République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 – Guelma

Faculté de Mathématiques et de l'Informatique et Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire de Fin d'Etude
Master Académique en Mathématiques
Option : Probabilités et Applications

THEME

Fiabilité des Systèmes Parallèle- Série

Présenté par :

Chelihi Rachid

Jury :

Président : Bekhouche Saadi.
Rapporteur : Bouhadjar Slimane.
Examinateur : Youssfi Assma.

Session Juin 2012

Table des matières

Introduction

Dans la théorie de la fiabilité, l'étude d'un système, consiste soit à calculer (ou approximer) sa fiabilité (ou sa probabilité de panne) par des techniques probabilistes, ou algorithmiques ou bien à trouver un encadrement de celle-ci lorsque la configuration du système est trop compliquée. On s'intéresse également au calcul de la limite (lorsque la taille du système augmente indéfiniment) de la fiabilité, ce qui pourrait être aussi utilisé comme approximation de la fiabilité du système quand sa taille est suffisamment grande.

Pour des systèmes dont la configuration est en série ou en parallèle des travaux approfondis ont donné lieu à des résultats très développés (voir [1]).

Dans ce travail, nous nous intéressons à des systèmes dont la configuration est compliquée ; un montage en parallèle de blocs constitués d'élément disposés linéairement et qui opèrent selon un système en série. Nous les appelons systèmes parallèle-série.

Donc un système parallèle-série tombe en panne si et seulement si tous les blocs sont en panne, et chaque bloc tombe en panne si au moins un parmi ses composant est en panne. Dans le cas où les composants sont indépendants et identiquement distribués, Krzysztof Kolowrocki en 1991[3] à montrer que pour des systèmes en parallèle série il n'existe que trois types de lois asymptotiques possibles pour leur fiabilité :

$$R_1(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0 \\ 1 - \exp(-x^{-\alpha}) & x > 0, \quad \alpha > 0 \end{cases}.$$

$$R_2(x) = \begin{cases} 1 - \exp(-(-x))^{\alpha} & x < 0, \quad \alpha > 0 \\ 0 & x \geq 0, \end{cases}.$$

$$R_3(x) = 1 - \exp(-\exp(-x)), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Plus précisément, nous allons d'abord présenter quelques propriétés déterministes de ce système, ensuite nous allons établir un résultat asymptotique concernant la fiabilité du système.

Ce mémoire est composé de deux parties :

Dans la première, on expose, d'une façon brève, les notions de base de la fiabilité et les systèmes en série et en parallèle.

Dans la deuxième, qui est le font de ce travail, nous traitons d'une façon précise les systèmes parallèle-série. On commence par définir ces systèmes, ensuite on présente quelques résultats obtenus, concernant ce type des systèmes.

Chapitre 1

Notions générales sur la fiabilité.

Dans ce chapitre on donne quelques définitions qu'on utilisera par la suite, et on rappelle brièvement quelques résultats sur les systèmes en série et les systèmes en parallèle.

1.1 Définitions :

1.1.1 Durée de vie d'un système :

Le terme de système au sens large, il peut n'avoir qu'un composant. Ce système est mis en marche à la date $t = 0$ et il s'agit d'évaluer la date de première défaillance que nous noterons, dans la suite, T. C'est une variable aléatoire positive de fonction de répartition F.

La variable T est appelée la durée de vie (life time) du système (ou bien le temps de défaillance du système).

On a :

$$F(t) = P(T \leq t).$$

1.1.2 Fiabilité d'un système :

La fiabilité (reliability) d'un système est notée R. C'est la probabilité de la durée de vie de bon fonctionnement du système.

$$\begin{aligned} R(t) &= P(T > t) \\ &= 1 - F(t). \end{aligned}$$

Remarque :

La fonction de fiabilité R est une fonction décroissante continue à droite en tout point de $\mathbb{R}_+$.

De plus, on a :

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} R(x) = 0.$$

1.1.3 Distribution limite :

Soit $X_1, X_2, ...X_n$ et X des variables aléatoires réelles définies sur le même espace probabilisé (Ω, B, p), telles que $F_1, F_2, ...F_n$ et F sont leurs fonctions de répartitions respectivement. La distribution F est dite distribution limite de la suite F_n, s'ils existent a_n et $b_n \in \mathbb{R}$ telles que :

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} (a_n x + b_n) = F(x), \; x \in C_F,$$

où C_F est l'ensemble de continuité de F.

Considérons maintenant un système de n élément (composants), en supposant que tous les composants sont indépendants. On précise qu'un composant ne possède que deux états ; il fonctionne ou il est en panne.

Si X_i est l'état du composant i, on pose :

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{si le } i^{eme} \text{ composant fonctionne} \\ 0, & \text{si le } i^{eme} \text{ composant est en panne.} \end{cases}$$

Cette dichotomie est valable aussi pour le système,

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1, & \text{si le système fonctionne,} \\ 0, & \text{si le système est en panne.} \end{cases}$$

La fonction Φ est appelée fonction de structure du système.

Alors, on déduit que la fiabilité du système peut s'écrire :

$$\begin{aligned} R &= P(\Phi(x) = 1) \\ &= E(\Phi(x)). \end{aligned}$$

1.2 Système en série :

Un système en série est un système composé de n composants disposés linéairement. Ce système tombe en panne si au moins un composant est en panne.

* La fonction de structure du système est donnée par :

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= \min_{1\leq i\leq n} X_i \\ &= \prod_{i=1}^{n} X_i,\end{aligned}$$

où $X_1, X_2, ..., X_n$. sont les états respectifs des composants $1, 2, ..., n$.

* Le temps de panne (la durée de vie) du système est donné par :

$$T = \min_{1\leq i\leq n} T_i,$$

où T_i est le temps de panne du composant i, $i = 1, 2, ..., n$.

* La fiabilité R est le produit des fiabilités,

$$R(t) = \prod_{i=1}^{n} R_i(t),$$

où $R_i(t)$ est la fiabilité du composant $i, i = 1, 2, ..., n$.
En effet, on a :

$$\begin{aligned}R(t) &= P(T > t) \\ &= P(\min_{1\leq i\leq n} T_i > t) \\ &= P(T_1 > t, T_2 > t, ..., T_n > t) \\ &= \prod_{i=1}^{n} P(T_i > t),\end{aligned}$$

puisque on a supposé que les composants sont indépendants.
Donc,

$$R(t) = \prod_{i=1}^{n} R_i(t).$$

1.3 Système en parallèle :

Un système en parallèle est composé de n éléments (composants) disposés en parallèle, tels que le système tombe en panne, si et seulement si tous les composants sont en panne.

* La fonction de structure du système est donnée par :

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= \max_{1\leq i\leq n} X_i \\ &= 1-\prod_{i=1}^{n}(1-X_i).\end{aligned}$$

* Le temps de panne du système est donné par :

$$T=\max_{1\leq i\leq n} T_i.$$

* La fiabilité est donnée par :

$$R(t)=1-\prod_{i=1}^{n}(1-R_i(t)).$$

où $R_i(t)$ est la fiabilité du composant $i, i=1,2,...,n$.

En effet, on a :

$$\begin{aligned}R(t) &= P(T>t) \\ &= 1-P(T\leq t) \\ &= 1-P(\max_{1\leq i\leq n} T_i\leq t) \\ &= 1-P(T_1\leq t, T_2\leq t, ..., T_n\leq t) \\ &= 1-[P(T_1\leq t), P(T_2\leq t), ...P(T_n\leq t)] \\ &= 1-[(1-P(T_1>t)), (1-P(T_2>t)), ..., (1-P(T_n>t))] \\ &= 1-\prod_{i=1}^{n}[1-P(T_i>t)].\end{aligned}$$

Donc,

$$R(t)=1-\prod_{i=1}^{n}(1-R_i(t)).$$

Chapitre 2

Lois asymptotiques du système parallèle-série.

Ce chapitre est le font du travail, premièrement on va étudier le système parallèle-série dans le cas où tous les composants sont indépendants et identiquement distribués, deuxièment on va donner les trois types de lois asymptotiques possibles pour la fiabilité de ce système ; c'est un résultat démontré par Krzysztof Kolowrocki en1991. (voir [3]). Plus précisément on va calculer les limites de la fiabilité du système quand sa taille augmente indéfiniment ; c'est à dire on va trouver les lois limites possibles de la fiabilité quand le nombre des composants du système tend vers l'infini.

2.1 Notions et définitions

On note par E_{ij} où $i = 1, 2, ..., k, \quad j = 1, 2, ..., l_i$ l'ensemble des composants d'un système parallèle-série (noté S) et par X_{ij} la durée de vie du composant E_{ij}.

Dans tous ce chapitre, on considère que toutes les variables aléatoires X_{ij} sont indépendantes est identiquement distribuées.

Définition 1 :

Un système S est dit parallèle - série s'il est composé de k blocs disposés en parallèle tels que chaque bloc i, où $i = 1, 2, ..., k$, est formé de l_i composants en série.

Alors un système parallèle - série tombe en panne si tous les blocs sont en panne, et un bloc tombe en panne si au moins un parmi ces composants est en panne.

Définition 2 :
Un système parallèle - série S est dit régulier si

$$l_1 = l_2 = ...l_k = l.$$

Définition 3 :
Un système parallèle - série régulier est dit homogène si toutes les variables aléatoires X_{ij} où $i = 1, 2, ..., k$, $j = 1, 2, ..., l_i$, ont la même fonction de répatition $F(x)$, c'est à dire tous les composants E_{ij} ont la même fonction de fiabilité

$$R(x) = 1 - F(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

2.2 Etude du système parallèle - série.

2.2.1 Durée de vie.

On note les blocs du système parallèle-série par $C_i, i = 1, 2, ..., k$, et on note par Y_i la durée de vie de chaque bloc numéro i .

Le système S tombe en panne si tous les blocs C_i sont en panne. Si on note par X la durée de vie du système S, on obtient :

$$X = \max_{1 \leq i \leq k} Y_i.$$

Maintenant, le bloc C_i tombe en panne si au moins un parmi ses composants E_{ij}, $j = 1, 2, ..., l$ est en panne,
donc

$$X = \min_{1 \leq j \leq l} X_{ij}.$$

Alors,

$$X = \max_{1 \leq i \leq k} \left\{ \min_{1 \leq j \leq l} \{X_{ij}\} \right\}.$$

2.2.2 Fiabilité du système :

Considérons un système S parallèle - série régulier et homogène et supposons que $k = k_n$ et $l = l_n$ tels que k_n ou l_n tend vers l'infini avec n.

Théorème 1 :
La fiabilité d'un système parallèle - série régulier, homogène est donnée par :

$$\mathbf{R}_n = 1 - [1 - (R(x))^{l_n}]^{k_n}, \quad x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \tag{1}$$

Preuve :
On sait que, la fiabilité d'un système de composants en parallèle est :

$$\mathbf{R}(x) = 1 - \left[\prod_{i=1}^{l_n}(1 - R_i(x))\right],$$

c'est à dire

$$\mathbf{R}_n(x) = 1 - [(1 - R_i(x))]^{l_n},$$

car le système est régulier.

D'autre part, on a la fiabilité d'un système de composants en série est :

$$R(x) = \prod_{j=1}^{k_n} R_j(x),$$

et comme le système est de composants en parallèle - série et en plus il est régulier et homogène, on déduit que :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_n(x) &= 1 - [(1 - R(x))^{l_n}] \\ &= 1 - [(1 - (R(x))^{k_n})^{l_n}]. \end{aligned}$$

Dans la suite on remplace n par un nombre réel positif t et on suppose que k_t et l_t des réels positifs, on obtient alors une famille des systèmes correspondants au couple (k_t, l_t), donc une famille des fonctions de fiabilité.

$$\mathbf{R}_t(x) = 1 - [1 - (R(x))^{l_t}]^{k_t}, \; x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}_+. \tag{1'}$$

$*$ D'après ce qui précède, on trouve une relation explicite entre la fonction de fiabilité $R(x)$ et la fonction de distribution $F(x)$ donnée par :

$$R(x) = 1 - F(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Définition 4 :
La fonction de fiabilité $R(x)$ est dite dégénérée s'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$, tel que

$$R(x) = \begin{cases} 1, & x < x_0 \\ 0, & x \geq x_0. \end{cases}$$

Corollaire :
La fonction

$$\mathbf{R}(x) = 1 - \exp(-V(x)), \; x \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

est une fonction de fiabilité si et seulement la fonction V est non négative, non décroissante et continue à droite.

De plus on,

$$\lim_{x \to -\infty} V(x) = +\infty \qquad et \qquad \lim_{x \to +\infty} V(x) = 0.$$

Définition 5 :
Une fonction V définie sur $\mathbb{R}$, positive, croissante et continue à droite telle que :

$$\lim_{x \to -\infty} V(x) = +\infty \;\; et \;\; \lim_{x \to +\infty} V(x) = 0,$$

est dite dégénérée s'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$, tel que :

$$V(x) = \begin{cases} \infty, & x < x_0 \\ 0, & x \geq x_0. \end{cases}.$$

Corollaire :
La fonction de fiabilité $\mathbf{R}$ donnée par l'équation (3) est dégénérée si et seulement si la fonction V est dégénérée.

2.2.3 Lois asymptotiques du système.

Définition 6 :
Une fonction de fiabilité $\mathbf{R}$ est dite fonction de fiabilité asymptotique d'un système parallèle - série régulier homogène, s'il existent des constantes $a_n > 0$ et $b_n \in \mathbb{R}$, telles que :

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbf{R}_n(a_n x + b_n) = \mathbf{R}(x), \; pour\ tout\ x\ où\ \mathbf{R}\ est\ continue.$$

La suite (a_n, b_n) est appelée suite des constantes de normalisation.

Définition 6' :

Une fonction de fiabilité $\mathbf{R}$ *est dite fonction de fiabilité asymptotique de la famille* $\mathbf{R}_t(x)$*,s'il existent des fonctions* $a_t = a(t) > 0$ *et* $b_t = b(t) \in \mathbb{R}$*,telles que :*

$$\lim_{t \to +\infty} \mathbf{R}_t(a_t x + b_t) = \mathbf{R}(x), \text{ pour tout } x \text{ où } \mathbf{R} \text{ est continue.}$$

Le coupe (a_t, b_t) est appelé couple de normalisation de la fonction.

Lemme 1 :

Soit données :

1) $\mathbf{R}$ *la fonction de fiabilité donnée par* (3).
2) $\mathbf{R}_t$ *est donnée par* $(1')$.
3) $K_t \to +\infty$ *avec* $t \to +\infty$.
4) $a_t > 0, b_t \in \mathbb{R}$ *sont des fonctions.*

Alors les deux expressions :

$$\lim_{t \to +\infty} \mathbf{R}_t(a_t x + b_t) = \mathbf{R}(x), \quad x \in C_R, \tag{4}$$

et

$$\lim_{t \to +\infty} k_t(R(a_t x + b_t))^{l_t} = V(x), \quad x \in C_V,$$

sont équivalentes.

Preuve :

Daprès $(1')$, on a

$$\mathbf{R}_t(x) = 1 - [1 - (R(x))^{l_n}]^{k_t},$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$, et $t \in \mathbb{R}_+$,
donc,

$$\mathbf{R}_t(a_t x + b_t) = 1 - [1 - (R(a_t x + b_t))^{l_n}]^{k_t},$$

et on a :

$$\lim_{t \to +\infty} \mathbf{R}_t(a_t x + b_t) = \mathbf{R}(x),$$

pour $x \in C_R$, tel que :

$$\mathbf{R}(x) = 1 - \exp(-V(x)).$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\lim_{t \to +\infty} [1 - (R(a_t x + b_t))^{l_n}]^{k_t} = \exp(-V(x)).$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\ln \left\{ \lim_{t \to +\infty} [1 - (R(a_t x + b_t))^{l_n}]^{k_t} \right\} = -V(x).$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\lim_{t \to +\infty} \{\ln[1 - (R(a_t x + b_t))^{l_n}]^{k_t}\} = -V(x).$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\lim_{t \to +\infty} (k_t \ln[1 - (R(a_t x + b_t))^{l_n}]) = -V(x).$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\lim_{t \to +\infty} (k_t[-(R(a_t x + b_t))^{l_n}]) = -V(x).$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$-\lim_{t \to +\infty} k_t (R(a_t x + b_t))^{l_n} = -V(x).$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\lim_{t \to +\infty} k_t (R(a_t x + b_t))^{l_n} = V(x).$$

Lemme 2 :

Si $R_t(x)$, $t \in \mathbb{R}_+$ est une famille des fonctions de fiabilité telle que pour toute fonction $a_t > 0$, $b_t \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{t \to +\infty} R_t(a_t x + b_t) = R_0(x), \quad x \in C_{R_0}, \tag{5}$$

où R_0 est une fonction de fiabilité non dégénérée.

Alors l'expression :

$$\lim_{t \to +\infty} R_t(\alpha_t x + \beta_t) = G_0(x), \quad x \in C_{G_0}, \tag{6}$$

(où G_0 est une fonction de fiabilité non dégénérée et $\alpha_t > 0, \beta_t \in \mathbb{R}$ sont des fonctions) est vérifié si et seulement s'il existent des constantes $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$ telles que :

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\alpha_t}{a_t} = a \quad et \quad \frac{\beta_t - b_t}{a_t} = b. \tag{7}$$

De plus on a,

$$G_0(x) = R_0(ax + b), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Preuve :

Supposons que (7) est vérifié, c - à - d :

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\alpha_t}{a_t} = a \quad \text{et} \quad \frac{\beta_t - b_t}{a_t} = b.$$

On pose :

$$y = ax + b \text{ tel que } y \in C_{R_0},$$

pour $\varepsilon > 0$, et t suffisamment grand, on a :

$$y - \varepsilon < y < y + \varepsilon.$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$y - \varepsilon < \frac{\alpha_t}{a_t} x + \frac{\beta_t - b_t}{a_t} < y + \varepsilon,$$

ce qui donne :

$$\alpha_t(y - \varepsilon) + b_t < \alpha_t x + \beta_t < \alpha_t(y + \varepsilon) + b_t,$$

donc,

$$R_t(\alpha_t(y+\varepsilon)+b_t) \leq R_t(\alpha_t x+\beta_t) \leq R_t(\alpha_t(y-\varepsilon)+b_t),$$

(puisque R_t est non croissante).
Alors,

$$\begin{aligned}\lim_{t\to+\infty} R_t(\alpha_t(y+\varepsilon)+b_t) &\leq \lim_{t\to+\infty} R_t(\alpha_t x+\beta_t)\\ &\leq \lim_{t\to+\infty} R_t(\alpha_t(y-\varepsilon)+b_t).\end{aligned}$$

D'après (5) on déduit que :

$$\begin{aligned}R_0(y+\varepsilon) &\leq \lim_{t\to+\infty} R_t(\alpha_t x+\beta_t)\\ &\leq R_0(y-\varepsilon),\ \varepsilon>0.\end{aligned}$$

Il résulte que R_t est converge vers une fonction notée G_0, c - à - d

$$\lim_{t\to+\infty} R_t(\alpha_t x+\beta_t) = G_0(x),$$

donc (6) est vérifiée, de plus, on a :

$$\begin{aligned}R_0(y+\varepsilon) &\leq G_0(x)\\ &\leq R_0(y-\varepsilon),\ \varepsilon>0,\end{aligned}$$

ça implique que

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to+\infty} R_0(y+\varepsilon) &\leq G_0(x)\\ &\leq \lim_{\varepsilon\to+\infty} R_0(y-\varepsilon),\ \varepsilon>0.\end{aligned}$$

Comme $y \in C_{R_0}$, on déduit que :

$$\begin{aligned}R_0(\lim_{\varepsilon\to+\infty}(y+\varepsilon)) &\leq G_0(x)\\ &\leq R_0(\lim_{\varepsilon\to+\infty}(y-\varepsilon)),\ \varepsilon>0.\end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\begin{aligned}R_0(y) &\leq G_0(x)\\ &\leq R_0(y),\ \varepsilon>0,\end{aligned}$$

alors,

$$\begin{aligned} G_0(x) &= R_0(y) \\ &= R_0(ax+b). \end{aligned}$$

D'autre part, on suppose que (5) et (6) sont vérifiées,
soit $x_1$et x_2 sont deux points de continuité de G_0 (x_1, $x_2 \in C_{G_0}$) tels que :

$$x_1 < x_2 \text{ et } 0 < G_0(x_2) < G_0(x_1) < 1,$$

alors, il existe $y_1, y_2 \in C_{R_0}$ tels que :

$$R_0(y_1) > G_0(x_1) \text{ et } R_0(y_2) < G_0(x_2).$$

De (5) et (6), on obtient que :

$$\begin{aligned} a_t y_1 + b_t &\leq \alpha_t x_1 + \beta_t \\ &\leq \alpha_t x_2 + \beta_t \\ &\leq a_t y_2 + b_t, \end{aligned}$$

et on a :

$$\begin{cases} \alpha_t x_2 + \beta_t \leq a_t y_2 + b_t \\ a_t y_1 + b_t \leq \alpha_t x_1 + \beta_t \end{cases}$$
$$\Longrightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha_t x_2 + \beta_t \leq a_t y_2 + b_t .....(*) \\ -\alpha_t x_1 - \beta_t \leq -a_t y_1 - b_t \;...(**) \end{cases}$$

De (*) et (**),on a :

$$\alpha_t(x_2 - x_1) \leq a_t(y_2 - y_1).$$

$$\begin{aligned} a_t y_1 + b_t &\leq \alpha_t x_1 + \beta_t \\ &\leq \alpha_t x_2 + \beta_t \\ &\leq a_t y_2 + b_t, \end{aligned}$$

si on ajoute $(-\alpha_t x_1)$ on obtient

$$\begin{aligned} a_t y_1 - \alpha_t x_1 + b_t &\leq \beta_t \\ &\leq \alpha_t x_2 - \alpha_t x_1 + \beta_t \\ &\leq a_t y_2 - \alpha_t x_1 + b_t, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} a_t y_1 - \alpha_t x_1 &\leq \beta_t - b_t \\ &\leq \alpha_t x_2 - \alpha_t x_1 + \beta_t - b_t \\ &\leq a_t y_2 - \alpha_t x_1. \end{aligned}$$

On a :

$$\alpha_t(x_2 - x_1) \leq a_t(y_2 - y_1), \ (\alpha_t > 0)$$

$\Longrightarrow$

$$\frac{\alpha_t}{a_t}(x_2 - x_1) \leq \frac{\alpha_t}{a_t}(y_2 - y_1), \ (x_2 - x_1 > 0)$$

$\Longrightarrow$

$$0 \leq \frac{\alpha_t}{a_t} \leq \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \tag{$*$}$$

On a aussi,

$$\begin{aligned} a_t y_1 - \alpha_t x_1 &\leq \beta_t - b_t \\ &\leq a_t y_2 - \alpha_t x_2, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} y_1 - \frac{\alpha_t}{a_t} x_1 &\leq \frac{\beta_t - b_t}{a_t} \\ &\leq y_2 - \frac{\alpha_t}{a_t} x_2. \end{aligned} \tag{$*'$}$$

De $(*)$ on déduit que,

$$0 \leq \lim_{t \to +\infty} \frac{\alpha_t}{a_t} \leq \lim_{t \to +\infty} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\Longrightarrow$$

$$0 \leq \lim_{t \to +\infty} \frac{\alpha_t}{a_t} \leq \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\Longrightarrow$$

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\alpha_t}{a_t} = a, \text{ où } 0 < a < \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

donc, $\dfrac{\alpha_t}{a_t}$ est borné.

De $(*')$, on déduit que

$$\begin{aligned}\lim_{t\to+\infty}(y_1-\frac{\alpha_t}{a_t}x_1) &\leq \lim_{t\to+\infty}\frac{\beta_t-b_t}{a_t}\\ &\leq \lim_{t\to+\infty}(y_2-\frac{\alpha_t}{a_t}x_2),\end{aligned}$$

ce qui donne $\dfrac{\beta_t-b_t}{a_t}$ est borné.

Donc, il est possible de trouver une sous suite (t_n) tel que

$$\begin{aligned}\lim_{t\to+\infty}\frac{\alpha_t}{a_t} &= a\ , \quad \lim_{t\to+\infty}\frac{\beta_t-b_t}{a_t}=b\\ \text{et}\ \lim_{t\to+\infty}t_n &= +\infty.\end{aligned}$$

D'après (5) on déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty}(a_{t_n}(\frac{\alpha_{t_n}}{a_{t_n}}x+\frac{\beta_{t_n}-b_{t_n}}{a_{t_n}})+b_{t_n})=R_0(ax+b).$$

et d'après (6), on déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty}(a_{t_n}(\frac{\alpha_{t_n}}{a_{t_n}}x+\frac{\beta_{t_n}-b_{t_n}}{a_{t_n}})+b_{t_n})=\lim_{n\to+\infty}(\alpha_{t_n}x+\beta_{t_n})=G_0(x)$$

$$\Longrightarrow$$

$$G_0(x)=R_0(ax+b).$$

Lemme 3 :

Si

1) $k_t\to\infty$ *quand* $t\to+\infty$.

2) a_t *et* b_t *sont deux fonctions vérifient* $a_t>0$ *et* $b_t\in\mathbb{R}$ *telles que :*

$$\lim_{t\to+\infty}k_t(R(a_tx+b_t))^{l_t}=V(x),\quad \textit{pour tout } x\in C_V. \tag{9}$$

3) *pour tout* $\upsilon\geq 2$ *et tout* $x\in C_{V_0}$

$$\lim_{t\to+\infty}k_t(R(a_{\tau_\upsilon}x+b_{\tau_\upsilon}))^{l_t}=V_0(x), \tag{10}$$

où $\tau_\upsilon=\tau_\upsilon(t)$, $t\in\mathbb{R}_+$ $\tau_\upsilon\in\mathbb{R}_+$, *et* $R(x)$ *est une fonction de fiabilité d'un composant quelconque d'un système parallèle - série régulier homogène.* $V(x),V_0(x)$ *sont deux fonctions non dégénérées (Déf 5).*

Alors,
il existe $\alpha_v > 0, \beta_v \in \mathbb{R}$ *tel que pour tout* $x \in \mathbb{R}$,

$$V_0(x) = V(\alpha_v x + \beta_v). \tag{11}$$

Preuve :
Soit R_t la famille de fiabilité d'un système parallèle - série régulier homogène.
Donc,

$$R_t = 1 - \left[1 - (R(x))^{l_t}\right]^{k_t},$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
\lim_{t \to +\infty} R_t(a_t x + b_t) &= \lim_{t \to +\infty} 1 - \left[1 - (R_t(a_t x + b_t))^{l_t}\right]^{k_t} \\
&= 1 - \lim_{t \to +\infty} \left[1 - (R_t(a_t x + b_t))^{l_t}\right]^{k_t} \\
&= 1 - \lim_{t \to +\infty} \exp(\ln \left[1 - (R_t(a_t x + b_t))^{l_t}\right]^{k_t}) \\
&= 1 - \exp(\lim_{t \to +\infty} \ln \left[1 - (R_t(a_t x + b_t))^{l_t}\right]^{k_t}) \\
&= 1 - \exp(\lim_{t \to +\infty} k_t \ln \left[1 - (R_t(a_t x + b_t))^{l_t}\right]) \\
&= 1 - \exp(\lim_{t \to +\infty} k_t \ln(-R_t(a_t x + b_t))^{l_t}) \\
&= 1 - \exp(-\lim_{t \to +\infty} k_t \ln(R_t(a_t x + b_t))^{l_t}) \\
&= 1 - \exp(-V(x)) \\
&= R(x)\ ,
\end{aligned}$$

où

$$R(x) = 1 - \exp(-V(x).$$

On a :

$$R_t = 1 - \left[1 - (R(x))^{l_t}\right]^{k_t},$$

et

$$\lim_{t \to +\infty} k_t(R_t(a_{t_{\tau_0}} x + b_{t_{\tau_0}}))^{l_t} = V_0(x),$$

alors,

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to+\infty} R_t(a_{t_{\tau_0}}x+b_{t_{\tau_0}})^{l_t} &= 1-\lim_{t\to+\infty}\left[1-(R_t(a_{t_{\tau_0}}x+b_{t_{\tau_0}}))^{l_t}\right]^{k_t} \\
&= 1-\lim_{t\to+\infty}\exp(k_t\ln(1-(R_t(a_{t_{\tau_0}}x+b_{t_{\tau_0}}))^{l_t} \\
&= 1-\lim_{t\to+\infty}\exp(k_t(-(R_t(a_{t_{\tau_0}}x+b_{t_{\tau_0}}))^{l_t} \\
&= 1-\exp(-\lim_{t\to+\infty}(k_t((R_t(a_{t_{\tau_0}}x+b_{t_{\tau_0}}))^{l_t} \\
&= 1-\exp(-V_0(x)) \\
&= R_0(x),
\end{aligned}$$

et

$$R_0(x)=1-\exp(-V_0(x)), \tag{12}$$

et le lemme 2 permet de prouver la relation (11).

Définition 7 :

Les fonctions de fiabilités $\mathbf{R}_0(x)$ *et* $\mathbf{R}(x)$ *sont dites de même type s'il existe* $a>0$, $b\in\mathbb{R}$ *tels que* $\mathbf{R}_0(x)=\mathbf{R}(ax+b)$, *pour tout* $x\in\mathbb{R}$.

Définition 8 :

Les fonctions $V_0(x)$ *et* $V(x)$ *avec les propriétés de la définition 5 sont dites de même type s'il existent* $a>0$ *et* $b\in\mathbb{R}$ *tels que* $V_0(x)=V(ax+b)$ *pour tout* $x\in\mathbb{R}$.

Lemme 4 :

Si

1) $k_t\to\infty$ *quand* $t\to+\infty$.

2) $a_t>0$, $b_t\in\mathbb{R}$ *sont des fonctions.*

Alors d'après l'expression :

$$\lim_{t\to+\infty}\mathbf{R}_t(a_tx+b_t)=\mathbf{R}(x), \qquad x\in C_{\mathbf{R}}. \tag{13}$$

(où $\mathbf{R}(x)$ *est une fonction de fiabilité non dégénérée donnée par l'équation* (3) vérifiée *pour tout naturel* $\upsilon\geq 2$ *et tout* $x\in C_V$), on a :

$$\lim_{t\to+\infty} k_{t_\tau}k_t^{-(l_{t_\tau}/l_t)}\left[k_t(R(a_{t_\tau}x+b_{t_\tau}))^{l_t}\right]^{(l_{\tau_\upsilon}/l_t)}=V(x). \tag{14}$$

où $\tau_v = \tau_v(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, $\tau_v \in \mathbb{R}_+$, $\tau_v \to \infty$ quand $t \to +\infty$, et $V(x)$ est une fonction non dégénérée dans le sens de la définition 5.

Preuve :
D'après l'équation (13) on a :

$$\lim_{t\to+\infty} R_t(a_t x + b_t) = R(x), x \in C_R,$$

et d'après le lemme (1) on a :

$$\lim_{t\to+\infty} k_t(R(a_t x + b_t))^{l_t} = V(x),$$

d'où, pour $v \geq 2$, on déduit que :

$$\lim_{t\to+\infty} k_{t_\tau}(R(a_{t_\tau} x + b_{t_\tau}))^{l_{\tau_v}} = V(x).$$

Donc,

$$\begin{aligned}
k_{t_\tau}(R(a_{t_\tau} x + b_{t_\tau}))^{l_{\tau_v}} &= k_{t_\tau}\left[(R(a_{t_\tau} x + b_{t_\tau}))^{l_t(l_{\tau_v}/l_t)}\right] \\
&= k_{t_\tau}\left[(R(a_{t_\tau} x + b_{t_\tau}))^{l_t}\right]^{(l_{\tau_v}/l_t)} \\
&= k_{t_\tau} k_t^{-(l_{t_\tau}/l_t)} k_t^{l_{t_\tau}/l_t}\left[(R(a_{t_\tau} x + b_{t_\tau}))^{l_t}\right]^{(l_{\tau_v}/l_t)} \\
&= k_{t_\tau} k_t^{-(l_{t_\tau}/l_t)}\left[k_t(R(a_{t_\tau} x + b_{t_\tau}))^{l_t}\right]^{(l_{\tau_v}/l_t)}.
\end{aligned}$$

Alors,

$$\lim_{t\to+\infty} k_{t_\tau} k_t^{-(l_{t_\tau}/l_t)}\left[k_t(R(a_{t_\tau} x + b_{t_\tau}))^{l_t}\right]^{(l_{\tau_v}/l_t)} = V(x).$$

Lemme 5 :
Si
1) $k_t = t$, $\quad l_t \sim c(\ln t)^\rho$, où $\quad c > 0$, $0 \leq \rho \leq 1, t \in \mathbb{R}_+$.
2) La fonction de fiabilité non dégénérée $\mathbf{R}(x)$ donnée par l'équation (3) est la limite d'un système parallèle - série régulier homogène.
Alors, pour tout $v \geq 2$, il existent des réels $\alpha_v > 0, \beta_v \in \mathbb{R}$, tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$v^{1-\rho} V(\alpha_v x + \beta_v) = V(x). \tag{15}$$

Lemme 6 :

Les seules possibles formes pour que la fonction non dégénérée $V(x)$ soit la solution de l'équation (15) sont :

$$V_1(x) = \begin{cases} \infty, & x < x_0. \\ w_1(x), \ 0 < w_1(x) < \infty, x > x_0, \text{ où } & x_0 = \dfrac{\beta_v}{1-\alpha_v} \end{cases} \tag{16}$$

$$V_2(x) = \begin{cases} w_2(x), & 0 < w_2(x) < \infty, x < x_0. \text{ où } \ x_0 = \dfrac{\beta_v}{1-\alpha_v}. \\ 0, & x > x_0, \end{cases} \tag{17}$$

et

$$V_3(x) = w_3(x), \text{où } 0 < w_3(x) < \infty, \ \text{pour } x \in \mathbb{R}. \tag{18}$$

où $w_1(x), w_2(x), w_3(x)$ sont des fonctions décroissantes et continues à droite. En outre, une fonction de la forme $V_1(x)$ est une solution de l'équation (15) si et seulement si $\alpha_v > 1$,pour tout $v \geq 2$; une fonction de la forme $V_2(x)$ est une solution de l'équation (15) si et seulement si $\alpha_v < 1$,pour tout $v \geq 2$; et une fonction de la forme $V_3(x)$ est une solution de l'équation (15) si et seulement si $\alpha_v = 1$,pour tout $v \geq 2$;

Définition 9 :

Une fonction positive $u(x)$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, varie régulièrement à l'infini s'il existe $r \in \mathbb{R}$, tel que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{u(tx)}{u(t)} = x^r.$$

Le nombre r est appelé la puissance de la variation régulière de $u(x)$.

Lemme 7 :

Une fonction monotone positive $u(x)$ définie pour $x \in \mathbb{R}_+$, varie régulièrement si et seulement s'il existent des suites de termes positifs d_v et c_v avec :

$$\lim_{v \to +\infty} \frac{d_{v+1}}{d_v} = 1. \tag{19}$$

$$\lim_{v \to +\infty} c_v = \infty. \tag{20}$$

telles que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$\lim_{v \to +\infty} d_v u\left(c_v x\right) = f\left(x\right),$$

En outre,

$$\frac{f(x)}{f(1)} = x^r,$$

pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, *où* $r \in \mathbb{R}$, *est la puissance de la variation régulière de* $u(x)$.

Théorème 2 :
Si

$$k_t = t, \quad l_t \sim c(\ln t)^\rho, \text{ où } c > 0, 0 \leq \rho \leq 1, t \in \mathbb{R}_+. \tag{21}$$

Alors, les seules fonctions limites possibles pour la fiabilité d'un système parallèle - série régulier homogène sont :

$$\mathbf{R}_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } x \leq 0 \\ 1 - \exp\left[-x^{-\alpha}\right] & \text{pour } x > 0, \text{ ou } \alpha > 0 \end{cases}. \tag{22}$$

$$\mathbf{R}_2(x) = \begin{cases} 1 - \exp\left[-(-x)^{\alpha}\right] & \text{pour } x < 0, \text{ ou } \alpha > 0 \\ 0 & \text{pour } x \geq 0 \end{cases}. \tag{23}$$

et

$$\mathbf{R}_3(x) = 1 - \exp\left[-\exp(-x)\right] \quad \textit{pour} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{24}$$

Preuve :
Considérons que,
$k_t = t, \quad l_t \sim c(\ln t)^\rho$, où $c > 0, 0 \leq \rho \leq 1, t \in \mathbb{R}_+$,
et

$$\mathbf{R}(x) = 1 - \exp(-V(x)) \tag{A.1}$$

est la limite de la fiabilité d'un système parallèle - série.
D'après le lemme 5, on a :

$$v^{1-\rho} V(\alpha_v x + \beta_v) = V(x), \text{ pour tout } v \geq 2 \text{ et } x \in \mathbb{R}. \tag{A.2}$$

V est de la forme V_1 si $\alpha > 1 (\forall v \geq 2)$, ou de la forme V_2 si $\alpha < 1 (\forall v \geq 2)$, ou de la forme V_3 si $\alpha < 1 (\forall v \geq 2)$.

1^{er} **cas :**
Si $\alpha > 1$ ($\forall \upsilon \geq 2$), d'après $(A.2)$ et l'équation (16) on :

$$\upsilon^{1-\rho}V(\alpha_\upsilon x + \beta_\upsilon) = w_1(x), \text{ pour } \upsilon \geq 2 \text{ et } x > x_0,$$

et si on prend $\beta_\upsilon = 0$, on trouve que, $x_0 = 0$, et :

$$\upsilon^{1-\rho}w_1(\alpha_\upsilon x) = w_1(x). \tag{A.3}$$

$$V_1(x) = \begin{cases} \infty, & x < 0 \\ w_1(x), & x > 0, 0 < w_1(x) < +\infty. \end{cases} \tag{A.4}$$

Alors, on déduit que $w_1$est décroissante, positive et que

$$w_1(\infty) = 0 \text{ et } \lim_{\upsilon \to +\infty} \upsilon^{1-\rho} = +\infty.$$

D'après (A.3) $\quad (\upsilon^{1-\rho}w_1(\alpha_\upsilon x) = w_1(x))$,
on déduit que :

$$w_1(\alpha_\upsilon x) = \frac{w_1(x)}{\upsilon^{1-\rho}}$$
$$\Longrightarrow$$

$$\begin{aligned} \lim_{\upsilon \to +\infty} w_1(\alpha_\upsilon x) &= \lim_{\upsilon \to +\infty} \frac{w_1(x)}{\upsilon^{1-\rho}} \\ &= \frac{w_1(x)}{\lim_{\upsilon \to +\infty} \upsilon^{1-\rho}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} (\lim_{\upsilon \to +\infty} w_1(\alpha_\upsilon x) &= 0) \Longleftrightarrow w_1(\lim_{\upsilon \to +\infty} \alpha_\upsilon x) = 0 \\ &\Longrightarrow \lim_{\upsilon \to +\infty} \alpha_\upsilon x = +\infty \\ &\Longrightarrow x \lim_{\upsilon \to +\infty} \alpha_\upsilon = +\infty \\ &\Longrightarrow \lim_{\upsilon \to +\infty} \alpha_\upsilon = +\infty, \end{aligned}$$

donc,

$$\lim_{\upsilon \to +\infty} \alpha_\upsilon = +\infty. \tag{A.5}$$

De plus, on a :

$$(\upsilon^{1-\rho} w_1(\alpha_\upsilon x) = w_1(x))$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\begin{aligned} \lim_{\upsilon \to +\infty} \upsilon^{1-\rho} w_1(\alpha_\upsilon x) &= \lim_{\upsilon \to +\infty} w_1(x) \\ &= w_1(x), \end{aligned} \tag{A.6}$$

on a aussi

$$\lim_{\upsilon \to +\infty} (\upsilon+1)^{1-\rho} w_1(\alpha_\upsilon x) = 1$$

et

$$\left(\frac{\upsilon+1}{\upsilon}\right)^{1-\rho} \longrightarrow 1 \text{ quand } \upsilon \to +\infty.$$

On pose, $c_\upsilon = \alpha_\upsilon$ et $d_\upsilon = \upsilon^{1-\rho}$.

D'après le lemme 7, on déduit que $w_1(x)$ est varie régulièrement, puisque on a :

$$\begin{aligned} \lim_{\upsilon \to +\infty} d_\upsilon w_1(c_\upsilon x) &= \lim_{\upsilon \to +\infty} \upsilon^{1-\rho} w_1(\alpha_\upsilon x) \\ &= w_1(x). \end{aligned}$$

Comme w_1 varie régulièrement (d'après la définition9), on déduit qu'il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\lim_{\upsilon \to +\infty} \frac{w_1(\alpha_\upsilon x)}{w_1(\alpha_\upsilon)} = x^r,$$

donc

$$\begin{aligned} x^r &= \lim_{\alpha_\upsilon \to +\infty} \frac{w_1(\alpha_\upsilon x)}{w_1(\alpha_\upsilon)} \\ &= \lim_{\upsilon \to +\infty} \frac{w_1(\alpha_\upsilon x)}{w_1(\alpha_\upsilon)}, \end{aligned}$$

puisqu'on a :

$$\upsilon \to +\infty \implies \alpha_\upsilon \to +\infty.$$

Alors,

$$\begin{aligned} x^r &= \lim_{\upsilon \to +\infty} \frac{\upsilon^{1-\rho}}{\upsilon^{1-\rho}} \frac{w_1(\alpha_\upsilon x)}{w_1(\alpha_\upsilon)} \\ &= \frac{w_1(x)}{w_1(1)}, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} w_1(x) &= x^r.w_1(1) \\ &= ax^r. \end{aligned}$$

D'après (A.4) on a :

$$w_1(x) = a.x^r > 0,$$

comme $w_1$décroissante on déduit que $r = -\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}_+$),
donc,

$$w_1(x) = a.x^{-\alpha}, \alpha > 0, a > 0.$$

En fin, d'après le résultat de l'équation (A.4) et la définition (6), on trouve que :

$$V_1(x) = \begin{cases} \infty & x < 0 \\ x^{-\alpha} & x > 0, \alpha > 0. \end{cases}$$

$2^{ème}$ **cas :**

Si $\alpha_\upsilon < 1$, pour tout $\upsilon \geq 2$, alors d'après les équations, (A.2) et (17), on trouve que :

$$\upsilon^{1-\rho} w_2(\alpha_\upsilon x + \beta_\upsilon) = w_2(x), \text{ pour } \upsilon \geq 2 \text{ et } x < x_0,$$

si on prend $\beta_\upsilon = 0$, on trouve que,$x_0 = 0$ et :

$$\upsilon^{1-\rho} w_2(\alpha_\upsilon x) = w_2(x). \tag{A.7}$$

Pour $\upsilon \geq 2$ et $x \in (-\infty, 0)$, on a :

$$V_2(x) = \begin{cases} w_2(x), & x < 0, 0 < w_2(x) < +\infty. \\ 0, & x > 0 \end{cases}, \tag{A.8}$$

on a aussi,

$$\upsilon^{1-\rho} w_2(\alpha_\upsilon x) = w_2(x),$$

si on prend $x = \frac{1}{\alpha_\upsilon}(-x)$ et on substituons dans l'équation (A.7), on trouve que :

$$\tilde{w}_2(x) = \upsilon^{\rho-1}\tilde{w}_2(\frac{1}{\alpha_\upsilon}(x)), \tag{A.9}$$

puisque, on ait

$$\upsilon^{1-\rho}w_2(\alpha_\upsilon(\frac{1}{\alpha_\upsilon}(-x))) = w_2(\frac{1}{\alpha_\upsilon}(-x)),$$

c- à - d,

$$\upsilon^{1-\rho}w_2(-x)) = w_2(\frac{1}{\alpha_\upsilon}(-x))$$
$$\Longrightarrow$$
$$w_2(-x) = \frac{1}{\upsilon^{1-\rho}}w_2(\frac{1}{\alpha_\upsilon}(-x)).$$

On pose :

$$\tilde{w}_2(x) = w_2(-x). \tag{A.10}$$

alors,

$$\tilde{w}_2(x) = \upsilon^{\rho-1}\tilde{w}_2(\frac{1}{\alpha_\upsilon}(x)).$$

Comme $\tilde{w}_2(x)$ est une fonction positive, décroissante, $\tilde{w}_2(x) < \infty$ pour $x \in \mathbb{R}_+$, $\lim_{x\to+\infty} \tilde{w}_2(x) = \infty$ et comme $\lim_{\upsilon\to+\infty} \upsilon^{\rho-1} = 0$, on déduit que

$$\lim_{\upsilon\to+\infty} = \frac{1}{\alpha_\upsilon}, \tag{A.11}$$

de plus d'après (A.9) on a :

$$\tilde{w}_2(x) = \lim_{\upsilon\to+\infty} \upsilon^{\rho-1}\tilde{w}_2(\frac{1}{\alpha_\upsilon}(x)), \tag{A.12}$$

donc :

$$\tilde{w}_2(\frac{1}{\alpha_\upsilon}(x)) = \frac{\tilde{w}_2(x)}{\upsilon^{\rho-1}}$$
$$\Longrightarrow$$
$$\begin{aligned}
\lim_{\upsilon\to+\infty} \tilde{w}_2(\frac{1}{\alpha_\upsilon}(x)) &= \lim_{\upsilon\to+\infty} \frac{\tilde{w}_2(x)}{\upsilon^{\rho-1}} \\
&= \frac{\tilde{w}_2(x)}{\lim_{\upsilon\to+\infty} \upsilon^{\rho-1}} \\
&= \infty.
\end{aligned}$$

Alors,

$$\lim_{v\to+\infty}\tilde{w}_2(\frac{1}{\alpha_v}(x))=\infty \iff \tilde{w}_2(\lim_{v\to+\infty}(\frac{1}{\alpha_v}(x)))=\infty,$$

$$\Longrightarrow \lim_{v\to+\infty}(\frac{1}{\alpha_v}(x)=\infty,$$

$$\Longrightarrow \lim_{v\to+\infty}\frac{1}{\alpha_v}=\infty.$$

donc

$$\tilde{w}_2(x)=v^{\rho-1}\tilde{w}_2(\frac{1}{\alpha_v}(x)).$$

De plus, on a :

$$(v^{\rho-1}\tilde{w}_2(\frac{1}{\alpha_v}(x)))=\tilde{w}_2(x) \iff \lim_{v\to+\infty}(v^{\rho-1}\tilde{w}_2(\frac{1}{\alpha_v}(x)))=\lim_{v\to+\infty}\tilde{w}_2(x)$$

$$\iff \lim_{v\to+\infty}\tilde{w}_2(x)=\tilde{w}_2(x),$$

on a aussi

$$\left(\frac{v+1}{v}\right)^{1-\rho}\longrightarrow 1 \quad \text{quand} \quad v\to+\infty.$$

On pose,

$$c_v=\frac{1}{\alpha_v} \quad et \quad d_v=v^{\rho-1},$$

d'après le lemme 7, on déduit que $\tilde{w}_2(x)$ est varie régulièrement ; il existe alors $r\in\mathbb{R}$ tel que :

$$\lim_{v\to+\infty}\frac{\tilde{w}_2(\alpha'_v x)}{\tilde{w}_2(\alpha'_v)}=x^r,$$

et pour $\alpha'_v=\frac{1}{\alpha_v}$, on trouve que :

$$x^r=\lim_{\frac{1}{\alpha_v}\to+\infty}\frac{\tilde{w}_2(\frac{1}{\alpha_v}x)}{\tilde{w}_2(\frac{1}{\alpha_v})},$$

alors,

$$\begin{aligned}
x^r &= \lim_{\frac{1}{\alpha_v}\to+\infty} \frac{\tilde{w}_2(\frac{1}{\alpha_v}x)}{\tilde{w}_2(\frac{1}{\alpha_v})} \\
&= \lim_{v\to+\infty} \frac{\tilde{w}_2(\frac{1}{\alpha_v}x)}{\tilde{w}_2(\frac{1}{\alpha_v})} \\
&= \lim_{v\to+\infty} \frac{v^{\rho-1}}{v^{\rho-1}} \frac{\tilde{w}_2(\frac{1}{\alpha_v}x)}{\tilde{w}_2(\frac{1}{\alpha_v})} \\
&= \frac{\tilde{w}_2(x)}{\tilde{w}_2(1)}.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\tilde{w}_2(x) = \tilde{w}_2(1)x^r \quad \text{pour} \quad x \in (0, \infty),$$

d'après l'équation (A.10), on trouve que :

$$w_2(x) = w_2(-1)(-x)^r = a(-x)^r \quad \text{pour} \quad x \in (-\infty, 0),$$

et d'après l'équation (A.8), on trouve que :

$$a = w_2(-1) > 0.$$

Comme w_2 est une fonction décroissante, on déduit que $r = \alpha$ tel que $\alpha > 0$.

En fin, on a :

$$w_2(x) = a(-x)^\alpha \quad \text{pour} \quad x \in \mathbb{R}, \; a > 0, \alpha > 0,$$

donc, d'après le résultat de l'équation (A.8) et la définition (6), on trouve que :

$$V_2(x) = \begin{cases} (-x)^\alpha, & x < 0, \alpha > 0 \\ 0, & x > 0, \end{cases}$$

alors, d'après l'équation (A.1) et la continuité à droite de fonction de fiabilité, on trouve que $\mathbf{R}(x)$ est donnée par l'équation (23).

$3^{ème}$ **cas :**

Si $\alpha_v = 1$, pour tout $v \geq 2$, alors d'après les équations (A.2) et (18), on trouve que :

$$v^{1-\rho}V_3(x+\beta_v) = V_3(x) \text{ pour } x \in \mathbb{R}, \tag{A.13}$$

on a, $\lim\limits_{v \to +\infty} v^{1-\rho} = \infty$ et V_3 est une fonction décroissante, alors :

$$\lim_{v \to +\infty} \beta_v = \infty. \tag{A.14}$$

On substitue dans l'équation (A.13)

$$z = e^x \quad \text{pour} \quad x \in \mathbb{R}, \tag{A.15}$$

$\alpha_v = e^{\beta_v}$ pour $v \geq 2$ et

$$H(z) = V_3(\ln z) \quad \text{pour} \quad z \in (0, \infty), \tag{A.16}$$

on trouve que :

$$v^{1-\rho}H(\alpha_v z) = H(z) \qquad \text{pour} \quad z \in (0, \infty), \tag{A.17}$$

donc,

$$v^{1-\rho}V_3(x+\beta_v) = V_3(x)$$

$$\Longrightarrow$$

$$v^{1-\rho}V_3(\ln z + \ln \alpha_v) = V_3(\ln z),$$

on obtient

$$v^{1-\rho}H(\alpha_v z) = H(z).$$

Alors le résultat précédent est identique avec l'équation (A.3), et si on précède comme dans le 1^{er} cas, on obtient :

$$H(z) = az^{-\alpha}, \text{ pour } z \in \mathbb{R}_+, \text{ tel que } a > 0, \alpha < 0,$$

en utilisant (A.15) et (A.17), on trouve que :

$$V_3(x) = H(e^x) = ae^{-\alpha x}, \text{ pour } x \in \mathbb{R}, a > 0, \alpha < 0.$$

D'après la définition(8), V_3 est de type $V_3(x) = e^{-x}, x \in \mathbb{R}$, donc, de (A.1) on conclut que $\mathbf{R}(x)$ est donnée par l'équation (24).

Exemple : *Soit S un système parallèle série régulier homogène tel que :*

$$R(x) = \begin{cases} 1 & x \leq 0 \\ 1 - \exp[-Ax^{-B}], x > 0, A > 0, B > 0, & \end{cases} \tag{25}$$

si les couples (k_t, l_t) et (a_t, b_t) vérifient les conditions :

(i) $\lim\limits_{t \longrightarrow \infty} k_t = \infty, l_t = C, C > 0,$ *pour* $t \in (0, \infty)$.

(ii) $b_t = 0, a_t = (k_t A^C)^{1/BC}$ *pour* $t \in (0, \infty)$.

Alors la fonction de fiabilité

$$\mathbf{R}_1(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0 \\ 1 - \exp[-x^{-BC}], & x > 0 \end{cases}$$

est la limite de la fonction de fiabilité du système S.

Preuve :

Comme $a_t > 0$, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, alors on a :

$$R(a_t x + b_t) = R(a_t x) \quad \text{car } b_t = 0.$$

On remplace dans l'équation (25), on trouve que

$$R(a_t x) = \begin{cases} 1 & x \leq 0 \\ 1 - \exp[-A(a_t x)^{-B}], & x > 0, \end{cases}$$

d'aprés l'équation (1′), on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_t(a_t x + b_t) &= \mathbf{R}_t(a_t x) \\ &= \begin{cases} 1 & x \leq 0 \\ 1 - [1 - (R(a_t x))^C]^{k_t} & x > 0, \end{cases} \end{aligned}$$

donc,

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} \mathbf{R}_t(a_t x + b_t) = 1, \text{pour} \quad x \leq 0,$$

Pour $x > 0$, on a

$$\begin{aligned} \lim_{t \longrightarrow \infty} a_t x &= \lim_{t \longrightarrow \infty} (k_t A^C)^{1/BC} x, \\ &= (A^C)^{1/BC} x \lim_{t \longrightarrow \infty} (k_t)^{1/BC}, \\ &= \infty, \end{aligned}$$

donc,

$$\begin{aligned}
\lim_{t\longrightarrow\infty} \exp[-A(a_tx)^{-B}] &= \exp[-A \lim_{t\longrightarrow\infty}(a_tx)^{-B}] \\
&= \exp[-A\frac{1}{\lim_{t\longrightarrow\infty}(a_tx)^{B}}] \\
&= \exp(-\infty) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

D'ou pour tout $x > 0$ et t suffisamment grand, on a :

$$\begin{aligned}
\exp(-A(a_tx)^{-B}) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{[-A(a_tx)^{-B}]^k}{k!} \\
&= 1 - \frac{A(a_tx)^{-B}}{1!} + \frac{A(a_tx)^{-2B}}{2!} - \frac{A(a_tx)^{-3B}}{3!} + \ldots \\
&= 1 - A(a_tx)^{-B} + \sum_{k'=0}^{+\infty}\left[\frac{A(a_tx)^{2k'B}}{2k'!} - \frac{A(a_tx)^{(2k'+1)B}}{(2k'+1)!}\right].
\end{aligned}$$

Et comme

$$\sum_{k'=0}^{+\infty}\left[\frac{A(a_tx)^{2k'B}}{2k'!} - \frac{A(a_tx)^{(2k'+1)B}}{(2k'+1)!}\right] \geq 0,$$

on conclut que :

$$1 - A(a_tx)^{-B} \leq \exp[-A(a_tx)^{-B}] \qquad (*)$$

et

$$\exp[-A(a_tx)^{-B}] \leq 1 - A(a_tx)^{-B}[1 - \frac{1}{2}A(a_tx)^{-B}], \qquad (**)$$

de $(*)$ et $(**)$, on trouve que :

$$\begin{aligned}
1 - A(a_tx)^{-B} &\leq \exp[-A(a_tx)^{-B}] \\
&\leq 1 - A(a_tx)^{-B}[1 - \frac{1}{2}A(a_tx)^{-B}].
\end{aligned}$$

On a d'après le dernier résultat et l'équation (25) :

$$A(a_t x)^{-B} \geq 1 - \exp[-A(a_t x)^{-B}] \geq A(a_t x)^{-B}[1 - \frac{1}{2}A(a_t x)^{-B}],$$

d'où,

$$A(a_t x)^{-B}[1 - \frac{1}{2}A(a_t x)^{-B}] \leq R(a_t x) \leq A(a_t x)^{-B}.$$

Pour tout $x > 0$, on a : $\lim_{t \longrightarrow \infty} \exp[-A(a_t x)^{-B}] = 1$, on déduit que :

$$\begin{aligned} \lim_{t \longrightarrow \infty} k_t (R(a_t x))^C &= \lim_{t \longrightarrow \infty} (k_t A^C) a_t^{-BC} x^{-BC} \\ &= x^{-BC}. \end{aligned}$$

D'après, le lemme 1, on a :

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} \mathbf{R}_t (a_t x + b_t) = 1 - \exp[-x^{-BC}], \text{ pour } x > 0.$$

Donc, $\mathbf{R}_1(x)$ est la limite de la fonction de fiabilité du système S.

Bibliographie

[1] **Barlow**, R. F. and **Proschan, F.** "*Statistical theory of Reliability and life Testing. Probability Models*", Holt Rinehart and Winston, New York 1975.

[2] **Jean-Louis BON**, " *Fiabilité des Systèmes Méthodes Mathématiques* " Masson.

[3] **Krzysztof Kolowrocki,** " *On a class of limit reliability functions of some regular homogenous series-parallel systems* " Reliability Engineering and System Safety 39 (1993), 11 – 23.