République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 – Guelma

Faculté de Mathématiques et de l'Informatique et Sciences de la Matière
Département de Mathématiques



Mémoire de Fin d'Etude
Master Académique en Mathématiques
Option : EDP

**THEME**

# *Existence globale de la solution d'un system de réaction – diffusion Avec Matrice de diffusion pleine*

**Présenté par :** **Dirigé par :** *Dr Boukerrioua -Khaled*

***Kouadria Sana.***

**Jury :**

**Examinateur1: Dr Lakehal-F...........................................Univ-Guelma**
**Examinateur2:Dr Badraoui-S...........................................Univ-Guelma**

Session Juin 2012

Louanges à Dieu le tout puissant de m'avoir donné courage, espoir et abnégation de réussir dans ce parcours d'érudition et de savoir.

Je tiens à exprimer toutes reconnaissances au Docteur: Boukerrioua.Kde m'avoir proposé ce sujet de recherche et d'avoir dirigé mon travail.

Je lui témoigne aussi, ma gratitude pour son soutien, sa grande disponibilité et surtout ses conseils et ses encouragements tout au long de mes recherches.

J'adresse mes vifs remerciements au Docteur: Lakehal.pour le grand honneur qu'il me fait en présidant le jury de soutenance.

J'exprime également mes chaleureux remerciements au Docteur: Badraoui.S, pour l'honneur qu'ils m'ont fait d'avoir acceptés de faire de ce jury.

J'exprime également mon profonde gratitude et je sincères remercie envers ceux quia contribue de prés ou de loin dans le projet, sans oublier mon amis qui nos ont soutenus.

Une grande salutation pour tous les étudiants de la promotion 2012.

# Table des matières

## 0.1 Introduction

De nombreux phénomènes écologiques , biologiques , chimiques ...ect. sont gouvernés par une classe de systèmes appelés systèmes de réaction-diffusion de type suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(t)}{\partial t} - D\Delta u &= F(u) \text{ sur } ]0, +\infty[ \times \Omega , \\ u(0, .) &= u_0(.) \text{ sur } \Omega. \end{aligned} \tag{D}$$

Où $\Omega$ est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière régulière $\partial\Omega$ , $u(t, .)$ est une fonction définie sur $\Omega$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, $D$ est une matrice carrée d'ordre $m$ définie positive et diagonalisable appelée matrice de diffusion et $F$ est une fonction localement lipschitzienne de $\mathbb{R}^m$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ appelée terme de réaction qui est le résultat de toutes les interactions entre les composantes de $u$.Par exemple,en chimie $u$ est un vecteur de concentrations chimiques, $F$ représente l'effet des réactions chimiques sur ces concentrations et le terme $D\Delta u$ représente les diffusions moléculaires à travers la frontière de réaction. On ajoutera une condition aux limites sur la frontière $\partial\Omega$ de manière à ce que le problème $(D)$ soit bien posé.

Le but de ce projet est de développer un résultat obtenu dans [8] autour de la question d'existence globale de solutions pour un système de réaction-diffusion satisfaisant à deux propriétés qu'ont trouve classiquement dans beaucoup d'applications :

$(P)$ La positivité des solutions est préservée au cours du temps

$(M)$ La masse totale des composants est contrôlée au cours du temps.

Le fait que la masse totale des composants n'explose pas en temps fini incite à penser que les solutions existent en un certain sens globalement en temps.

Ce travail est organisé de la façon suivante :

Dans le premier chapitre, nous présentons la forme générale des systèmes de réaction-diffusion ainsi que les exemples faisant ressortir leur rôle essentiel dans les sciences.

Dans le deuxième chapitre,on commence par rappeler brièvement quelques notions générales sur les semi- groupes avec exemples.Ensuite nous présentons certains résultats préliminaires qui nous seront utiles dans le dernier chapitres.Ces résultats sont des rappelles sur les opérateurs m-dissipatifs et quelques exemples importants en théorie des E.D.P.La dernière section de ce chapitre est consacrée à exposer les résultats fondamentales qui assurent l'existence locale de la solution des systèmes de type $(D)$,en donnant bien sûr la forme explicite de la solution.

Enfin, l'essentiel de ce travail est présenté dans le troisième chapitre où on va procéder à l'étude du système $(D)$ dans le cas $m = 2$, cette étude est baséé sur un résultat de D. Henry [5] ( effet régularisant ).Pour prouver l'existence globale de la solution, il suffit de trouver une estimation à priori de $\| f_i(u,v) \|_p$ $(i = 1, 2)$ sur $[0, T_{\max}[$( $T_{Max}$ est le temps d'existence maximale) dans l'espace $L^P(\Omega)$ pour $p > \frac{n}{2}$.

# Chapitre 1

# Modélisation de systèmes de réaction-diffusion

## 1.1 Introduction

La plus grande partie de ce mémoire est consacrée à l'étude de l'existence globale en temps des solutions d'une classe de systèmes appelés ***Systèmes de Réaction-Diffusion***, ce sont des systèmes d'équations aux dérivées partielles du type parabolique,ces systèmes intervienent dans des applications nombreuses, par exemple : en chimie, en biochemie, en métallurgie, en dynamique des populations, en génétique des populations, en biophysique...ect. En première partie, vu les applications nombreuses et variantes de ces systémes, on donnera les démarches suivies pour modéliser certains problèmes gouvernés par le système $(D)$ comme la publicité sur un produit, l'épidémiologie et le phénomène prédateur-proie.

Les individus diffèrent d'un problème à un autre : en chimie, par exemple, ils représentent des substances chimiques. En biochimie, ils peuvent représenter des molécules. En métallurgie, des atomes. En dynamique des populations, ce sont des humains. En génétique des populations, ils représentent des caractères. En biophysique, des charges électriques ou bien des différences de potentiel. En environnement, ils peuvent représenter les animaux ou les plantes d'une forêt, d'une mer ou bien d'un fleuve.

Pour la plus grande partie de ces problèmes, on montre qu'on aboutit à des systèmes de type $(D)$. Les conditions aux bords seront choisies selon l'origine et la nature du problème étudié : s'il n'y a pas d'immigration des individus à travers la frontière du domaine sur lequel le problème est posé, on choisit les conditions aux bords homogènes de Nemann. S'il n'y a pas d'individus sur la frontière, on prend les conditions aux bords homogènes de Dirichlet.

L'inconnue (la solution qu'on cherche) est un vecteur dont les composantes sont généralement des fonctions positives : en chimie, par exemple, c'est un vecteur de concentrations chimiques. En biochimie ou en métallurgie, c'est un vecteur de concentrations en nombres de molécules ou d'atomes respectivement. En dynamique des populations et en environnement, c'est un vecteur de densité de populations humaines, animales ou végétales. Les conditions initiales sont généralement positives; puisqu'il s'agit de concentrations, densités, charges électriques,...ect.

## 1.2 Modélisation et exemples

### 1.2.1 Modélisation

Nous allons donner la démarche suivie pour établir (D); d'ailleurs qui est le même pour tous les phénomènes cités à l'introduction, puis nous donnerons des exemples.
On considère une région bornée de $\mathbb{R}^n$, $(n = 2$ ou $3)$ (qui peut être une surface géographique, une cellule vivante ou des molécules) dans laquelle des réactions se réalisent (ces réactions peuvent être une épidémie, une rumeur ou bien une réaction moléculaire; d'ailleurs la cellule vivante est le siège de plusieurs réactions chimiques, ainsi que les surfaces géographiques forment les lieux de milliers de virus et rumeurs circulant entre les individus des populations...).

Si on note par $u_i(x,t)$ la concentration de la i$^{\text{ème}}$ espèce prenant part dans ces réactions, $f_i(x,t,u_1(x,t),...,u_m(x,t))$ son taux de formation dans la réaction en question au point $x$ et à l'instant $t > 0$ et $J_i$ le flux de ces espèces à travers la frontière de notre région.Considérons un volume V infiniment petit de la région de frontière $S = \partial V$. La vitesse de formation de la i$^{\text{éme}}$ espèce dans le volume $V$ est égale à la quantité formée par la réaction ôtée de son flux à travers la surface $S$; en termes d'équations :

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_V u_i(x,t)\,dx = \int\limits_V f_i(x,t,u_1(x,t),...,u_m(x,t))\,dx - \int\limits_S J_i\,d\delta \qquad (1.1)$$

après application directe du théorème de la divergence au terme désignant le flux, on obtient :

$$\int_V \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} - f_i + \nabla J_i \right) dx = 0 \qquad i = 1, ..., m \tag{1.2}$$

puisque le volume $V$ est infiniment petit et arbitraire, on en déduit :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \nabla J_i dx = f_i \qquad i = 1, ..., m \tag{1.3}$$

## Remarque 1.1 :

Dans le cas des populations (plan macroscopique) on applique une loi semblable . Le flux (ou la diffusion) est donné par la loi de Fick (seconde loi de Fick) :

$$J_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \nabla u_j, \quad (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le m}} \tag{1.4}$$

où $(a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le m}}$est une matrice définie positive, appelée matrice de diffusion.
En substituant (1.4) dans (1.3), on obtient :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - A\Delta u = f(u). \tag{1.5}$$

### 1.2.2 Exemples

**1)Epidémiologie**

La propagation d'une épidémie (maladie contagieuse) ou une rumeur dans une population, divise cette dernière automatiquement en trois groupes disjoints :

$(S)$ le groupe des susceptibles : Individus non infectés, mais qui peuvent le devenir.

$(I)$ le groupe des contagieux ou infectés : Individus portant le virus et donc capables de le transmettre aux individus du groupe $(S)$.

$(R)$ le groupe écarté : Individus qui sont définitivement guéris plus les individus isolés.

Notons par $S(x,t), I(x,t)$ et $R(x,t)$ les densités au point $x$ de l'espace (position) à l'instant $t > 0$ des groupes $(S), (I)$ et $(R)$ respectivement.

Nous supposons que :

$(P1)$ Les susceptibles$(S)$ deviennent infectieux $(I)$ après contact avec un infectieux et à un taux proportionnel au nombre de contacts entre les individus des groupes $(S)$ et $(I)$ et un tel nombre est proportionnel au produit d'une fonction des membres de la classe $(S)$ et d'une autre fonction de la classe $(I)$ $(i.e : f(S).g(I))$.

$(P2)$ Les individus sont écartés de la classe des infectés à un taux proportionnel à une fonction de $(I)$ $(i.e : h(I))$.

$(P3)$ La population totale est constante et est confinée dans une région bornée de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.

Si on note par $S, I$ et $R$ les concentrations linéaires ou superficielles des groupes $(S), (I)$ et $(R)$ respectivement ;on est conduit au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial t} = d_1 \Delta S - f(S)\, g(I) & \text{sur } ]0,+\infty[\times \Omega \\ \dfrac{\partial I}{\partial t} = d_2 \Delta I + f(S)\, g(I) - h(I) & \text{sur } ]0,+\infty[\times \Omega \\ \dfrac{\partial R}{\partial t} = d_3 \Delta R + h(I) & \text{sur } ]0,+\infty[\times \Omega. \end{cases} \tag{1.6}$$

Si nous supposons qu'il n'y a pas de migration à travers la frontière de $\Omega$ ; on a les conditions aux bords homogènes de Newman :

$$\frac{\partial S}{\partial \eta} = \frac{\partial I}{\partial \eta} = \frac{\partial R}{\partial \eta} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times ]0,+\infty[. \tag{1.7}$$

où $\eta$ est la normale extérieure à $\partial\Omega$, les conditions initiales sont positives

$$S(x,0) = S_0(x), \quad I(x,0) = I_0(x), \quad R(x,0) = R_0(x) \quad \text{avec } x \in \Omega \tag{1.8}$$

## Modèles en dynamique des populations :

### 2)Un modèle prédateur-proie

Dans la première moitié du XX$'^e$ siècle, l'étude de la dynamique de plusieurs espèces en interaction connut un essor considérable. C'est à cette époque appelée l'âge d'or de l'écologie théorique que furent développés les premiers modèles

basés sur des comportements de type compétition et des relations prédateur-proie.V. Volterra a étudié la coexistence de deux espèces dont l'une dévore l'autre. Considérant deux espèce, la première,$u(t,x)$ , aurait si elle était seule une croissance exponentielle. La seconde,le prédateur$v(t,x)$, se nourrit exclusivement de la première et en l'absence de proie s'épuiserait progressivement et disparaîtrait.La première considère que pour qu'il y ait prédation entre une espèce prédatrice et une espèce proie, il faut tout d'abord qu'il y ait rencontre entre ces deux espèces et que le nombre de rencontres entre ces deux espèces est proportionnel au nombre des individus qui la compose. Le coefficient de proportionnalité étant égal à la probabilité de rencontre.La seconde consiste à supposer qu'il existe un rapport constant entre les disparitions et apparitions d'individus que provoquent les rencontres, i.e., que la prédation de la proie est équivalente à la croissance du prédateur.Ceci conduit au système :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - d_u \Delta u = au + buv & \text{sur } ]0,+\infty[ \times \Omega \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} - d_v \Delta_v = -cv + duv & \text{sur } ]0,+\infty[ \times \Omega, \end{cases} \tag{1.9}$$

où $a$ représente le taux de croissance de la proie en l'absence de prédateur,$b$ le taux de prédation du prédateur sur la proie,$c$ le taux de mortalité du prédateur en l'absence de proie et $d$ le taux de croissance du prédateur du fait de sa prédation et $d_u, d_v$ sont les constantes de diffusion de proie et du prédateur, respectivement.

### Remarque 1.2 :

Pour d'autres modèles, voir [7] .

# Chapitre 2

# Semi- groupes et problèmes semi-linéaires

## 2.1 Semi -groupe

Soit $X$ un espace de Banach complexe, $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ une famille d'opérateurs bornés dans $X$. Soit $\Delta$ un secteur défini par

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C}, 0 < \mathrm{Re}\, z \ \text{ et } \Phi_1 < \arg z < \Phi_2,\ \Phi_1 < 0 < \Phi_2\}. \tag{2.1}$$

### 2.1.1 Définitions et propriétés des semi–groupes

Soit $X$ un espace de Banach réel ou complexe muni de la norme : $x \longrightarrow \|x\|_X$, on désigne par $\pounds(X)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de $X$ dans lui même.
$\pounds(X)$ est un espace de Banach pour la norme $T \longrightarrow \|T\|$ défini par :

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_X = 1} \|Tx\|_X = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|_X}{\|x\|_X} \tag{2.2}$$

### 2.1.2 Définition d'un semi-groupe de classe $C^0$

Une famille $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ d'éléments $T(t) \in \pounds(X)$ pour $t \geq 0$ forme un semi-groupe de classe $C^0$ dans $X$, si elle vérifie les conditions suivantes :

$$\begin{cases} i)\ T(s+t) = T(s).T(t) \text{ pour tout } s,t \geq 0 \\ ii)\ T(0) = I \text{ (identité dans } \pounds(X)) \\ iii)\ \lim\limits_{t \to 0} \|T(t)x - x\|_X = 0 \text{ pour tout } x \in X \end{cases} \tag{2.3}$$

Remarque 2.1 :

La famille $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ qui vérifie (2.3) avec $t, s$ de signe quelconque s'appelle groupe de classe $C^0$.

## Exemples :

**Exemple** 1 (cas de dimension finie) :

Soit $X = \mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$), $A \in \pounds(X)$ alors $T(t) = e^{tA}$ pour $t \in \mathbb{R}$ est un groupe de calss $C^0$.

**Exemple 2** (cas de dimension infinie) :

Soit $X = l^2 = \left\{ x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}},\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty \right\}$. On sait que $l^2$ est un espace de Hilbert pour la norme $x \longrightarrow \|x\|_2 = (\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^2)^{\frac{1}{2}}$ associé au produit scalaire $< x, y >= \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$.

On définit $T(t)x = \left\{ e^{-n^2 t} x_n \right\}_{n\in\mathbb{N}} \in l^2$ pour $t \geq 0$, on remarque que : $(2,3), i)$ et $(2,3), ii)$ sont faciles à vérifier, reste à vérifier $(2,3), iii)$. En effet :

$$\|T(t)x - x\|_{l^2}^2 = \sum_{n=1}^{N-1} (1 - e^{-n^2 t})^2 |x_n|^2 + \sum_{n=N}^{\infty} (1 - e^{-n^2 t})^2 |x_n|^2$$

et comme $\sum\limits_{n=N}^{\infty} (1 - e^{-n^2 t})^2 |x_n|^2 \leq \sum\limits_{n=0}^{\infty} |x_n|^2$ et que $x \in l^2$ donc, $\forall \varepsilon > 0$ on peut choisir $N$ de tel sorte que : $\sum\limits_{n\geq N}^{\infty} (1 - e^{-n^2 t})^2 |x_n|^2 \leq \varepsilon$ mais $1 - e^{-n^2 t}$ est croissante pour $n \geq 1$, donc on a :

$$\sum_{n=1}^{N} (1 - e^{-n^2 t})^2 |x_n|^2 \leq (1 - e^{-n^2 t})^2 \|x\|_{l^2} \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0$$

ce qui implique :

$$\lim_{t \to 0} \|T(t)x - x\|_{l^2}^2 \to 0.$$

On a aussi un exemple de semi-groupe qui n'est pas prolongeable à un groupe car $T(-t)x = e^{+n^2t}x_n \notin l^2 (n \in \mathbb{N})$ pour $t \neq 0$ et $x \in l^2$.

### 2.1.3 Semi-groupe de contraction de classe $C^0$

**Définition 2.1 :**

Un semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ de classe $C^0$ est appelé semi-groupe de contraction de classe $C^0$ si l'on a :

$$\|T(t)\| \leq 1 \qquad \forall t \geq 0.$$

**Remarque 2.2 :**

L'exemple 2 vu en (2.1.2) est un semi-groupe de contraction.

### 2.1.4 Générateur infinitésimal d'un semi - groupe

**Introduction :**

On reprend les deux exemples du (2.1.2)

**a) Cas de dimension finie :**

On prend $X = \mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$), $e^{At} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} t^n$; $\forall x \in X$ on a :

$$\left[\frac{d}{dt} T(t)x\right]_{t=0} = Ax$$

ou encore :

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{T(h)x - x}{h} = Ax$$

on dit que $A$ est le générateur infinitésimal du semi-groupe $T(t)$, dans ce cas on note que : l'ensemble des opérateurs $A$ qui sont générateurs infinitésimaux de semi-groupe $T(t)$ coincide avec $\pounds(X)$.

**b) Cas de dimension infinie**

Soit $X = l^2$, $T(t)x = \left\{e^{-n^2t} x_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ et considérons la suite :

$$\frac{T(h)x - x}{h} = \left\{\frac{e^{-n^2h} - 1}{h} x_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{e^{-n^2h}-1}{h}x_n = -n^2 x_n e^{-\theta_n n^2 h}$; $0 < \theta_n < 1$.

Il en résulte que :

$$\lim_{h \to 0} \frac{T(h)x - x}{h} = \left\{-n^2 x_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

donc la suite n'existe pas toujours dans $l^2$, mais $Ax = \left\{-n^2 x_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ est défini pour tout $x \in l^2$ et qui vérifie $\left\{-n^2 x_n\right\}_{n\in\mathbb{N}} \in l^2$. On déduit que :

$$D(A) = \left\{x \in l^2 : \left\{-n^2 x_n\right\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge dans } X\right\}$$

où $D(A)$ est le domaine de l'opérateur non borné $A$.

### 2.1.5 Le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de classe $C^0$

Soit $X$ un espace de Banach réel ou complexe, $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un semi-groupe de classe $C^0$sur $X$, on a vu dans le $2^{ième}$ exemple (cf : 2.1.2) que pour tout $x \in X$, la fonction $t \to T(t)x$ n'est pas dérivable sauf quand $x$ fait partie d'un certain ensemble que nous avons noté $D(A)$.

## Définition 2.2 :

On désigne par $D(A)$ l'ensemble des vecteurs(dérivables) dans $X$, i.e : l'ensemble des $x \in X$ tels que : la fonction $t \to T(t)x$ soit dérivable pour tout $t \geq 0$; donc $D(A)$ est caractérisé par :

$$D(A) = \left\{x \in X : \frac{T(h)x - x}{h} \text{ converge dans } X \text{ lorsque } h \to 0\right\} \tag{2.4}$$

dans la suite on pose : $A = \frac{T(h)-I}{h}$, où $A$ est un opérateur qui appartient à $\mathcal{L}(X)$, $\forall h > 0$, cet opérateur est appelé générateur infinitésimal de semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ (généralement $A$ est non borné).

## 2.2 Opérateurs dissipatifs et opérateurs m-dissipatifs

### 2.2.1 Rappels de quelques résultats utiles de l'analyse fonctionnelle

Définition 2.3 :

Une application $f : X \to X$ est dite contractante si :

$\exists K \in [0, 1[$ tel que : $\|f(x) - f(y)\| \leq k \|x - y\|$ pour tout $(x, y) \in X^2$

Théorème 2.1 : ( du point fixe de banach) :

**Soit $(E, d)$ un espace métrique complet, $f$ une application contractante définie de $X$ vers $X$. Alors $f$ admet un point fixe.**

Preuve :

cf : [5] .

Théorème 2.2 : ( de Lax Miligram)

**Soit $H$ un espace de Hilbert, $a : H \times H \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire, on suppose qu'il existe deux constantes positives $c < +\infty$ et $\alpha$ telles que :**

**i)** $|a(u, v)| \leq c \|u\| \|v\|$

**ii)** $a(u, u) > \alpha \|u\|^2$ **(coercivité) alors :**

$$\forall f \in H, \ \exists! u \in H \text{ tel que: } a(u, v) = < f, v > \forall v \in H.$$

Peuve :

cf : [3] .

### 2.2.2 Opérateurs non bornés dans un espace de Banach

Dans toute la suite : $X$ est un espace de Banach, sa norme est notée $\| \ \|$ .

Définition 2.4 :

Un opérateur linéaire dans $X$ est un couple $(D, A)$ où $D$ est un sous- espace vectoriel de $X$ et

$A : D \to X$ est une application linéaire.

### Définition 2.5 :

Si $(D, A)$ est un opérateur linéaire dans $X$, le graphe de $A$ et l'image de $A$ $(G(A), R(A))$ sont définis par :

$$\begin{aligned} G(A) &= \{(u, v) \in X \times X,\ u \in D,\ v = Au\} \\ R(A) &= A\,(D(A)) \end{aligned}$$

### Remarque 2.3 :

Dans la suite du chapitre on désignera le couple $(D, A)$ par $A$

Noter cependant que lorsqu'on introduit un opérateur linéaire, il est absolument indispensable de définir son domaine.

**Notations et définitions**

### Définition 2.6 :

Soit $A$ un opérateur de $X$ de domaine $D(A)$, alors $(u, v) \in A$ signifie que $u \in D(A)$ et $v \in Au$. On dit que $A$ est multivoque si $Au$ contient plus d'un élément, dans le cas contraire on dit que $A$ est univoque.

### Définition 2.7 :

Un opérateur $A$ dans $X$ est dit dissipatif si on a : $\forall\ (u_1, v_1), (u_2, v_2) \in A$ :

$$\|u_1 - u_2 - (v_1 - v_2)\| \geq \|u_1 - u_2\|.$$

Si $A$ est linéaire, la définition est donnée comme suit :

$$\forall u \in D(A), \forall \lambda > 0, \|u - \lambda Au\| \geq \|u\|. \tag{2.5}$$

### Remarque 2.4 :

Si $-A$ est dissipatif ; on dit que $A$ est accrétif.

### Remarque 2.5 :

si A est accrétif alors l'equation :

$$u + \lambda A u = f \ , \tag{2.6}$$

admet au plus une solution.

### preuve :

Soit $u_1, u_2$ deux solutions de (2.5) alors : $u_1 - u_2 = \lambda(Au_1 - Au_2)$ et on a :

$\|v\| \leq \|v - \lambda Av\|$ avec $v = u_1 - u_2$, donc :

$\|u_1 - u_2\| \leq \|u_1 - u_2 - \lambda Au_1 + \lambda Au_2\| = 0$ d'ou : $u_1 = u_2$.

### Définition 2.8 :

Un opérateur dissipatif $A$ dans $X$ est dit m-dissipatif si :

$$R(I - \lambda A) = X, \tag{2.7}$$

i.e : $\forall f \in X, \forall \lambda > 0,\ \exists!\, u \in D(A)$ tel que :

$$u - \lambda A u = f \ . \tag{2.8}$$

### Remarque 2.6 :

Si $-A$ est m-dissipatif dans $X$, on dit que $A$ est m-accrétif.

### 2.2.3 Opérateurs non bornés dans un espace de Hilbert

Dans ce paragraphe on suppose que $X = H$ est un espace de Hilbert, et on note $< \, , >$ le produit scalaire dans $H$.

### Définition 2.9 :

un opérateur $A$ est dit monotone dans $H$ si :

$$< Au, u > \geq 0. \tag{2.9}$$

## Proposition 2.3 :

$A$ **est dissipatif dans** $H$ **ssi** $-A$ est monotone.

## Preuve :

Si $A$ est dissipatif, on a :

$$< u - \lambda Au, u - \lambda Au >= \|u - \lambda Au\|^2 ,$$

$$= \|u\|^2 - 2\lambda < Au, u > +\lambda^2 \|Au\|^2 , \ \forall \lambda > 0, \ \forall u \in D(A),$$

donc :

$$\|u - \lambda Au\|^2 - \|u\|^2 = \lambda^2 \|Au\|^2 - 2\lambda < Au, u >,$$

on divise par $\lambda$ et on faisant $\lambda \to 0$, il résulte : $< Au, u >\leq 0$.

Réciproquement : si $< Au, u >\leq 0, \forall u \in D(A)$ on a :

$$\|u - \lambda Au\|^2 = \|u\|^2 - 2\lambda < Au, u > +\lambda^2 \|Au\|^2 \geq \|u\|^2 ,$$

d'où :

$$\|u - \lambda Au\| \geq \|u\| ,$$

ce qui implique que $A$ est dissipatif.

## Corrollaire 2.3 :

**Soit** $A$ **un opérateur linéaire de domaine dense dans** $H$ **tel que :** $G(A) \subset G(A^*)$ **et** $A$ **est dissipatif alors :**

$$A\ m - dissipatif \Leftrightarrow A = A^*.$$

## Preuve :

cf : [3].

### 2.2.4 Exemples :

Exemple1 :

Soit $\Omega$ un ouvert quelconque de $\mathbb{R}^n$ et $Y = L^2(\Omega)$. On définit l'opérateur linéaire $B$ sur $Y$ par :

$$D(B) = \left\{u \in H_0^1(\Omega),\ \Delta u \in L^2(\Omega)\right\},$$

$$Bu = \Delta u \ \forall u \in D(B),$$

où :

$$H_0^1(\Omega) = \left\{u \in H^1(\Omega),\ \text{tel que : } u\mid_\Gamma = 0\right\} \text{ avec } \Gamma = fr(\Omega),$$

$$H^1(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega) \text{ tq } \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)\right\}.$$

Montrons que :

**$B$ est un opérateur m-dissipatif de domaine dense, de plus $B$ est auto-adjoint**

Preuve :

1) D'après la formule de Green on a :

$$\int_\Omega \Delta u\, v = -\int_\Omega \nabla u \nabla v\, dx + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} v\, dv,$$

où $n$ est la normale extérieure à $\Gamma = \partial\Omega$. Montrons que : $< \Delta u, u > \leq 0$.

On a :

$$\forall u \in D(B), < \Delta u, u >= \int_\Omega \Delta u\, u\, dx = -\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx \leq 0,$$

donc $B$ est dissipatif.

2)

$$\forall f \in Y,\ \exists! u \in D(B) :\ u - \lambda \Delta u = f\ . \tag{2.10}$$

Multipliant (2.10) par $v$ tel que $v \in H_0^1$, on trouve :

$$\int_\Omega (uv - \lambda v \Delta u)\, dx = \int_\Omega f v\, dx \qquad \forall \lambda > 0,$$

prenons $\lambda = 1$ donc :

$$\int_{\Omega} (uv + \nabla v \nabla u)\, dx = \int_{\Omega} fv\, dx,$$

de la forme :

$$b(u,v) = l(v),$$

c'est évident de vérifier que $b(u,v)$ est coercive et $l(v)$ est continue, et on applique le théorème de Lax-milligram, donc : $\exists! u$ qui vérifie $u - Au = f$ d'où $B = \Delta u$ est m-dissipatif.

3) $\overline{D(B)} = Y$ ?. On a : $D(\Omega) \subset D(B) \subset L^2(\Omega) \Rightarrow \overline{D(B)} = L^2(\Omega)$ car $\overline{D(\Omega)} = L^2(\Omega)$.

4) $< Bu, v >=< u, B^* v >$, mais :

$< Bu, v >= -\int_{\Omega} \nabla v \nabla u\, dx = \int_{\Omega} u \Delta v\, dx =< u, \Delta v >$

ce qui implique : $(u,v) \in G(B^*)$ et d'après le corollaire (2.3) $B = B^*$ donc $B$ est auto-adjoint.

## Exemple 2 :

Soit $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $Z = L^\infty(\Omega)$.

on définit l'opérateur $C$ par :

$$D(C) = \{u \in H_0^1 \cap Z,\ \Delta u \in Z\}$$

$$Cu = \Delta u.$$

Montrons que $C$ est **m-dissipatif dans** $Z$.

## Preuve :

Montrons que : $C$ est dissipatif ?

soit $\lambda > 0$, $f \in Z$, posons : $M = \|f\|_\infty$ , et soit $u \in H_0^1$ une solution de :

$$u - \lambda \Delta u = f \text{ dans } D(\Omega) \qquad (2.11)$$

l'équation (2.11) est en particulier vérifiée dans $L^2(\Omega)$, et l'on a :

$$(u - M) - \lambda(\Delta u - M) = f - M \text{ dans } L^2(\Omega)$$

posons $v = (u - M)^+ \in H_0^1(\Omega)$ avec $\nabla v = \Psi_{\{|u|>M\}} \nabla u$ donc :

$$\int_\Omega v^2\, dx + \lambda \int_{\{|u|>M\}} |\nabla u|^2\, dx = \int_\Omega (f - M) v\, dx \leq 0$$

d'où :

$$\int_\Omega v^2\, dx \leq 0 \Rightarrow v = 0 \Rightarrow u \leq M \qquad \text{p.p sur } \Omega.$$

de la même manière on montre que :$u \geq -M$ p.p sur $\Omega$ donc :

$\|u\|_{L^\infty} \leq M = \|f\|_{L^\infty}$, il résulte que $C$ est dissipatif.

Soit maintenant $f \in L^\infty(\Omega) \subset L^2(\Omega)$, $\exists! u \in H_0^1(\Omega)$ avec $\Delta u \in L^2(\Omega)$ solution de :

$$u - \Delta u = f \text{ dans } L^2(\Omega)$$

puisque $u \in L^\infty(\Omega)$ alors, $u \in D(C)$ ce qui implique : $u - Cu = f$ admet une solution unique, d'où $C$ est m-dissipatif.

Remarque 2.7 :

Dans les deux exemples, on voit que c'est la même équation qui correspond à plusieurs opérateurs qui ont des propriétés différentes, car ils sont définis sur des domaines différents, donc, on voit l'utilité du domaine de définition.

### 2.2.5 Théorème de Hill-Yosida-Phillips :

**Semi-groupe engendré par un opérateur m-dissipatif :**

Soit $X$ un espace de banach, $A$ est un opérateur linéaire m-dissipatif de domaine dense.

Proposition 2.5

**Soit $T(t)$ un semi-groupe de contraction et $L$ son générateur infinitésimal alors $L$ est m-dissipatif de domaine dense.**

Preuve :

cf : [3].

Théorème 2.3 : (Hill-Yosida-Phillips)

**Un opérateur linéaire $A$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contraction ssi $A$ est m-dissipatif de domaine dense.**

Preuve :

cf : [3].

Théorème 2.4 : ( Hill-Yosida)

**Soit $A$ un opérateur linéaire m-accrétif dans un espace de Hilbert $X$, alors pour tout $u_0 \in D(A)$, il existe une fonction $u \in C^1([0,+\infty[;X) \cap C([0,+\infty[;D(A))$ unique telle que :**

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = 0 \quad \text{sur } [0,+\infty[ \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{2.12}$$

**de plus ; $|u(t)| \leq u_0$ et $|\frac{du}{dt}| = |Au(t)| \leq |Au_0|$ $\forall t \geq 0$.**

**$(D(A), \|..\|)$ est un espace de banach muni de la norme de graphe :**

**$|v| + |Av|$ et de la norme hilbertienne équivalente $(|v|^2 + |Av|^2)^{\frac{1}{2}}$.**

Preuve :

cf : [3].

Corollaire 2.4 :

**Sous les mêmes hypothéses du théorème (2.4), l'équation :**

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au + \lambda u = 0 \quad \text{sur } [0,+\infty[ \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{2.13}$$

**où $\lambda \in \mathbb{R}$, admet une solution unique.**

Preuve :

L'équation (2.12) se ramène à l'équation (2.13) grâce à l'artifice classique suivant :

$$v(t) = e^{\lambda t} u(t).$$

## 2.3 Existence locale de la solution d'un problème d'evolution

### 2.3.1 Equations non homogènes et problèmes semi-linéaires :

Dans cette partie on désigne par $X$ l'espace de Banach et $A$ l'opérateur linéaire m-dissipatif de domaine dense, on note $T(t)$ le semi -groupe de contraction engendré par $A$.

### 2.3.2 Equations non homogènes :

Soit $T > 0$ pour tout $x \in X$ et $f : [0,T] \to X$, une fonction donnée, on veut résoudre le problème suivant :

$$\begin{cases} i)\ u \in C([0,T], D(A)) \cap C^1([0,T], X) \\ ii)\ \dot{u}(t) = A\,u(t) + f(t) \qquad \forall t \in [0,T] \\ iii)\ u(0) = x \end{cases} \tag{2.14}$$

on a le résultat suivant :

**Lemme 2.1 :**

***Soit** $x \in D(A)$ **et** $f \in C([0,T], X)$, **on considère une solution** $u \in C([0,T], D(A))$ **du problème** (2.14), **alors on a :***

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)\, f(s)\, ds. \tag{2.15}$$

**Preuve :**

Soit $t \in [0,T]$, on pose :

$$w(s) = T(t-s)\, u(s) \text{ pour } s \in [0,t],$$

Soit $h \in [0, t-s]$, on a :

$$\begin{aligned} &\tfrac{w(s+h)-w(s)}{h} = T(t-s-h)\left(\tfrac{u(s+h)-u(s)}{h} - \tfrac{(T(h)-I)}{h}u(s)\right), \\ &\underset{h\to 0}{\to} T(t-s)\left(\dot{u}(s) - Au(s)\right) = \left(T(t-s)\, f(s)\right), \end{aligned}$$

puisque $T(t-s)\, f(s) \in C([0,t], X) \Rightarrow \overset{\bullet}{w} \in C([0,t], X) \Rightarrow w \in C^1([0,t], X)$.

$$\overset{\bullet}{w}(s) = T(t-s)\, f(s), \forall s \in [0,t], \tag{2.16}$$

en intégrant (2.16) sur $[0,\delta]$ et en faisant tendre $\delta$ vers $t$ $(r<t)$ on obtient :

$$w(r) - w(0) = \int_0^r T(t-s)\, f(s)\, ds,$$

donc :

$$w(r) = w(0) + \int_0^r T(t-s)\, f(s)\, ds,$$

lorsque $r \longrightarrow t$ on obtient :

$$w(r) = T(t-r)\, u(r) \rightarrow T(0)\, u(t) = u(t), \text{ d'où, } u(t) = u(0) + \int_0^t T(t-s)\, f(s)\, ds.$$

## Corollaire 2.5 :

**Pour tout $x \in X$ et $f \in C([0,T], X)$, le problème (2.14) possède au plus une soution.**

## Preuve :

Supposons que $u_1$ et $u_2$ sont deux solutions de (2.14) donc d'après (2.15) :

$$u_1(t) = x + \int_0^t T(t-s)\, f(s)\, ds,$$

$$u_2(t) = x + \int_0^t T(t-s)\, f(s)\, ds,$$

par substitution, on trouve : $u_1(t) - u_2(t) = 0 \Rightarrow u_1(t) = u_2(t)$ $\forall t \in [0,T]$ et donc :

$$u_1 \equiv u_2 \,.$$

## Remarque 2.8 :

Pour tout $x \in X$ et $f \in C([0,T], X)$, la formule donnée par (2.15) définit une fonction

$u \in C([0,T], X)$, nous allons chercher des conditions suffisantes pour que la fonction $u$ donnée par (2.15) soit une solution de (2.14).

## Remarque 2.9 :

Il est clair que si $u$ est une solution de (2.14), on doit avoir $u(0) = x \in D(A)$, cependant cette condition n'est plus suffisante pour que $u$ donnée par (2.15), soit solution de (2.14).

## Contre exemple :

Supposons que $T(t)$ est un groupe d'isométrie et soit $y \in X/D(A)$ alors : $T(t)\, y \notin D(A)$.
on prend pour tout $t \in \mathbb{R}$ : $f(t) = T(t)\, y$, et $x = 0 \in D(A)$ donc (2.15) donne :

$$u(t) = t\,T(t)\, y \notin D(A) \text{ pour } t \neq 0,$$

donc $u(t)$ n'est plus une solution de (2.14).

## Proposition 2.6 :

**Soit $x \in D(A)$ et $f \in C([0,T], X)$, on suppose que l'une au moins des deux conditions suivantes est satisfaite :**

**i)** $f \in L^1([0,T], D(A))$

**ii)** $f \in W^{1,1}([0,T], X)$

**alors $u$ donnée par (2.15) est solution du problème (2.14).**

## Preuve :

cf : [3].

## Lemme 2.2 (Granwall) :

**Soit $T > 0$, $\lambda \in L^1[0,T]$ tel que $\lambda \geq 0$ p.p et soit $c_1, c_2$ deux constantes positives $\zeta \in L^1[0,T]$, $\zeta \geq 0$ p.p tel que $\lambda\zeta \in L^1[0,T]$ alors, si $\forall t \in [0,T]$**

$$\zeta(t) \leq c_1 + c_2 \int_0^t \lambda(s)\, \zeta(s)\, ds, \textbf{p.p},$$

**on a :**

$$\zeta(t) \leq c_1 \exp\, c_2 \int_0^t \lambda(s)\, ds,$$

Preuve :

cf : [3].

Remarque 2.10 :

En particulier, si $c_1 = 0$, alors, $\zeta(t) = 0$ p.p sur $[0, T]$.

## 2.4 Problèmes semi-linéaires

### 2.4.1 Rappels

On dit que $F : X \to X$ est lipschytzienne sur les bornées de $X$, si pour toute constante $M > 0$, $\exists K(M)$ tel que :

$$\|F(x) - F(y)\| \leq K(M) \|x - y\|, \ \forall x, y \in B(0, M).$$

étant donnée $u_0 \in X$, $F : X \to X$ une fonction lipschytzienne, on cherche $T > 0$ et une fonction $u$ solution du problème :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in C([0,T], D(A)) \cap \in C^1([0,T], X), \\ \frac{du}{dt} - Au = F(u(t)), \\ u(0,.) = u_0, \end{cases} \tag{2.17}$$

le problème (2.17) s'appelle problème semi-linéaire.

Lemme 2.3 :

**Soit** $T > 0$, $u_0 \in X$ **et** $u, v \in C([0,T], X)$ **deux solutions du problème :**

$$u(t) = T(t)\, u_0 + \int\limits_0^t T(t-s)\, F(u(s))\, ds, \tag{2.18}$$

**alors** $u = v$ **(L'unicité de la solution)**

Preuve :

Posons : $M = \sup \max\limits_{t \in [0,T]} \{\|u(t)\|, \|v(t)\|\}$ on a :

$$\|u(t)\|-\|v(t)\|\leq\int_0^t\|F(u(s))-F(v(s))\|\ ds\leq K(M)\int_0^t\|u(s)-v(s)\|\ ds$$

pour $t\in[0,T]$, et d'après Gronwall ( $C_1=0$.Remarque 2.10), on déduit que :

$$\|u(t)-v(t)\|=0$$

ce qui implique : $u=v$

## Proposition 2.7 :

**Le problème (2.17) admet une solution unique.**

## Preuve :

On pose $T_M=[2K(2M+\|F(0)\|+2]^{-1}>0$, où $T_{Max}$ est le temps d'existence maximale et on pose : $L=2M+\|F(0)\|$, on définit $E$ comme suit :

$$E=\{u\in C([0,T_M],X)\ \text{tel que}\ \|u\|\leq L,\ \forall t\in[0,T_M]\}$$

on associe à E, la distance $d$ induite par la norme de $C([0,T_M],X)$

$$d(u,v)=\max_{t\in[0,T_M]}\|u(t)-v(t)\|$$

Soit $\Phi_u\in C([0,T_M],X)$, $\forall u\in E$ :

$$\Phi_u(t)=T(t)\ u_0+\int_0^t T(t-s)\ F(u(s))\ ds \text{ pour } s\in[0,T_M].$$

on a : $F(u(s))=F(0)+[F(u(s))-F(0)]$ donc :

$$\|F(u(s))\|\leq\|F(0)\|+L\,K(L)\leq\frac{M+\|F(0)\|}{T_M},$$

il résulte que :

$$\|\Phi_u(t)\| \leq \|u_0\| + \int_0^t \|F(u(s))\| \ ds \leq M + \frac{t(M + \|F(0)\|)}{T_M} \leq L \ \forall t \in [0, T_M].$$

par conséquant $\Phi_u \in E$ d'où :

$$\Phi_u : E \to E$$

de plus ; $\forall (u, v) \in E \times E$, on a :

$$\|\Phi_u(t) - \Phi_v(t)\| \leq K(L) \int_0^t \|u(s) - v(s)\| \ ds \leq K(L) \ d(u,v) \ T_M \leq \frac{1}{2} d(u,v).$$

donc $\Phi_u$ est contractante et d'après le théorème du point fixe de Banach, $\Phi_u$ possède une unique solution, et en déduit que :Le problème (2.17) admet une solution unique.

# Chapitre 3

# Existence globale de la solution d'un système de réaction-diffusion via fonctionnelle de Lyapunov

## 3.1 Introduction

Soit le problème :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a\Delta u - b\Delta v = -\lambda f(u,v) & \text{sur} \quad ]0,+\infty[\times\Omega, \\ \frac{\partial v}{\partial t} - c\Delta u - d\Delta v = +\mu f(u,v) & \text{sur} \quad ]0,+\infty[\times\Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 & \text{sur} \quad ]0,+\infty[\times\partial\Omega, \\ u(0,x) = u_0, \quad v(0,x) = v_0 & \text{sur } \Omega, \end{cases} \tag{P}$$

où $\Omega$ est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $\Delta$ est le Laplacien, $a, b, c, d, \lambda, \mu$ sont des constantes positives, $f$ est une fonction continûment différentiable. Si $c = b = \lambda - 1 = \mu - 1 = 0$, $f(u,v) = uv^\beta$, N. Alikakos [1] a établi l'existence globale de la solution pour $1 < \beta < \frac{n+2}{n}$ avec une méthode basée sur les injections de Sobolev, ce résultat a été amelioré par K. Masuda [9] pour $\beta > 1$, puis R. H. Martin, M. Pierre [6] avec une méthode différente.

Une autre approche, celle de la fonction de Liapounov est traitée par A. Haraux, A.Youkana [4] qui ont généralisé la méthode de K. Masuda pour $f(u,v) = u\Phi(v)$, où $\Phi$ est une fonction non linéaire satisfait la condition suivante :

$$\lim_{v \to +\infty} \frac{\log(1+\Phi(v))}{v} = 0,$$

Si $b = 0$, $\lambda$ , $\mu$ positives, le problème $(P)$ devient :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a\Delta u = -\lambda f(u,v) & \text{sur} \quad ]0,+\infty[ \times \Omega \\ \frac{\partial v}{\partial t} - c\Delta u - d\Delta v = +\mu f(u,v) & \text{sur} \quad ]0,+\infty[ \times \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 & \text{sur} \quad ]0,+\infty[ \times \partial\Omega \\ u(0,x) = u_0, \quad v(0,x) = v_0 & \text{sur } \Omega. \end{cases} \tag{P1}$$

Kouachi et Youkana ont généralisé la méthode de A. Haraux, A.Youkana [4] en supposant que $d < a$; $u_0, v_0$ appartenant à la région :

$$\Sigma = \left\{ (u_0, v_0) \in \mathbb{R}, \text{ tel que } u_0 \geq 0, \ v_0 \geq \frac{cu_0}{a-d} \right\},$$

où $f(0,s) = 0$ pour tout $s \geq 0$ et satisfait la condition :

$$\lim_{s \to +\infty} \frac{\log(1+f(r,s))}{s} < \alpha, \ \forall r \geq 0.$$

$$\alpha = \frac{2ad}{n(a-d)^2 \parallel u_0 \parallel_\infty} \min\left\{ \frac{\lambda}{\mu}, \frac{a-d}{c} \right\}.$$

Lorsque $c = b = \lambda - 1 = \mu - 1 = 0$, le problème $(P1)$ s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a\,\Delta u = -f(u,v) \text{ sur } ]0,\infty[ \times \Omega \\ \frac{\partial v}{\partial t} - d\,\Delta v = +f(u,v) \text{ sur } ]0,\infty[ \times \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 \text{ sur } ]0,\infty[ \times \partial\Omega \\ u(0) = u_0, \ v(0) = v_0 \text{ sur } \Omega \end{cases} \tag{S}$$

où $f(r,s)$ est une fonction continûment différentiable dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ qui vérifie $f(0,s) = 0$ pour tout $s \geq 0$.

Pour $u_0$ et $v_0$ bornées, l'existence locale en temps de la solution est classique pour ce système (on note $T_{Max}$ le temps d'existence maximale), de plus, les solutions sont positives si $u_0, v_0 \geq 0$.

Il en résulte par application du principe du maximum, l'estimation à priori :

$$\|u(t)\|_\infty \leq \|u_0\|_\infty \ \forall\, 0 \leq t \leq T_{Max}$$

puisque $f(u,v) \geq 0$, s'il était possible d'établir une estimation a priori uniforme pour $v(t)$, l'existence globale en résulterait, mais, et c'est là la difficulté, une telle estimation n'est pas du tout évidente sauf bien sûr dans le cas trivial $a = d$ où :

$$\|w\|_\infty = \|u+v\|_\infty \leq \|w_0\|_\infty = \|u_0 + v_0\|_\infty$$

puisque :

$$\frac{\partial}{\partial t}(u+v) - a\,\Delta(u+v) = 0$$

donne :

$$\frac{\partial w}{\partial t} - a\,\Delta w = 0$$

avec $w = u + v$, et d'après le principe de maximum on trouve :

$$\|w\|_\infty = \|u+v\|_\infty \leq \|w_0\|_\infty = \|u_0 + v_0\|_\infty .$$

Notre objectif, dans cette section est de développer un travail de S.Kouachi [8] qui a établi l'existence globale de la solution du système ( P2) dans le cas d'une matrice pleine de la forme :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}, \text{tel que : } 2a > b + c,$$

en utilisant la technique de la région invariante et la fonctionnelle de liapounov qui a l'avantage de résoudre le problème .

Dans ce cas $(P1)$ devient :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a\Delta u - b\Delta u = -\lambda f(u,v) & \text{sur} \quad ]0,+\infty[ \times \Omega \\ \frac{\partial v}{\partial t} - c\Delta u - a\Delta v = \mu f(u,v) & \text{sur} \quad ]0,+\infty[ \times \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 & \text{sur} \quad ]0,+\infty[ \times \partial\Omega \\ u(0,x) = u_0, \quad v(0,x) = v_0 & \text{sur } \Omega. \end{cases} \tag{P2}$$

## 3.2 Notations et préliminaires :

Dans cette étude, on désigne par $\|.\|_p$ , $p \in [1,+\infty[$ et $\|.\|_\infty$ les normes usuelles dans les espaces $L^p(\Omega), L^\infty(\Omega)$, respectivement, définies par

$$\|u\|_p^p = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega |u(x)|^p \, dx$$

$$\|u\|_\infty = \sup_{x\in\Omega} ess \, |u(x)|$$

On définit aussi les espaces $L^p(0,T,X)$, $p \in [1,+\infty[$et $L^\infty(0,T,X)$ comme suit :

$L^p(0,T,X) = \left\{u : \quad [0,T] \to X \text{ mesurable }, \int_0^T \|u\|_X^P \, dt < \infty, \right\}$

muni de la norme

$$\|u\|_{L^p(0,T,X)}^P + \int_0^T \|u\|_X^P \, dt$$

$L^\infty(0,T,X) = \{u : \quad [0,T] \to X \text{ mesurable }, \sup ess_{t\in]0,T[} \|u\|_X < \infty, \}$

muni de la norme

$$\|u\|_{L^\infty(0,T,X)} = \sup ess_{t\in]0,T[} \|u\|_X \ .$$

L'étude de l'existence locale et l'unicité de la solution $(u,v)$ du problème (P2) découle de la théorie de base des équations paraboliques semi-linéaires(voir proposition 2.7).

En conséquence, il existe un $T_{\max} \in \ ]0,+\infty]$ tel que (P2) possède une unique solution classique sur$]0,T_{\max}[ \times \Omega$.

De plus, si $T_{\max} < \infty$ , alors

$$\lim_{t \uparrow T_{\max}} (\|u(t)\|_\infty + \|v(t)\|_\infty) = +\infty .$$

Par conséquent, s'il existe une constante positive $C$ telle que

$$\|u(t)\|_\infty + \|v(t)\|_\infty \leq C, \text{pour tout } t \in ]0, T_{\max}[ ,$$

alors $T_{\max} = +\infty$.

Cependant l'étude de la positivité de la solution est basée sur le lemme suivant :

Lemme 3.1 :

**On suppose que la matrice $D$ du système (D) est diagonale. Alors, toute région de la forme**

$$\Sigma = \cap_{i=1}^{m} \{u : u_i \ \geq 0\} ,$$

**est invariante dès que la fonction $F$ satisfait**

$$f_i(u_1, u_2, ..u_{i-1}, 0, ..u_m) \geq 0, \text{ pour tout } u_j \geq 0, i, j = 1, ....m(i \neq j).$$

## 3.3 Déclaration et preuve du théorème principal

Avant d'exposer le théorème principal qui montre l'existence globale de la solution du système **(P2)**, nous présentons un corollaire qui assure la positivité de la solution.

corollaire 3.1 :

**Si $f$ est une fonction non négative sur la région $\Sigma_1$ définie ci-dessous et vérifie les conditions suivantes :**

$$\begin{cases} f\left(-\sqrt{\frac{b}{c}}s, s\right) = 0 & \text{pour tout } s \geq 0, \text{ si } \sqrt{\frac{b}{c}} < \frac{\lambda}{\mu} \\ f\left(r, \sqrt{\frac{c}{b}}r\right) = 0 & \text{pour tout } r \geq 0, \text{ si } \sqrt{\frac{b}{c}} > \frac{\lambda}{\mu} \\ \lim\limits_{s \to +\infty} \left[\frac{\log(1+f(r,s))}{s}\right] = 0 & \forall r \geq 0, \text{ si } \sqrt{\frac{b}{c}} < \frac{\lambda}{\mu} \\ \lim\limits_{r \to +\infty} \left[\frac{\log(1+f(r,s))}{r}\right] = 0 & s \geq 0, \text{ si } \sqrt{\frac{b}{c}} > \frac{\lambda}{\mu} \end{cases} \qquad \text{(P3)}$$

$$(u_0,v_0)\in\Sigma_1=\begin{cases}(u_0,v_0)\in\mathbb{R}^2 \text{ tel que } v_0\geq\sqrt{\frac{b}{c}}\mid u_0\mid \text{ si } \sqrt{\frac{b}{c}}<\frac{\lambda}{\mu}\\ (u_0,v_0)\in\mathbb{R}^2 \text{ tel que } u_0\geq\sqrt{\frac{c}{b}}\mid v_0\mid, \text{si } \sqrt{\frac{b}{c}}>\frac{\lambda}{\mu}\end{cases}\tag{P4}$$

**Alors, la solution $(u(t,.),v(t,.))$ du problème (P2) reste dans $\Sigma_1$ pour tout $t\geq 0$ et il existe un nombre positif $M$ tel que :**

$$\begin{cases}\|\sqrt{c}u(t,.)+\sqrt{b}v(t,.)\|_\infty\leq M, & \text{si } \sqrt{\frac{b}{c}}<\frac{\lambda}{\mu}\\ \|\sqrt{c}u(t,.)-\sqrt{b}v(t,.)\|_\infty\leq M, & \text{si } \sqrt{\frac{b}{c}}>\frac{\lambda}{\mu}.\end{cases}\tag{P5}$$

## Preuve :

Dans le cas : $\sqrt{\frac{b}{c}}<\frac{\lambda}{\mu}$ , miltipliant la première équation de $(P2)$ par $\sqrt{c}$ et la deuxième par $\sqrt{b}$ , aprés une simple combinaison, on trouve :

$$\begin{cases}\frac{\partial w}{\partial t}-\left(a+\sqrt{bc}\right)\Delta w=\left(\mu\sqrt{b}-\lambda\sqrt{c}\right)F(w,z) & \text{sur} \quad ]0,T_{\max}[\times\Omega\\ \frac{\partial z}{\partial t}-\left(a-\sqrt{bc}\right)\Delta z=\left(\mu\sqrt{b}+\lambda\sqrt{c}\right)F(w,z) & \text{sur} \quad ]0,T_{\max}[\times\Omega\\ \frac{\partial w}{\partial\eta}=\frac{\partial z}{\partial\eta}=0 \text{ sur } ]0,T_{\max}[\times\partial\Omega\\ w(0,x)=w_0(x),z(0,x)=z_0(x) \text{ sur } \Omega\end{cases}\tag{P6}$$

où :

$$W(t,x)=\sqrt{c}u(t,x)+\sqrt{b}v(t,x),\tag{3.1}$$

$$Z(t,x)=-\sqrt{c}u(t,x)+\sqrt{b}v(t,x),\tag{3.2}$$

pour tout $(t,x)\in]0,T_{\max}[\times\Omega$, avec :

$$F(w,z)=f(u,v)$$

il suffit de vérifier que :

$$\Sigma_2=\left\{(w_0,z_0)\in\mathbb{R}^2 \text{ tel que } w_0\geq 0,\ z_0\geq 0\right\}=\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$$

est une région invariante pour le système (P6) et $w(t,x)$ est uniforément borneé dans $]0,T_{\max}[\times\Omega$

en effet, on a :

$$F(0,z)=f\left(-\sqrt{\frac{b}{c}}v,v\right)=0,\forall z\geq 0,\forall v\geq 0 \tag{3.4}$$

donc, $w(t,x)\geq 0$, $\forall (t,x)\in \left]0,T_{\max}\right[\times\Omega$, et puisque $F(w,z)\geq 0$, $\forall\ (w,z)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$ avec $z_0(x)\geq 0$ dans $\Omega$, alors :

$$z(t,x)=\sqrt{c}u(t,x)-\sqrt{b}v(t,x)\geq 0,\text{sur}\left]0,T_{\max}\right[\times\Omega \tag{3.5}$$

donc $\Sigma_2$ est une région invariante pour le système (P6), pour vérifier que $w(t,x)$ est uniformément borneé dans $\left]0,T_{\max}\right[\times\Omega$, il suffit d'appliquer le principe du maximum à la première équation de (P6).

Dans le cas : $\sqrt{\frac{b}{c}}>\frac{\lambda}{\mu}$ , on obtient :

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t}-\left(a-\sqrt{bc}\right)\Delta w=-\left(\mu\sqrt{b}+\lambda\sqrt{c}\right)F\left(w,z\right) & \text{sur} \quad \left]0,T_{\max}\right[\times\Omega \\ \frac{\partial z}{\partial t}-\left(a+\sqrt{bc}\right)\Delta z=\left(\mu\sqrt{b}-\lambda\sqrt{c}\right)F\left(w,z\right) & \text{sur} \quad \left]0,T_{\max}\right[\times\Omega \\ \frac{\partial w}{\partial\eta}=\frac{\partial z}{\partial\eta}=0 \text{ sur } \left]0,T_{\max}\right[\times\partial\Omega \\ w(0,x)=w_0(x),z(0,x)=z_0(x) \text{ sur } \Omega \end{cases} \tag{P7}$$

dans ce cas, on a :

$$w(t,x)=\sqrt{c}u(t,x)-\sqrt{b}v(t,x)$$

$$z(t,x)=\sqrt{c}u(t,x)+\sqrt{b}v(t,x)$$

pour tout $(t,x)\in\left]0,T_{\max}\right[\times\Omega$

de la même maniére, on montre que $\Sigma_2$ est une région invariante pour le système (P7), ce qui montre que : $(u,v)$ est dans $\Sigma_1$, d'où, on a construit une région invariante pour le système$(P2)$, qui nous donne l'avantage de faire appel à la fonctionnelle de Liapounov qui a l'avantage de résoudre le problème.

Puisque $F\left(w,z\right)\geq 0,w$ satisfait le principe du maximum, i.e.,

$$\left\|w(t)\right\|_\infty\leq w_0 \text{ , pour tout } t\in\left]0,T_{\max}\right[.$$

Ainsi, le problème de l'existence globale se réduit à établir une estimation uniforme de

$\|z(t)\|_\infty$ sur $]0, T_{\max}[$. D'après la théorie de la régularité $L^p$, $1 < p < \infty$ pour les opérateurs paraboliques (voir, par exemple,[5, 10]), il suffit d'obtenir une estimation uniforme de $\|F(w(t), z(t))\|_p$sur $]0, T_{\max}[$ pour un certain $p > \frac{n}{2}$.

Théoreme 3.1 :

**Soit $(w(t), z(t))$ une solution du problème (P6) resp (P7) avec valeurs initiales dans $\Sigma_2$ alors :**

$$\mathbf{t} \to \mathbf{L}(\mathbf{t}) = \int_\Omega (M - w(t,x))^{-\gamma} \exp \mathbf{Bz}(\mathbf{t}, \mathbf{x})\mathbf{dx} \tag{3.6}$$

**est décroissant sur $[0, T_{\max}[$ pour toute constante $B$ et $\gamma$ tel que :**

$$\mathbf{BM}\left\{\frac{\mu_1}{\lambda_1}\right\} < \gamma < \frac{a^2 - bc}{bc} \tag{3.7}$$

**avec :**

$$\lambda_1 = \mu\sqrt{b} - \lambda\sqrt{c} \text{ resp } \mu\sqrt{b} + \lambda\sqrt{c}, \tag{3.8}$$

$$\mu_1 = \mu\sqrt{b} + \lambda\sqrt{c} \text{ resp } \mu\sqrt{b} - \lambda\sqrt{c}, \tag{3.9}$$

**où $M$ satisfait la condition :**

$$\| w_0 \|_\infty \leq M \tag{3.10}$$

Preuve :

Nous allons démontrer le théorème dans le cas $\sqrt{\frac{b}{c}} < \frac{\lambda}{\mu}$, on pose $\theta = a + \sqrt{bc}$ et $\varphi = a - \sqrt{bc}$. Dérivant L par rapport à $t$, on trouve :

$$\begin{aligned}
L^{\cdot}(t) &= \int_{\Omega} \left[\gamma\left((M-\omega)^{-\gamma-1} e^{\beta z}\right) \frac{\partial w}{\partial t} + \left(\beta (M-\omega)^{-\gamma} e^{\beta z}\right) \frac{\partial z}{\partial t}\right] dx. \\
&= \int_{\Omega} \left(\gamma (M-\omega)^{-\gamma-1} e^{\beta z}\right) (\theta \Delta \omega - \lambda_1 F(w,z))\, dx + \\
&\qquad \int_{\Omega} \left(\beta (M-\omega)^{-\gamma} e^{\beta z}\right) (\varphi \Delta z + \mu_1 F(w,z))\, dx \\
&= \int_{\Omega} \left[\gamma\theta (M-\omega)^{-\gamma-1} e^{\beta z} \Delta w + \beta\varphi (M-\omega)^{-\gamma} e^{\beta z} \Delta z\right] dx \\
&\quad + \int_{\Omega} \left[\mu_1 \beta (M-\omega)^{-\gamma} - \lambda_1 \gamma (M-\omega)^{-\gamma-1}\right] e^{\beta z} F(w,z)\, dx \\
&= I + J
\end{aligned}$$

par application de la formule de Green, on obtient :

$$I = -\int_{\Omega} T(\nabla w, \nabla z) (M-\omega)^{-\gamma-2} e^{\beta z} dx,$$

où

$$\begin{aligned}
T(\nabla w, \nabla z) &= \theta\gamma(\gamma+1) |\nabla w|^2 + \\
&\quad \beta (M-\omega)(\theta+\varphi)\gamma \nabla\omega \nabla z + \varphi\beta^2 (M-\omega)^2 |\nabla z|^2
\end{aligned}$$

le discriminant de T est donné par

$$\begin{aligned}
D &= \left[((\theta+\varphi)\gamma)^2 - 4\varphi\theta\gamma(\gamma-1)\right] \beta^2 (M-\omega)^2 \\
&= \left((\theta-\varphi)^2 \gamma^2 - 4\theta\varphi\gamma\right) \beta^2 (M-\omega)^2
\end{aligned}$$

$D$ <0, si :

$$0<\gamma \text{ et } (\theta-\varphi)^2\gamma - 4\theta\varphi < 0,$$

les deux dernières inégalités donnent :

$$0<\gamma<\frac{4\theta \ \varphi}{(\theta-\varphi)^2}$$

en utilisant l'inégalité suivante :

$$\xi x^2 + \sigma xy + \rho y^2 \leq -\frac{\sigma^2 - 4\xi\rho}{2}\left[\frac{y^2}{4\xi} + \frac{x^2}{4\rho}\right] ,$$

pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, où $\varepsilon, \rho$ sont deux constantes non négatives.

on observe que :

$$I \leq -\int_\Omega \left(m_1 |\nabla\omega|^2 + m_2 |\nabla z|^2\right)(M-\omega)^{-\gamma-2} e^{\beta z} dx,$$

où $m_1$et $m_2$ sont donnés par :

$$m_1 = \frac{\left(4\theta\varphi - \gamma(\theta-\varphi)^2\right)\gamma}{8\varphi}$$

$$m_2 = \frac{\left(4\theta\varphi - \gamma(\theta-\varphi)^2\right)\beta^2 \left(M - \|w_0\|_\infty\right)^2}{8\theta(\gamma+1)}$$

comme :

$$J = \int_\Omega ((M\ \mu_1\beta - \lambda_1\gamma) - \mu_1\beta\omega)(M-\omega)^{-\gamma-1} e^{\beta z} dx,$$

alors pour

$$\beta \leq \frac{\lambda_1\gamma}{M\ \mu_1}$$

on obtient :

$$J \leq -C(\beta,\gamma,\lambda,\mu,M) \int_{\Omega} (M-\omega)^{-\gamma-1} e^{\beta z} F(w,z)\ dx,$$

où $C(\beta,\gamma,\lambda,\mu,M)$ est une constante positive

d'où

$$L^{\cdot}(t) \leq -\int_{\Omega} \left(m_1 |\nabla\omega|^2 + m_2 |\nabla z|^2\right) (M-\omega)^{-\gamma-2} e^{\beta z} dx,$$

$$-C(\beta,\gamma,\lambda,\mu,M) \int_{\Omega} (M-\omega)^{-\gamma-1} e^{\beta z} F\ (w,z)\ dx \leq 0.$$

Dans le cas : $\sqrt{\frac{b}{c}} > \frac{\lambda}{\mu}$,nous prenons $\theta = a - \sqrt{bc}$, $\varphi = a + \sqrt{bc}$, $\lambda = \rho\sqrt{b} + \sigma\sqrt{c}$ et $\mu = \rho\sqrt{b} - \sigma\sqrt{c}$ et on applique le même raisonnement au système (P7).

## Corollaire 3.2 :

**Supposant que f(r,s) est une fonction non négative sur la région $\Sigma_1$ et continûment-différentiable dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, qui vérifie (P3), alors chaque solution du problème $(P2)$ avec condition initiales dans $\Sigma_1$ est globale de plus, elle est uniformément borneé dans $]0,\infty[\times\Omega$.**

preuve :

Prenons le cas, $\sqrt{\frac{b}{c}} < \frac{\lambda}{\mu}$ , iI suffit d'etablir une estimation uniforme de $\|F\ (w,z)\|_p$sur $[0,T_{\max}[$ pour $p > \frac{n}{2}$ puisque, pour $u$ et $v$ dans $\Sigma_1$,$w \geq 0$ et $z \geq 0$ avec $w + z = 2\sqrt{b}v$.

Comme $W$ est uniformément bornée par $M$ dans $[0,T_{\max}[\times\Omega$ , alors la troisième équation de (P3) est équivalente à

$$\lim_{s \longrightarrow +\infty} \left[\frac{\log(1+F\ (r,s))}{s}\right] = 0 \text{ , pour tout } r \geq 0. \tag{3.11}$$

Comme $F$ est continue sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ , donc

$$\lim_{s \longrightarrow +\infty} \left[\frac{\log(1+F\ (r,s))}{s}\right] = 0 \text{ ,}$$

uniformément pour $r \in [0, M]$ et on peut choisir des constantes positives $\alpha$ et $C$ telles que :

$$1 + F\ (r, s) \leq Ce^{\alpha s}\ \text{, pour tous } s \geq 0 \text{ et , pour tout } r \in [0, M]\,, \tag{3.12}$$

et

$$\alpha < \frac{2\lambda_1 \left(a^2 - bc\right)}{\eta \mu_1 bc \left\|w_0\right\|_\infty}, \tag{3.13}$$

alors, nous pouvons choisir $p > \frac{n}{2}$ de telle sorte que

$$p\ \alpha < \frac{\lambda_1 \left(a^2 - bc\right)}{\mu_1 bc \left\|w_0\right\|_\infty}, \tag{3.14}$$

on pose, $\beta = p\alpha$, ce qui donne

$$\beta \left\|w_0\right\|_\infty < \frac{\lambda_1 \left(a^2 - bc\right)}{\mu_1 bc}, \tag{3.15}$$

donc on peut choisir $\gamma$ et $M$ tels que (3.7) et (3.10) sont satisfaites,

en utilisant le théorème (3.1), nous obtenons :

$$e^{\beta z(t,.)} = \left(e^{\alpha z(t,.)}\right)^p \in L^\infty \left([0, T_{\max}[\,; L^1(\Omega)\right), \tag{3.16}$$

donc

$$e^{\alpha z(t,.)} \in L^\infty \left([0, T_{\max}[\,; L^p(\Omega)\right), \tag{3.17}$$

d'aprés (3.12), on en déduit que

$$F\ \left(w\ (t,.)\,, z\ (t,.)\right) \in L^\infty \left([0, T_{\max}[\,; L^p(\Omega)\right) \quad \text{pour } p > \frac{n}{2},$$

donc, d'aprés les remarques précédentes, nous pouvons assuré que la solution est globale.De plus, elle est uniformément bornée sur $[0, +\infty[ \times \Omega$.

Pour le cas $\sqrt{\frac{b}{c}} > \frac{\lambda}{\mu}$ , on suit le même raisonnement .

# Bibliographie


[1] N. D. Alikakos, Lp -Bounds of Solutions of Reaction-Diffusion Equations. Comm. Partial. Differential. Equations 4, (1979), 827-868.

[2] S.Bazine et al, Mémoire de master 2010-2011,Existence globale de la solution d'un système de Reaction-Diffusion avec matrice diagonale

[3] T. Casenave, A. Haraux, Introduction au Problèmes d'Evolution Semi Linéaires, Eddition Ellipses.

[4] A.Haraux et A.Youkana, On a Result of K. Masuda Concerning Reaction-Diffusion Equations, Tohoku .Math .J. 40.(1988) S. p. 159-163

[5] D. Henry, Theory of Semi-Linear Parabolic Equations , Lecture Notes in Math, 840, Springer Verlas, New York (1984).

[6] S.L.Hollis et R.H.Martin et M.Pierre, Global Existence and Boundedness in Reaction-Diffusion Systhèms,SIAM.j.Math.Anal.Vol18,Na3,May 1987.

[7] S. Kouachi, Cours de Magister 2000-2001, Existence globale de la solution des systèmes paraboliques.

[8] S.Kouachi, Uniform boundedness and global existence of solutions for reaction-diffusion systems with a balance law and a full matrix of diffusion coefficient. E. IQTDE, 2001 $N^0 7$.

[9] K.Masuda, On the Global Exietence and Asymtotic Behavior of Solution of Reaction-Diffusion Equations, Hokaido Math. J.12. (1983), pp. 360-370.

[10] A Pazy, Semi-Groups of Linear operators and Applications to partial Difféerential Equations.

[11] J. Smoller, Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations, Springer-Verlag, New York (1983).