l'espace $H^1_1(\Sigma) \cap L^2_{1,0}(\Sigma)$

alors, le problème sur la pression pourra être écrit sous la forme variationnelle :

$$\begin{cases} \text{trouver } p \text{ dans } H_1^1(\Sigma) \cap L_{1.0}^2(\Sigma) \text{tel que :} \\ \forall q \in H_1^1(\Sigma), \\ (grad\, p, grad\, q)_{L_1^2(\Sigma)} = (f, grad\, q)_{L_1^2(\Sigma)} - v\,(rot_r\omega, grad\, q)_{L_1^2(\Sigma)}\,. \end{cases} \tag{4.3}$$

L'étude de ce problème est basé sur les propriétés de la forme bilinéaire $a'(.,.)$ définie par :

$$a'(.,.) = (grad\, p, grad\, q)_{L_1^2(\Sigma)} \qquad \text{pour} \quad p, q \in H_1^1(\Sigma)$$

pour démontrer l'existence et l'unicité de la pression p, il faudra démontrer l'hypothèse suivante

La forme bilinéaire $a'(.,.)$ sera continue sur$H_1^1(\Sigma) \times H_1^1(\Sigma)$:

$\exists c > 0, \forall p, q \in H_1^1(\Sigma)$,

$$|a'(p,q)| \leq c\|p\|_{H_1^1(\Sigma)}\|q\|_{H_1^1(\Sigma)}$$

et vérifiera la condition suivante sur $H_1^1(\Sigma)$:

$\exists \alpha > 0, \forall p \in H_1^1(\Sigma)$

$$|a'(p,p)| \geq \alpha\|p\|^2_{H_1^1(\Sigma)}$$

donc pour une donnée f de $L_1^2(\Sigma, \mathbb{R}^2)$ et ω de X, avec ψ l'unique solution du problème (3.19) , le problème (4.3) admet une solution unique p qui vérifie :

$$\|p\|_{H_1^1(\Sigma)\backslash\mathbb{R}} \leq c\|f\|_{L_1^2(\Sigma)}$$

Pour conclure, pour une donnée f de $L_1^2(\Sigma, \mathbb{R}^2)$, nous pourrons espérer que le problème (3.14) dit problème de Stokes dans la formulation courant-tourbillon qui s'écrit :

$$\begin{cases} v\, rot_r \omega + gard\, p = f & \text{dans}\Sigma \\ \omega = -\Delta_r \psi & \text{dans}\Sigma \\ \psi = 0 & \text{sur}\Gamma \\ \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 & \text{sur}\Gamma \end{cases}$$

admette une unique solution faible (ω, ψ, p) dans $X \times V^1_{1,0}(\Sigma) \times (H^1_1(\Sigma) \cap L^2_{1,0}(\Sigma))$ qui vérifie :

$$\parallel \omega \parallel_X + \parallel \psi \parallel_{V^1_1(\Sigma)} + \parallel p \parallel_{H^1_1(\Sigma)\setminus\mathbb{R}} \leq c \parallel f \parallel_{L^2_1(\Sigma)} \qquad (4.4)$$

Bibliographie

[1] H.Brézis : *Analyse fonctionnelle, Théorie et application.* édition Dunod. 1999.

[2] L.Landau, E.Lifchitz : *Physique théorique,Mécanique des fluides* .Tome 6.(*traduit de russe*). éditions MIR Moscou 1989.

[3] V.Smirnov : *cours de mathématiques supérieures* . Tome 2 éditions Mir Moscou. 1989.

[4] A.Soltani : *Étude de quelques formulations variationnelles du problème de Stokes* . Mémoire Magister. l'université Badji Mokhtar Annaba. 2008.

[5] S.Gasmi : *Approximation spectrale pour un problème axi-symétrique* . Mémoire Magister. centre universitaire Souk Ahras. 2007.