République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 – Guelma

Faculté de Mathématiques et de l'Informatique et Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire de Fin d'Etude
Master Académique en Mathématiques
Option : EDP

THEME

Equation du modèle mécanique-thermodinamique d'un cyclone tropical

Présenté par :
GHOMRANI Sarra

Dirigé par : . M.Z.Aissaoui **MCA** **Univ. Guelma**

Jury :

Président : H. Fujita Yashima	**Prof**	**Univ-Guelma**
Examinateur : D.Bellaouar	**MCA**	**Univ-Guelma**

Session Juin 2012

Equation du modèle mécanique-thermodinamique d'un cyclone tropical

GHOMRANI Sarra
Mémoire de master en mathématiques
Université de Guelma

3 juin 2012

Table des matières

❄ *Remerciment* ❄

Au nom d'Allah, le tout miséricordieux,

le très miséricordieux

La reconnaissance est la mémoire du cœur

≺ LE GRAND MERCI POUR ALLAH ≻

En préambule à ce mémoire, je souhaite adresser mes remerciements les plus sincères aux personnes qui m'ont apporté leur aide et qui ont contribué à l'élaboration de ce mémoire ainsi qu'à la réussite de cette formidable année universitaire.

Je remercier du fond du cœur ❤ **mes parents** ❤ *pour leur contribution, leur soutien et leur patience durant toutes mes études et qui m'ont toujours aidé et encouragé aux moments opportuns .*

Je tiens à remercier sincèrement le prof. Hisao Fujita Yashima qui en tant que Directeur de mémoire, s'est toujours montré à l'écoute et très disponible tout au long de la réalisation de ce mémoire, ainsi pour l'inspiration, l'aide et le temps qu'il a bien voulu me consacrer et sans qui ce mémoire n'aurait jamais vu le jour.

Mes remerciements s'adressent également à Monsieur Dr. Aissaoui Med Zine : directeure du Laboratoire de Mathématiques appliquées et de modélisation, (LMAM), pour sa générosité et la grande patience dont il a su faire preuve malgré ses charges académiques et professionnelles.

J'adresse également mes remerciements, à tous mes enseignants, qui m'ont donnés les bases de la science. Ensuite, je souhaite remercier l'ensemble

☞Résumé

le but de ce travail est de modéliser le modèle d'un cyclone tropical, on écrit le système qui caractérisant le mouvement d'un cyclone tropical en coordonnées cartisiennes, ensuite on rend l'équation de continuité et celle de la quantité de mouvement éxprimées en coordonnées cylindriques suivant la direction radiale, tangentielle et verticale, enfin on essaye d'étudier l'équation de la composante tangentielle de la vitesse comme étant une équation elliptique, en utilisant un cadre fonctionel approprié, en appliquant des théorèmes convenables à notre problème.

Chapitre 1

Introduction

Les cyclones tropicaux concernent un grand nombre de personnes. Ils peuvent tuer, ils causent souvent des dommages de grandes ampleurs, et entrainent habituellement des pertes économiques. Cela est particulièrement vrai dans les pays en développement tels que Madagascar, où les cyclones touchent en moyenne 250000 personnes chaque année et causent des dommages estimés a US$ 50 milions. Eu égard aux prévisions relatives au réchauffement de la planète et au changement climatique, il est légitime de s'interroger sur l'augmentation du nombre des cyclones à l'avenir et des risques y afférant.

Un cyclone tropical intense est une tempête circulaire causée par une pression atmosphérique très basse et accompagnée de vents tourbillonnants très forts et de pluies torrentielles. La plupart des gens savent que la chaleur est nécessaire à l'évaporation de l'eau. Par exemple, quand on fait bouillir de l'eau sur la cuisinière. La chaleur provoque l'évaporation de l'eau. Celle-ci devient vapeur captive de l'air ambiant et monte. L'atmosphère tropicale, chaude, est comme la cuisinière : Elle réchauffe l'eau à la surface de l'océan et provoque encore la condensation. Et tout comme la vapeur d'eau captive de l'air dans la casserole, l'eau à la surface de l'océan monte dans l'atmosphère. C'est le début d'une perturbation atmosphérique ! L'air montant entre en contact avec des pressions et des températures plus basses, en hautes altitudes, et la vapeur d'eau commence à se condenser et retrouve sa forme liquide. Ce sont les nuages. Et c'est à ce moment que l'intéressant phénomène physique de la formation des cyclones tropicaux se produit.

La plupart des gens savent que l'évaporation de l'eau est provoquée par la chaleur, mais de nombreuses personnes ignorent que la vapeur d'eau qui refroidit et se condense libère sa chaleur. Plus la condensation est marqué plus la quantité de chaleur libérée est élevée. La condensation donne la chaleur à l'air et la vapeur d'eau retourne à l'état liquide. C'est ce qu'on appelle la chaleur latente de condensation.

La chaleur latente dans l'air à la surface de l'océan est libérée dans l'atmosphère et grimpe à des altitudes où l'air ascendant refroidit et provoque la condensation de la vapeur d'eau. Ce refroidissement à la hautes altitudes accélère l'ascension de l'air, car il est alors plus chaud que l'air ambiant. L'air qui continue à monter aspire l'air qui se trouve plus bas et accélère l'aspiration de l'air à la surface de l'eau. Ce mouvement d'air de surface est le vent qui accompagne les cyclones tropicaux. Les colonnes d'air ascendantes créent rapidement des orages tropicaux qui sont des germes potentiels de cyclones tropicaux.

Le terme cyclone est un terme de méteorologie , il se présente sous la forme d'un énorme système nuageux de cumulonimbus (nuage d'orage), alimenté par le bas, le mouvement de giration du cyclone est donné par la rotation de la Terre : la force de Coriolis. Les cyclones tournent ainsi dans le sens des aiguilles d'une montre dans l'hémisphère Sud, dans le sens contraire dans l'hémisphére Nord

1.1 Conditions essentielles à la formation des cyclones tropicaux

L'eau chaude de l'océan n'est pas le seul ingrédient nécessaire à la formation des cyclones tropicaux. Toutes les conditions suivantes doivent être réunies :

• Eaux chaudes de l'océan pour alimenter le cyclone tropical. Des études ont démontré que la température à la surface de la mer doit être d'au moins $26.5°C$, sur une profondeur d'au moins 50 mètres. C'est pourquoi les cyclones ne peuvent prendre naissance ailleurs, où l'eau est trop froide, que sous les tropiques.

• Eau chaude tropicale qui favorise la naissance des orages. Le développement des orages est la base du dégagement de la chaleur, le mécanisme d'entrainement des cyclones tropicaux.

• Distance d'au moins 500 Km de l'équateur (à une latitude de 5° environ) Condition importante, car la force de Coriolis"la force apparente de la terre en rotation" qui provoque la rotation de la perturbation en formation ne peut persister sans basse pression. La force de Coriolis s'amenuise près de l'équateur et augmente vers les pôles.

• Perturbation déjà en place près de la surface, zone de dépression ou région de convergence. Les cyclones tropicaux ne peuvent apparaitre sans mécanisme déclencheur qui aspire l'air aux niveaux inférieurs de l'atmosphère. Toutes ces conditions sont nécessaires à la naissance d'un cyclone, mais il est possible que a ne soit pas suffisant. Il arrive que toutes les conditions soient en place et qu'aucun cyclone n'apparaisse. Cela fait partie du défi de prévoir le dévloppement d'un cyclone tropical"processus appelé la cyclogénèse tropicale".

Bien qu'elle ne soit pas indispensable, une zone de haute pression se trouvant tout en haut de la troposphère, au-dessus de la tempête ou de la perturbation en formation, peut énormément contribuer à la naissance d'un cyclone tropical. Cette zone sert de cheminée à la tempête en agissant de deux importantes faons :

- Elle éloigne l'air ascendant du centre de la tempête pour qu'il ne s'accumule pas au-dessus de celle-ci et provoque l'affaissement de cette dernière.
- Elle aspire l'air dans la tempête pour l'aider à monter et maintient la dépression en surface.

1.2 Où et quand se forment les cyclones tropicaux

Le tableau ci-dessous montre 7 bassins où se forment les cyclones, avec le moment de l'année pour chacun d'eux et les noms donnés aux plus violents cyclones tropicaux. On remarque que les cyclones tropicaux ne se développent pas près de l'équateur (la force de Coriolis y étant trop faible pour générer l'effet de rotation) ni à bonne distance de l'équateur (où l'eau est trop froide). Les cyclones tropicaux se forment généralement dans une bande de latitude

Référence à la carte	Bassin océanique	Saison	Maximum saisonnier
1	Océan Atlantique Nord (y compris les Caraïbes et le golfe du Mexique)	De juin à novembre	Septembre
2	Nord-est du Pacifique (à l'est de la ligne de changement de date)	De la mi-mai à la mi-novembre	De la fin août au début septembre
3	Nord-ouest de l'océan Pacifique(à l'ouest de la ligne de changement de date, comprend la mer de la Chine méridionale)	Toute l'année	De la fin août au début septembre
4	Nord de l'océan indien (y compris la baie du Bengale et la mer d'Oman)	D'avril à juin et d'octobre à décembre	Mai et novembre
5	Sud-ouest de l'Océan indien	D'octobre à mai	De la mi-janvier à la fin mars
6	Sud-est de l'océan indien(nord de l'Australie)	D'octobre à mai	De la mi-janvier à la fin mars
7	Sud-ouest de l'océan Pacifique	Toute l'année	De février au début mars

1.3 La mort des cyclones tropicaux

La fin d'un cyclone tropical dans l'Atlantique dépend des phénomènes océaniques et atmosphériques du moment. Chacune des conditions suivantes affaiblira le cyclone qui finira par mourir :

• La source de chaleur et d'humidité de la tempête disparait. Quand un cyclone tropical atteint la terre ferme ou une masse d'eau froide, il perd son carburant essentiel (l'eau chaude de l'océan). Le passage à la terre ferme l'affaiblit rapidement (non pas à cause de friction, comme certains peuvent le croire, mais à cause de la perte de sa source d'humidité chaude).

• La tempête rencontre un cisaillement vertical du vent. Un faible cisaillement du vent est nécessaire à la formulation d'un cyclone tropical. Par contre, un fort cisaillement du vent entrave les processus de soutient de la tempête qui s'affaiblit et meur.

• L'air frais et sec s'engouffre dans la tempête. Le cyclone tropical est comme un moteur thermique qui fonctionne à l'air humide et chaud. L'arrivée soudaine d'air frais et sec (injecté dans la tempête de différentes faons) suffit à réduire la convection profonde qui maintient la tempête en vie.

• Une zone de basse pression se crée au-dessus de la tempête, dans la partie la plus haute de l'atmosphère. Cette zone de haute pression facilite l'évacuation de l'accumulation d'air au-dessus de la tempête. Celle-ci peut ainsi continuer à aspirer de l'air de surface. Si la zone de haute pression au-dessus se la tempête se transforme en zone de basse pression, la tempête aspire l'air par le sommet. L'air qui monte alors dans la tempête ne peut plus s'en échapper et provoque l'affaissement de la tempête.

Généralement, les cyclones tropicaux se dirigent vers les pôles, assurant un équilibre des températures dans l'ensemble de l'atmosphère terrestre. Les cyclones tropicaux quittent les tropiques vers les régions extratropicales (comme les latitudes du Canada). Quand les cyclones tropicaux se dirigent vers les pôles, à peine plus de la moitié d'entre eux (54 %) faiblissent et meurent. Les autres atteignent les latitudes moyennes et entrent en contact avec le climat de ces régions, par exemple, les systèmes de fronts et les creux de la haute atmosphère. Le cas échéant, les cyclones tropicaux connaissent deux sorts : Ils faiblissent et meurent ou sont revigorés et transformés en quelque chose de nouveau, mais toujours aussi puissant.

Chapitre 2

Généralités de l'atmosphère et état hydrostatique

Pour qu'on puisse utiliser des modèles mathématiques pour analyser les phénomènes atmosphériques, météorologiques et climatiques, nous rappelons avant tout les aspects généraux de l'atmosphère terrestre.

L'atmosphère terrestre est un mélange de gaz N_2, O_2, H_2O (en état gazeux), Ar, CO_2, etc..., qui, attiré par la force gravitationnelle que la Terre exerce sur lui, se autour de la Terre.

2.1 Généralités de l'atmosphère

Avant de décrire l'atmosphère, il est bon de rappeler que, à cause de sa rotation, la Terre, même si on considère le niveau de la mer, a une forme dite géoïde, qui diffère légèrement de la sphère. En effet, la rotation de la Terre crée la force centrifuge dans le système des coordonnées qui tourne avec la Terre. Plus précisément, dans le système des coordonnées (x_1, x_2, x_3), qui tourne avec la Terre autour de l'axe x_3, la force centrifuge F_{cf} exercée sur un corps de masse m est donnée par

$$F_{cf} = -m\nabla\Phi_{cf}, \qquad \Phi_{cf} = -\frac{1}{2}|\omega|^2(x_1^2 + x_2^2).$$

Où ω est la vitesse angulaire de la rotation de la Terre. En choisissant la direction de l'axe x_3 dans celle du centre de la Terre vers le pôle Nord et en rappelant la direction de la rotation de la Terre, on a $\omega = (0, 0, \omega_3)$, $\omega_3 > 0$. Pour déterminer la valeur précise de $|\omega| = \omega_3$, on rappelle que dans un système de coordonnées inertial la période T_d de la rotation de la Terre n'est pas précisément 24 heures, mais, compte tenu de la différence due à la révolution de la Terre autour du Soleil, il résulte qu'elle est égale approximativement à 23 h 56 min 04 sec , ou

$$86164 sec.$$

Donc la valeur absolue de la vitesse angulaire ω est

$$|\omega| = \omega_3 = \frac{2\pi}{T_d} \approx 7.2921.10^{-5}S^{-1}.$$

D'autre part, la force gravitationnelle F_g que la Terre exerce sur un corps de masse m situé à l'extérieure de la Terre est donnée par

$$F_g = -m\nabla\Phi_g, \qquad \Phi_g = -\frac{GM}{|x|} + \epsilon(x).$$

Où G est la constante de la gravitation, dont la valeur est $G \approx 6.672.10^{-11}m^3.Kg^{-1}.S^{-2}$. M est la masse de la Terre, dont la valeur est $M \approx 5.98.10^{24}.Kg$, tendis que $\epsilon(x)$ est la perturbation dont la valeur est suffisamment petite vis-à-vis de $\frac{GM}{|x|}$. On peut démontrer(voir l'Apendice 1) que, si à l'intérieure de la Terre la masse est distribuée de manière que sa densité dépende seulement de la distance du centre (c'est-à-dire, si $\varrho T(x)$ est la densité de la masse à l'intérieur de la Terre, on a $\varrho T(x) = \varrho T(r)$, $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, alors la force exercée par la Terre sur un corps de masse m situé à l'extérieur de la Terre est précisément

$$F_g = m\nabla(\frac{GM}{|x|}) = -m\frac{GM}{|x|^2}\frac{x}{|x|},$$

la valeur $\frac{GM}{|x|^2}$ ne dépend pas de la fonction $\varrho T(r)$ pourvu que la masse totale soit égale à M.

Etant donnés le potentiel Φ_g de la force gravitationnelle et celui de la force centrifuge Φ_{cf} , on peut définir le géopotentiel

$$\Phi = \Phi_g + \Phi_{cf} = -\frac{GM}{|x|} + \epsilon(x) - \frac{1}{2}|\omega|^2(x_1^2 + x_2^2), \tag{2.1}$$

et donc, dans le système des coordonnées (x_1, x_2, x_3) qui tourne avec la Terre, sur un corps de masse m s'exerce la force

$$F = -m\nabla\Phi.$$

Si sur l'eau de la mer s'exerce seulement cette force, la surface de la mer doit coïncide avec une surface équipotentielle de Φ

$$\{x \in \mathbb{R}^3 | \Phi(x) = c, |x| \leq R_1\},$$

où c est une constante, tandis que R_1 est une constante convenablement choisie de telle sorte que la surface définie corresponde à la surface de la Terre en éliminant la partie éloignée de l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^3 | \Phi(x) = c\}$, partie où $\nabla\Phi(x).x < 0$ (on rappelle que $-\frac{1}{2}|\omega|^2(x_1^2 + x_2^2) \to -\infty$ pour $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \to \infty$ et donc $\Phi(x) \to -\infty$ pour $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \to \infty$).

La forme géométrique tracée par cette surface, qui doit correspondre à la surface idéale de la Terre, s'appelle géoïde. Comme on peut l'imaginer facilement, le rayon du géoïde sur l'équateur est plus grand que le rayon sur les deux pôles. Pour la Terre réelle selon les mesures effectuées il résulte que le rayon de la Terre sur l'équateur est

$$R_{eq} \approx 6378,140Km,$$

tandis que celui sur les pôle est

$$R_{po} \approx 6356,755Km,$$

le rayon sur l'équateur R_{eq} est le rayon maximal de la Terre et le rayon sur les pôles R_{po} est le rayon minimal de la Terre. La différence entre le rayon maximal et le rayon minimal est donc approximativement $21,385km$.
La force qui résulte du géopotentiel Φ peut être calculée en utilisant les valeurs de G, M, ω citées ci-dessus et la position du corps sur lequel s'exerce la force. Par exemple sur la surface de la Terre sur l'équateur, compte tenu que

$$|x| = R_{eq} \qquad |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2},$$

on a

$$\frac{GM}{|x|^2} \approx 981,4cm.s^{-2}, \qquad |\omega|^2|x| \approx 3,4cm.s^{-2}.$$

Donc l'accélération de la pesanteur qu'on mesure au niveau de la mer sur l'équateur est approximativement

$$(-\frac{GM}{|x|^2} + |\omega|^2|x|)\frac{x}{|x|} = -g'\frac{x}{|x|}, \qquad g' \approx 978,0cm.s^{-2}.$$

L'accélération de la pesanteur, dont la partie principale est due à la force gravitationnelle, maintient l'air dans un voisinage de la Terre. On observe que l'épaisseur de l'atmosphère (même si on ne peut pas définir de manière précise le domaine occupé par l'atmosphère) est assez petite par rapport au rayon de la Terre et que, selon la hauteur ou le niveau du géopotentiel, l'atmosphère présente des caractéristiques physiques différentes, en particulier de la pression et de la température, mais aussi de la composition chimique (si on va dans la partie supérieure de l'atmosphère). Les différences des caractéristiques physiques observées ont conduit à la division conventionnelle de l'atmosphère en quatre zones : troposphère, stratosphère, mésosphère et thermosphère. Même s'il est difficile de définir rigoureusement ces quatre couches de l'atmosphère, on trouvera sans doute trés utile cette division conventionnelle.

La couche qui se trouve immédiatement au-dessus de la surface terrestre est la troposphère, elle est caractérisée par la décroissance presque linéaire de la température suivant la hauteur. Cette décroissance de la température s'arrête vers $10-15km$ de hauteur, l'espace entre la surface terrestre et cette hauteur est défini comme troposphère. La limite supérieure de la troposphère dépend toutefois de la latitude : dans les zones proches des pôles, elle est environ $10km$, tandis que dans les zones tropicales elle est environ $15km$. La décroissance presque linéaire de la température suivant la hauteur dans la troposphère est expliquée par la présence du mouvement vertical de l'air (et donc le mélange de l'air entre la partie supérieure et la partie inférieure au sein de la troposphère), dans lequel la variation de la pression et de la température ne s'écarte pas beaucoup de celle de la transformation adiabatique. La troposphère peut être considérée comme siège des phénomènes météorologiques, auxquels largement contribue l'abondance de la vapeur d'eau dans cette couche.

Au-dessus de la troposphère se trouve une zone où la température croît graduellement jusqu'à la hauteur de $45-50km$, où la température atteint de nouveau le niveau de $270°K$. Cette zone de $10-15km$ à $45-50km$ est appelée stratosphère. Au-dessus de la stratosphère la température décroît de nouveau jusqu'à la hauteur de $90-95km$, à cette hauteur la température descend au niveau de $180-200°K$. Cette zone entre $45-50km$ et $90-95km$ de hauteur est appelée mésosphère. La zone au-dessus de la mésosphère est appelée thermosphère, qui est caractérisée par la croissance de la température.
En ce qui concerne la composition chimique de l'air, comme nous l'avons évoqué en haut, elle dépend de la hauteur. Toutefois dans la troposphère la composition est presque homogène sauf H_2O. Nous appelons l'air sec la partie de l'air comprenant toutes les molécules sauf H_2O. La composition chimique de l'air sec est la suivante :

N_2 (masse molaire$\approx 28,01$) : $78,08\%$

O_2 (masse molaire$\approx 32,00$) : $20,95\%$

Ar (masse molaire$\approx 39,95$) : $0,93\%$

CO_2 (masse molaire$\approx 44,01$) : $0,028-0,039\%$

et les autres composantes avec des concentrations trés modestes (les pourcentages indiqués des composantes sont leurs portions de volume). La masse molaire moyenne de l'air sec est approximativement $28,96$. La variation de la concentration de CO_2 s'est vérifiée dans le cours du temps : on estime qu'en 1850 elle était environ $0,028\%$, mais aujourd'hui on constate qu'elle a atteint le niveau de $0,039\%$. Cette augmentation de la concentration de CO_2 dans l'atmosphère est considérée comme la cause principale du réchauffement global, qui est l'objet des débats internationaux depuis quelques années.

D'autre part le gaz de H_2O (vapeur d'eau) occupe une portion trés variée, dans les conditions de température assez élevée la concentration de H_2O en état gazeux dans l'air peut dépasser 4% , mais à la température $40°C$ elle ne dépasse pas $0,01\%$. En outre, à la température de notre environnement l'eau H_2O peut avoir les trois états : gazeux, liquide et solide. La transition de phase de H_2O, c'est-à-dire transformation d'un des trois états en un autre, peut se produire même dans l'atmosphère, comme nous l'observons dans la formation (et l'évaporation) des nuages et la différente forme de précipitation (pluie, neige etc...). La transition de phase de l'eau dans l'atmosphère entraîne non seulement le changement des aspects visibles comme les nuages, mais contribue aussi à la variation de la température par la chaleur latente due à elle.

2.2 Équations du mouvement de l'atmosphère

Comme l'atmosphère est un gaz, son mouvement doit être décrit par les équations aux dérivées partielles de la dynamique des gaz. Or, en réalité, la composante H_2O a des comportements particuliers : la vapeur d'eau peut se transformer en liquide ou en solide et sa transition de phase contribue au changement de la concentration de H_2O en état gazeux et au bilan de la température. Toutefois la description de l'atmosphère avec la vapeur d'eau (et avec sa transition de phase) est considérablement plus complexe que celle du mouvment de l'air sans vapeur d'eau. Pour cette raison, nous proposerons le système d'équations pour l'atmosphère comprenant la vapeur d'eau dans le chapitre IV dédié à ce modèle et ici nous nous limitons à considérer le système d'équations du moumvent de l'air sans vapeur d'eau. D'esignons par $\varrho = \varrho(t,x)$ la densité de l'air, par $v = v(t,x) = (v_1(t,x), v_2(t,x), v_3(t,x))$ la vitesse, par $p = p(t,x)$ la pression et par $T = T(t,x)$ la température. La loi de conservation de la masse et celle de la quantité de mouvement s'expriment par les équations

$$\partial_t \varrho + \nabla \cdot (\varrho v) = 0, \tag{2.2}$$

$$(2.3) \qquad \varrho \partial_t v_j + \varrho \sum_{k=1}^{3} v_k \frac{\partial}{\partial x_k} v_j + \frac{\partial}{\partial x_j} P =$$

$$= \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\eta \left(\frac{\partial}{\partial x_k} v_j + \frac{\partial}{\partial x_j} v_k - \frac{2}{3} \delta_{jk} \nabla \cdot v \right) \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\zeta \nabla \cdot v) - \varrho \frac{\partial}{\partial x_j} \Phi, \quad j = 1,2,3,$$

tandis que le bilan d'énergie, exprimé en fonction de la température, sera décrit par l'équation

$$(2.4) \qquad \varrho c_v (\partial_t T + v \cdot \nabla T) + P \nabla \cdot v =$$

$$= \nabla \cdot \kappa \nabla T + \eta \sum_{j,k=1}^{3} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \delta_{jk} \nabla \cdot v \right) \frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \zeta (\nabla \cdot v)^2 + E;$$

enfin la pression p doit être déterminée par la densité ϱ et la température, en adoptant l'approximation du gaz idéal on a

$$P = R \frac{\varrho}{\mu} T, \tag{2.5}$$

oú η et ζ sont les coefficients de viscosité d'écoulement et volumique de l'air, Φ est le géopotentiel, E est la source de chaleur (principalement due à la radiation), c_v est la chaleur spécifique de l'air, κ est la thermoconductibilité de l'air, R est la constante universelle des gaz ($R \approx 8,31 \cdot 10^7 erg/mole \cdot K$) et μ est la masse molaire moyenne de l'air ($\mu \approx 28,96$).

La rotation de la Terre cause, dans le système de coordonnées qui tourne avec la Terre, non seulement la force centrifuge mais aussi la force de Coriolis (pour la définition de la force de Coriolis voir [1]). Si on tient compte de la force de Coriolis, l'équation de quantité de mouvement aura la forme

(2.3)bis $$\varrho\partial_t v_j + \varrho\sum_{k=1}^{3} v_k \frac{\partial}{\partial x_k} v_j + \frac{\partial}{\partial x_j} P =$$

$$\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\eta(\frac{\partial}{\partial x_k} v_j + \frac{\partial}{\partial x_j} v_k - \frac{2}{3}\delta_{jk}\nabla\cdot v)\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\zeta\nabla\cdot v) - 2\varrho\omega\times v - \varrho\frac{\partial}{\partial x_j}\Phi$$

$$j = 1, 2, 3,$$

où ω est la vitesse angulaire de la rotation de la Terre, dans (2.3)bis la force de Coriolis est exprimée par le terme $-2\varrho\omega\times v$. Pour les équations (2.2)-(2.5) on peut consulter le livre [6] et le cours de Fluides Newtoniens [2] (les équations (2.2)-(2.5) correspondent à (1.6), (2.12) avec $f_j = -\frac{\partial}{\partial x_j}\Phi$, (3.7) avec l'adjonction de la source de chaleur E du chapitre II et (1.5) du chapitre IV de [2]).

2.3 État hydrostatique.

Dans l'atmosphère réelle la diffusion de la chaleur et l'effet thermique de la friction interne sont relativement petits, de sorte que le déplacement vertical de l'air, s'il n'y a pas de transition de phase de l'eau, engendre la variation de la pression et de la température de manière assez proche du processus adiabatique. A cause de ce comportement de l'air, comme nous l'avons l'évoqué dans le paragraphe 1, dans la troposphère nous trouvons une distribution de la pression, de la densité et de la température assez proche de la distribution de l'état hydrostatique.

En effet, si on néglige la diffusion de la chaleur et l'augmentation de la température due à la friction interne, l'équation (2.4) se réduit à

(2.6) $$\varrho c_v(\partial_t T + v\cdot\nabla T) + \frac{R}{\mu}\varrho T\nabla\cdot v = 0.$$

Si le mouvement de l'air vérifie cette équation, le long de la trajectoire de chaque partie de l'air le rapport

$$v(t,x) = \frac{T(t,x)^{\frac{1}{\gamma}}}{\varrho^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}, \tag{2.7}$$

avec $\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{c_v + \frac{R}{\mu}}{c_v}$ reste invariant, où γ est l'exposant adiabatique, qui a la valeur approximativement 1.4, tandis que la trajectoire est définie par la relation

$$\{x \in \mathbb{R}^3 | x = x(t,x_0), t_0 \leq t \leq t_1\}, \qquad x(t,x_0) = x_0 + \int_0^t v(t', x(t',x_0))dt'.$$

(Pour la démonstration de cette relation, voir le lemme 5.1 du chapitre IV du cours de Fluides Newtoniens [2]). Donc sur la trajectoire de chaque partie du gaz on a

$$T(t,x) = C_1 \varrho(t,x)^{\gamma-1}, \tag{2.8}$$

avec une constante C_1.

Supposons maintenant que la valeur de la constante C_1 figurant dans (2.8) est identique dans une région ω. Alors dans cette région pour la pression P, qui satisfait à l'équation (2.5), on a la relation

$$P = h\varrho^\gamma , \tag{2.9}$$

où h est une constante, plus précisément $h = C_1 \frac{R}{\mu}$.

Soit Φ le géopotentiel (voir (2.1)). Si on substitue $v \equiv 0$ et la relation (2.9) dans l'équation (2.3) on obtient l'équation

$$h\nabla\varrho^\gamma = -\varrho\nabla\Phi. \tag{2.10}$$

Comme

$$\nabla\varrho^\gamma = \nabla\varrho^{(\gamma-1)\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \frac{\gamma}{\gamma-1}\varrho\nabla\varrho^{\gamma-1},$$

de (2.10) on déduit que

$$h\frac{\gamma}{\gamma-1}\nabla\varrho^{\gamma-1} = -\nabla\Phi,$$

ce qui implique que

(2.11) $$\varrho^{\gamma-1} = \varrho_0^{-\gamma-1} + \frac{\gamma-1}{h\gamma}(\Phi_0 - \Phi),$$

ou

(2.12) $$\varrho = \left(\varrho_0^{-\gamma-1} + \frac{\gamma-1}{h\gamma}(\Phi_0 - \Phi)\right)^{\frac{1}{\gamma-1}},$$

où $\Phi_0 = \Phi(x_0)$ et $\overline{\varrho_0} = \overline{\varrho}(x_0)$ avec un point $x_0 \in \Omega$. Pour l'application de (2.12) à l'atmosphère réelle il est souvent commode de prendre Φ_0 comme la valeur de Φ au niveau de la mer et $\overline{\varrho_0}$ comme la densité de l'air au niveau de la mer. Naturellement, il faut rappeler que, du point de vue physique, (2.11) et (2.12) sont valables seulement si $\overline{\varrho}(x_0) > 0$ et $\varrho_0^{-\gamma-1} + \frac{\gamma-1}{h\gamma}(\Phi_0 - \Phi)$.

La relation (2.12) signifie que dans l'approximation "adiabatique" l'atmosphère "au repos" (c'est-à-dire $v \equiv 0$) aura la distribution de la densité ϱ décrite dans (2.12). En outre, compte tenu de la relation $\frac{C_1}{h} = \frac{\mu}{R}$, de (2.8) et (2.11) on déduit que

(2.13) $$T = C_1\left(\varrho_0^{-\gamma-1} + \frac{\gamma-1}{h\gamma}(\Phi_0 - \Phi)\right) = T_0 + \frac{\mu(\gamma-1)}{R\gamma}(\Phi_0 - \Phi),$$

où $T_0 = C_1\varrho_0^{-\gamma-1}$ est la température au niveau $\{x \in \Omega | \Phi(x) = \Phi_0\}$. D'autre part, de (2.9) et (2.12) on dduit que

(2.14) $$P = h\left(\varrho_0^{-\gamma-1} + \frac{\gamma-1}{h\gamma}(\Phi_0 - \Phi)\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left(P_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + \frac{\gamma-1}{h^{\frac{1}{\gamma}}\gamma}(\Phi_0 - \Phi)\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

où $P_0 = h\varrho_0^{-\gamma}$ est la pression au niveau $\{x \in \Omega | \Phi(x) = \Phi_0\}$

La distribution de la densité $\varrho(x)$, de la température $T(x)$ et de la pression $P(x)$ donnée dans (2.12)-(2.14) dans une région Ω définit un état hydrostatique. Il est intéressant de remarquer que dans l'état hydrostatique la température $T(x)$ descend linéairement par rapport au géopotentiel $\Phi(x)$, ce qui correspond au comportement de la température dans la troposphère. Toutefois, la comparaison entre le calcul explicite de $T(x)$ par la relation

(2.13) et la donnée de la température dans la troposphère fournie par les observations montre une différence non négligeable, c'est-à-dire la décroissance de la température dans la troposphère de l'atmosphère réelle est plus faible que celle donnée par la relation (2.12).

Prenons en examen le terme $\frac{\mu(\gamma-1)}{R\gamma}(\Phi_0 - \Phi)$ figurant dans l'équation (2.12). Pour obtenir une approximation explicite de ce terme, nous utilisons le système CGS (centimètregramme- second). En désignant par $\Phi(H)$ le géopotentiel à un point à la hauteur Hcm du niveau de référence $\Phi = \Phi_0$ et en substituant dans le terme $\frac{\mu(\gamma-1)}{R\gamma}(\Phi_0 - \Phi(H))$ l'approximation $\Phi(H) - \Phi_0 \approx 980.Hcm^2/s^{-2}$ et les valeurs $\mu \approx 28,96g/mol$, $R \approx 8.31.10^7 erg/mol.K$, $\gamma \approx 1,4$, on obtient

$$\frac{\mu(\gamma-1)}{R\gamma}(\Phi_0 - \Phi(H)) \approx \frac{-980.Hcm^2/s^{-2}.28,96g/mole.0,4}{8,31.10^7 erg/mole.K.1,4}$$
$$\approx -9,8.H.10^{-5}K.$$

En rappelant (2.13), cette relation signifie que quand on monte de $H\ cm$ la température devrait descendre de $9,8.H.10^{-5}$ degrés, c'est-à-dire que quand on monte de $1km$ la température devrait descendre de $9,8$ degrés. Mais les mesures effectuées dans l'atmosphère réelle nous montrent que quand on monte de $1km$ la température descend en moyenne environ $6,5$ degrés. Cette différence est due principalement à la présence de la vapeur d'eau et à sa transition de phase.

A la fin il ne faut pas oublier de rappeler le résultat bien établi des observations selon lequel la pression moyenne au niveau de la mer est partout dans le monde approximativement $1013mb$. D'autre part, comme nous le savons bien, la température moyenne au niveau de la mer varie beaucoup de la zone tropicale aux zones polaires. Par conséquent, la densité moyenne au niveau de la mer, qui doit satisfaire à l'équation (2.5) avec $p \approx 1013mb$ et la température moyenne donnée, elle aussi varie sensiblement de la zone tropicale aux zones polaires. La constante h utilisée dans (2.9) doit en conséquence varier en fonctione de la température au niveau de la mer.

Chapitre 3

Equation du mouvement de l'air dans un cyclone tropical

Compte tenu des équations qui décrivent le mouvement de l'atmosphère. Nous procédons à la formulation des hypothèses simplificatrices qui sans apporter d'important changements au modèle réel, et nous permettons de simplifier nos calculs.

Structurelement, un cyclon tropical est une large zone de nuage orageux en rotation accompagnée de vents forts. On peut les classer dans la catégorie des systemes convecifs de méso-échelle puisque'ils ont un diamètre inférieur à une dépression classique, dite synoptique, et que leur source d'energie principale est le dégagement de chaleur latente causé par la condensation de vapeur d'eau en altitude dans leurs orages. Le cyclone tropical est semblable à une machine thermique, au sens de la thermodynamique. Le dégagement de chaleur latente dans les niveaux supérieurs de tempête élève la température à l'intérieur du cyclone de 15 à 20° C au dessus de la température ambiante dans la troposphère à l'extérieur du cyclone. Pour cette raison, les cyclones tropicaux sont des tempêtes à noyau chaud.

Nous proposons une étude de la notion de l'air dans le cyclone dans le cas stationnaire, puis nous avons mis :

$$\varrho\partial_t v = 0, \qquad\qquad \partial_t \varrho = 0.$$

Pour le typhon la force de Coriolis est essentielle de sorte que la direction du vent est dans la direction des aiguilles d'une montre dans l'hémisphère sud et dans la direction opposée dans l'hémisphère nord, en outre comme la force de Coriolis projectée sur le plan tangent à la Terre est nulle sur l'équateur , le typhon n'existe pas dans le voisinage de l'équateur.

Rappelons que, selon les études des physiciens, dans le typhon il doit exister une convection à grande échelle, qui mène la masse d'air dans la partie inférieure vers le centre et dans le voisinage du centre vers le haut et puis dans la partie supérieure vers les périphéries. Nous divisons alors le typhon en deux parties : partie infériure et partie supérieure et nous nous occupons du mouvement de l'air dans la partie inférieure. Pour fixer l'idée, nous choisissons une hauteur H, où la composante radial du vent est petite (on estime que, conformement à cette condition, il est raisonable de choisir H entre 1 Km et 6 Km de la surface de la mer), et nous considérons l'air entre la surface de la mer et la hauteur H.

Comme nous l'avons évoqué en haut, pour le typhon la force de Coriolis est essentielle, or, la projection de la force de Coriolis sur le plan tangent dépend de la latitude. Donc pour simplifier le problème tout en maintenant le rôle essentiel de la force de Coriolis, nous considérons le plan tangent au point du centre du typhon, et nous adoptons l'approximation de la surface de la mer par le plan tangent. De cette manière la partie inférieure à considérer peut être désignée dans son approximation par :

$$\Omega_3 = \{x \in \mathbb{R}^3 / 0 < x_3 < H\}.$$

3.1 Equation de la quantité de mouvement

3.1.1 Equation de la quantité de mouvement en coordonnées cartisiennes

Dans le domaine Ω_3 nous considérons le système d'équations du mouvement stationnaire d'un gaz visqueux et barotropique sous la force $-\nabla\Phi$ (par unité de masse) et la force de Coriolis exprimée bien sur en coordonnées cartisiennes :

$$\varrho(v \cdot \nabla)v = \mu\Delta v + \lambda\nabla(\nabla \cdot v) - h\nabla\varrho^{\gamma} - 2\varrho\omega \times v - \varrho\nabla\Phi, \tag{3.1}$$

$$\nabla \cdot (\varrho v) = 0. \tag{3.2}$$

Dans (3.1) ω désigne la vitesse angulaire de la rotation de la Terre et le terme $-2\varrho\omega \times v$ est la force de Coriolis.

Il faut préciser que la vitesse angulaire de la rotation ω de la Terre est un vecteur orienté vers la direction du pôle nord et que donc, si nous choisissons l'axe x_1 dans la direction d'Ouest-Est et l'axe x_2 dans la direction de Sud-Nord sur le plan tangent, dans les coordonnées $x = (x_1, x_2, x_3)$ le vecteur ω aura les composantes

$$\omega_1 = 0, \qquad \omega_2 = |\omega| \cos\varphi_0, \qquad \omega_3 = |\omega| \sin\varphi_0,$$

où φ_0 est l'angle formé par l'axe x_3 et le plan contenant l'équateur.

Nous voulons étudier les équations du mouvement de l'air en coordonnées cylindriques. Nous devons donc rappeler les coordonnées cartisiennes et les coordonnées cylindriques

Les coordonnées cartisiennes (x_1, x_2, x_3) et les coordonnées cylindriques (r, θ, x_3) sont liées par les relations suivantes :

$$\begin{cases} x_1 = r\cos\theta \\ x_2 = r\sin\theta \\ x_3 = x_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \\ \theta = arctan(\frac{x_2}{x_1}) \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

en fonction du changement de coordonnnées, les composantes de vitesse peut être écrite sous la forme suivantes :

$$\begin{cases} v_1 = w_r\cos\theta - w_\theta\sin\theta \\ v_2 = w_r\sin\theta + w_\theta\cos\theta \\ v_3 = v_3 \end{cases}$$

où

$w_r = v_1\cos\theta + v_2\sin\theta$ est la composante radiale de la vitesse.

$w_\theta = -v_1\sin\theta + v_2\cos\theta$ est la composante tangentielle de la vitesse.

On obtient aussi facilement

$$\frac{\partial r}{\partial x_1} = \cos\theta, \quad \frac{\partial r}{\partial x_2} = \sin\theta, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x_1} = -\frac{\sin\theta}{r}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x_2} = \frac{\cos\theta}{r}.$$

Il est utile d'intoduire les deux vecteurs e_r et e_θ

$$e_r = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_\theta = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix},$$

Nous rappelons que, nous avons supposé que le mouvement est symétrique autour de l'axe x_3, à savoir que toutes les grandeurs physiques dépendent que de r et x_3 et indépendentes de θ.

3.1.2 Reformulation de l'équation de la quantité de mouvement en coordonnées cylindriques

Calculons séparèment chaque opérande de l'équation (3.1) à partir des coordonnées cylindriques, en utilisant les relations entre les coordonnées (x_1, x_2, x_3) et (r, θ, x_3).

Examinons d'abord le terme $\varrho(v \cdot \nabla)v$, pour cela on va calculer $v.\nabla$.

$$
\begin{aligned}
\blacklozenge v \cdot \nabla &= v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \\
&= (w_r \cos\theta - w_\theta \sin\theta)(\frac{\partial r}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial \theta}) \\
&+ (w_r \sin\theta + w_\theta \cos\theta)(\frac{\partial r}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial \theta}) + v_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \\
&= (w_r \cos\theta - w_\theta \sin\theta)(\cos\theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}) \\
&+ (w_r \sin\theta + w_\theta \cos\theta)(\sin\theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}) + v_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \\
&= w_r \cos^2\theta \frac{\partial}{\partial r} - w_r \frac{\cos\theta \sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} - w_\theta \sin\theta\cos\theta \frac{\partial}{\partial r} + w_\theta \frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \\
&+ w_r \sin^2\theta \frac{\partial}{\partial r} + w_r \frac{\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + w_\theta \cos\theta \sin\theta \frac{\partial}{\partial r} + w_\theta \frac{\cos^2\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + v_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \\
&= w_r \frac{\partial}{\partial r} + w_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + v_3 \frac{\partial}{\partial x_3}.
\end{aligned}
$$

Alors on a

$$\blacklozenge (v\cdot\nabla)v_1 = (w_r\frac{\partial}{\partial r} + w_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + v_3\frac{\partial}{\partial x_3})(w_r\cos\theta - w_\theta\sin\theta) =$$
$$= w_r\frac{\partial}{\partial r}(w_r\cos\theta) + w_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(w_r\cos\theta) + v_3\frac{\partial}{\partial x_3}(w_r\cos\theta) +$$
$$- w_r\frac{\partial}{\partial r}(w_\theta\sin\theta) - w_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(w_\theta\sin\theta) - v_3\frac{\partial}{\partial x_3}(w_\theta\sin\theta).$$

$$\blacklozenge (v\cdot\nabla)v_2 = (w_r\frac{\partial}{\partial r} + w_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + v_3\frac{\partial}{\partial x_3})(w_r\sin\theta + w_\theta\cos\theta) =$$
$$= w_r\frac{\partial}{\partial r}(w_r\sin\theta) + w_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(w_r\sin\theta) + v_3\frac{\partial}{\partial x_3}(w_r\sin\theta) +$$
$$+ w_r\frac{\partial}{\partial r}(w_\theta\cos\theta) + w_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(w_\theta\cos\theta) + v_3\frac{\partial}{\partial x_3}(w_\theta\cos\theta).$$

$$\blacklozenge (v\cdot\nabla)v_3 = w_r\frac{\partial}{\partial r}v_3 + w_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}v_3 + v_3\frac{\partial}{\partial x_3}v_3.$$

D'autre part, sachant que w_r, w_θ et v_3 ne dépendent pas de θ, cela nous permet d'écrire que

$$(v\cdot\nabla)v = \begin{pmatrix} (v\cdot\nabla)v_1 \\ (v\cdot\nabla)v_2 \\ (v\cdot\nabla)v_3 \end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

d'où

$$\blacklozenge (v\cdot\nabla)v_1 = w_r\frac{\partial}{\partial r}w_r\cos\theta - w_\theta\frac{1}{r}w_r\sin\theta + v_3\frac{\partial}{\partial x_3}w_r\cos\theta - w_r\frac{\partial}{\partial r}w_\theta\sin\theta +$$
$$- w_\theta\frac{1}{r}w_\theta\cos\theta - v_3\frac{\partial}{\partial x_3}w_\theta\sin\theta,$$

$$\blacklozenge (v\cdot\nabla)v_2 = w_r\frac{\partial}{\partial r}w_r\sin\theta + w_\theta\frac{1}{r}w_r\cos\theta + v_3\frac{\partial}{\partial x_3}w_r\sin\theta + w_r\frac{\partial}{\partial r}w_\theta\cos\theta +$$
$$- w_\theta\frac{1}{r}w_\theta\sin\theta + v_3\frac{\partial}{\partial x_3}w_\theta\cos\theta,$$

$$\blacklozenge (v\cdot\nabla)v_3 = w_r\frac{\partial}{\partial r}v_3 + v_3\frac{\partial}{\partial x_3}v_3.$$

En multipliant le vecteur (3.3) par le vecteur e_r, on a le produit scalaire

$$\begin{pmatrix}(v\cdot\nabla)v_1\\(v\cdot\nabla)v_2\\(v\cdot\nabla)v_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\\0\end{pmatrix}.$$

Comme

$$\blacklozenge((v\cdot\nabla)v_1)(\cos\theta)=w_r\frac{\partial}{\partial r}w_r\cos^2\theta-w_\theta\frac{1}{r}w_r\sin\theta\cos\theta+v_3\frac{\partial}{\partial x_3}w_r\cos^2\theta+$$
$$-w_r\frac{\partial}{\partial r}w_\theta\sin\theta\cos\theta-w_\theta\frac{1}{r}w_\theta\cos^2\theta-v_3\frac{\partial}{\partial x_3}w_\theta\sin\theta\cos\theta,$$

$$\blacklozenge((v\cdot\nabla)v_2)(\sin\theta)=w_r\frac{\partial}{\partial r}w_r\sin^2\theta+w_\theta\frac{1}{r}w_r\cos\theta\sin\theta+v_3\frac{\partial}{\partial x_3}w_r\sin^2\theta+$$
$$+w_r\frac{\partial}{\partial r}w_\theta\cos\theta\sin\theta-w_\theta\frac{1}{r}w_\theta\sin^2\theta+v_3\frac{\partial}{\partial x_3}w_\theta\cos\theta\sin\theta,$$

$$\blacklozenge((v\cdot\nabla)v_3)0=0,$$

en adjoignant ces termes, on obtient

$$\blacklozenge((v\cdot\nabla)v).e_r=w_r\frac{\partial}{\partial r}w_r-w_r^2\frac{1}{r}+v_3\frac{\partial}{\partial x_3}w_r.$$

D'autre part, si on multiplie le vecteur (3.3) par le vecteur e_θ, en calculant

$$\blacklozenge((v\cdot\nabla)v_1)(-\sin\theta)=-w_r\frac{\partial}{\partial r}w_r\cos\theta\sin\theta+w_\theta\frac{1}{r}w_r\sin^2\theta-v_3\frac{\partial}{\partial x_3}w_r\cos\theta\sin\theta+$$
$$+w_r\frac{\partial}{\partial r}w_\theta\sin^2\theta+w_\theta\frac{1}{r}w_\theta\cos\theta\sin\theta+v_3\frac{\partial}{\partial x_3}w_\theta\sin^2\theta,$$

$$\blacklozenge((v\cdot\nabla)v_2)(\cos\theta)=w_r\frac{\partial}{\partial r}w_r\sin\theta\cos\theta+w_\theta\frac{1}{r}w_r\cos^2\theta+v_3\frac{\partial}{\partial x_3}w_r\sin\theta\cos\theta+$$
$$+w_r\frac{\partial}{\partial r}w_\theta\cos^2\theta-w_\theta\frac{1}{r}w_\theta\sin\theta\cos\theta+v_3\frac{\partial}{\partial x_3}w_\theta\cos^2\theta,$$

$$\blacklozenge((v\cdot\nabla)v_3)0=0.$$

En sommant les termes ainsi calculé, on va obtenir

$$\blacklozenge((v\cdot\nabla)v)\cdot e_\theta = w_r\frac{\partial}{\partial r}w_\theta + w_\theta\frac{1}{r}w_r + v_3\frac{\partial}{\partial x_3}w_\theta.$$

Cela nous permet d'écrire les coordonnées dans la direction radiale, tengentielle et verticale du vecteur $\varrho(v\cdot\nabla)v$:

$$\begin{cases} \varrho((v\cdot\nabla)v)\cdot e_r = \varrho w_r\dfrac{\partial}{\partial r}w_r - w_\theta^2\dfrac{\varrho}{r} + \varrho v_3\dfrac{\partial}{\partial x_3}w_r \\ \varrho((v\cdot\nabla)v)\cdot e_\theta = \varrho w_r\dfrac{\partial}{\partial r}w_\theta + w_\theta\dfrac{\varrho}{r}w_r + \varrho v_3\dfrac{\partial}{\partial x_3}w_\theta \\ \varrho(v\cdot\nabla)v_3 = \varrho w_r\dfrac{\partial}{\partial r}v_3 + \varrho v_3\dfrac{\partial}{\partial x_3}v_3. \end{cases} \tag{3.4}$$

Calculons le terme $-\mu(\Delta v)$. Tout d'abord, nous déterminons l'expression de l'opérateur dans les coordonnées (r,θ,x_3).

$$\begin{aligned}
\blacklozenge\Delta = \nabla\cdot\nabla = (\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\frac{\partial}{\partial x_3})\cdot(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\frac{\partial}{\partial x_3}) = \\
= (\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}, \sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}, \frac{\partial}{\partial x_3}). \\
(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}, \sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}, \frac{\partial}{\partial x_3}) = \\
= (\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta})(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}) + \\
+ (\sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta})(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}) + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} = \\
= \cos^2\theta\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\cos\theta\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\cos\theta\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial r} + \\
+ \frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \sin^2\theta\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\cos^2\theta}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial r} + \\
- \frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos\theta\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\cos\theta\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} = \\
= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}.
\end{aligned}$$

Déterminons l'opérateur Laplacien appliqué à v.

$$\Delta v = \begin{pmatrix} (\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2})v_1 \\ (\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2})v_2 \\ (\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2})v_3 \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

Les composantes de ce vecteur ont les expressions suivantes

$$\blacklozenge\Delta v_1 = (\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2})(w_r\cos\theta - w_\theta\sin\theta) =$$
$$= \frac{\partial^2}{\partial r^2}(w_r\cos\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(w_r\cos\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}(w_r\cos\theta) + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}(w_r\cos\theta) +$$
$$- \frac{\partial^2}{\partial r^2}(w_\theta\sin\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(w_\theta\sin\theta) - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}(w_\theta\sin\theta) - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}(w_\theta\sin\theta),$$

$$\blacklozenge\Delta v_2 = (\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2})(w_r\sin\theta + w_\theta\cos\theta) =$$
$$= \frac{\partial^2}{\partial r^2}(w_r\sin\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(w_r\sin\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}(w_r\sin\theta) + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}(w_r\sin\theta) +$$
$$+ \frac{\partial^2}{\partial r^2}(w_\theta\cos\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(w_\theta\cos\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}(w_\theta\cos\theta) + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}(w_\theta\cos\theta),$$

$$\blacklozenge\Delta v_3 = \frac{\partial^2}{\partial r^2}v_3 + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}v_3 + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}v_3.$$

D'une manière similaire à la précédente, on multiplie le vecteur (3.5) par le vecteur e_r, on obtient

$$\blacklozenge(\Delta v_1)(\cos\theta) = \frac{\partial^2}{\partial r^2}w_r\cos^2\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}w_r\cos^2\theta - \frac{1}{r^2}w_r\cos^2\theta + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}w_r\cos^2\theta +$$
$$- \frac{\partial^2}{\partial r^2}w_\theta\sin\theta\cos\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}w_\theta\sin\theta\cos\theta + \frac{1}{r^2}w_\theta\sin\theta\cos\theta - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}w_\theta\sin\theta\cos\theta,$$

$$\blacklozenge(\Delta v_2)(\sin\theta) = \frac{\partial^2}{\partial r^2}w_r\sin^2\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}w_r\sin^2\theta - \frac{1}{r^2}w_r\sin^2\theta + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}w_r\sin^2\theta +$$
$$+ \frac{\partial^2}{\partial r^2}w_\theta\sin\theta\cos\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}w_\theta\sin\theta\cos\theta - \frac{1}{r^2}w_\theta\sin\theta\cos\theta + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}w_\theta\sin\theta\cos\theta,$$

$$\blacklozenge(\Delta v_3)0 = 0.$$

On ajoute ces termes on obtient

$$\blacklozenge(\Delta v).e_r = \frac{\partial^2}{\partial r^2}w_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}w_r - \frac{1}{r^2}w_r + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}w_r.$$

Multipliant le vecteur (3.5) par le vecteur e_θ

$$\begin{aligned}\blacklozenge(\Delta v_1)(-\sin\theta) = & -\frac{\partial^2}{\partial r^2}w_r\cos\theta\sin\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}w_r\cos\theta\sin\theta + \frac{1}{r^2}w_r\cos\theta\sin\theta + \\ & -\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}w_r\cos\theta\sin\theta + +\frac{\partial^2}{\partial r^2}w_\theta\sin^2\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}w_\theta\sin^2\theta - \frac{1}{r^2}w_\theta\sin^2\theta + \\ & +\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}w_\theta\sin^2\theta,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\blacklozenge(\Delta v_2)(\cos\theta) = & \frac{\partial^2}{\partial r^2}w_r\sin\theta\cos\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}w_r\sin\theta\cos\theta - \frac{1}{r^2}w_r\sin\theta\cos\theta + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}w_r\sin\theta\cos\theta + \\ & +\frac{\partial^2}{\partial r^2}w_\theta\cos^2\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}w_\theta\cos^2\theta - \frac{1}{r^2}w_\theta\cos^2\theta + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}w_\theta\cos^2\theta,\end{aligned}$$

$$\blacklozenge(\Delta v_3)0 = 0.$$

En sommant les termes calculés, on obtient

$$\blacklozenge(\Delta v).e_\theta = \frac{\partial^2}{\partial r^2}w_\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}w_\theta - \frac{1}{r^2}w_\theta + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}w_\theta.$$

Donc notre terme peut être écrit par les coordonnées cylindriques comme suit

$$\begin{cases} -\mu(\Delta v).e_r = -\mu(\frac{\partial^2}{\partial r^2}w_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}w_r - \frac{1}{r^2}w_r + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}w_r.) \\ -\mu(\Delta v).e_\theta = -\mu(\frac{\partial^2}{\partial r^2}w_\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}w_\theta - \frac{1}{r^2}w_\theta + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}w_\theta.) \\ -\mu(\Delta v_3) = -\mu(\frac{\partial^2}{\partial r^2}v_3 + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}v_3 + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}v_3). \end{cases} \tag{3.6}$$

Calculons le terme $-\lambda\nabla(\nabla\cdot v)$.

Pour cela, il est nécéssaire de calculer $\nabla \cdot v$, en tenant compte de la symétrie axiale ; C'est-à-dire $\frac{\partial}{\partial \theta} w_\theta = \frac{\partial}{\partial \theta} w_r = 0$

$$
\begin{aligned}
\blacklozenge(\nabla \cdot v) &= \frac{\partial r}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} v_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} v_3 = \\
&= (\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial \theta})(w_r \cos\theta - w_\theta \sin\theta) + \\
&+ (\frac{\partial r}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial \theta})(w_r \sin\theta + w_\theta \cos\theta) + \frac{\partial}{\partial x_3} v_3 = \\
&= (\cos\theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta})(w_r \cos\theta - w_\theta \sin\theta) \\
&+ (\sin\theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta})(w_r \sin\theta + w_\theta \cos\theta) + \frac{\partial}{\partial x_3} v_3 = \\
&= \cos^2\theta \frac{\partial}{\partial r} w_r - \sin\theta\cos\theta \frac{\partial}{\partial r} w_\theta - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(w_r \cos\theta) + \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(w_\theta \sin\theta) + \\
&+ \sin^2\theta \frac{\partial}{\partial r} w_r + \sin\theta\cos\theta \frac{\partial}{\partial r} w_\theta + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(w_r \sin\theta) + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(w_\theta \cos\theta) + \\
&+ \frac{\partial}{\partial x_3} v_3 = \\
&= \cos^2\theta \frac{\partial}{\partial r} w_r + \frac{\sin^2\theta}{r} w_r + \frac{\sin\theta\cos\theta}{r} w_\theta + \sin^2\theta \frac{\partial}{\partial r} w_r + \frac{\cos^2\theta}{r} w_r + \\
&- \frac{\cos\theta\sin\theta}{r} w_\theta + \frac{\partial}{\partial x_3} v_3. =
\end{aligned}
$$

Alors la divergence de v en coordonnées cylindriques est

$$
\frac{\partial}{\partial r} w_r + \frac{1}{r} w_r + \frac{\partial}{\partial x_3} v_3.
$$

Calculons le terme $\nabla(\nabla \cdot v)$

$$
\nabla(\nabla \cdot v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}(\nabla \cdot v) \\ \frac{\partial}{\partial x_2}(\nabla \cdot v) \\ \frac{\partial}{\partial x_3}(\nabla \cdot v) \end{pmatrix}. \tag{3.7}
$$

Calculons les trois composantes du vecteur (3.7)

$$\blacklozenge\frac{\partial}{\partial x_1}(\nabla\cdot v)=(\frac{\partial r}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial\theta}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial\theta})(\frac{\partial}{\partial r}w_r+\frac{1}{r}w_r+\frac{\partial}{\partial x_3}v_3)=$$
$$=(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta})(\frac{\partial}{\partial r}w_r+\frac{1}{r}w_r+\frac{\partial}{\partial x_3}v_3)=$$
$$=\cos\theta\frac{\partial^2}{\partial r^2}w_r+\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}(\frac{1}{r}w_r)+\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x_3}v_3,$$

$$\blacklozenge\frac{\partial}{\partial x_2}(\nabla\cdot v)=(\frac{\partial r}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial\theta}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial\theta})(\frac{\partial}{\partial r}w_r+\frac{1}{r}w_r+\frac{\partial}{\partial x_3}v_3)=$$
$$=(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta})(\frac{\partial}{\partial r}w_r+\frac{1}{r}w_r+\frac{\partial}{\partial x_3}v_3)=$$
$$=\sin\theta\frac{\partial^2}{\partial r^2}w_r+\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}(\frac{1}{r}w_r)+\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x_3}v_3,$$

$$\blacklozenge\frac{\partial}{\partial x_3}(\nabla\cdot v)=\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{\partial}{\partial r}w_r+\frac{\partial}{\partial x_3}(\frac{1}{r}w_r)+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}v_3.$$

Multipliant le vecteur (3.7) par le vecteur e_r, on obtient

$$\blacklozenge(\frac{\partial}{\partial x_1}(\nabla\cdot v))(\cos\theta)=\cos^2\theta\frac{\partial^2}{\partial r^2}w_r+\cos^2\theta\frac{\partial}{\partial r}(\frac{1}{r}w_r)+\cos^2\theta\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x_3}v_3,$$

$$\blacklozenge(\frac{\partial}{\partial x_2}(\nabla\cdot v))(\sin\theta)=\sin^2\theta\frac{\partial^2}{\partial r^2}w_r+\sin^2\theta\frac{\partial}{\partial r}(\frac{1}{r}w_r)+\sin^2\theta\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x_3}v_3,$$

$$\blacklozenge(\frac{\partial}{\partial x_3}(\nabla\cdot v))0=0.$$

On fait la somme de ces termes calculés, on obtient :

$$\blacklozenge\nabla(\nabla\cdot v).e_r=\frac{\partial^2}{\partial r^2}w_r+\frac{\partial}{\partial r}(\frac{1}{r}w_r)+\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x_3}v_3.$$

Multipliant le vecteur (3.7) par le vecteur e_θ, on trouve :

$$\blacklozenge(\frac{\partial}{\partial x_1}(\nabla\cdot v))(-\sin\theta)=-\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2}{\partial r^2}w_r-\sin\theta\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}(\frac{1}{r}w_r)-\cos\theta\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x_3}v_3$$

$$\blacklozenge(\frac{\partial}{\partial x_2}(\nabla\cdot v))(\cos\theta)=\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2}{\partial r^2}w_r+\sin\theta\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}(\frac{1}{r}w_r)+\cos\theta\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x_3}v_3,$$

$$\blacklozenge(\frac{\partial}{\partial x_3}(\nabla\cdot v)).0=0.$$

Sommant les termes ainsi calculés, nous obtenons un produit scalaire nul, et donc on aura la relation suivante

$$\nabla(\nabla\cdot v)\cdot e_\theta=0.$$

Cela nous permet d'écrire que le terme

$$\begin{cases} -\lambda\nabla(\nabla\cdot v)\cdot e_r=-\lambda(\frac{\partial^2}{\partial r^2}w_r+\frac{\partial}{\partial r}(\frac{1}{r}w_r)+\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x_3}v_3) \\ -\lambda\nabla(\nabla\cdot v)\cdot e_\theta=0, \\ -\lambda\frac{\partial}{\partial x_3}(\nabla\cdot v)=-\lambda(\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{\partial}{\partial r}w_r+\frac{\partial}{\partial x_3}(\frac{1}{r}w_r)+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}v_3). \end{cases} \tag{3.8}$$

Etudiant maintenant le terme $-h\nabla\varrho^\gamma$

$$\nabla\varrho^\gamma=\begin{pmatrix} \cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\varrho^\gamma-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\varrho^\gamma, \\ \sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\varrho^\gamma+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\varrho^\gamma, \\ \frac{\partial}{\partial x_3}(\varrho^\gamma) \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

Multipliant le vecteur (3.9) par le vecteur e_r, on obtient

$$\begin{aligned}\blacklozenge(\nabla\varrho^\gamma)\cdot e_r &= (\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\varrho^\gamma-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\varrho^\gamma)\cos\theta+ \\ &+(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\varrho^\gamma+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\varrho^\gamma)\sin\theta+(\frac{\partial}{\partial x_3}\varrho^\gamma)0= \\ &=\cos^2\theta\frac{\partial}{\partial r}\varrho^\gamma+\sin^2\theta\frac{\partial}{\partial r}\varrho^\gamma=\frac{\partial}{\partial r}\varrho^\gamma.\end{aligned}$$

Multipliant le vecteur (3.9) par le vecteur e_θ

$$\begin{aligned}\blacklozenge(\nabla\varrho^\gamma)\cdot e_\theta &= (\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\varrho^\gamma-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\varrho^\gamma)(-\sin\theta)+ \\ &+(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\varrho^\gamma+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\varrho^\gamma)\cos\theta+0= \\ &=-\sin\theta\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\varrho^\gamma+\cos\theta\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\varrho^\gamma=0.\end{aligned}$$

Le terme $-h(\nabla\varrho^\gamma)$ est exprimé par les coordonnées cylindrique comme suit

$$\begin{cases} -h(\nabla\varrho^\gamma)\cdot e_r = -h\dfrac{\partial}{\partial r}\varrho^\gamma \\ -h(\nabla\varrho^\gamma)\cdot e_\theta = 0 \\ -h\dfrac{\partial}{\partial x_3}\varrho^\gamma \end{cases} \tag{3.10}$$

Calculons le terme $2\varrho\omega\times v$

$$w\times v = \begin{pmatrix} \omega_2 v_3 - \omega_3 v_2 \\ \omega_3 v_1 - \omega_1 v_3 \\ \omega_1 v_2 - \omega_2 v_1 \end{pmatrix}, \tag{3.11}$$

où

$$\blacklozenge 2\varrho(\omega_2 v_3 - \omega_3 v_2) = 2\varrho|\omega|[\cos\varphi_0 v_3 - \sin\varphi_0(\sin\theta w_r + \cos\theta w_\theta)]$$

$$\blacklozenge 2\varrho(\omega_3 v_1 - \omega_1 v_3) = 2\varrho|\omega|\sin\varphi_0(\cos\theta w_r - \sin\theta w_\theta)$$

$$\blacklozenge 2\varrho(\omega_1 v_2 - \omega_2 v_1) = -2\varrho|\omega|\cos\varphi_0(\cos\theta w_r - \sin\theta w_\theta)$$

Multipliant le vecteur (3.11) par le vecteur e_r

$$\blacklozenge 2\varrho(\omega_2 v_3 - \omega_3 v_2)\cdot\cos\theta = 2\varrho|\omega|.\cos\theta[\cos\varphi_0 v_3 - \sin\varphi_0(\sin\theta w_r + \cos\theta w_\theta)],$$

$$\blacklozenge 2\varrho(\omega_3 v_1 - \omega_1 v_3)\cdot\sin\theta = 2\varrho|\omega|\sin\varphi_0\sin\theta(\cos\theta w_r - \sin\theta w_\theta),$$

$$\blacklozenge 2\varrho(\omega_1 v_2 - \omega_2 v_1)\cdot 0 = 0.$$

Multipliant le vecteur (3.11) par le vecteur e_θ on obtient

$$\blacklozenge 2\varrho(\omega_2 v_3 - \omega_3 v_2)\cdot(-\sin\theta) = -2\varrho|\omega|.\sin\theta[\cos\varphi_0 v_3 - \sin\varphi_0(\sin\theta w_r + \cos\theta w_\theta)],$$

$$\blacklozenge 2\varrho(\omega_3 v_1 - \omega_1 v_3)\cdot\cos\theta = 2\varrho|\omega|\sin\varphi_0\sin\theta(\cos\theta w_r - \sin\theta w_\theta)$$

$$\blacklozenge 2\varrho(\omega_1 v_2 - \omega_2 v_1)\cdot 0 = 0$$

Le terme qui présente la force de Coriolis est exprimé par les coordonnées cylindrique sous la forme

$$\begin{cases} 2\varrho(\omega \times v) \cdot e_r = 2\varrho|\omega|[\cos\theta\cos\varphi_0 v_3 - \sin\varphi_0 w_\theta] \\ 2\varrho(\omega \times v) \cdot e_\theta = 2\varrho|\omega|[\sin\varphi_0 w_r - \sin\theta\cos\varphi_0 v_3] \\ 2\varrho(\omega \times v) = -2\varrho|\omega|\cos\varphi_0(\cos\theta w_r - \sin\theta w_\theta) \end{cases} \quad (3.12)$$

Enfin en ce qui concerne le terme $\varrho\nabla\Phi$, il est exprimé par les coordonnées cylindrique comme suit :

$$\begin{cases} \varrho\frac{\partial}{\partial x_1}\Phi = \varrho(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\Phi - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\Phi) = 0 \\ \varrho\frac{\partial}{\partial x_2}\Phi = \varrho(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\Phi + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\Phi) = 0 \\ \varrho\frac{\partial}{\partial x_3}\Phi \end{cases} \quad (3.13)$$

Pour obtenir l'équation de la quantité de mouvement du cyclone écrite en coordonnées cylindriques (r, θ, x_3) sachant que v_3 est supposée donnée, il nous suffit de faire la sommation des éxpressions exprimé en système d'équations (3.4), (3.6), (3.8), (3.10), (3.12) et (3.13).

$$\begin{cases} \varrho w_r\frac{\partial}{\partial r}w_r - w_\theta^2\frac{\varrho}{r} - \mu\frac{\partial^2}{\partial r^2}w_r - \mu\frac{\partial}{\partial r}\frac{w_r}{r} - \lambda\frac{\partial^2}{\partial r^2}w_r - \lambda\frac{\partial}{\partial r}\frac{w_r}{r} + F = -h\frac{\partial}{\partial r}\varrho^\gamma \\ -2\varrho|\omega|\sin\varphi_0 \cdot w_\theta \\ \varrho w_r\frac{\partial}{\partial r}w_\theta + w_\theta\frac{\varrho}{r}w_r - \mu\frac{\partial^2}{\partial r^2}w_\theta - \mu\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}w_\theta + \frac{\mu}{r^2}w_\theta + G = 2\varrho|\omega|\sin\varphi_0 \cdot w_r \\ H = 0 \end{cases}$$

où

$$F = \varrho v_3\frac{\partial}{\partial x_3}w_r - \mu\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}w_r - \lambda\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x_3}v_3 + 2\varrho|\omega|\cos\theta\cos\varphi_0 \cdot v_3,$$

$$G = \varrho v_3\frac{\partial}{\partial x_3}w_\theta - \mu\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}w_\theta - 2\varrho|\omega|\sin\theta\cos\varphi_0 \cdot v_3,$$

$$H = \varrho w_r \frac{\partial}{\partial r} v_3 + \varrho v_3 \frac{\partial}{\partial x_3} v_3 - \mu \frac{\partial^2}{\partial r^2} v_3 - \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} v_3 - \mu \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} v_3 - \lambda \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{\partial}{\partial r} w_r - \lambda \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} v_3 +$$
$$- \frac{\lambda}{\partial x_3} w_r + \varrho \frac{\partial}{\partial x_3} \Phi + h \frac{\partial}{\partial x_3} \varrho^\gamma - 2\varrho |\omega| \cos \varphi_0 (\cos\theta w_r - \sin\theta w_\theta).$$

3.2 Equation de continuité

3.2.1 Équation de continuité en coordonnées cartisiennes

L'équation de la conservation de la masse éxprimé en coordonnées cartésienne

$$\nabla \cdot (\varrho v) = 0,$$

elle est équivalente à

$$\nabla \cdot (\varrho v) = \frac{\partial}{\partial x_1}(\varrho v_1) \frac{\partial}{\partial x_2}(\varrho v_2) \frac{\partial}{\partial x_3}(\varrho v_3) = 0 \tag{3.14}$$

3.2.2 Reformulation de l'équation de continuité en coordonnées cylindriques

L'équation (3.14) est égale à

$$(\cos\theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta})(\varrho(w_r \cos\theta - w_\theta \sin\theta)) +$$
$$(\sin\theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta})(\varrho(w_r \sin\theta + w_\theta \cos\theta)) =$$
$$= - \frac{\partial}{\partial x_3}(\varrho v_3).$$

Puisque ϱ, w_r, w_θ ne dépendent pas de θ, le premier membre de cette équation sera

$$(\cos\theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta})(\varrho(w_r \cos\theta - w_\theta \sin\theta)) +$$

$$
\begin{aligned}
&(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta})(\varrho(w_r\sin\theta+w_\theta\cos\theta))=\\
&=\cos^2\theta\frac{\partial}{\partial r}(\varrho w_r)-\cos\theta\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}(\varrho w_\theta)+\frac{\sin^2\theta}{r}\varrho w_r+\frac{\sin\theta\cos\theta}{r}\varrho w_\theta+\\
&+\sin^2\theta\frac{\partial}{\partial r}(\varrho w_r)+\sin\theta\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}(\varrho w_\theta)+\frac{\cos^2\theta}{r}\varrho w_r+\frac{\sin\theta\cos\theta}{r}\varrho w_\theta=\\
&=\frac{\partial}{\partial r}(\varrho w_r)+\frac{\varrho}{r}w_r
\end{aligned}
$$

Alors l'équation de continuit prend la forme suivante

$$\frac{\partial}{\partial r}(\varrho w_r)+\frac{\varrho}{r}w_r=-\frac{\partial}{\partial x_3}(\varrho v_3).$$

Chapitre 4

Modèle d'un cyclone tropical sachant que la composante verticale de la vitesse est donnée

Dans le présent chapitre, nous allons donner des considérations qu'on voit utiles pour l'étude du système d'équations du mouvement de typhon, plus précisément, on suppose que v_3 est une fonction donnée, et qu'elle ne dépend pas de r et de x_3. Nous nous occupons de la composante tengentielle de la vitesse.

Après avoir des hypothèses choisi convenablement sur le courant ascendant ou bien le flux de l'air, nous allons restreindre un peu le domaine d'étude afin de pouvoir arriver à une solution de la deuxième équation de la quantité de mouvement qui nous semble linéaire par rapport à w_θ, et a une bonne structure pour lequelle nous pouvons obtenir une solution sur certaines hypothèses convenables.

4.1 Hypotèse sur la composante verticale de la vitesse :

Rappelons le système obtenu dans le chapitre précédent

Il s'agit du système d'équations de la quantité de mouvement et l'équation de la conservation de la masse

$$\begin{cases} \varrho w_r \frac{\partial}{\partial r} w_r - w_\theta^2 \frac{\varrho}{r} - \mu \frac{\partial^2}{\partial r^2} w_r - \mu \frac{\partial}{\partial r} \frac{w_r}{r} - \lambda \frac{\partial^2}{\partial r^2} w_r - \lambda \frac{\partial}{\partial r} \frac{w_r}{r} + F = -h \frac{\partial}{\partial r} \varrho^\gamma \\ -2\varrho|\omega| \sin \varphi_0 \cdot w_\theta \\ \varrho w_r \frac{\partial}{\partial r} w_\theta + w_\theta \frac{\varrho}{r} w_r - \mu \frac{\partial^2}{\partial r^2} w_\theta - \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} w_\theta + \frac{\mu}{r^2} w_\theta + G = 2\varrho|\omega| \sin \varphi_0 \cdot w_r \\ H = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(\varrho w_r) + \frac{\varrho}{r} w_r = -\frac{\partial}{\partial x_3}(\varrho v_3), \tag{4.1}$$

où

$$F = \varrho v_3 \frac{\partial}{\partial x_3} w_r - \mu \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} w_r - \lambda \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial x_3} v_3 + 2\varrho|\omega| \cos\theta \cos\varphi_0 \cdot v_3,$$

$$G = \varrho v_3 \frac{\partial}{\partial x_3} w_\theta - \mu \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} w_\theta - 2\varrho|\omega| \sin\theta \cos\varphi_0 \cdot v_3,$$

$$H = \varrho w_r \frac{\partial}{\partial r} v_3 + \varrho v_3 \frac{\partial}{\partial x_3} v_3 - \mu \frac{\partial^2}{\partial r^2} v_3 - \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} v_3 - \mu \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} v_3 - \lambda \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{\partial}{\partial r} w_r - \lambda \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} v_3 + \\ - \lambda \frac{\partial}{\partial x_3} w_r + \varrho \frac{\partial}{\partial x_3} \Phi + h \frac{\partial}{\partial x_3} \varrho^\gamma - 2\varrho|\omega| \cos\varphi_0 (\cos\theta w_r - \sin\theta w_\theta),$$

qui doit décrire le mouvement de l'air, qui est parfiatement symétrique par rapport à l'axe x_3, autrement dit par rapport à

$$\{x \in \mathbb{R}; x_1 = x_2 = 0, x_3 \geq 0\}$$

.

Un facteur essentiele pour la formation d'un cyclone, c'est le courant ascendant ou bien le flux de l'air qui est construit près de la surface de la mer vers le haut ;

pour cela dans cette étude on va èffectuer une valeur aux flux pour faciliter les calculs et diminuer le nombre d'inconnus dans l'équation qu'on veut la résoudre.

Considérons le système d'équation (4.1) avec

$$w_r \equiv w_r(r, x_3) \qquad w_r \equiv w_\theta(r, x_3) \qquad \rho \equiv \rho(r, x_3),$$

Nous allons examiner ce systeme d'équations dans le domaine

$$\Omega = [0, R] \times [0, H].$$

Ce domaine Ω correspond à un domaine physique de dimension 3, cylindre de base $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_1^2 + x_2^2 \leq R\}$, et de hauteur H.

Supposons donc que ϱv_3 est donnée

$$\varrho v_3 = \beta(r, x_3) \qquad (r, x_3) \in \Omega.$$

On suppose que la fonction β est suffisamment régulière.

Lemme 4.1 : L'équation de la conservation de la masse peut être écrite comme suit

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\varrho w_r) = -\frac{\partial \beta(r, x_3)}{\partial x_3}$$

Dmonstration du lemme 4.1

On a évidement

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r}(\varrho w_r)+\frac{\varrho}{r}w_r &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\varrho w_r)\\ &= -\frac{\partial}{\partial x_3}(\varrho v_3)\\ &= -\frac{\partial}{\partial x_3}\beta(r,x_3),\end{aligned}$$

le lemme est démontré. ■

On a

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r}(r\varrho w_r) &= -r\frac{\partial\beta(r,x_3)}{\partial x_3},\\ \Rightarrow r\varrho w_r &= -\int_0^{r'} r\frac{\partial\beta(r,x_3)}{\partial x_3}dr',\\ \Rightarrow \varrho w_r &= -\frac{1}{r}\int_0^{r'} r\frac{\partial\beta}{\partial x_3}dr',\end{aligned}$$

on obtient alors :

$$\varrho w_r = -b(r,x_3),$$

où

$$b(r,x_3)\equiv\frac{1}{r}\int_0^{r'} r\frac{\partial\beta}{\partial x_3}dr',$$

Substituons ϱw_r dans la seconde équation de la quantité de mouvement

On trouve que

$$-b\frac{\partial}{\partial r}w_\theta - b\frac{w_\theta}{r} - \mu\frac{\partial^2}{\partial r^2}w_\theta - \frac{\mu}{r}\frac{\partial w_\theta}{\partial r} + \frac{\mu}{r^2}w_\theta + \beta\frac{\partial w_\theta}{\partial x_3} - \mu\frac{\partial^2}{\partial z^2}\omega_\theta = 2b|\omega|sin\varphi_0. \tag{4.2}$$

C'est une équation qui contient seulement l'inconnue w_θ.

Pour notre problème il est important d'introduire deux espaces de Hilbert $L_r^2(0, R)$ et H_1

$$L_r^2(0, R) = \{u \;\; mesurable \mid \int_0^H \int_0^R r|u(r)|^2 dr dx_3 < \infty\},$$

muni du produit scalaire

$$\langle u, v\rangle_{L_r^2(0,R)} = \int_0^H \int_0^R ru(r)v(r) dr dx_3.$$

Et soit V^∞ un ensemble tel que $H_1 = \overline{V^\infty}^{\|\cdot\|_{H_1}}$, avec

$$V^\infty = \left\{u \mid u = \tilde{u}\Big|_{\Omega}, \tilde{u} \in C_0^\infty(\Omega_1), \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_3}\Big|_{x_3 = H} = 0\right\}.$$

où

$$\Omega_1 = [0, R] \times [0, H+1].$$

Et la norme associe à cet espace est donnée par le produit scalaire

$$\langle u, v\rangle_{H_1} = \int_0^H \int_0^R r \frac{\partial u}{\partial x_3}\frac{\partial v}{\partial x_3} dr dx_3 + \int_0^H \int_0^R \frac{1}{r}\frac{\partial(ru(r))}{\partial r}\frac{\partial(rv(r))}{\partial r} dr dx_3.$$

Retournons maintenant au problème (4.2), on définit l'opérateur différentielle

$$Au = -b\frac{\partial u}{\partial r} - b\frac{u}{r} - \mu\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{\mu}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\mu}{r^2}u + \beta\frac{\partial u}{\partial x_3} - \mu\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2},$$

Il est clair que A est linéaire et bien définit sur V^∞ donc $D(A)$ est dense dans H_1.

De plus l'application

$$I_1 : H_1 \ni u \longmapsto \langle Av, u\rangle_{L_r^2}$$

définira une fonctionnelle linéaire sur l'espace H_1. En fait la linéarité par rapport à u est évidente, pour la bornétude on a

$$\langle Av, u\rangle_{L_r^2} = -\int_0^R \int_0^H b\frac{\partial v}{\partial r} \cdot u dr dx_3 - \int_0^R \int_0^H b \cdot \frac{v}{r} \cdot u dr dx_3 +$$

$$-\mu\int_0^R\int_0^H\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}\cdot udrdx_3-\mu\int_0^H\int_0^R\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}\cdot udrdx_3+\mu\int_0^R\int_0^H\frac{v}{r^2}\cdot udrdx_3+$$
$$+\int_0^R\int_0^H\beta\frac{\partial v}{\partial x_3}\cdot udrdx_3-\mu\int_0^R\int_0^H\frac{\partial^2 v}{\partial x_3^2}\cdot udrdx_3.$$
$$\langle Av,u\rangle_{L^2_r}=\mu\langle v,u\rangle_{H_1}-\int_0^R\int_0^H b\cdot r\cdot u\frac{\partial v}{\partial r}drdx_3-\int_0^r\int_0^H b\cdot v\cdot udrdx_3+$$
$$+\int_0^R\int_0^H b\cdot v\cdot udrdx_3.$$
$$|\langle Av,u\rangle_{L^2_r}|\leq|\mu\langle v,u\rangle_{H_1}|+\left|\int_0^R\int_0^H b\cdot r\cdot u\frac{\partial v}{\partial r}drdx_3\right|+$$
$$+\left|\int_0^r\int_0^H b\cdot v\cdot udrdx_3\right|+\left|\int_0^r\int_0^H b\cdot v\cdot udrdx_3\right|$$
$$\leq 2\sup_{(r,x_3)\in\Omega}|b|||v||_{H_1}||u||_{H_1}+\sup_{(r,x_3)\in\Omega}|\beta|||v||_{H_1}||u||_{H_1}+\mu||v||_{H_1}||u||_{H_1}$$
$$\leq C_1||v||_{H_1}||u||_{H_1},\tag{4.3}$$

où $C_1=2\sup_{(r,x_3)\in\Omega}|b|+\sup_{(r,x_3)\in\Omega}|\beta|+\mu$, donc I_1 est une fonctionnelle sur H_1.
Maintenant, nous cherchons l'existance et l'unicité de solution de l'équation suivante

$$Au=f,\tag{4.4}$$

où $f=2b|\omega|\sin\varphi_0$, alors on a le résultat suivant :

Proposition 4.1 : Si

$$\sup|b|+\sup|\beta|<\mu\tag{4.5}$$

alors l'équation (4.4) admet une et une seule solution sur H_1.

Dmonstration de la proposition 4.1 : En multipliant l'équation (4.4) par une fonction $u\in H_1$, on obtient

$$\langle Au,u\rangle_{L^2_r}=\langle f,u\rangle_{L^2_r}.$$

Nous pouvons également écrire cette équation comme suit

$$-\int_0^R\int_0^H b\cdot r\cdot u\cdot\frac{\partial u}{\partial r}drdx_3-\int_0^R\int_0^H b\cdot u^2drdx_3+$$
$$-\mu\int_0^R\int_0^H r\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\cdot udrdx_3-\mu\int_0^H\int_0^R\frac{\partial u}{\partial r}\cdot udrdx_3+\mu\int_0^R\int_0^H\frac{1}{r}\cdot u^2drdx_3+$$
$$+\int_0^R\int_0^H\beta\cdot r\cdot\frac{\partial u}{\partial x_3}\cdot udrdx_3-\mu\int_0^H\int_0^R r\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}\cdot udrdx_3=\int_0^R\int_0^H 2b\cdot u|\omega|\sin\varphi_0. \tag{4.6}$$

On calcul l'intégral de ces termes, En utilisant l'intégration par partie :

$$\int_0^H\int_0^R\mu\cdot u\cdot r\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}drdx_3=\int_0^H\left[\mu\cdot r\cdot u\cdot\frac{\partial u}{\partial r}|_0^R-\int_0^H\int_0^R\mu\cdot\frac{\partial(ru)}{\partial r}\cdot\frac{\partial u}{\partial r}dr\right]dx_3$$
$$=-\int_0^H\int_0^R\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial(ru)}{\partial r}\frac{r\partial u}{\partial r}drdx_3$$
$$=-\int_0^H\int_0^R\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial(ru)}{\partial r}(\frac{\partial(ru)}{\partial r}-u)drdx_3$$
$$=-\int_0^H\int_0^R\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial(ru)}{\partial r}\cdot\frac{\partial(ru)}{\partial r}drdx_3+\int_0^H\int_0^R\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial(ru)}{\partial r}\cdot udrdx_3$$
$$=-\int_0^H\int_0^R\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial(ru)}{\partial r}\cdot\frac{\partial(ru)}{\partial r}drdx_3+\int_0^H\int_0^R(\frac{u^2}{r}+u\cdot\frac{\partial u}{\partial r})drdx_3,$$

$$\int_0^R\int_0^H r\cdot\mu\cdot u\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}dx_3dr=\int_0^R\left[r\cdot\mu\cdot\frac{\partial u}{\partial x_3}u|_0^H-\int_0^H r\cdot\mu\cdot\frac{\partial u}{\partial x_3}\cdot\frac{\partial u}{\partial x_3}dx_3\right]dr$$
$$=-\int_0^R\int_0^H r\cdot\mu\frac{\partial u}{\partial x_3}\cdot\frac{\partial u}{\partial x_3}$$

On substitue dans l'équation (4.6), on trouve

$$\mu\left[\int_0^H\int_0^R\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial(ru)}{\partial r}\cdot\frac{\partial(ru)}{\partial r}drdx_3+\int_0^H\int_0^R r\cdot\frac{\partial u}{\partial x_3}\cdot\frac{\partial u}{\partial x_3}drdx_3\right]$$
$$-\int_0^H\int_0^R b\cdot r\cdot u\cdot\frac{\partial u}{\partial r}drdx_3-\int_0^H\int_0^R b\cdot u^2drdx_3$$
$$+\int_0^H\int_0^R\beta\cdot r\cdot u\cdot\frac{\partial u}{\partial x_3}drdx_3=\int_0^R\int_0^H 2b\cdot u|\omega|\sin\varphi_0.$$

C'est-à-dire

$$\mu < u,u >_{H_1} - \int_0^H\int_0^R b\cdot u\cdot\frac{\partial(ru)}{\partial r}drdx_3 + \int_0^H\int_0^R \beta\cdot r\cdot u\cdot\frac{\partial u}{\partial x_3}drdx_3 = \int_0^R\int_0^H 2b\cdot u|\omega|\sin\varphi_0. \tag{4.7}$$

Soit

$$M = \int_0^H\int_0^R b\cdot u\cdot\frac{\partial(ru)}{\partial r}drdx_3$$

$$T = \int_0^H\int_0^R \beta\cdot r\cdot u\cdot\frac{\partial u}{\partial x_3}drdx_3$$

$$\begin{aligned}
T+M &= \int_0^H\int_0^R \sqrt{r}\cdot\frac{1}{\sqrt{r}}\cdot b\cdot u\cdot\frac{\partial(ru)}{\partial r}drdx_3 + \int_0^H\int_0^R \beta\cdot\sqrt{r}\cdot\sqrt{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial x_3}drdx_3\\
&\le \left[\int_0^H\int_0^R(\sqrt{r}\cdot b\cdot u)^2drdx_3\right]^{\frac{1}{2}}\cdot\left[\int_0^H\int_o^R(\frac{1}{\sqrt{r}}\cdot\frac{\partial(ru)}{\partial x_3})^2drdx_3\right]^{\frac{1}{2}}\\
&+\left[\int_0^H\int_0^R(\beta\cdot\sqrt{r}\cdot u)^2drdx_3\right]^{\frac{1}{2}}\cdot\left[\int_0^H\int_0^R(\sqrt{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial x_3})^2drdx_3\right]^{\frac{1}{2}}\\
&\le \sup_{(r,x_3)\in\Omega}|b|\cdot\left[\int_0^H\int_0^R(\sqrt{r}u)^2drdx_3\right]^{\frac{1}{2}}\cdot\left[\int_0^H\int_o^R(\frac{1}{\sqrt{r}}\cdot\frac{\partial(ru)}{\partial x_3})^2drdx_3\right]^{\frac{1}{2}}+\\
&\sup_{(r,x_3)\in\Omega}|\beta|\cdot\left[\int_0^H\int_0^R(\sqrt{r}\cdot u)^2drdx_3\right]^{\frac{1}{2}}\cdot\left[\int_0^H\int_0^R(\sqrt{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial x_3})^2drdx_3\right]^{\frac{1}{2}}\\
&\le \sup_{(r,x_3)\in\Omega}|b|\cdot\left[\int_0^H\int_0^R r\cdot(\frac{\partial u}{\partial x_3})^2\cdot drdx_3\right]^{\frac{1}{2}}\cdot\left[\int_0^H\int_o^R(\frac{1}{\sqrt{r}}\cdot\frac{\partial(ru)}{\partial x_3})^2drdx_3\right]^{\frac{1}{2}}+\\
&+\sup_{(r,x_3)\in\Omega}|\beta|\left[\int_0^H\int_0^R r\cdot(\frac{\partial u}{\partial x_3})^2drdx_3\right]^{\frac{1}{2}}\cdot\left[\int_0^H\int_0^R(\sqrt{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial x_3})^2drdx_3\right]^{\frac{1}{2}}\\
&\le (\sup_{(r,x_3)\in\Omega}|\beta| + \sup_{(r,x_3)\in\Omega}|b|)||u||^2_{H_1}.
\end{aligned}$$

A la fin, nous aurons

$$\begin{aligned}
< Au,u >_{L^2_r} &\ge \mu < u,u >_{H_1} -[\sup_{(r,x_3)\in\Omega}|\beta| + \sup_{(r,x_3)\in\Omega}|b|)||u||^2_{H_1}]\\
&\ge (\mu - [\sup_{(r,x_3)\in\Omega}|\beta| + \sup_{(r,x_3)\in\Omega}|b|])||u||^2_{H_1},
\end{aligned}$$

D'une manière analogue aux cas d'équations elliptiques classiques (voir [3] page 140-145, résultat analogue peut être trouvé dans plusieurs livres (par exemple [5]), souvent sous le nom de lemme de Lax-Milgram), les conditions (4.3) et (4.5) nous permettons d'obtenir une unique solution de l'équation (4.4)

Comme ce resultat est importante, nous rappelons les idées éssentielles de ce raisonnement.

Comme on a déjà vu I_1 définit une fonctionnelle sur H_1, même chose avec l'application $I_2 : H_1 \ni u \mapsto < f, u >_{L_r^2}$, donc en vertu du théorème de représentation de Riesz, la fonctionnelle I_1 peut être representée d'une faon et d'une seule sous la forme du produit scalaire

$$< Av, u >_{L_r^2} = < A^*v, u >_{H_1},$$

a définit, à son tour, l'opérateur

$$A^* : H_1 \mapsto H_1,$$

on rappelle que A^* est linéaire et borné.

Mème chose avec l'application I_2, on applique le théorème de représentation de Riesz, il existe un seul $F \in H_1$ tel que

$$< f, u >_{L_r^2} = < F, u >_{H_1},$$

donc notre problème s'écrit sous la forme

$$< A^*v, u >_{H_1} = < F, u >_{H_1}, \tag{4.8}$$

on aurra alors pour tout $u \in H_1$, (4.6) sera équivalente à l'équation dans H_1 :

$$A^*v = F. \tag{4.9}$$

D'après le théorème des alternatives de Fredholme

- ou bien l'équation (4.9) a une solution unique $\forall F \in H_1$.
- ou bien l'équation (4.9) admet des solutions triviales, mais d'après l'hypothèse (4.4) si on pose $Au = 0$, alors $c||u||_{H_1} \leq 0$ (contradiction).

Donc notre équation à une solution unique .

Bibliographie

[1] L.D.Landan. E.M. Lifchitz *Mécanique(Physique théorique, tome 1)(traduit du russe).*Mir, Mosco, 1988

[2] H. Fujita Yashima :*Fluides Newtonniens , cours de l'université de Guelma, 2010*

[3] O. A. Ladyzhenskaya et N.N.Uralceva *Equations aux derivées partielles de type elliptique* DUNOD, Paris 1968

[4] H. Fujita Yashima :*Modélisation de la physique des fluides, cours de l'université de Guelma, 2010*

[5] J. Nečas*Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques.*

[6] L. D. Landau. E. M. Lifchitz*Mécanique des fluides(Physique théorique, tome 1)* (traduit du russe). Mir, Mosco, 1989

[7] B. Bianchi *Tesi di Laurea Magistrale Modello di una tromba d'aria*

[8] H.Zankoufi *Modèle mathématique d'une trombe d'air*