République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 – Guelma

Faculté de Mathématiques et de l'Informatique et Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire de Fin d'Etude
Master Académique en Mathématiques
Option : EDP

THEME

Processus de coagulation-fragmentation

Présenté par :
BATAH Meriem

Dirigé par : H. Fujita Yashima	**Prof**	**Univ. Guelma**
Jury :		
Président : F.Ellaggoune	**MCA**	**Univ-Guelma**
Examinateur : A.Berrahail	**MCA**	**Univ-Guelma**

Session Juin 2012

❄ *Remerciment* ❄

Au nom d'Allah, le tout miséricordieux,

le très miséricordieux

La reconnaissance est la mémoire du cœur

≼ LE GRAND MERCI POUR ALLAH ≽

En préambule à ce mémoire, je souhaite adresser mes remerciements les plus sincères aux personnes qui m'ont apporté leur aide et qui ont contribué à l'élaboration de ce mémoire ainsi qu'à la réussite de cette formidable année universitaire.

Je remercier du fond du cœur ❤ **mes parents** ❤ *et* ❤ *mon mari* ❤ *pour leurs contribution, leurs soutien et leurs patience durant toutes mes études et qui m'ont toujours aidé et encouragé aux moments opportuns .*

Je tiens à remercier sincèrement le prof. Hisao Fujita Yashima qui en tant que Directeur de mémoire, s'est toujours montré à l'écoute et très disponible tout au long de la réalisation de ce mémoire, ainsi pour l'inspiration, l'aide et le temps qu'il a bien voulu me consacrer et sans qui ce mémoire n'aurait jamais vu le jour.

Mes remerciements s'adressent également à Monsieur Dr. Aissaoui Med Zine : directeure du Laboratoire de Mathématiques appliquées et de modélisation, (LMAM), pour sa générosité et la grande patience dont il a su faire preuve malgré ses charges académiques et professionnelles.

J'adresse également mes remerciements, à tous mes enseignants, qui m'ont donnés les bases de la science. Ensuite, je souhaite remercier l'ensemble *du laboratoire (LMAM) ; leur accueil chaleureux et leur aide précieuse ont contribué fortement à l'aboutissement de ce travail.*

Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à tous mes proches, amis et collegues de qui m'ont toujours soutenue et encouragée.

☺**Merci à tous et à toutes.**

Table des matières

Résumé

Dans ce mémoire on propose l'etude de l'équation de coagulation et fragmentation dans le cas stationnaire avec l'absence du mouvement de l'air. Il s'agit d'une équation intégro-différentielle. Aprés avoir fait quelques remarques sur le comportement des opérateur intégraux de coagulation et de fragmentation, on construit les solutions approchées.

Chapitre 1

Introduction :

Le processus de coagulation et de fragmentation se reduise dans la dynamique de croissance de la grappe est de décrire la mécanismes par lesquels les gouttelettes peuvent s'unir pour former de plus grandes goutelettes ou se fragmentent en plus petites gouttelettes. Ces processus sont remplies dans une varieté de contextes physiques.

Dans ce présent travail nous allons considérer des gouttelettes qui, se coagulent ou fragmentent avec une certaine probabilité, tombent avec une vitesse qui sera déterminée par la force gravitationnelle, la friction entre ces gouttelettes et l'air ainsi que la vitesse de ce dernier. Les gouttelettes considérées doivent être distribuées selon la masse m de chacune d'elles, tandis que la friction avec l'air, ainsi que la probabilité de coagulation, et le taux de fragmentation dépend de la masse m. Ici nous nous limitons à considérer l'état stationnaire avec l'absence du vent.

Chapitre 2

Considérations générales sur l'équation

Dans ce présent travail nous allons considérer le processus des gouttelettes qui tombent par la force gravitationnelle et subissent le processus de coagulation et celui de fragmentation. La chute des gouttelettes par la force gravitationnelle est bien connue et peut être décrite par l'équation de Newton. D'autre part, le processus de coagulation et celui de fragmentation ne sont pas très fréquemment considérés dans les études mathématiques des phénomènes physiques. Considérons deux gouttelettes de masse m_1 et de masse m_2, à cause de la tension superficielle de la surface des gouttelettes, au moment d'une éventuelle rencontre entre elles, elles s'unissent en formant une nouvelle gouttelette de masse $m_1 + m_2$, c'est le processus de coagulation. D'autre part, une gouttelette de taille plutôt grande, disons de masse m, peut se sceinder en deux parties formant deux gouttelettes de taille plus petites, de masse m_1 et de masse m_2 de telle sorte que $m_1 + m_2 = m$, c'est le processus de fragmentation.

Pour représenter ces deux processus opposés, designons par C_m une gouttelette de masse m, alors on peut écrire schématiquement (voir [4])

$$C_{m_1} + C_{m_2} \longrightarrow_{\beta(m_1,m_2)} C_m$$

$$C_m \longrightarrow_{\theta(m_1,m_2)} C_{m_1} + C_{m_2}$$

où $\beta(m_1, m_2)$ représente la probabilité de rencontre entre une gouttelette de masse m_1 et une gouttelette de masse m_2 , tandis que $\theta(m_1, m_2)$ représente le taux de fragmentation d'une gouttelette de masse m qui se sceinde en deux gouttelettes de masse m_1 et de masse $m_2 = m - m_1$.

Dans le présent travail on considère le processus de chute, de coagulation et de fragmentation dans le domaine

$$\Omega =]0, 1[= \{z \in \mathbb{R} | \ 0 < z < 1\}. \tag{2.1}$$

Désignons par $\sigma(m, z, t)$ la densité de l'eau liquide contenue dans les gouttelettes de masse m au point $z \in \Omega$ $(\subset \mathbb{R})$ à l'instant $t \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire, la masse de l'eau liquide contenue dans les gouttelettes de masse m qui se trouvent dans l'unité de volume de l'air. Le nombre, au sens purement statistique, des gouttelettes de masse m dans l'unité de volume sera alors donné par

$$\tilde{n}(m, z, t) = \frac{\sigma(m, z, t)}{m}.$$

L'utilisation de la densité de l'eau liquide $\sigma(m, z, t)$ exige que la probabilité entre les gouttelettes de masse m_1, m_2, et le taux de fragmentation soient normalisés par rapport á la masse.

On va considérer également la vitesse des gouttelettes qui se déplacent à cause de la force gravitationnelle et du mouvement de l'air dans lequel elles se trouvent. Comme l'effet de la friction entre les gouttelettes et l'air dépend sensiblement de la masse de chaque gouttelette, la vitesse des gouttelettes doit être en fonction de la masse m. Nous admettons que la vitesse $u = u(m)$ d'une gouttelette de masse m est donnée par

$$u = u(m) = v - \frac{g}{\alpha(m)}, \tag{2.2}$$

tandis que v et g, $\alpha(m)$ désignent respectivement, la vitesse de l'air, l'accélération gravitationnelle et le coefficient de friction entre les gouttelettes et l'air, la relation (2.2) correspond, dans une bonne approximation, à la vitesse réelle des gouttelettes dans l'atmosphère.

Si nous considérons la variation de $\sigma(m,z,t)$ due au déplacement avec la vitesse $u(m)$ des gouttelettes et au processus de coagulation-fragmentation, nous aurons

$$\begin{aligned} \partial_t\sigma(m,z,t) + \partial_z(\sigma(m,z,t)u(m)) = \quad & \quad (2.3)\\ = \frac{m}{2}\int_0^m \beta(m-m',m')\sigma(m,z,t)\sigma(m-m',z,t)dm' + &\\ -m\int_0^\infty \beta(m,m')\sigma(m,z,t)\sigma(m',z,t)dm' - \frac{m}{2}\int_o^m \theta(m-m',m')\sigma(m,z,t)dm' &\\ +m\int_o^\infty \theta(m,m')\sigma(m+m',z,t)dm'. & \end{aligned}$$

Dans le présent travail nous intéréssons á l'équation stationnaire. En posant

$$\partial_t\sigma(m,z,t) = 0$$

et en éliminant la dépendance de t des quantités considérés, l'équation (2.3) se reduit à

$$\partial z(\sigma(m,z)u(m)) = \tag{2.4}$$

$$= \frac{m}{2}\int_0^m \beta(m-m',m')\sigma(m',z)\sigma(m-m',z)dm' +$$

$$-m\int_0^\infty \beta(m,m')\sigma(m,z)\sigma(m',z)dm' - \frac{m}{2}\int_0^m \theta(m-m',m')\sigma(m,z)dm'$$

$$+m\int_0^\infty \theta(m,m')\sigma(m+m',z)dm'.$$

L'équation (2.4) est envisagée avec la condition

$$\sigma(m,1) = \overline{\sigma}(m). \tag{2.5}$$

Comme les gouttelettes tombent de $\{z = 1\}$ vers $\{z = 0\}$ avec la vitesse $u = u(m)$, la condition (2.5) est une condition "initiale" (ou condition d'entrée) pour les gouttelettes qui partent de la position $(z = 1)$.

En ce qui concerne la fonction $\alpha(m)$, qui représenterait l'effet de la friction entre les gouttelettes et l'air, dans le présent travail nous supposons que $\alpha(m)$ est une fonction strictement positive et suffisamment régulière (par exemple $\alpha(m) \in C^1(\mathbb{R}_+)$). Il est utile de rappeler que dans l'état normal de l'atmosphère $\alpha(m)$ est une fonction décroissante et ses valeurs varient sensiblement selon les valeurs de m. Même si l'effet de la friction (par l'unité de masse) croît rapidement quand m s'approche de 0, pour éviter le raisonnement inutilement compliqué, nous supposons que

$$\sup_{m\in\mathbb{R}_+} \alpha(m) < \infty.$$

l'absence des gouttelettes trés petite est obsèrvée par les physicien expliqués par la courbure trés elevée de la surface des gouttelettes qui provoque l'évaporation prèseque immédiate.

Pour la fonction $\beta(m_1, m_2)$ et $\theta(m_1, m_2)$nous supposons que

$$\beta(\cdot,\cdot) \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+), \qquad \beta(m_1,m_2) \geq 0 \ \ \forall (m_1,m_2) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \tag{2.6}$$

Chapitre 3

Cas de l'absence du fragmentation

On rappelle que dans la Nature, à cause de la courbure très élevée de la surface, les gouttelettes très petites s'évaporent immédiatement (voir par exemple [5], [6]) et que d'autre part les gouttelettes très grandes se fragmentent à cause de la friction avec l'air environnant. Pour cela, dans ce chapitre nous nous intéressons à la fonction de densité $\sigma(m, z)$ avec m entre deux extrémités $\overline{m}_a$ et $\overline{m}_A$,

$$0 < \overline{m}_a \leq m \leq \overline{m}_A < \infty.$$

et supposons que

$$\beta(m_1, m_2) = 0 \qquad \text{pour} \;\; m_1 + m_2 \geq \overline{m}_A. \tag{3.1}$$

Dans ce cas notre équation est de la forme suivante :

$$-\partial_z(\sigma(m,z)\frac{g}{\alpha(m)}) = \frac{m}{2}\int_0^m \beta(m-m',m')\sigma(m',z)\sigma(m-m',z)dm' + \tag{3.2}$$
$$-m\int_0^\infty \beta(m,m')\sigma(m,z)\sigma(m',z)dm',$$

$$\sigma(m,1) = \overline{\sigma}(m). \tag{3.3}$$

Comme $\alpha(m)$ ne dépend pas de z, l'équation (3.2) peut être écrite dans la forme

$$\begin{aligned}\partial_z \sigma(m,z) = -\frac{m\alpha(m)}{2g}\int_0^m \beta(m-m',m')\sigma(m',z)\sigma(m-m',z)dm' + \quad (3.4)\\ +\frac{m\alpha(m)}{g}\int_0^\infty \beta(m,m')\sigma(m,z)\sigma(m',z)dm'.\end{aligned}$$

Avant de nous occuper de la solution du problème (3.2)–(3.3), rappelons une propriété importante de l'opérateur intégral figurant au second membre de (3.2).

Lemme 3.1. *Soit $\beta(\cdot,\cdot)$ la fonction introduite dans le paragraphe précédent. Alors, quelque soit $\sigma(\cdot) \in L^1(\mathbb{R}_+)$, on a*

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{m}{2}\int_0^m \beta(m-m',m')\sigma(m')\sigma(m-m')dm'dm + \quad (3.5)\\ -\int_0^\infty m\int_0^\infty \beta(m,m')\sigma(m)\sigma(m')dm'dm = 0.\end{aligned}$$

Démonstration. On note

$$\begin{aligned}J(m) = \int_0^\infty \frac{m}{2}\int_0^m \beta(m-m',m')\sigma(m-m')\sigma(m')dm'dm-\\ -\int_0^\infty m\int_0^\infty \beta(m,m')\sigma(m)\sigma(m')dm'dm.\end{aligned}$$

En faisant le changement de variables

$$q = m - m', \quad r = m',$$

dont le déterminant jacobien est égal à 1, donc on a

$$J(m) = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{q+r}{2}\beta(q,r)\sigma(q)\sigma(r)drdq - \int_0^\infty m \int_0^\infty \beta(m,m')\sigma(m)\sigma(m')dm'dm,$$

comme m, m', q et r sont des variables arbitraires on a :

$$\begin{aligned}
J(m) &= \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{q+r}{2}\beta(q,r)\sigma(q)\sigma(r)drdq - \int_0^\infty \int_0^\infty q\beta(q,r)\sigma(q)\sigma(r)dqdr \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{r-q}{2}\beta(q,r)\sigma(q)\sigma(r)drdq \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{m'-m}{2}\beta(m,m')\sigma(m)\sigma(m')dm'dm \\
&= -\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{q-r}{2}\beta(q,r)\sigma(q)\sigma(r)drdq \\
&= -\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{r-q}{2}\beta(r,q)\sigma(r)\sigma(q)dqdr
\end{aligned}$$

Par conséquent, compte tenu de la symétrie de la fonction β

$$\beta(q,r) = \beta(r,q),$$

on a

$$J(m) = -\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{r-q}{2}\beta(q,r)\sigma(q)\sigma(r)drdq$$

d'où

$$J(m) = -J(m) \quad \Longrightarrow \quad J(m) = 0.$$

□

Proposition 3.1. *Soit* $\overline{\sigma}(\cdot) \in L^1(\mathbb{R}_+)$ *avec* $\operatorname{supp}(\overline{\sigma}) \subset [\overline{m}_a, \overline{m}_A]$. *Alors le problème* (3.2)–(3.3) *admet une unique solution* $\sigma \in C([0,1]; L^1(\mathbb{R}_+))$ *(c'est-à-dire, l'application* $z \longmapsto \sigma(\cdot, z)$ *est une fonction continue de* $[0,1]$ *à valeurs dans* $L^1(\mathbb{R}_+)$*).*

Démonstration. Pour résoudre le problème (3.2)–(3.3), on considère $\sigma(\cdot, z)$ comme élément de $L^1(\mathbb{R}_+)$, de sorte que l'équation (3.4) peut être écrite dans la forme

$$\frac{d\sigma}{dz} = F(\sigma), \tag{3.6}$$

où

$$F(\sigma) = F(\sigma)(m) = -\frac{m\alpha(m)}{2g}\int_0^m \beta(m-m', m')\sigma(m')\sigma(m-m')dm' +$$
$$+\frac{m\alpha(m)}{g}\int_0^\infty \beta(m, m')\sigma(m)\sigma(m')dm'.$$

Posons

$$C_\beta = \max\Big[\sup_{0<m'<m<\infty}\frac{m\alpha(m)}{2g}\beta(m-m', m'),\ \sup_{m,m'\in\mathbb{R}_+}\frac{m\alpha(m)}{g}\beta(m, m')\Big]. \tag{3.7}$$

Alors, en rappelant l'expression de $F(\sigma)$, on a, pour σ_1, $\sigma_2 \in L^1(\mathbb{R}_+)$,

$$\|F(\sigma_1) - F(\sigma_2)\|_{L^1(\mathbb{R}_+)} = \int_0^\infty |F(\sigma_1)(m) - F(\sigma_2)(m)|dm \leq$$

$$\leq C_\beta \int_0^\infty \int_0^m \big|\sigma_1(m')(\sigma_1(m-m')-\sigma_2(m-m'))+(\sigma_1(m')-\sigma_2(m'))\sigma_2(m-m')\big|dm'dm +$$
$$+C_\beta \int_0^\infty \int_0^\infty \big|(\sigma_1(m)(\sigma_1(m') - \sigma_2(m')) + (\sigma_1(m) - \sigma_2(m))\sigma_2(m')\big|dm'dm \leq$$
$$\leq C_\beta\big(\|\sigma_1 * (|\sigma_1 - \sigma_2|)\|_{L^1} + \|(|\sigma_1 - \sigma_2|) * \sigma_2\|_{L^1}\big) +$$
$$+C_\beta \int_0^\infty (|\sigma_1(m)|\|\sigma_1 - \sigma_2\|_{L^1} + |\sigma_1(m) - \sigma_2(m)|\|\sigma_2\|_{L^1})dm \leq$$
$$\leq 2C_\beta\|\sigma_1 - \sigma_2\|_{L^1}(\|\sigma_1\|_{L^1} + \|\sigma_2\|_{L^1})$$

(pour la propriété de la convolution, voir par exemple [1]), ce qui montre que $F(\cdot)$ vérifie localement la condition de Lipchitz dans la topologie de $L^1(\mathbb{R}_+)$.

Par conséquent, l'équation (3.6) avec la condition initiale (3.3) admet une solution $\sigma(\cdot,z)$ et une seule dans un intervalle $1-\delta \leq z \leq 1$ avec un $\delta > 0$ suffisamment petit.

D'autre part, du lemme 3.1 et de l'équation (3.2) on déduit que

$$\int_0^{\infty} (\sigma(m,z)\frac{g}{\alpha(m)})dm = \int_0^{\infty} (\sigma(m,1)\frac{g}{\alpha(m)})dm, \tag{3.8}$$

pourvu que $\sigma(\cdot,z)$ existe. Or, la condition (3.1) et l'hypothèse $\operatorname{supp}(\overline{\sigma}) \subset [\overline{m}_a, \overline{m}_A]$ impliquent que $\operatorname{supp}(\sigma(\cdot,z)) \subset [\overline{m}_a, \overline{m}_A]$, donc de la relation

$$0 < c_1 \leq \frac{g}{\alpha(m)} \leq c_2 < \infty \qquad \forall m \in [\overline{m}_a, \overline{m}_A]$$

avec deux constantes c_1, c_2 (qui résulte de l'hypothèse sur $\alpha(m)$), on déduit que $\|\sigma(\cdot,z)\|_{L^1(\mathbb{R}_+)}$ est uniformément bornée en z (pourvu que $\sigma(\cdot,z)$ existe), ce qui, joint à la condition de Lipschitz locale, nous donne la solution $\sigma(\cdot,z)$ de l'équation (3.6) dans tout l'intervalle $[0,1]$. La proposition est démontrée.

Chapitre 4

Remarques sur le comportement du fragmentation et de la coagulation

La coagulation déplace la "population" des gouttelettes vers les gouttelettes de masse plus grande, tandis que le fragmentation déplace la "population" des gouttelettes vers les gouttelettes de masse plus petites. Cet effet du fragmentation peut compenser l'éventuelle augmentation infinie de la masse de gouttelettes. Toutefois cet effet doit être analysé de sorte qu'on peut l'utiliser pour l'étude de l'équation de coagulation-fragmentation. Dans le présent chapitre on donne des remarques préliminaires sur cet effet.

Pour faciliter l'écriture des formules si nécéssaire, nous introduisons la notation $I(m)$ donnée par

$$I(m) = \frac{m}{2}\int_0^m \beta(m', m-m')\sigma(m', z)\sigma(m-m', z)dm'$$

$$-m\int_0^\infty \beta(m, m')\sigma(m, z)\sigma(m', z)dm' - \frac{m}{2}\int_0^m \theta(m', m-m')\sigma(m, z)dm'$$

$$+m\int_0^\infty \theta(m, m')\sigma(m+m', z)dm'$$

Remarque : 4.1 *Si on suppose que*

$$\beta(m,m') = \overline{\beta}$$

$$\theta(m,m') = (m+m')^{(\alpha-1)} \quad \alpha > 0$$

$$\sigma(m) = \begin{cases} c\overline{m}_1^{-\gamma} & si \quad 0 < m \leq \overline{m}_1 \\ cm^{-\gamma} & si \quad m \geq \overline{m}_1. \end{cases}$$

Alos pour $\gamma > \alpha + 2$ il existe $\overline{m} \geq 0$ telle que

$$pour\ tout \quad m \geq \overline{m} \qquad I(m) < 0.$$

Démonstration : On suppose que $m > 2\overline{m}_1$ et on substitue dans $I(m)$ par les valeurs de $\beta(m,m')$, $\theta(m,m')$ et $\sigma(m)$.

On a alors

$$\frac{m}{2}\int_0^m \beta(m',m-m')\sigma(m',z)\sigma(m-m',z)dm' = \frac{mc^2\overline{\beta}}{2}\int_0^{\overline{m}_1} \overline{m}_1^{-\gamma}(m-m')^{-\gamma}dm' +$$
$$+\frac{mc^2\overline{\beta}}{2}\int_{\overline{m}_1}^{m-\overline{m}_1}(m'm-m'^2)^{-\gamma}dm' + \frac{mc^2\overline{\beta}}{2}\overline{m}_1^{-\gamma}\int_{m-\overline{m}_1}^{m} m'^{-\gamma}dm'$$

en utilisant les inégalités

$$\begin{cases} mm' - m'^2 \geq \dfrac{m}{2}m' & \text{pour } \ 0 \leq m \leq \dfrac{m}{2} \\ mm' - m'^2 \geq \dfrac{m^2}{2} - \dfrac{m}{2}m' & \text{pour } \ \dfrac{m}{2} \leq m' \leq m, \end{cases}$$

on obtient

$$\frac{m}{2}\int_0^m \beta(m',m-m')\sigma(m',z)\sigma(m-m',z)dm' \leq \frac{mc^2\overline{\beta}}{2}\int_0^{\overline{m}_1} \overline{m}_1^{-\gamma}(m-m')^{-\gamma}dm' +$$
$$+\frac{m}{2}\overline{\beta}c^2\left[\int_{\overline{m}_1}^{\frac{m}{2}}\left(\frac{m}{2}m'\right)^{-\gamma}dm' + \int_{\frac{m}{2}}^{m-\overline{m}_1}(\frac{m^2}{2} - \frac{m}{2}m')^{-\gamma}dm'\right] +$$

$$+\frac{mc^2\overline{\beta}}{2}\overline{m}_1^{-\gamma}\int_{m-\overline{m}_1}^{m} m'^{-\gamma}dm'$$

$$\leq \frac{mc^2\overline{\beta}\overline{m}_1^{-\gamma}}{2}\left((m-\overline{m}_1)^{1-\gamma}-m^{1-\gamma}\right)+m\overline{\beta}c^2\frac{2}{m(1-\gamma)}\left[\left(\frac{m^2}{4}\right)^{1-\gamma}-\left(\frac{m\overline{m}_1}{2}\right)^{1-\gamma}\right]+$$

$$+\frac{c^2\overline{\beta}m}{2(1-\gamma)}\overline{m}_1^{-\gamma}\left(m^{1-\gamma}-(m-\overline{m}_1^{1-\gamma})\right)$$

d'autre part on a :

$$m\int_0^{\infty}\beta(m,m')\sigma(m,z)\sigma(m',z)dm'=\overline{\beta}c^2m^{1-\gamma}\left(\int_0^{\overline{m}_1}\overline{m}_1^{-\gamma}dm'+\int_{\overline{m}_1}^{\infty}m'^{-\gamma}dm'\right)$$

$$=\overline{\beta}c^2m^{1-\gamma}\left(\overline{m}_1^{1-\gamma}-\frac{\overline{m}_1^{-\gamma}}{1-\gamma}\right)$$

$$\frac{m}{2}\int_0^{m}\theta(m',m-m')\sigma(m,z)dm'=\frac{mc}{2}\int_0^{m}m^{\alpha-1}m^{-\gamma}dm'=\frac{c}{2}m^{\alpha+1-\gamma}$$

$$m\int_0^{\infty}\theta(m,m')\sigma(m+m',z)dm'=cm\int_0^{\infty}(m+m')^{\alpha-\gamma-1}dm'=\frac{c}{\gamma-\alpha}m^{\alpha+1-\gamma}$$

Maintenant en substuté ces égalités et l'inégalité, on obtient

$$I(m)\leq\frac{mc^2\overline{\beta}\overline{m}_1^{-\gamma}}{2}\left((m-\overline{m}_1)^{1-\gamma}-m^{1-\gamma}\right)+m\overline{\beta}c^2\frac{2}{m(1-\gamma)}\left[\left(\frac{m^2}{4}\right)^{1-\gamma}-\left(\frac{m\overline{m}_1}{2}\right)^{1-\gamma}\right]$$

$$+\frac{c^2\overline{\beta}m}{2(1-\gamma)}\overline{m}_1^{-\gamma}\left(m^{1-\gamma}-(m-\overline{m}_1^{1-\gamma})\right)-\overline{\beta}c^2m^{1-\gamma}\left(\overline{m}_1^{1-\gamma}-\frac{\overline{m}_1^{-\gamma}}{1-\gamma}\right)$$

$$-\frac{c}{2}m^{\alpha+1-\gamma}+\frac{c}{\gamma-\alpha}m^{\alpha+1-\gamma}$$

Compte tenue de l'hypotése $\gamma \geq \alpha+2$, on voit aisément qu'il existe $\overline{m} > 0$ telle que

pour tout $\quad m \geq \overline{m} \qquad I(m) < 0$.

Remarque 4.2 : *Nous supposons que*

$$\beta(m, m') = \overline{\beta}$$

$$\theta(m, m') = (m + m')^{\alpha-1}$$

$$\sigma(m) = \begin{cases} c\overline{m}_1 & si \quad 0 < m \leq \overline{m}_1 \\ ce^{-\eta(m-\overline{m}_1)} & si \quad m \geq \overline{m}_1. \end{cases}$$

Alors pour $\alpha < 1$, il existe $\overline{m} \geq 0$ telle que

$$pour \quad m \geq \overline{m} \qquad I(m) > 0.$$

Démonstration : On substitue $\beta(m, m')$, $\theta(m, m')$ et $\sigma(m)$ dans $I(m)$. On considère d'abord

$$\frac{m}{2}\int_0^m \beta(m', m-m')\sigma(m', z)\sigma(m-m', z)dm' = \frac{m\overline{\beta}c^2}{2}\int_0^{\overline{m}_1} e^{-\eta(m-m'-\overline{m}_1)}dm' +$$

$$+\frac{mc^2\overline{\beta}}{2}\int_{\overline{m}_1}^{m-\overline{m}_1} e^{-\eta(m-2\overline{m}_1)}dm' + \frac{mc^2\overline{\beta}}{2}\int_{m-\overline{m}_1}^{m} e^{-\eta(m'-\overline{m}_1)}dm' =$$

$$= \frac{m\overline{\beta}c^2}{\eta}(e^{-\eta(m-\overline{m}_1)} - e^{-\eta(m-2\overline{m}_1)}) + \frac{c^2m\overline{\beta}}{2}e^{-\eta(m-2\overline{m}_1)}(m - 2\overline{m}_1)$$

en suite on a

$$m\int_0^\infty \beta(m,m')\sigma(m,z)\sigma(m',z)dm' = mc^2\overline{\beta}\int_0^{\overline{m}_1} e^{-\eta(m-\overline{m}_1)}dm' +$$

$$+mc^2\overline{\beta}\int_{\overline{m}_1}^\infty e^{-\eta(m+m'-2\overline{m}_1)}dm' = mc^2\overline{\beta}\overline{m}_1 e^{-\eta(m-\overline{m}_1)}$$

$$+\frac{mc^2\overline{\beta}}{\eta}e^{-\eta(m-\overline{m}_1)}$$

$$\frac{m}{2}\int_0^m \theta(m-m',m')\sigma(m,z)dm' = \frac{cm^{\alpha+1}}{2}e^{-\eta(m-\overline{m}_1)}$$

$$\begin{aligned} m\int_0^\infty \theta(m,m')\sigma(m+m',z)dm' &= m\int_0^\infty (m+m')^{\alpha-1}ce^{-\eta(m+m'-\overline{m}_1)}dm' \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Miantenant en substitue ces égalités, on obtient

$$I(m) \geq \frac{m\overline{\beta}c^2\overline{m}_1}{2\eta}(e^{-\eta(m-\overline{m}_1)}e^{-\eta(m-2\overline{m}_1)}-) + \frac{c^2m\overline{\beta}}{2}e^{-\eta(m-2\overline{m}_1)}(m-2\overline{m}_1)$$

$$-mc^2\overline{\beta}\overline{m}_1 e^{-\eta(m-\overline{m}_1)} - \frac{mc^2\overline{\beta}}{\eta}e^{-\eta(m-\overline{m}-1)} - \frac{cm^{\alpha+1}}{2}e^{-\eta(m-\overline{m}_1)} +$$

pour $\alpha < 1$, alors il existe $\overline{m} \geq 0$ telle que :

pour $m \geq \overline{m}$ $\quad I(m) > 0$

REMARQUE 4.3 : *sopposons que*

$$\beta(m,m') = \overline{\beta}$$

$$\theta(m,m') = (m+m')^{\alpha-1}$$

$$\sigma(m) = \begin{cases} c\overline{m}_1 & si \quad 0 < m \leq \overline{m}_1 \\ ce^{-\eta(m-\overline{m}_1)} & si \quad m \geq \overline{m}_1. \end{cases}$$

(la même condition que dans la remarque 4.2) On suppose en outre que $\alpha > 1$. Alors il existe $\overline{m} \geq 0$ telle que

$$pour\ m \geq \overline{m} \qquad I(m) < 0$$

DÉMONSTRATION : Le même calcul que dans la Remarque 4.2 nous amène à

$$I(m) = \frac{-m\overline{\beta}c^2\overline{m}_1}{2\eta}(e^{-\eta(m-2\overline{m}_1)} - e^{-\eta(m-\overline{m}_1)}) + \frac{c^2m\overline{\beta}}{2}e^{-\eta(m-2\overline{m}_1)}(m-\overline{m}_1)$$
$$-mc^2\overline{\beta}\overline{m}_1^2e^{-\eta(m-\overline{m}_1)} - \frac{mc^2\overline{\beta}}{\eta}e^{-\eta(m-\overline{m}-1)} - \frac{cm^{\alpha+1}}{2}e^{-\eta(m-\overline{m}_1)} +$$
$$+m\int_0^\infty (m+m')^{\alpha-1}ce^{-\eta(m+m'-\overline{m}_1)}dm'.$$

On va examiner le terme

$$+m\int_0^\infty (m+m')^{\alpha-1}ce^{-\eta(m+m'-\overline{m}_1)}dm'.$$

On rappelle qu'il existe une constante c_1 telle que

$$(m+m')^{\alpha-1} \leq c_1(m^{\alpha-1} + m'^{\alpha-1}),$$

on a donc

$$m\int_0^\infty (m+m')^{\alpha-1}ce^{-\eta(m+m'-\overline{m}_1)}dm' \leq m^\alpha ce^{-\eta(m-\overline{m}_1)}\int_0^\infty e^{-\eta m'}dm' +$$

$$+mce^{-\eta(m-\overline{m}_1)}\int_0^\infty m'^{\alpha-1}e^{-\eta m'}dm'.$$

Donc il existe une constante $\overline{m}_2$ telle que

$$I(m) < 0 \quad \text{pour} \quad m > \overline{m}_2.$$

On en déduit que pour $\alpha > 1$ il existe $\overline{m} \geq 0$ telle que

$$\text{pour } m \geq \overline{m} \qquad I(m) < 0.$$

Commme nous avons vus dans les remarques citées ci- dessus il 'y a la posibilité que l'effet de fragmentation compense l'effet de déplacement des gouttelettes vers des gouttelettes plus grandes, pour cela nous intéressons à étuder cette équation.

Chapitre 5

Équation approchée par troncature

Dans ce chapitre on va trouver la solution approchée de l'équation de coagulation-fragmentation. Plus précisément on va substituer les fonctions $\beta_N(m,m')$, $\theta_N(m,m')$ obtenues par la troncature des fonctions $\beta(m,m')$, $\theta(m,m')$ telle que

$$\begin{cases} \beta_N(m,m') = \beta(m,m')\psi(m+m'-N) \\ \theta_N(m,m') = \theta(m,m')\psi(m+m'-N) \end{cases}$$

au lieu des fonctions $\beta(m,m')$, $\theta(m,m')$ dans (3.2). Ici la fonction $\psi(s)$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ telle que

$$\psi(s) = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad s \leq 0 \\ 0 & \text{pour} \quad s \geq 1. \end{cases}$$

En remplaçant dans l'équation (3.2) $\beta(m,m')$ par $\beta_N(m,m')$ et $\theta(m,m')$ par $\theta_N(m,m')$ et en désignant la fonction inconnue par $\sigma^{[N]}$ au lieu de σ, on a

$$\begin{gathered} \partial z(\sigma^{[N]}(m,z)u(m)) = \\ = \frac{m}{2}\int_0^m \beta_N(m-m',m')\sigma^{[N]}(m',z)\sigma^{[N]}(m-m',z)dm' + \end{gathered} \tag{5.1}$$

$$-m\int_0^\infty \beta_N(m,m')\sigma^{[N]}(m,z)\sigma^{[N]}(m',z)dm' - \frac{m}{2}\int_0^m \theta_N(m-m',m')$$
$$\sigma^{[N]}(m,z)dm' + m\int_0^\infty \theta_N(m,m')\sigma^{[N]}(m+m',z)dm'.$$

La condition (3.3) reste invariante, de sorte que pour $\sigma^{[N]}$ nous avons

$$\sigma^{[N]}(m,1) = \overline{\sigma}^{[N]}(m). \tag{5.2}$$

En premier lieu nous allons établir une analogue du lemme 3.1 pour les équations (3.2) et (5.1). Pour cela on pose

$$J(\sigma,m) = \frac{m}{2}\int_0^m \beta(m-m',m')\sigma(m',z)\sigma(m-m',z)dm' +$$
$$-m\int_0^\infty \beta(m,m')\sigma(m,z)\sigma(m',z)dm' - \frac{m}{2}\int_0^m \theta(m-m',m')$$
$$\sigma(m,z)dm' + m\int_0^\infty \theta(m,m')\sigma(m+m',z)dm',$$

$$J_N(\sigma,m) = \frac{m}{2}\int_0^m \beta_N(m-m',m')\sigma(m',z)\sigma(m-m',z)dm' +$$
$$-m\int_0^\infty \beta_N(m,m')\sigma(m,z)\sigma(m',z)dm' - \frac{m}{2}\int_0^m \theta_N(m-m',m')$$
$$\sigma(m,z)dm' + m\int_0^\infty \theta_N(m,m')\sigma(m+m',z)dm'.$$

On a alors le

LEMME 5.1 *On a*

$$\int_0^\infty J(\sigma,m)dm = 0,$$

pourvu que l'intégrale est bien définie.

En outre quelque soit $\sigma \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}_+)$, on a

$$\int_0^\infty J_N(\sigma, m)dm = 0,$$

Démonstration : Examinons d'abord $\int_0^\infty J(\sigma, m)dm$. Comme on l'a montré dans le Lemme 3.1, on a

$$\int_0^\infty \frac{m}{2}\int_0^m \beta(m-m', m')\sigma(m')\sigma(m-m')dm'dm+$$

$$-\int_0^\infty m\int_0^\infty \beta(m, m')\sigma(m)\sigma(m')dm'dm = 0.$$

Considérons maintenant l'intégrale

$$\int_0^\infty m\int_0^\infty \theta(m, m')\sigma(m+m')dm'dm - \int_0^\infty \frac{m}{2}\int_0^m \theta(m', m-m')\sigma(m)dm'dm.$$

En faisant le changement de variables

$$q = m - m', \quad r = m',$$

dont le déterminant jacobien est égal à 1, on a

$$\int_0^\infty \frac{m}{2}\int_0^m \theta(m-m', m')\sigma(m)dm'dm = \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{q+r}{2}\theta(q, r)\sigma(q+r)drdq.$$

Par conséquent, compte tenu de la symétrie de la fonction θ

$$\theta(q, r) = \theta(r, q),$$

on a

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{q+r}{2}\theta(q, r)\sigma(q+r)drdq = \int_0^\infty\int_0^\infty q\theta(q, r)\sigma(q+r) =$$

$$= \int_0^\infty\int_0^\infty m\theta(m, m')\sigma(m+m')dm'dm,$$

On va maintenant montrer la condition de Lipschitz locale de la fonction $F(\sigma^{[N]})$ pour $\sigma^{[N]} \in L^1(\mathbb{R}_+)$. On a pour $\sigma_1^{[N]}, \sigma_2^{[N]} \in L^1(\mathbb{R}_+)$

$$\|F(\sigma_1^{[N]}) - F(\sigma_2^{[N]})\|_{L^1(\mathbb{R}_+)} = \int_0^\infty |F(\sigma_1^{[N]})(m) - F(\sigma_2^{[N]})(m)|dm =$$

$$= |I_1 + I_2 + I_3 + I_4|,$$

$$|I_1| = \int_0^\infty \frac{m}{2} \int_0^m \beta_N(m-m', m')|\sigma_1^{[N]}(m-m')\sigma_1^{[N]}(m') - \sigma_2^{[N]}(m-m')\sigma_2^{[N]}(m')|dm'dm,$$

$$|I_2| = \int_0^\infty m \int_0^\infty \beta_N(m, m')|\sigma_1^N(m)\sigma_1^N(m') - \sigma_2^N(m)\sigma_2^N(m')|dm'dm,$$

$$|I_3| = \int_0^\infty \frac{m}{2} \int_0^m \theta_N(m - m', m')|\sigma_1^{[N]}(m) - \sigma_2^{[N]}(m)|dm'dm,$$

$$|I_4| = \int_0^\infty m \int_0^\infty \theta_N(m, m')|\sigma_1^{[N]}(m + m') - \sigma_2^{[N]}(m + m')|dm'dm.$$

posons

$$C_\beta = \sup\{ \sup_{m\geq N+1} \frac{m\beta_N(m', m - m')}{2}, \sup_{m\geq N+1} \frac{m\beta_N(m, m')}{2}\}$$

$$C_\theta = \sup\{ \sup_{m\geq N+1} \frac{m\theta_N(m', m - m')}{2}, \sup_{m\geq N+1} \frac{m\theta_N(m, m')}{2}\}$$

$$|I_1| \leq C_\beta \int_0^\infty \int_0^m |\sigma_1^{[N]}(m')(\sigma_1^{[N]}(m-m') - \sigma_2^{[N]}(m-m')) + (\sigma_1^{[N]}(m') - \sigma_2^{[N]}(m'))\sigma_2^{[N]}(m-m')|dm'd$$

$$\leq C_\beta(\|\sigma_1^{[N]} * (|\sigma_1^{[N]} - \sigma_2^{[N]}|)\|_{L^1} + \|(|\sigma_1^{[N]} - \sigma_2[N]|) * \sigma_2^{[N]}\|_{L^1})$$

$$\leq C_\beta\|\sigma_1^{[N]} - \sigma_2^{[N]}\|_{L^1}(\|\sigma_1^{[N]}\|_{L^1} + \|\sigma_2^{[N]}\|_{L^1})$$

$$|I_2| \leq C_\beta \int_0^\infty \int_0^\infty \left|\sigma_1^{[N]}(m)(\sigma_1^{[N]}(m') - \sigma_2^{[N]}(m')) - (\sigma_1^{[N]}(m) - \sigma_2^{[N]}(m))\sigma_2^{[N]}(m')\right| dm'dm$$

$$\leq C_\beta \int_0^\infty (|\sigma_1^{[N]}(m) - \sigma_2^{[N]}(m)|\|\sigma_1^{[N]}\|_{L^1} + |\sigma_1^{[N]}(m) - \sigma_2^{[N]}|\|\sigma_2^{[N]}\|_{L^1})dm$$

$$\leq C_\beta \|\sigma_1^{[N]} - \sigma_2^{[N]}\|_{L^1}(\|\sigma_1^{[N]}\|_{L^1} + \|\sigma_2^{[N]}\|_{L^1})$$

$$|I_3| \leq C_\theta \int_0^{N+1} \|\sigma_1^{[N]} - \sigma_2^{[N]}\|_{L^1} dm' \leq C(N+1)\|\sigma_1^{[N]} - \sigma_2^{[N]}\|_{L^1}$$

$$|I_4| \leq C_\theta \int_0^{N+1}\int_0^{\infty} |\sigma_1^{[N]}(m+m') - \sigma_2^{[N]}(m+m')| dm' dm \leq \int_0^{N+1} \|\sigma_1^{[N]} - \sigma_2^{[N]}\|_{L^1} dm$$
$$\leq C_\theta(N+1)\|\sigma_1^{[N]} - \sigma_2^{[N]}\|_{L^1}$$

posson

$$C(\sigma_1^{[N]}, \sigma_2^{[N]}) = 2C_\beta(\|\sigma_1^N\|_{L^1} + \|\sigma_2^N\|_{L^1}) + 2C_\theta(N+1)$$

D'ou

$$\int_0^{\infty} |F(\sigma_1^{[N]})(m) - F(\sigma_2^{[N]})(m)| dm \leq C(\sigma_1^{[N]}, \sigma_2^{[N]})\|\sigma_1^{[N]} - \sigma_2^{[N]}\|_{L^1}$$

Ce qui montre que $F(.)$ vérifie localement la condition de Lipchitz dans la topologie de $L^1(\mathbb{R}_+)$. Par conséquent, l'équation(5.1) avec la condition initiale (5.2) admet une solution $\sigma^{[N]}(\cdot, z)$ et une seule dans un intervalle $1 - \delta \leq z \leq 1$ avec un $\delta > 0$ suffisamment petit.

D'autre part, du lemme 5.1 et de l'équation (5.1) on déduit que

$$\int_0^{\infty} (\sigma^{[N]}(m, z)u(m)) dm = \int_0^{\infty} (\sigma^{[N]}(m, 1)u(m)) dm, \tag{5.4}$$

pourvu que $\sigma^{[N]}(\cdot, z)$ existe. Or, la condition (3.1) et l'hypothèse $\operatorname{supp}(\overline{\sigma}^{[N]}) \subset [\overline{m}_a, N+1]$ impliquent que $\operatorname{supp}(\sigma^{[N]}(\cdot, z)) \subset [\overline{m}_a, N+1]$.Comme $u(m) = -\frac{g}{\alpha(m)}$, et de la relation

$$0 < c_1 \leq \frac{g}{\alpha(m)} \leq c_2 < \infty \qquad \forall m \in [\overline{m}_a, N+1]$$

avec deux constantes c_1, c_2 (qui résulte de l'hypothèse sur $\alpha(m)$), du Lemme 5.1, on déduit que $\|\sigma^{[N]}(\cdot, z)\|_{L^1(\mathbb{R}_+)}$ est uniformément bornée en z (pourvu que $\sigma^{[N]}(\cdot, z)$ existe), ce qui, joint à la condition de Lipschitz locale, nous donne la solution $\sigma^{[N]}(\cdot, z)$ de l'équation (5.1) dans tout l'intervalle $[0, 1]$.

Bibliographie

[1] Brezis, H. : *Analyse fonctionelle (Théorie et applications)*, Masson, 1987.

[2] Belhireche, H., Aissaoui, M. Z., Fujita Yashima, H. : Equations monodimensionnelles du mouvement de l'air avec la transition de phase de l'eau. *Sci. Techn. Univ. Constantine* - A, vol. **31** (2011), pp. 9–17.

[3] Merad, M., Belhireche, H., Fujita Yashima, H. : Solution stationnaire de l'équation de coagulation de gouttelettes en chute avec le vent horizontal. *univ. 8 Mai 1945, Guelma*, vol. **16**

[4] Stéephane MISCHLER. :Contributions á l'étude mathématique de quelques modéles issus de la physique statistique hors equilibre. *Univ. de Versailles Saint-Quentin, vol.* **91** *(2001), pp. 61–70.*

[5] Prodi, F., Battaglia, A. : Meteorologia - Parte II, Microfisica. Grafica Pucci, Roma, 2004. (voir aussi le site :
http ://www.meteo.uni-bonn.de/mitarbeiter/battaglia/teaching.html).

[6] Kikoïne, A. K., Kikoïne, I. K. : Physique moléculaire (traduit du russe). Mir, Moscou, 1979.