République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 – Guelma

Faculté de Mathématiques et de l'Informatique et Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire de Fin d'Etude
Master Académique en Mathématiques
Option : EDP

THEME

Sur les équations intégrales

Présenté par : **Dirigé par :** ***Dr Ellaggoune Fateh***

Mehira Hayat

Jury :

Examinateur1:B.Boukerioua.....................**MCB**..................**Univ-Guelma**
Examinateur2:F.Lakhal.........................**MCB**..................**Univ-Guelma**

Session Juin 2012

Table des matières

Chapitre 2

Notions fondamentales

Notons tout d'abord qu'on se place dans la majeure partie des cas dans l'espace $C[a,b]$ des fonctions continues de l'intervalle $[a,b]$ dans R ou C, muni du produit scalaire :

$$\langle \phi, \Psi \rangle = \int_a^b \phi(x)\Psi(x)dx,$$

et de la norme de convergence uniforme :

$$\|\phi\|_\infty = \max_{x\in[a,b]} |\phi(x)| .$$

2.1 Opérateur intégral linéaire

Soit $K : C[a,b] \times C[a,b] \longrightarrow R$ une fonction continue, l'opérateur intégral linéaire sur $C[a,b]$ est définit par la formule suivante :

$$A : \phi \in C[a,b] \longrightarrow A\phi \in C[a,b], \tag{2.1}$$

$$(A\phi)(x) = \int_a^b \phi(y)K(x,y)dy. \tag{2.2}$$

Dans ce contexte la fonction K s'appelle noyau de l'opérateur intégral A.

2.2 Opérateur adjoint

On dit que deux opérateurs

$$A : C[a,b] \longrightarrow C[a,b],$$

et

$$B : C[a,b] \longrightarrow C[a,b],$$

sont adjoints s'ils vérifient :

$$\forall(\phi,\Psi) \in C[a,b]^2, \langle A\phi, \Psi\rangle = \langle \phi, B\Psi\rangle\,, \tag{2.3}$$

et on note l'adjoint de A par A^*.

2.3 Opérateur compact

Soient E et F deux espaces normés, A un opérateur linéaire de E dans F, on dit que A est un opérateur compact si l'image de la boule unité $B(0,1)$ de E (par A) est relativement compacte dans F, i.e. Si $\overline{A(B(0,1))}$ est compacte.

Autrement dit, A est compact si pour toute suite (ϕ_n) de $B(0,1)$ de E,on peut extraire une sous suite (ϕ_{n_K}) que transforme A en une suite convergente $(A(\phi_{n_K}))$ dans F.

Théorème 2.1

Soit un opérateur intégrale A défini à partir d'un noyau K continue sur $[a,b]\times[a,b]$ par la formule

$$\forall x \in [a,b]\,,\; A\phi(x) = \int_a^b K(x,y)\phi(y)dy. \tag{2.4}$$

Alors l'opérateur A admet un unique opérateur adjoint A^*pour le produit scalaire *usuel de L^2, définie par :*

$$\forall x \in [a,b]\,,\ A^*\Psi(x) = \int_a^b K(y,x)\Psi(y)dy. \tag{2.5}$$

Théorème 2.2

L'opérateur intégral défini en (2.1) *est compact sur* $(C\,[a,b]\,, \|\cdot\|_\infty)$.

Preuve

Désignons par B la boule unité de $C\,[a,b]$, pour montrer que notre opérateur est compact, il suffit d'établir que

- $H = A(B)$ est équicontinu.

- Pour tout $x \in [a,b]$, l'ensemble $H_x = \{\phi(x) / \phi \in H\}$, est relativement compact.

On remarque en premier que K est uniformément continue sur $[a,b] \times [a,b]$. pour tout ϕ de B et tout x, x' de $[a,b]$ on écrit

$$\begin{aligned}
|A\phi(x) - A\phi(x')| &= \left| \int_a^b [K(x,y) - K(x',y)]\,\phi(y)dy \right|, \\
&\leq \int_a^b |K(x,y) - K(x',y)|\,|\phi(y)|\,dy, \\
&\leq \|\phi\| \int_a^b |K(x,y) - K(x',y)|\,dy, \\
&\leq \int_a^b |K(x,y) - K(x',y)|\,dy.
\end{aligned}$$

La continuité uniforme de K sur $[a,b] \times [a,b]$ permet d'associé à tout réel $\varepsilon > 0$ et autre réel $\alpha > 0$ de sorte que

$$|x - x'| \leq \alpha \Rightarrow |K(x,y) - K(x',y)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a},$$

donc

$$\forall \varepsilon > 0. \exists \alpha > 0 \;/\; \forall \; x, x' \in [a, b] \;\; |x - x'| \leq \alpha \Rightarrow |A(\phi)(x) - A(\phi)(x')| \leq \varepsilon \; \forall \; \phi \in B.$$

Ce qui signifie que H est équicontinue.

Passons à la seconde condition.

Pour que l'ensemble :

$$H_x = \{g(x) = A\phi(x), \phi \in B\}.$$

Soit relativement compact, il suffit qu'il soit borné.

Calculons à cet effet :

$$|A\phi(x)| = |g(x)| = \left| \int_a^b K(x, y)\phi(y)dy \right| \leq \|\phi\| \int_a^b \sup_{x,y \in [a,b]} |K(x, y)| \, dy \leq (b - a)M,$$

où

$$M = \sup_{x,y \in [a,b]} |K(x, y)|.$$

Il apparaît ainsi que H_x est borné, ce qui achève la démonstration.

Remarque 2.1

- Le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré n associé à f et aux points $x_0, x_1, ..., x_n$ est :

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \; l_i(x),$$

où

$$l_i(x) = \prod_{i \neq j} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}, 0 \leq i \leq n,$$

sont les polynômes de Lagrange de base de degré n associés à $x_0, x_1, ..., x_n$, telles que

$$\begin{cases} l_i(x_i) = 1 \\ l_i(x_j) = 0, \text{si } i \neq j \end{cases}.$$

- Soit F une fonction n fois intégrable sur $[a, b]$, et $s \in [a, b]$, alors on a l'identité

$$\int_a^s \int_a^{s_n} ... \int_a^{s_3} \int_a^{s_2} F(s_1) ds_1 ds_2 ... ds_{n-1} ds_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^s (s-t)^{n-1} F(t) dt.$$

2.4 Equations intégrales linéaire et leurs classifications

2.4.1 Introduction à la théorie des équations intégrales

Définition 2.1

Toute équation fonctionnelle

$$\lambda \, \phi(x) + f(x) = \int_E K(x, y, \phi(y)) dy, \quad x \in E, \tag{2.6}$$

est appelée équation intégrale (EI), où ϕ est l'inconnue, f est une fonction donnée, $\lambda \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) ; E est un ensemble fermé, borné et mesurable d'un espace euclidien, $x \in E$ et K est le noyau.

– Si on prend

$$K(x, y, \phi(y)) = K(x, y)\phi(y),$$

l'équation (2.6) devient linéaire, i.e.

$$f(x) = \int_E K(x, y)\phi(y) dy - \lambda\phi(x).$$

– Le type le plus général d'une équation intégrale linéaire est

$$h(x)\ \phi(x) = f(x) + \lambda \int_E K(x,y)\phi(y)dy.$$

– Les équations intégrales sont classées par leurs caractéristiques selon trois genres :

1. Limites d'intégration

– Les deux sont fixées : équation de Fredholm de la forme

$$\lambda\phi(x) + f(x) = c\int_a^b K(x,y)\phi(y)dy, (a \le x \le b).$$

– L'une variable : équation de Volterra de la forme

$$\lambda\phi(x) + f(x) = c\int_a^x K(x,y)\phi(y)dy.$$

2. Placement de la fonction inconnue ϕ

– Si $\lambda = 0$, on a

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_a^b K(x,y)\phi(y)dy, \\ f(x) &= \int_a^x K(x,y)\phi(y)dy, \end{aligned}$$

qui sont les équations de Fredholm et de Volterra de $1^{ère}$ espèce.

– Si $\lambda \neq 0$ l'équation intégrale est dite de deuxième espèce, de la forme

$$\phi(x) + f_1(x) = \lambda_1 \int_a^b K(x,y)\phi(y)dy,$$

où

$$\frac{c}{\lambda} = \lambda_1, \frac{f(x)}{\lambda} = f_1(x).$$

3. Placement de la fonction connue f

si $f(x) = 0$ l'équation (2.6) est dite alors homogène, sinon l'équation est dite non homogène

Définition 2.2

On dit qu'une équation intégrale est singulière si l'une ou les deux limites de l'intégrale sont infinies, ou bien le noyau devient infini au voisinage des points de l'intégrale.

Lemme 2.1

Soit K une fonction de l'espace $L^2\left(]a;b[\times]a;b[\right)$ alors l'opérateur A tel que

$$A\phi(t) = \int_a^b K(t,s)\phi(s)ds, t \in]a,b[. \tag{2.7}$$

est bien défini, en tant qu'opérateur de $L^2\left(]a;b[\right)$ dans lui même.

Proposition 2.1

Soit A un opérateur linéaire borné d'un espace de Banach X dans lui même avec $\|A\| < 1$ et soit I l'opérateur identique dans X.

Alors $(I - A)$ admet un opérateur inverse borné donné par la série de Neumann

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k,$$

de plus

$$\left\|(I - A)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

Preuve

Posons

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} A^k,$$

avec

$$\|A\| < 1,$$

et montrons que

$$S = (I - A)^{-1},$$

tel que

$$S = \lim_{n \longrightarrow \infty} S_n,$$

on a

$$(I - A)S_n = (I - A)\sum_{k=0}^{n} A^k = \sum_{k=0}^{n} A^k - \sum_{k=0}^{n} A^{k+1} = I - A^{n+1},$$

et

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} (I - A)S_n = \lim_{n \longrightarrow \infty} (I - A^{n+1}),$$

et puisque

$$S = \lim_{n \longrightarrow \infty} S_n,$$

et

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} A^{n+1} = 0,$$

alors

$$(I - A)S = I - \lim_{n \longrightarrow \infty} A^{n+1} = I. \tag{2.8}$$

D'autre part on a

$$S_n(I - A) = \sum_{k=0}^{n} A^k(I - A) = \sum_{k=0}^{n} A^k - \sum_{k=0}^{n} A^{k+1} = I - A^{n+1},$$

alors

$$S(I - A) = \lim_{n \longrightarrow \infty} S_n(I - A) = \lim_{n \longrightarrow \infty} I - A^{n+1} = I. \tag{2.9}$$

De (2.8) et (2.9) on conclut

$$S = (I - A)^{-1}.$$

Puisque $\|A\| < 1$ on obtient

$$\|(I-A)^{-1}\| = \|S\| = \left\| \sum_{k=0}^{\infty} A^k \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|A^k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|A\|^k = \frac{1}{1-\|A\|}.$$

Théorème 2.3

Soit A un opérateur linéaire borné d'un espace de Banach X dans lui même, avec $\|A\| < 1$. Soit I l'opérateur identique dans X. Alors pour tout $f \in X$; l'approximation successive donnée par la suite de fonctions

$$\phi_0 \in X, \phi_n = A\phi_{n-1} + f, (n \geq 1), \tag{2.10}$$

converge vers une unique solution ϕ, vérifiant

$$\phi - A\phi = f. \tag{2.11}$$

2.4.2 Equation intégral de Fredholm

La relation numérique des équation de Fredholm homogène de première espèce est généralement délicate car le noyau correspond souvent à une matrice presque non inversible c'est-à dire avec un déterminant voisin de zéro.

On appelle équation intégrale de Fredholm de seconde espèce une équation de la forme

$$\phi(x) + f(x) = \int_a^b K(x,t)\phi(t)dt, \tag{2.12}$$

où $\phi(x)$ est la fonction inconnue, $K(x,t)$ et $f(x)$ des fonctions données.

Avec les notations précédentes, dans une formule plus simple on écrit

$$\phi(x) + f(x) = A\ \phi(x).$$

Si $f(x) \neq 0$, l'équation (2.12) est dite non homogène, dans le cas contraire, l'équation intégrale (2.12) s'écrit

$$\phi(x) = \int_a^b K(x,t)\phi(t)dt, \tag{2.13}$$

et on dit qu'elle est homogène.

Une équation intégrale de la forme

$$\int_a^b K(x,t)\phi(t)dt = f(x), \tag{2.14}$$

où la fonction inconnue $\phi(x)$ n'intervient que sous le signe d'intégration, s'appelle équation intégrale de Fredholm de première espèce. On appelle solution des équations intégrales (2.12), (2.13) et (2.14) toute fonction $\phi(x)$ telle qu'après sa substitution dans l'équation, celle-ci devient une identité en $x \in (a,b)$.

2.4.3 Equations intégrales qui ne sont pas de Fredholm

Si dans l'équation intégrale

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\phi(t)\ dt. \tag{2.15}$$

le noyau $K(x,t)$ est tel que :

$$\int_a^b \int_a^b K^2(x,t)\ dx\ dt < +\infty\ . \tag{2.16}$$

L'équation (2.15) vérifie les théorèmes de Fredholm si la condition (2.16) n'est pas satisfaite on dit donc de telles équations qu'elles ne sont pas de Fredholm.

2.4.4 Equation intégral de Volterra

Une équation, à une inconnue $\phi(x)$,de la forme

$$\phi(x) + f(x) = \int_a^x K(x,t)\phi(t)dt, \tag{2.17}$$

où $f(x)$, $K(x,t)$ sont des fonctions connues, est appelée équation intégrale de Volterra de seconde espèce. La fonction $K(x,t)$ est le noyau de l'équation de Volterra. en fait c'est un cas particulier de l'équation intégrale de Fredholm, il suffit de prendre le noyau $K(x,t) = 0$ pour $x < t$ .Si $f(x) \equiv 0$, l'équation (2.17) s'écrit

$$\phi(x) = \int_a^x K(x,t)\phi(t)dt, \tag{2.18}$$

et s'appelle équation homogène de Volterra de seconde espèce.

Une équation, à une inconnue $\phi(x)$, de la forme

$$\int_a^x K(x,t)\phi(t)dt = f(x), \tag{2.19}$$

est appelée équation intégrale de Volterra de première espèce.

2.5 Noyaux itérés

2.5.1 Construction de la résolvante à l'aide des noyaux itérés

Soit l'équation intégrale de Fredholm

$$\phi(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)\ \phi(t)\ dt = f\ (x). \tag{2.20}$$

On pose :

$$\phi(x) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n(x)\lambda^n,$$

avec $\Psi_n(x)$ définis par les formules

$$\begin{aligned}
\Psi_1(x) &= \int_a^b K(x,t) f(t)dt, \\
\Psi_2(x) &= \int_a^b K(x,t)\Psi_1(t)dt = \int_a^b K_2(x,t)\ f(t)dt, \\
\Psi_3(x) &= \int_a^b K(x,t)\Psi_2(t)dt = \int_a^b K_3(x,t)\ f(t)dt.
\end{aligned}$$

et ainsi de suite.

Ici

$$\begin{aligned}
K_2(x,t) &= \int_a^b K(x,z)\ K_1(z,t)dz, \\
K_3(x,t) &= \int_a^b K(x,z)\ K_2(z,t)dz,
\end{aligned}$$

et en générale :

$$K_n(x,t) = \int_a^b K(x,z)\ K_{n_{-1}}(z,t)dz, \tag{2.21}$$

$n = 2, 3, ...,$ et $K_1(x,t) \equiv K(x,t)$. Les fonctions $K_n(x,t)$ définies par les formules (2.21) s'appellent noyaux itérés. Elles vérifient la relation :

$$K_n(x,t) = \int_a^b K_m(x,s) K_{n_{-m}}(s,t)\ ds, \tag{2.22}$$

où m est un entier naturel quelconque inférieur à n.

La résolvante de l'équation intégrale (2.20) est définie en fonction des noyaux itérés de la façon suivante :

$$R(x,t,\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n(x,t)\lambda^{n-1}, \tag{2.23}$$

le second membre est la série de Neumann du noyau $K(x,t)$. Cette série converge pour

$$|\lambda| < \frac{1}{B}, \tag{2.24}$$

avec

$$B = \sqrt{\int_a^b \int_a^b K^2(x,t)dxdt}.$$

La solution de l'équation de Fredholm de seconde espèce (2.20) s'exprime par :

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x,t,\lambda)\ f(t)\ dt. \tag{2.25}$$

La borne (2.24) est essentielle pour la convergence de la série (2.23). Mais l'équation (2.20) peut également admettre une solution pour $|\lambda| > \dfrac{1}{B}$.

Remarque 2.2

Si les noyaux $M^{(1)}(x,t),\ M^{(2)}(x,t), ...,\ M^{(n)}(x,t)$ sont deux à deux orthogonaux, la résolvante relative à leur somme

$$K(x,t) = \sum_{m=1}^{n} M^{(m)}(x,t),$$

est égale à la somme des résolvantes relatives à chacun des termes.

Appelons n-ième trace du noyau $K(x,t)$ la quantité

$$A_n = \int_a^b K_n(x,t)dx (n = 1, 2, ...),$$

où $K_n(x,t)$ est le n-ième itéré de $K(x,t)$.

Le déterminant de Fredholm $D(\lambda)$ vérifie alors la formule suivante :

$$\frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)} = -\sum_{n=1}^{\infty} A_n \lambda^{n-1}. \tag{2.26}$$

Le rayon de convergence de la série entière (2.26) est égal au plus petit module des nombres caractéristiques.

2.6 Résolvante de l'équation intégrale de Volterra. Résolution des équations intégrales à l'aide des résolvantes

Soit l'équation intégrale de Volterra de seconde espèce

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)\phi(t)dt, \tag{2.27}$$

où $K(x,t)$ est une fonction continue pour $0 \leq x \leq a, 0 \leq t \leq x$, et $f(x)$ est continue lorsque $0 \leq x \leq a$.

Cherchons la solution de cette équation sous la forme d'une série entière illimitée suivant les puissances de λ :

$$\phi(x) = \phi_0(x) + \lambda\ \phi_1(x) + \lambda^2\ \phi_2(x) + ... + \lambda^n\ \phi_n(x) + ... \tag{2.28}$$

Portons formellement cette série dans (2.27), il vient

$$\phi_0(x)+\lambda^1\phi_1(x)+...+\lambda^n\phi_n(x)+... = f(x)+\lambda \int_0^x K(x,t)\left[\phi_0(x) + \lambda\phi_1(x) + ... + \lambda^n\phi_n(x) + ...\right] dt.$$

En procédant par identification nous obtenons

$$
\begin{aligned}
\phi_0(x) &= f(x), \\
\phi_1(x) &= \int_0^x K(x,t)\phi_0(t)dt = \int_0^x K(x,t)f(t)dt, \\
\phi_2(x) &= \int_0^x K(x,t)\phi_1(t)dt, \\
&= \int_0^x K(x,t)\int_0^t K(t,t_1)f(t_1)dt_1dt.
\end{aligned} \tag{2.29}
$$

Moyennant les relations (2.29) on peut définir successivement les fonctions $\phi_n(x)$.On montre que, sous les hypothèses faites sur $f(x)$ et $K(x,t)$, la série (2.28) ainsi obtenue converge uniformément en x et λ pour tout λ et $x \in [0.a]$ et que sa somme est la solution de l'équation (2.27).

Ensuite, (2.29) entraîne

$$
\begin{aligned}
\phi_1(x) &= \int_0^x K(x,t)\ f(t)dt, \\
\phi_2(x) &= \int_0^x K(x,t)\left[\int_0^t K(t,t_1)f(t_1)dt_1\right]\ dt = \int_0^x\ f(t_1)\ dt_1\int_{t_1}^x K(x,t)\ K(t,t_1)\ dt \\
&= \int_0^x K_2(x,t_1)\ f(t_1)\ dt_1,
\end{aligned}
$$

où

$$
K_2(x,t_1) = \int_{t_1}^x K(x,t)\ K(t,t_1)dt.
$$

On établit de façon analogue qu'en général

$$\phi_n(x) = \int_0^x K_n(x,t)\ f(t)\ dt \quad (n = 1, 2...). \tag{2.30}$$

Les fonctions $K_n(x,t)$ s'appellent noyaux itérés et sont définies, on le montre aisément, par les formules de récurrence

$$K_1(x,t) = K(x,t),$$

$$K_{n+1}(x,t) = \int_t^x K(x,z)\ K_n(z,t)\ dz \quad (n = 1, 2, ...)\ . \tag{2.31}$$

Compte tenu de (2.30) et (2.31) l'égalité (2.28) peut s'écrire

$$\phi(x) = f(x) + \sum_{v=1}^{\infty} \lambda^v \int_0^x K_v(x,t)\ f(t)dt.$$

Une fonction $R(x,t,\lambda)$ définie par la série

$$R(x,t,\lambda) = \sum_{v=0}^{\infty} \lambda^v K_{v+1}(x,t). \tag{2.32}$$

est la résolvante (ou le noyau résolvant) de l'équations intégrale (2.27).

Si le noyau $K(x,t)$ est continu, la série (2.32) converge absolument et uniformément.

Les noyaux itérés et la résolvante sont indépendants de la limite inférieure de l'intégrale dans l'équation intégrale.

La résolvante $R(x,t,\lambda)$ satisfait à l'équations fonctionnelle suivante :

$$R(x,t,\lambda) = K(x,t) + \lambda \int_t^x R(s,t,\lambda)\, K(x,s) ds.$$

La solution de l'équation intégrale (2.27) en fonction de la résolvante s'écrit comme suit :

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \int_{0}^{x} R(x,t,\lambda) f(t)dt. \tag{2.33}$$

Remarque 2.3

L'unicité de la solution des équations intégrales de Volterra de seconde espèce

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \int_{0}^{x} K(x,t)\phi(t)dt, \tag{2.34}$$

est assurée dans les hypothèses sensiblement plus larges sur la fonction $f(x)$ et les noyaux $K(x,t)$ que leur continuité.

Théorème 2.4

L'équation intégrale de Volterra de seconde espèce (2.34), *dont les noyaux* $K(x,t)$ *et la fonction* $f(x)$ *appartiennent respectivement à* $L_2(\Omega_0)$ *et à* $L_2(0,a)$, *admet une solution et une seule dans* $L_2(0,a)$.

Cette solution est donnée par la formule

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \int_{0}^{x} R(x,t,\lambda) \; f(t)dt, \tag{2.35}$$

où la résolvante $R(x,t,\lambda)$ *est définie par la série*

$$R(x,t,\lambda) = \sum_{v=0}^{\infty} \lambda^{v} K_{v+1}(x,t).$$

de noyaux itérés qui converge presque par tout.

2.7 Liaison entre les équations différentielles linéaires et les équations intégrales de Volterra

- La résolution de l'équation différentielle linéaire :

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + ... + a_n(x) y = F(x), \tag{2.36}$$

à coefficients continus $a_i(x), (i = 1, 2, .., n)$ avec les conditions initiales :

$$y(0) = C_0,\ y'(0) = C_{1,...,}y^{(n-1)}(0) = C_{n-1}. \tag{2.37}$$

Peut être ramenée à la résolution d'une équation intégrale de Volterra de seconde espèce.

Illustrons notre affirmation sur l'exemple de l'équation différentielle du second ordre

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_2(x) y = F(x), \tag{2.38}$$

$$y(0) = C_0\ ,\ y'(0) = C_1. \tag{2.39}$$

Posons

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \phi(x). \tag{2.40}$$

D'où, vu les conditions initiales (2.39), on obtient successivement

$$\frac{dy}{dx} = \int_0^x \phi(t)\ dt + C_1\ ,\ y = \int_0^x (x-t)\ \phi(t)\ dt + C_1\ x + C_0\ . \tag{2.41}$$

Nous avons utilisé la formule

$$\underbrace{\int\limits_{x_0}^{x} dx \int\limits_{x_0}^{x} dx ... \int\limits_{x_0}^{x}}_{n} f\ (x)\ dx = \frac{1}{(n-1)!} \int\limits_{x_0}^{x} (x-z)^{n-1}\ f\ (z) dz.$$

Compte tenu de (2.40) et (2.41) mettons l'équation différentielle (2.38) sous la forme

$$\phi(x) + \int\limits_0^x a_1(x)\,\phi(t)\,dt + C_1\ a_1(x) + \int\limits_0^x a_2(x)\,(x-t)\,\phi(t)\ dt + C_1\ x a_2(x) + C_0\ a_2(x) = F(x),$$

où

$$\phi(x) + \int\limits_0^x \left[a_1(x) + a_2(x)(x-t)\right]\phi(t)\,dt = F(x) - C_1\ a_1(x) - C\ _1 x a_2(x) - C_0\ a_2(x)\,. \tag{2.42}$$

Posant :

$$K(x,t) = -\left[a_1(x) + a_2(x)(x-t)\right], \tag{2.43}$$

$$f\ (x) = F(x) - C_1\ a_1(x) - C_1\ x\ a_2(x) - C_0\ a_2(x)\,. \tag{2.44}$$

Nous ramenons l'équation (2.42) à la forme suivante :

$$\phi(x) = \int\limits_0^x K(x,t)\phi(t)\,dt + \ f(x), \tag{2.45}$$

i.e. nous obtenons une équation intégrale de Volterra de seconde espèce.

Remarque 2.4

L'unicité de la solution de (2.45) résulte de l'existence et de L'unicité de la solution du problème de Cauchy (2.38), (2.39) pour l'équation différentielle linéaire à coefficients continus dans un voisinage du point $x = 0$.

Théorème 2.5 (Théorème de Riesz)

Soit un opérateur compact $A : E \rightarrow E$ sur E un espace normé. Alors l'opérateur $L = I - A$, (l'opérateur étudié dans le cadre des équations intégrales) a les propriétés suivantes :

- $Ker(L)$ est de dimension finie.

- $Im(L)$ est fermé, et de co-dimension finie.

- Il existe un unique $r \in \mathbb{N}$ appelé nombre de Riesz de l'opérateur A tel que :

$$\{0\} = Ker(L^0) \subset Ker(L^1) \subset ... \subset Ker(L^r) = Ker(L^{r+1}) = ...$$

$$E = Im(L^0) \supset Im(L^1) \supset ... \supset Im(L^r) = Im(L^{r+1}) = ...$$

Et on a la somme directe

$$E = Ker(L^r) \oplus Im(L^r).$$

De plus, on a l'alternative de Fredholm :

$$Im(L) = Ker(L^*)^{\perp},$$

où L^* est l'opérateur adjoint de L.

Théorème2.6 (Alternative de Fredholm)

On considère les équations intégrales homogènes duales, l'une de l'autres, issues d'un noyau $K : [a,b]^2 \longrightarrow R$, qui sont donc définies par :

trouver $\phi \in \; C\; [a,b]$ telque

$$\phi(x) - \int_a^b K(x,y)\phi(y)dy = 0. \tag{2.46}$$

trouver $\Psi \in C[a,b]$ tel que

$$\Psi(x) - \int_a^b K(y,x)\Psi(y)dy = 0. \tag{2.47}$$

On considère pour $f \in C[a,b]$ et $g \in C[a,b]$ les équations intégrales avec seconds membres trouver $\phi \in C[a,b]$ tel que

$$\phi(x) - \int_a^b K(x,y)\phi(y)dy = f(x). \tag{2.48}$$

trouver $\Psi \in C[a,b]$ tel que

$$\Psi(x) - \int_a^b K(y,x)\Psi(y)dy = g(x). \tag{2.49}$$

Alors on a l'alternative :

-Ou bien les équations (2.46) et (2.47) n'ont que les solutions triviales $\phi = 0$ et $\Psi = 0$, et dans ces cas les équations (2.48) et (2.49) admettent une unique solution

$\phi \in C[a,b]$ et $\Psi \in C[a,b]$ pour chaque $f \in C[a,b]$ et $g \in C[a,b]$.

-Ou bien les équations (2.46) et (2.47) ont le même nombre fini m de solutions linéairement indépendantes, et dans ce cas, les équations (2.48) et (2.49) sont résolubles si et seulement si pour toute solution ϕ de (2.46) et toute solution Ψ de (2.47) on a

$$\int_a^b f(x)\Psi(x)\,dx = \int_a^b g(x)\phi(x)dx = 0. \tag{2.50}$$

Dans ces conditions, la solution générale de (2.48) s'écrit sous la forme :

$$\phi = \tilde{\phi} + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i\,\phi_i, \tag{2.51}$$

où $\tilde{\phi}$ est une solution particulière de (2.48) et les $(\phi_i)_{0\leq\ i\ \leq m}$ forme une famille libre de solution de (2.46).

Définition 2.3

L'équation intégrale homogène de Fredholm de seconde espèce

$$\int_a^b K(x,t)\phi(t)dt = u\phi(x), u = \frac{1}{\lambda}, u \in R^*, \tag{2.52}$$

admet toujours la solution triviale nulle. Un nombre μ *telle que cette équation admette des solutions non nulles* $\phi(x) \neq 0$, *s'appelle nombre ou valeur caractéristique et chaque solution non nulle de l'équation* (2.52), *est une fonction propre correspondant au nombre caractéristique* μ *: Soit l'équation*

$$\phi(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)\phi(t)dt, \lambda \in R^*.$$

Alors les nombres caractéristiques de cette équation sont $\left(\frac{1}{\lambda}\right)_{\lambda\in R^*}$.

Théorème 2.7 (Théorème de Picard)

Soit l'équation intégrale de Fredholm de première espèce

$$\int_a^b K(x,t)\phi(t)dt = f(x). \tag{2.53}$$

L'équation (2.53), *admet une seule solution dans la classe* $L^2(]a,b[)$ *si*

1. Le noyau $K(x;t)$ *est réel symétrique*

2. La série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \, f_k^2,$$

Alors l'opérateur $I - A$ est inversible et son inverse $(I - A)^{-1}$ est donné par :

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k. \tag{3.11}$$

Et de plus :

$$\|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - q}. \tag{3.12}$$

Preuve :

Dans les conditions du théorème, c'est-à-dire $\|A\| < 1$, la série $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ est convergente, il suffit d'appliquer la relation

$$\|A^k\| \leq \|A\|^k, k = 0, 1, ...$$

Désignons par V la somme de cette série. On a

$$V(I-A) = (I+A+...+A^k+...)(I-A) = (I+A+...+A^k+...)-(A+A^2+...+A^{k+1}) = I.$$

et de façon analogue

$$(I - A)V = I,$$

donc

$$V = (I - A)^{-1}.$$

$$\|V\| \leq \|I\| + \|A\| + ... + \|A\|^{k+1} + ... \leq 1 + q + ... + q^k + ... = \frac{1}{1 - q}, \; c.q.f.d$$

Grâce à ce théorème, sous la condition $||A|| < 1$, l'unique solution ϕ^* de l'équation (3.10) est de la forme

$$\phi^* = (I - A)^{-1}(f) = f + A(f) + A^2(f) + ... + A^k(f) + ... \tag{3.13}$$

Cette série s'appelle série de Neumann.

D'une manière plus simple, on investit le caractère de convergence de cette série, on arrive à approcher la solution ϕ^*par ($\phi_k = M_k\ f$) où l'opérateur M_k est défini par :

$$M_k = \sum_{i=0}^{k} A^i.$$

Montrons que les opérateurs A^i sont intégraux au même titre que A. En effet,

$$u = A^2(\phi).$$

signifie que $u = A(w)$, où $w = A(\phi)$, c'est-à-dire

$$u(x) = \int_a^b K(x,y)w(y)dy,\ \ w(y) = \int_a^b K(y,t)\phi(t)dt,$$

d'où

$$\begin{aligned}
u(x) &= \int_a^b K(x,y)\left[\int_a^b K(y,t)\phi(t)dt\right]dy, \\
&= \int_a^b \left[\int_a^b K(x,y)K(y,t)dy\right]\phi(t)\ dt, \\
&= \int_a^b K_2(x,t)\phi(t)dt, \left(K_2(x,t) = \int_a^b K(x,y)K(y,t)dy\right).
\end{aligned}$$

On peut montrer par récurrence que $u = A^i(\phi)$ signifie que

$$u(x) = \int_a^b K_i(x,t)\ \phi(t)\ dt \quad (i = 2, 3, ...),$$

où $K_i(x,t)$ sont déterminer à partir de la relation récurentielle

$$K_i(x,t) = \int_a^b K_{i-1}(x,y)\ K(y,t)dy \quad (i = 2,3,...), \tag{3.14}$$

dont le développement nous donne

$$K_i(x,t) = \int_a^b ... \int_a^b K(x,y_1)K(y_1,y_2)...K(y_{i-1},t)dy_1dy_2...dy_{i-1}. \tag{3.15}$$

Les fonctions $K_i(x,t)$ sont dites noyaux itérés.

La série de Neumann peut être maintenant écrite sous la forme détaillée :

$$\phi^*(x) = f(x) + \int_a^b K(x,y)f(y)dy + \int_a^b K_2(x,y)\ f(y)dy + ... + \int_a^b K_i(x,y)\ f(y)dy + ...$$

$$= f(x) + \int_a^b \left(\sum_{i=0}^{\infty} K_i(x,y)\right) f(y)dy. \tag{3.16}$$

On à alors l'expression de ϕ_k suivante :

$$\phi_k(x) = f(x) + \int_a^b m_k(x,y)f(y)dy,$$

où

$$m_k(x,y) = \sum_{i=0}^{k} K_i(x,y). \tag{3.17}$$

3.2.2 Méthode des approximations successives

La méthode des approximations successives est l'une des méthodes les plus usuelles pour la résolution de l'équation (3.10). Son principe est le suivant : on donne un élément quelconque $\phi_0 \in C[a,b]$ appelé approximation initiale et on construit à partir de cet élément la suite (ϕ_n) des solutions approchées :

$$\phi_{n+1} = f + A(\phi_n) \quad (n = 0, 1, ...). \tag{3.18}$$

Si l'on obtient une suite convergente dont la limite est la solution de l'équation considérée, on dit que le processus des approximations successives pour l'équation (3.10), d'élément initial ϕ_0 est convergent (vers la solution de l'équation (3.10)). Vu que l'opérateur intégral A est linéaire continu, le seul fait de la convergence de la suite (ϕ_n) implique que

$$\phi^* = \lim_{n\to\infty} \phi_n,$$

est solution de l'équation (3.10). Pour s'en assurer il suffit de passer à la limite pour $n \to \infty$ dans (3.18)

La convergence d'approximations successives pour l'équation (3.10) est aussi rattachée à celle de la série

$$I + A + ...A^n + ..., \tag{3.19}$$

On a le théorème suivant

Théorème 3.3 :

Si la série (3.19) est convergente, le processus des approximations successives pour l'équation (3.10) converge vers l'unique solution ϕ^* de l'équation (3.10) quelque soit l'approximation initial ϕ_0. De plus

$$\|\phi^* - \phi_n\| \leq \left\|(I - A)^{-1}\right\| \|A^n\| \|\phi_1 - \phi_0\| \ (n = 1, 2, ...). \tag{3.20}$$

En particulier, si l'on ce place dans les conditions du théorème de Banach, cette majoration (de la vitesse de convergence) peut être remplacée par

$$\|\phi^* - \phi_n\| \leq \frac{q^n}{1 - q} \|\phi_1 - \phi_0\| \ (n = 1, 2, ...). \tag{3.21}$$

Preuve

En applique successivement la formule (3.18) on trouve

$$\phi_n = f + A(f) + ... + A^{n-1}(f) + A^n(\phi_0), \ (n = 1, 2, ...), \tag{3.22}$$

d'où il suit que si la série (3.19) est convergente, alors il existe

$$\phi^* = \lim_{n\to\infty} \phi_n = \sum_{i=1}^{\infty} A^i(f) = (I - A)^{-1}(f), \tag{3.23}$$

Puisque $A^n(\phi_0) \to 0$. La première partie du théorème est démontrée, puisque ϕ^* est manifestement solution de l'équation (3.10).

Pour obtenir la majoration (3.20), substituant ϕ^*à ϕ_0 dans (3.22). Alors il est clair de la formule (3.18) que $\phi_n = \phi^*$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Donc nous sommes conduits à la relation

$$\phi^* = f + A(f) + ... + A^{n-1}(f) + A^n(\phi^*)..., (n = 1, 2, ...).$$

Si l'on soustrait l'égalité (3.22) dans cette relation et l'on passe aux normes on obtient

$$\|\phi^* - \phi_n\| \leq \|A^n\| \, \|\phi^* - \phi_0\|, ...(n = 1, 2, ...). \tag{3.24}$$

Posons

$$\tilde{\phi} = \phi^* - \phi_0.$$

Vu que ϕ^* est solution de l'équation (3.10) et par suite

$$\phi^* - A(\phi^*) = f,$$

On aura

$$(I-A)(\tilde{\phi}) = \tilde{\phi} - A(\tilde{\phi}) = \phi^* - A(\phi^*) - \phi_0 + A(\phi_0) = f + A(\phi_0) - \phi_0 = \phi_1 - \phi_0,$$

d'où

$$\tilde{\phi} = (I-A)^{-1}(\phi_1 - \phi_0). \tag{3.25}$$

En utilisant ceci dans (3.24) on obtient la majoration annoncée.

3.2.3 Méthode de Nyström

C'est l'une des méthodes les plus efficaces de résolution numérique des équations intégrales consiste à remplacer l'équation intégrale par un système algébrique d'équations linéaires moyennant une formule de quadrature. Soit donnée l'équation

$$\phi(x) - \int_a^b K(x,y)\phi(y)dy = f(x). \tag{3.26}$$

On souhaite approximer l'opérateur intégral A défini par :

$$\forall x \in [a,b]\,,\ (A\phi)(x) = \int_a^b K(x,y)\phi(y)dy. \tag{3.27}$$

Pour ce faire, on se donne des règles de quadrature (Q_n) pour calculer l'intégrale à noyau via des nœuds $(y_i^{(n)})_{1\leq\ i\ \leq n}$, ainsi que des poids ($w_i^{(n)})_{1\leq\ i\ \leq n}$, d'où l'introduction d'un nouvel opérateur $A_n$défini par :

$$\forall x \in [a,b]\,,\ (A_n\phi)(x) = \sum_{i=1}^{n} w_i^{(n)} K(x, y_i^{(n)})\phi(y_i^{(n)}). \tag{3.28}$$

Alors, on va approcher la solution ϕ^*de l'équation $\phi - A\phi = f$ par la solution ϕ_n du problème $\phi_n - A_n\phi_n = f$ .c'est à dire trouver ϕ_n tel que

$$\phi_n(x) - \sum_{i=1}^{n} w_i^{(n)} \; K(x, y_i^{(n)}) \; \phi_i(y_i^{(n)}) = f(x). \tag{3.29}$$

Ceci nous amène à une seconde discrétisation, mais cette fois-ci sur les x, donc pour $x = (\; y_j^{(n)})_{1\leq \; j \; \leq n}$, et avec les notations suivantes :

$$\phi(\; y_j^{(n)}) = \phi_j, \quad j = 1, 2, ...n,$$

$$f(\; y_j^{(n)}) = f_j, \quad j = 1, 2, ...n,$$

$$K(\; y_j^{(n)}, y_i^{(n)}) = K_{ji}, \quad i, j = 1, 2, ...n,$$

on obtient, le système algébrique de n équations linéaires :

$$\phi_j - \sum_{i=1}^{n} w_i K_{ji} \phi_i = \; f_j, \quad j = 1, 2, ...n, \tag{3.30}$$

où $K_{ji}, w_i, \; f_j$ considérer comme quantités connues et ϕ_j comme inconnues. La matrice associée à ce système est de la forme

$$\begin{bmatrix} 1 - w_1 K_{11} & -w_2 K_{21}... & -w_n K_{n1} \\ -w_1 K_{12} & 1 - w_2 K_{22}... & -w_n K_{n2} \\ -w_1 K_{1n} & -w_2 K_{2n}... & 1 - w_n K_{nn} \end{bmatrix}. \tag{3.31}$$

Remarque 3.1

Avec la méthode de Nyström et dans le cas d'une équation intégrale de Volterra de seconde espèce, on obtient une matrice triangulaire inférieure, c'est le cas qu'on établira dans la suite.

Théorème 3.4 :

On suppose que les règles de quadrature $(Q_n)_{n\in N}$ de la méthode de Nyström sont convergentes i.e.

$$\forall f \in C[a,b], Q_n(f) \underset{n\to\infty}{\to} \int_a^b f.$$

Alors la méthode de Nyström est convergente point à point, i.e.

$$\forall \phi \in C[a,b], \ A_n\phi \underset{n\to\infty}{\to} A\phi,$$

mais ne converge pas nécessairement en norme.

Application de la méthode

Soit l'équation intégrale non linéaire de Fredholm de $2^{éme}$ espèce sous forme de Uryshon

$$y(x) - \int_a^b K(x,t,y(t))dt = f(x), \quad a \le x \le b. \tag{3.32}$$

En posant $x = x_i$, $(i = 1, ..., n)$ on obtient

$$y(x_i) - \int_a^b K(x_i,t,y(t))dt = f(x_i), \quad a \le x \le b,$$

et par la formule de quadrature on obtient le système d'équations non linéaires

$$y_i - \sum_{j=1}^{n} A_j K_{ij}(y_j) = f_i, \quad i = 1, ..., n,$$

et on déduit la solution approximative de l'équation (3.32), donnée par

$$\tilde{y}(x) = f(x) + \sum_{j=1}^{n} A_j K(x, x_j, y_j).$$

Pour le cas linéaire

$$K(x,t,y(t)) = \lambda \ K(x,t)y(t),$$

on aura comme cas particulier

$$y_i - \sum_{j=1}^{n} A_j K_{ij} y_j = f_i, \quad i = 1, ..., n,$$

$$\tilde{y}(x) = f(x) + \sum_{j=1}^{n} A_j K(x, x_j).$$

Chapitre 4

Résolution numérique des équations intégrales de second type

4.1 Equations intégrales de Volterra

4.1.1 Résolution des EI de Volterra de 2ème espèce

Soit l'équation linéaire de Volterra de seconde espèce

$$y(x) - \int_a^x K(x,t).y(t)dt = f(x), \ a \leq x \leq b,$$

alors en prenant $a \leq x \leq b, \ y(a) = f(a)$, tel que

$$x_i = a + h(i-1), \ i = 1, ..., n,$$

et pour $x = x_i$; on obtient

$$y(x_i) - \int_a^{x_i} K(x_i,t).y(t) \, dt = f(x_i), \ i = 1, ..., n.$$

Par la formule de quadrature, on obtient

$$y(x_i) - \sum_{j=1}^{n} A_{ij} K(x_i, x_j).y(x_j) = f_i, \ i = 2, ..., n,$$

où $K_{ij} = K(x_i, x_j)$, $f_i = f(x_i)$, y_i sont les valeurs approximatives de la fonction inconnue $y(x)$ aux nœuds x_i ; et on obtient donc sous la condition

$$1 - A_{ii} K_i \neq 0$$

$$y_1 = f_1, \quad y_i = \frac{f_i + \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij} K_{ij} y_j}{1 - A_{ii} K_{ii}}, \quad i = 2, ..., n,$$

Remarque 4.1

Pour l'équation intégrale linéaire de Volterra de première espèce

$$\int_a^x K(x,t).y(t)dt = f(x), \ f(a) = 0, \quad a \leq x \leq b,$$

on a par la règle de Leibniz, en dérivant

$$K(x,x).y(x) - \int_a^x K'_x(x,t).y(t)dt = f'_x(x),$$

qui coïncide avec l'équation de Volterra de deuxième espèce.

4.1.2 Méthode des trapèzes

Rappelons que l'équation intégrale de Volterra, est donnée par

$$\phi(x) = g(x) + \int_a^x K(x,t).\phi(t)dt, \ a \leq x \leq b. \tag{4.1}$$

Notre objectif est d'approximer la solution ϕ^* de cette équation sur un système de nœuds $x_0 = a < x_1 < ... < x_j < ...x_n = b$, supposons que ce système est équidistant, i.e. $x_j = a + jh,\ j = 0, 1, 2, ..., n$, où h est le pas de la discrétisation voulue, pour se faire en exigeant que l'égalité (4.1) ait lieu uniquement en ces nœuds, donc l'équation (4.1) devient :

$$\phi(x_j) = g(x_j) + \int_a^{x_j} K(x_j, t).\phi(t)dt, \tag{4.2}$$

La méthode des trapèzes, est usuelle dans le but d'approcher numériquement la quantité qui se présente sous forme intégrale dans cette équation, ceci nous amène à une seconde discrétisation par rapport à la variable d'intégration, t. Si en pose $t = (x_i)_{0\leq\ i\leq\ j}$, il vient :

$$\phi(x_j) = g(x_j) + \left(\frac{h}{2}K(x_j, t_0).\phi(t_0) + h\sum_{i=1}^{j-1} K(x_j, t_i)\phi(t_i) + \frac{h}{2}K(x_j, t_j)\phi(t_j)\right), \tag{4.3}$$

avec les notations ;

$$\phi_j = \phi(x_j), g_j = g(x_j),$$

$$K_{ji} = K(x_j, t_i),$$

cette formule s'écrit :

$$\phi_j = g_j + \left(\frac{h}{2}K_{j0}.\phi_0 + h\sum_{i=1}^{j-1} K_{ji}\phi_i + \frac{h}{2}K_{jj}\phi_j\right).$$

En général

$$\phi_j\left(1 - \frac{h}{2}K_{jj}\right) = g_j + \left(\frac{h}{2}K_{j0}.\phi_0 + h\sum_{i=1}^{j-1} K_{ji}\phi_i\right) \qquad j = 1, 2, ..., n. \tag{4.4}$$

Il résulte immédiatement de l'équation (4.2), pour $j = 0$ la valeur de $\phi(a) = g(a)$, d'où :

$$\phi_0 = g_0. \tag{4.5}$$

Cette discrétisation nous à fournie alors un système d'équations algébriques linéaires, de la forme :

$$A\phi = b,$$

où A est une matrice triangulaire inférieure i.e.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0... & 0 \\ -\frac{h}{2}\, K_{10} & 1-\frac{h}{2}\, K_{11} & ... \\ .... & .... & 0 \\ -\frac{h}{2}\, K_{1n} & ... & 1-\frac{h}{2}\, K_{nn} \end{bmatrix}.$$

.

$$\phi = (\phi_0, \phi_1, ..., \phi_n)^t, b = (g_0, g_1, ..., g_n)^t.$$

S'agissant de la solubilité du système (4.4), un rôle essentiel revient au déterminant de la matrice A ; étudient alors le comportement de ce dernier. Cette matrice, elle a pour déterminant

$$\triangle = \left(1-\frac{h}{2}K_{11}\right)\left(1-\frac{h}{2}\, K_{22}\right)...\left(1-\frac{h}{2}K_{nn}\right),$$

soit $M = \underset{1\leq\, j\leq n}{max}|K_{jj}|$. Il en résulte évidement

$$\triangle \geq \left(1-\frac{h}{2}M\right)^n = \left(1-\frac{b-a}{2n}M\right)^n = \left(1-\frac{h}{2}M\right)^{\frac{b-a}{h}}. \tag{4.6}$$

Le second membre de cette inégalité est non nul pour tout h suffisamment petit, il en croit avec la diminution de h. Ainsi, $(1-\frac{h}{2}M)$ est pour h deux fois moindre :

$$\left(1-\frac{h}{4}M\right)^2 = 1-\frac{h}{2}M+\frac{h^2}{16}M^2.$$

Lorsque $h \to 0$, le seconde membre de (4.6) tend vers $e^{-(b-a)\frac{M}{2}}$. Algébriquement dit, le déterminant du système (4.4) est non nul et ne tend pas vers 0 avec h, ce qui preuve puissances de λ :

$$D(x,t,\lambda) = K(x,t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} B_n(x,t)\, \lambda^n, \qquad (4.9)$$

et

$$D(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} C_n \lambda^n, \qquad (4.10)$$

avec les coefficients ainsi définie :

$$B_n(x,t) = \underbrace{\int_a^b \ldots \int_a^b}_{n} \begin{bmatrix} K(x,t) & K(x,t_1)\ldots & K(x,t_n) \\ K(t_1,t) & K(t_1,t_1)\ldots & K(t_1,t_n) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ K(t_n,t) & K(t_n,t_1)\ldots & K(t_n,t_n) \end{bmatrix} dt_1\ldots dt_n,$$

et

$$B_0(x,t) = K(x,t).$$

$$C_n = \underbrace{\int_a^b \ldots \int_a^b}_{n} \begin{bmatrix} K(t_1,t_1) & K(t_1,t_2)\ldots & K(t_1,t_n) \\ K(t_2,t_1) & K(t_2,t_2)\ldots & K(t_2,t_n) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ K(t_n,t_1) & K(t_n,t_2)\ldots & K(t_n,t_n) \end{bmatrix} dt_1\ldots dt_n.$$

Les fonction $D(\lambda)$ et $D(x,t,\lambda)$ sont respectivement le déterminant de Fredholm et le mineur du déterminant de Fredholm. Si le noyau $K(x,t)$ et borné ou si l'intégrale

$$\int_a^b \int_a^b K^2(x,t)dxdt,$$

est finie. Les séries (4.9) et (4.10) convergent quel que soit λ et sont donc des fonctions analytiques entières de λ. La résolvante

$$R(x,t,\lambda) = \frac{D(x,t,\lambda)}{D(\lambda)},$$

est une fonction analytique deλ, sauf les λ qui sont zéros de $D(\lambda)$. Ces derniers sont pôles de la résolvante $R(x,t,\lambda)$.

Exemple 4.1

Considérons l'équation intégrale

$$\phi(x) - \lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin t\, .\phi(t)\; dt = f(x).$$

On a alors

$$B_0(x,t) = K(x,t) = x\sin t.$$

$$B_1(x,t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \begin{vmatrix} x\sin t & x\sin t_1 \\ t_1 \sin t & t_1 \sin t_1 \end{vmatrix} dt_1 = 0.$$

$$B_2(x,t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \begin{vmatrix} x\sin t & x\sin t_1 & x\sin t_2 \\ t_1 \sin t & t_1 \sin t_1 & t_1 \sin t_2 \\ t_2 \sin t & t_2 \sin t_1 & t_2 \sin t_2 \end{vmatrix} dt_1 dt_2 = 0.$$

On peut prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$B_n(x,t) = 0,$$

On a aussi

$$C_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} K(t_1,t_1)\; dt_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t_1 \sin t_1\; dt_1 = 1,$$

$$C_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \begin{vmatrix} t_1 \sin t_1 & t_1 \sin t_2 \\ t_2 \sin t_1 & t_2 \sin t_2 \end{vmatrix} dt_1 dt_2 = 0.$$

On peut prouver que pour tout $n \geq 2$, on a

$$c_n(x,t) = 0.$$

$$D(x,t,\lambda) = K(x,t) = x\sin t, D(\lambda) = 1 - \lambda.$$

$$R(x,y,\lambda) = \frac{D(x,t,\lambda)}{D(\lambda)} = \frac{x\sin t}{1-\lambda},$$

et la solution de cette équation s'écrit sous la forme

$$\phi(x) = f(x) + \frac{\lambda}{1-\lambda}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin t f(t)dt.$$

Bibliographie

[1] **L. Kantorovitch et G. Akilov**. Analyse fonctionnelle, T1 & T2. Édition Mir, 1981.

[2] **Haim Brezis**, Analyse fonctionnelle. Dunod, 1983.

[3] **Mohamed. Hazi**, Introduction aux espaces normés. O.P.U, 1994.

[4] **Erhan Cinlar et Robert J. Vanderbei**, Mathematical methods of engineering analysis, pub 2000.

[5] **David Keffer, Advanced** analytical techniques for the solution of single and multidimontional integral equations.

[6] **M.Kasnov, A.Kissélev, G.Makarenko,** "Equations Intégrales", Moscou 1977.

[7] **H.Brezis**. Analyse fonctionnelle. Théorie et application, 1992.

[8] **K.Krasnov, A.Kisselev, G.Makarenko**, Equations intégrales, Problèmes et exercises, Edition Mir. Moscou. 1972

[9] **A.Rahmoune**, Résolution numérique des équations intégrales. Thèse de Magister. Université de M'sila (2001 – 2002).

[10] **Ram.P.Kanwal.** Linear integral equations. Theory and technique . Pensylvania state university 1971.