République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 – Guelma

Faculté de Mathématiques et de l'Informatique et Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire de Fin d'Etude
Master Académique en Mathématiques
Option : EDP

THEME

Equations de continuité pour les trois états de l'eau dans l'atmosphère

Présenté par :
Kaidouchi Wahida

Dirigé par :	**Dr. M.Z.Aissaoui**	**MCA**	**Univ. Guelma**
Jury :			
Examinateur 1 :	**Dr. H. Fujita Yashima**	**Prof**	**Univ-Guelma**
Examinateur 2 :	**Dr. L.Zenkoufi**	**MCA**	**Univ-Guelma**

Session Juin 2012

Equations de continuité pour les trois états de l'eau dans l'atmosphère

Kaidouchi Wahida
Mémoire de master en mathématiques
Université de Guelma

2 juin 2012

❄ *Remerciment* ❄

Au nom d'Allah, le tout miséricordieux,

le très miséricordieux

La reconnaissance est la mémoire du cœur

≺ LE GRAND MERCI POUR ALLAH ≻

Avant toute chose, je tiens à exprimer toutes mes reconnaissances au Professeur Hisao Fujita Yashima, de m'avoir propos ce sujet de recherche et d'avoir dirigé mon travail. Je lui témoigne aussi, ma gratitude pour son soutien, sa grande disponibilité et surtout ses conseils et ses encouragements tout au long de mes recherches.

De la même manière, j'adresse mes vifs remerciements à mon encadreur le Docteur Aissaoui Mohamed Zine responsable de notre Master et directeur du laboratoire de Mathématiques appliquées et de modélisation pour le grand honneur qu'il me fait en répondre à mes questions avec gentilles. Ensuite, je souhaite remercier l'ensemble du laboratoire L.M.A.M leur accueil chaleureux et leur aide précieuse ont contribué fortement à l'aboutissement de ce travail.

J'exprime également mes chaleureux remerciement aux membres de jury, pour l'honneur qu'ils m'ont fait d'avoir accepté de faire partie de ce jury.

Enfin, je remercie mes parents pour leur contribution, leur soutien et leur patience durant toutes mes études et qui m'ont toujours aidé et encouragé aux moments opportuns. Et plus particulièrement mes soeurs et mes frères ont contribué l'aboutissement de cette étude. Sans oublier tous mes proches, amis et collegues de qui m'ont toujours soutenue et encouragée au cours de la réalisation de ce mémoire.

☺ ***Merci à tous et à toutes.***

Table des matières

Résumé

Dans ce mémoire on propose l'étude d'un système d'équations de continuité pour l'air sec, la vapeur d'eau, l'eau liquide (gouttelettes) et l'eau solidifiée (cristaux de H_2O) dans l'air conformément au principe de la conservation de la masse en tenant compte de l'éventuelle transition de phase de la vapeur d'eau et de leur déplacement dû au mouvement de l'air et à la force gravitationelle. Il s'agit de l'équation de transport (du type hyperbolique de premier ordre) avec un opérateur intégral. On démontre l'existence et l'unicité de la solution d'un système d'équations légèrement modifié.

Chapitre 1

Introduction

Soucieux de futur de notre planète, le monde s'intéresse aux problèmes du climat et désire en connaitre le mécanisme et les conséquences. Pour répondre à des nombreuses questions qui se posent, la modélisation mathématique des phénomènes atmosphériques et météorologiques est aujourd'hui plus nécés-saire que jamais. Toute fois à cause de la complexité des phénomènes jusqu'à maintenant la majorité des scientifiques se contentait des modèles partiels ou simplifiés.

Comme on le connait bien, l'atmosphère contient l'eau dans l'état gazeux et sa proportion dans l'air est trés variable. A la différence des autres molécules comme N_2, O_2... qui restent toujours en état gazeux dans les conditions or-dinaire de l'atmosphère, H_2O peut avoir trois états-gazeux, liquide et solide. L'eau en état liquide dans l'atmosphère se trouve sous la forme de goutte-lettes ; quand elles sont relativement grandes elles déscendent avec différentes vitesses, ce que nous appelons communément la "pluie". De manière analogue H_2O en état solide dans l'atmosphère se trouve normalement sous la forme de morceaux de cristaux, quand ils sont petits ils sont suspendus dans l'air, et quand ils sont relativement grands, ils tombent comme on le voit dans le phénomène communément appelé "neige". La transition de phase de l'eau réalisée dans l'atmosphère concerne donc les trois états et tous les six types de transition de phase de l'eau, c'est-à-dire de l'état gazeux à l'état liquide (**condensation**), de l'état liquide à l'état gazeux (**évaporation**), de l'état liquide à l' état solide (**solidification**), de l'état solide à l'état liquide (**fusion**), de l'état gazeux à l'état solide (**sublimation inverse**) et de l'état solide à l'état gazeux (**sublimation**), se réalisent dans l'atmosphère.

Comme phénomène physique, la transition de phase de l'eau se réalise selon les conditions physiques bien précises. Pour la définition des conditions pour la transition de phase de l'eau dans l'air joue le rôle fondamental la quantité appelée "pression de la vapeur saturée". D'autre part les processus de transition de phase contribue de manière appréciable à la variation de la température, ce phénomène est connu sous le nom de "chaleur latente". Il faut rappeler que dans l'état d'équilibre, le nombre de molécules provenant du gaz est capturées dans l'unité de temps par le liquide devra essentiellement être égal à celui de molécules qui sortent du liquide dans l'unité de temps. L'état d'équilibre à la température T donnée est déterminé par la quantité de la vapeur presque constante dans l'unité de volume, cette densité de H_2O en état gazeux qui est presque constante à la température T donnée correspend à la pression de la vapeur bien déterminée, qui est la pression de la vapeur saturée.

Dans le cas où la température est inférieure à celle de la fusion, il faut considérer la pression de la vapeur saturée sur la surface de la glace. Mais pour la transition de phase de l'eau dans l'atmosphère, il faut tenir compte que dans l'atmosphère réelle même à la température inférieure à celle de la fusion, on trouve des gouttelettes d'eau liquide, ce qui nécessite la considération de la pression de la vapeur saturée sur la surface de l'eau liquide aux températures inférieures à celle de fusion. La présence de gouttelettes d'eau liquide aux températures inférieures à celle de fusion est expliquée par la nécessité pour la sublimation inverse de la présence de structures cristalines, sur les quelles les molécules de H_2O puissent se déposer, les structures cristalines nécessaires pour la sublimation inverse de H_2O sont les cristaux de H_2O eux-mêmes, et les aérosols présents dans l'air ont rarement une telle structure.

Les valeurs obtenues par les expériences de la pression de la vapeur saturée sur la surface de l'eau liquide $\bar{p}_{vs(l)}(T)$ à la température T sont données approximativement par :

$$\bar{p}_{vs(l)}(T) \approx E_0.10^{\frac{7.63(T-273.15)}{T-31.25}}, \quad E_0 = 6.108 \ (mbar) \tag{1.1}$$

tandis que celles de la vapeur saturée sur la surface de la glace $\bar{p}_{vs(s)}(T)$ à la température T sont données approximativement par :

$$\bar{p}_{vs(s)}(T) \approx E_0.10^{\frac{9.5(T-273.15)}{T-7.65}}, \quad E_0 = 6.108 \ (mbar) \tag{1.2}$$

Les valeurs de $\bar{p}_{vs(s)}(T)$ sont valides seulement pour $T \leq 273.15°K$, où $273.15°K$ est la température de la fusion de l'eau qui ne dépend presque pas de la pression.

Pour les gouttelettes trés petites, la courbure de la surface est suffisament grande et les molécules qui se trouvent sur la surface sont sensiblement plus exposées que celles qui se trouvent sur une surface plane. C'est pour cela que dans la nature on ne trouve pas les gouttelettes de diamètre plus petit que l'ordre de 0.1μ, si ces gouttelettes existaient, elles s'évaporeraient trés rapidement.

Dans [2], il a été proposé un système d'équation qui décrit la transition de phase entre les états gazeux et liquide, il est souhaitable que l'on généralise ces résultat en proposant un système qui décrit la transition de phase entre les trois états, gazeux, liquide et solide de l'eau dans l'atmosphère. Sachant que la pression de la vapeur saturée pour l'eau liquide est différente de celle pour le solide, plus précisément la première est plus élevée que la seconde, comme on le voit dans (1.1)-(1.2) avec $T \leq 273,15$.

En outre la formation de glace dans l'air exige la présence de noyaux de cristaline, qui n'est souvent pas suffisante dans l'atmosphère. Ces circonstances rendent assez compliquée la description de la transition de phase concernant l'état solide.

Les quantités physiques que nous devons considérer sont la densité de l'air sec ϱ, la densité π de H_2O en l'état gazeux, la densité $\sigma(m)$ de H_2O en l'état liquide contenue dans des gouttelettes de masse m, la densité $\nu(m)$ de H_2O en l'état solide contenue dans des cristaux de masse m, la vitesse $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ de l'air, la vitesse $\overrightarrow{u}(m) = (u_1(m), u_2(m), u_3(m))$ des gouttelettes de masse m, la vitesse $\overrightarrow{w}(m) = (w_1(m), w_2(m), w_3(m))$ des cristaux de masse m, (dans la suite nous écrivons simplement $v, u(m), w(m)$ au lieu de $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{u}(m)$, $\overrightarrow{w}(m)$, la température T de l'air et la pression p. Ici pour l'air sec on entend la partie de l'air des molécules différentes de H_2O, comme $\sigma(m)$ est le rapport entre la masse d'eau liquide contenue dans des gouttelttes de masse m et le volume d'espace, le rapport $\frac{\sigma(m)}{m}$ peut être interprété comme le nombre de gouttelettes de masse m se trouvant dans l'unité de volume, analoguement $\nu(m)$ est le rapport entre la masse d'eau solide contenue dans des morceaux de cristaux de masse m se trouvant dans l'unité de volume, le rapport $\frac{\nu(m)}{m}$ peut être interprété comme le nombre de morceaux de cristaux de masse m se trouvant dans l'unité de volume.

Chapitre 2

Equations de continuitées pour les trois états de l'eau dans l'atmosphère

Du point de vue physique, à cause de la transition de phase et de la différence du comportement mécanique de la vapeur, des gouttelettes et des morceaux de cristaux, l'eau présente dans l'atmosphère devra être considérée séparément en trois états : gazeux, liquide et solide. Donc pour formuler les équations du mouvement de l'air de manière suffisamment complète, il faut distinguer l'air sec qui rassemble toutes les composantes gazeux de l'air sauf H_2O, la vapeur d'eau, l'eau liquide se trouvant dans les gouttelettes et l'eau solide se trouvant dans les morceaux de cristaux. Pour étudier les phénomènes concernant l'air contenant H_2O, il faut considérer séparément les quantités physiques pour la partie de l'air formée par les molécules différentes de H_2O et les quantités physiques concernant H_2O en trois états contenu ou suspendu dans l'atmosphère.

2.1 Equation de consevation de la masse

Pour d'écrire le processus de condensation on a supposé une distribution dans l'atmosphère ; cette distribution a été donnée par une fonction de densité $\sigma_a(m)$, où m est la masse d'un aérosol. Une gouttelette devait se former sur un aérosol et la masse d'une gouttelette considérée était la somme de la masse de l'aérosol et celle de la partie de l'eau liquide condensée sur l'aérosol. Cette formulation donnait une description suffisamment cohérente du début du processus de condensation dans l'air.

Mais pour retrouver les aérosols à la fin du processus de l'évaporation des gouttelettes, on devait introuduire l'ensemble d'états où l'évaporation est "interdite" (malgré que la densité réelle de la vapeur soit inférieure à celle de saturation)

$$\Xi(T,\pi,\sigma(.)) = \Big\{m > 0/\bar{\pi}_{vs(l)}(T) \geq \pi,\ \int_0^m \sigma(m')dm' \leq \int_0^m \sigma_a(m')dm'\Big\},$$

où $\sigma_a(m)$ est la densité d'aérosols de masse m (aérosol sur lequel se forme la gouttelette), et la surface effective totale des gouttelettes

$$S_l(T,\pi,\sigma(.)) = \int_0^\infty (1-\chi_{\Xi(T,\pi,\sigma(.))}(m))m^{-\frac{1}{3}}\sigma(m)dm. \tag{2.1}$$

Cela étant, nous posons

$$H_{gl}(T,\pi,\sigma(.)) = K_1 S_l(T,\pi,\sigma(.))(\pi - \bar{\pi}_{vs(l)}(T)), \tag{2.2}$$

où K_1 est le coefficient positif de la vitesse de condensation ou évaporation. Nous admettons en outre que la quantité $H_{gl}(T,\pi,\sigma(.))$ soit distribuée proportionnellement à la surface, ce qui signifie que la quantité, par l'unité de masse de gouttelette, de H_2O qui se transforment du gaz au liquide sur les gouttelettes de masse m est donnée par

$$h_{gl}(T,\pi,\sigma(\cdot);m) = H_{gl}(T,\pi,\sigma(\cdot))\frac{m^{-1/3}\big(1-\chi_{\Xi(T,\pi,\sigma(\cdot))}(m)\big)}{S_l(T,\pi,\sigma(.))} =$$
$$= K_1\big(\pi - \bar{\pi}_{vs(l)}(T)\big)m^{-1/3}\big(1-\chi_{\Xi(T,\pi,\sigma(.))}(m)\big). \tag{2.3}$$

En utilisant cet ensemble, on a défini la surface effective totale des gouttelettes dans (2.1), et la quantité totale (dans l'unité de volume et de temps) de H_2O qui se transforment du gaz au liquide dans (2.2), ainsi la quantité, par l'unité de masse de gouttelette, de H_2O qui se transforme du gaz au liquide sur les gouttelette de masse m est donné par (2.1).

Comme on peut le remarquer facilement, la fonction $h_{gl}(T,\pi,\sigma();m)$ définie dans (2.1) avait la discontinuité due au facteur $(1-\chi_{\Xi(T,\pi,m)}(m))$, ce qui rendait difficile la résolution de l'équation de continuité pour la densité $\sigma(m)$ de l'eau liquide dans l'atmosphère. L'idée selon laquelle, si

$$\int_0^m \sigma(m')dm' \leq \int_0^m \sigma_a(m')dm', \tag{2.4}$$

alors de la surface des gouttelettes de masse m l'évaporation doit s'arrêter, idée avec laquelle on a introduit l'ensemble d'états où l'évaporation est "interdite", n'est en outre pas parfaitement cohérente, à cause de la coagulation quand une gouttelette qui achève le processus d'évaporation aura été formée généralement par plusieurs gouttelettes initialles et donc contiendrait plusieurs aérosol. Donc même si le processus d'évaporation s'arrête quand l'inégalité précédente est vérifiée, on trouve pas la même distribution d'aérosols qu'il existait avant le début du processus de condensation.

Maintenant nous voulons introduire le processus de transition de phase de l'eau entre le gaz, le liquide et le solide. D'abord on rappelle le fait que ceaux de cristaux de masse m, qui aura les caractéristiques suivantes :

$$S_s(m) = 0, \quad \text{pour } 0 \leq m \leq \bar{m}_a \tag{2.6}$$

$$S_s(m) \approx c_s m^{\frac{2}{3}} \quad \text{pour } m \geq \bar{m}_A,$$

où c_s est une constante positive telle que la moyenne statistique de la surface d'un morceau de cristaux de H_2O de masse m (et donc de volume m) soit approximativement égale à $c_s m^{\frac{2}{3}}$ (on aura évidemment $c_s \geq 3^{\frac{2}{3}}(4\pi)^{\frac{1}{3}}$). On suppose que $S_s(m)$ est une fonction régulière et croissante.

Comme la présence des aérosols est essentielle pour la formation des gouttelettes, bien que du point de vue mécanique leur présence n'ait presque aucune influence sur le mouvement de l'atmosphère, nous définissons $S_l(m)$ et $S_s(m)$ comme fonctions de la somme m de la masse de l'eau liquide et celle de l'aérosol. Dans cette modélisation le point délicat est celui de définir les fonctions $S_l(m)$ et $S_s(m)$ conformément au comportement de l'évaporation des gouttelettes et de la sublimation des cristaux dans leur phase final. En effet, comme nous l'avons remarqué à propos de la condition (2.4), à la fin de l'évaporation des gouttelettes (ou de la sublimation des cristaux) le noyau qui n'est pas H_2O restera et donc la masse restera à une certaine valeur strictement positive, mais la surface de l'eau liquide (ou du cristal) de H_2O devient nulle.

Rappelons que les aérosols n'ont pas la même masse et leur masse est distribuée entre certaines valeurs, ce que nous avons modélisé par une fonction de densité d'aérosols $\sigma_a(m)$. Si on regarde cette situation du point de vue statistique, on peut formuler la moyenne statistique $S_l(m)$ de la surface d'une gouttelette d'eau de masse m et analoguement la moyenne statistique $S_s(m)$

de la surface d'un morceau de cristaux de H_2O de masse m. C'est-à-dire, dans une situation statistiquement normale de la phase finale de l'évaporation des gouttelettes, une partie de gouttelettes de masse m a encore H_2O et donc la surface de la gouttelettes (si elle est sphérique) est $3^{\frac{2}{3}}(4\pi)^{\frac{1}{3}}m^{\frac{2}{3}}$ et une partie de gouttelettes de masse m est réduite aux noyaux secs et donc la surface de la gouttelette est nulle ; donc la moyenne statistique $S_l(m)$ serait $3^{\frac{2}{3}}(4\pi)^{\frac{1}{3}}m^{\frac{2}{3}}\theta$, où θ est la portion des gouttelettes de masse m qui ont encore H_2O et on aura donc $0 \leq \theta = \theta(m) \leq 1$. Cette considération nous permet de définir les fonctions continues et croissantes $S_l(m)$ et $S_s(m)$ qui ont les caractéristiques (2.5)-(2.6).

Nous allons retourner à la considération de la partie des gouttelettes de masse m réduites aux noyaux secs, dont la portion est $1-\theta$. Mais avant d'y retourner, prenons à l'examen la question de la formation des gouttelettes. Rappelons que les gouttelettes se forment sur des aérosols et que, quand elles sont formées, leur masse n'est pas nulle, car elles contiennent des noyaux qui ne sont pas H_2O et qui ont une certaine masse (bien que la masse est trés petite). Rappelons en outre que la valeur de la masse m d'aérosols sur lesquels les gouttelettes sont formées n'est pas unique et nous avons représenté par une fonction $\sigma_a(m)$ leur densité. Cette situation nous permet d'introduire une probabilité de formation de nouvelles gouttelettes de masse m, qui est donnée par

$$g_0(m)[\pi - \bar{\pi}_{vs(l)}(T)]^+[N^* - \tilde{N}(\sigma,\nu)]^+, \tag{2.7}$$

où

$$\tilde{N}(\sigma,\nu) = \int_0^\infty \frac{\sigma(m)}{m}dm + \int_0^\infty \frac{\nu(m)}{m}dm + c_l \int_0^\infty \sigma(m)dm + c_s \int_0^\infty \nu(m)dm. \tag{2.8}$$

Le nombre N^* est le nombre total de gouttelettes ou de morceaux de cristaux qui peuvent être formés dans l'unité de volume, tandis que $\tilde{N}$ représente le nombre dans l'unité de volume des aérosols qui se trouvent déjà dans des gouttelettes ou dans des morceaux de cristaux. Le nombre total N^* de gouttelettes ou de cristaux peuvent être formé dans l'unité de volume doit être limité parce que pour la formation des gouttelettes il est nécessaire de trouver des aérosols.

L'introduction de la probabilité de formation des gouttelettes (2.7)-(2.8) nous suggère une éventuelle introduction de la probabilité de disparition des gouttelettes et des morceaux de cristaux à la fin des processus de l'évaporation des gouttelettes et de la sublimation des cristaux de H_2O dans l'atmosphère. Nous intrduisons donc la probabilité de disparition des gouttelettes

$$g_1(m)[\pi - \bar{\pi}_{vs(l)}(T)]^-, \tag{2.9}$$

et la probabilité de disparition des morceaux de cristaux

$$g_2(m)[\pi - \bar{\pi}_{vs(s)}(T)]^-. \tag{2.10}$$

Dans (2.7) la fonction analogue est multiplie par $[N^* - \tilde{N}(\sigma,\nu)]^+$, mais les fonctions données (2.9) et (2.10) seront multipliées par $\sigma(m)$ et $\nu(m)$ respectivement. Si on rappelle la motivation de l'introduction des fonctions $g_0(m)$, $g_1(m)$, et $g_2(m)$, pour être compatible avec le comportement (2.4)-

fonctions $S_l(m)$ et $S_s(m)$, on doit supposer que

$$g_0(m) = 0, \quad g_1(m) = 0, \quad g_2(m) = 0, \quad pour \quad m \geq \bar{m}_A. \tag{2.11}$$

Pour décrire les processus d'évaporation et de condensation sur les gouttelettes déjà formées, nous posons

$$H_{gl}(T, \pi, \sigma(.)) = K_1(\pi - \bar{\pi}_{vs(l)}(T)) \int_0^\infty \frac{S_l(m)}{m} \sigma(m) dm, \tag{2.12}$$

$$h_{gl}(m) = h_{gl}(T, \pi, \sigma(.); m) = K_1 \frac{S_l(m)}{m} (\pi - \bar{\pi}_{vs(l)}(T)), \tag{2.13}$$

où K_1 est le coefficient positif de la vitesse de condensation ou d'évaporation.La quantité $H_{gl}(T, \pi, \sigma(.))$ est la quantité totale de condensation sur les gouttelettes déjà existentes. Par les valeurs négatives de $H_{gl}(T, \pi, \sigma(.))$ on entend la quantité totale d'évaporation. Analoguement pour décrire les processus de sublimation (de solide en gaz) et de sublimation inverse (de gaz en solide), nous posons

$$H_{gs}(T, \pi, \nu(.)) = K_2(\pi - \bar{\pi}_{vs(s)}(T)) \int_0^\infty \frac{S_s(m)}{m} \nu(m) dm, \tag{2.14}$$

$$h_{gs}(m) = h_{gs}(T, \pi, \nu(.); m) = K_2 \frac{S_s(m)}{m} (\pi - \bar{\pi}_{vs(s)}(T)), \tag{2.15}$$

où K_2 est le coefficient positif de la vitesse de sublimation ou de sublimation inverse. La quantité $H_{gs}(T, \pi, \nu(.))$ est la quantité totale de sublimation inverse de gaz en solide déposée sur les morceaux de cristaux de H_2O. Par les valeurs négatives de $H_{gs}(T, \pi, \nu(.))$ on entend la quantité totale de sublimation de solide en gaz. Ces considérations nous amènent aux équations de la conservation de la masse pour σ et ν, qui sont

$$\partial_t \sigma(m) + \nabla \cdot (\sigma(m) u(m)) + \partial_m [m h_{gl}(m) \sigma(m)] =$$

$$= [h_{gl}(m) - K_{ls}(T,m)]\sigma(m) + K_{sl}(T,m)\nu + \frac{m}{2}\int_0^m \beta_l(m', m-m')\sigma(m')\times$$
$$\sigma(m-m')dm' - m\sigma(m)\int_0^\infty \beta_l(m,m')\sigma(m')dm' - m\sigma(m)\int_0^\infty Z_{ls}(m',m)\times$$
$$\nu(m')dm' + g_0(m)[N^* - \tilde{N}(\sigma,\nu)]^+[\pi - \bar{\pi}_{v.s(l)}(T)]^+ - g_1(m)[\pi - \bar{\pi}_{v.s(l)}(T)]^-\sigma(m),$$

et

$$\partial_t\nu(m) + \nabla\cdot(\nu(m)w(m)) + \partial_m[mh_{gs}(m)\nu(m)] =$$
$$= [h_{gs}(m) - K_{ls}(T,m)]\nu(m) + K_{sl}(T,m)\sigma(m) + \frac{m}{2}\int_0^m \beta_s(m-m', m')\nu(m')\times$$
$$\nu(m-m')dm' - m\nu(m)\int_0^\infty \beta_s(m,m')\nu(m')dm' + m\int_0^m Z_{ls}(m-m',m')\times$$
$$\nu(m-m')\sigma(m')dm' - m\nu(m)\int_0^\infty Z_{ls}(m,m')\sigma(m')dm' - g_2(m)[\pi - \bar{\pi}_{v.s(s)}(T)]^-\nu(m).$$

D'autre part, la loi de conservation de la masse pour l'air sec, qui ne subit pas la transition de phase, est exprimée par l'équation de continuité classique c'est-à-dire

$$\partial_t\varrho + \nabla\cdot(\varrho v) = 0.$$

Pour la densitée π de vapeur d'eau, puisque $H_{gl}(T,\pi,\sigma(.))$ est par définition la quantitée totale de condensation (ou d'évaporation) et $H_{gs}(T,\pi,\nu(.))$ est par définition la quantitée totale de sublimation (ou sublimation inverse), le même raisonnement nous amène à l'équation

$$\partial_t\pi + \nabla\cdot(\pi v) = -H_{gl}(T,\pi,\sigma) - H_{gs}(T,\pi,\nu),$$

2.2 Système d'équations

Maintenant, en résumant ce que nous venons de remarquer, nous proposons un nouveau systéme d'équations. Ayant introduit les fonctions $S_l(m)$,

$S_s(m)$, $g_0(m)$, $g_1(m)$, $g_2(m)$, N^*, $\tilde{N}$, H_{gl}, h_{gl}, H_{gs}, h_{gs}, $u(m)$, $w(m)$, le système d'équations général serait donc le suivant :

$$\partial_t \varrho + \nabla \cdot (\varrho v) = 0, \tag{2.16}$$

$$\partial_t \pi + \nabla \cdot (\pi v) = -H_{gl}(T, \pi, \sigma) - H_{gs}(T, \pi, \nu), \tag{2.17}$$

$$\partial_t \sigma(m) + \nabla \cdot (\sigma(m) u(m)) + \partial_m [m h_{gl}(m) \sigma(m)] = \tag{2.18}$$

$$= [h_{gl}(m) - K_{ls}(T, m)]\sigma(m) + K_{sl}(T, m)\nu + \frac{m}{2}\int_0^m \beta_l(m', m - m')\sigma(m') \times$$

$$\sigma(m - m')dm' - m\sigma(m)\int_0^\infty \beta_l(m, m')\sigma(m')dm' - m\sigma(m)\int_0^\infty Z_{ls}(m', m) \times$$

$$\nu(m')dm' + g_0(m)[N^* - \tilde{N}(\sigma, \nu)]^+ [\pi - \bar{\pi}_{v.s(l)}(T)]^+ - g_1(m)[\pi - \bar{\pi}_{v.s(l)}(T)]^- \sigma(m),$$

$$\partial_t \nu(m) + \nabla \cdot (\nu(m) w(m)) + \partial_m [m h_{gs}(m) \nu(m)] = \tag{2.19}$$

$$= [h_{gs}(m) - K_{ls}(T, m)]\nu(m) + K_{sl}(T, m)\sigma(m) + \frac{m}{2}\int_0^m \beta_s(m - m', m')\nu(m') \times$$

$$\nu(m - m')dm' - m\nu(m)\int_0^\infty \beta_s(m, m')\nu(m')dm' + m\int_0^m Z_{ls}(m - m', m') \times$$

$$\nu(m - m')\sigma(m')dm' - m\nu(m)\int_0^\infty Z_{ls}(m, m')\sigma(m')dm' - g_2(m)[\pi - \bar{\pi}_{v.s(s)}(T)]^- \nu(m).$$

Avec u et w sont définies par :

$$u = v - \frac{1}{\alpha_l(m)}\nabla\Phi, \qquad w = v - \frac{1}{\alpha_s(m)}\nabla\Phi, \tag{2.20}$$

Les équations (2.16),(2.17) sont considérées dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ muni de frontière suffisament régulière tandis que, les équations (2.18),(2.19) sont considérées dans un domaine $\mathbb{R}_+ \times \Omega$.

Où K_{ls} et K_{sl} sont les coefficients de solidification et de fusion, $\beta_l(m', m)$ est la probabilité de rencontre d'une gouttelette de masse m et une de masse m', $\beta_s(m', m)$ est la probabilité de rencontre entre un morceau de cristal de H_2O de masse m et un de masse m', rencontre qui engendre l'union des deux morceaux, $Z_{ls}(m, m', T)$ est la probabilité de rencontre entre un morceau de cristal de H_2O de masse m et une gouttelette de masse m'. Pour ces coefficients, rappelons que K_{ls} est strictement positif seulement pour $T \leq 273, 15$ et K_{sl} est strictement positif seulement pour $T \geq 273, 15$. D'autre part, à cause de la tension superficielle des gouttelettes, la rencontre entre deux gouttelettes engendre une nouvelle gouttelette, et à cause de la surfusion des gouttelettes à une température inférieure à $273, 15\ K^\circ$ la rencontre entre un morceau de cristal de H_2O et une gouttelette solidifie l'ensemble, tandis que la rencontre entre deux morceaux de cristal de H_2O n'engendre pas nécessairement l'union des deux morceaux.

Ce système d'équations est à envisager avec les conditions initiales et les conditions aux limites. Par exemple dans le travail [6] on a considéré les conditions initiales et les conditions aux limites suivantes :

$$v(.,0) = v_0(.) \in W_p^{2-\frac{2}{p}}(\Omega), \qquad v_0|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2.21}$$

$$T(.,0) = T_0(.) \in W_p^{2-\frac{2}{p}}(\Omega), \qquad \inf_{x\in\Omega} T_0(x) > 0, \qquad T_0|_{\partial\Omega} = \bar{T}^*|_{t=0}, \tag{2.22}$$

$$\varrho(.,0) = \varrho_0(.) \in W_p^1(\Omega), \qquad \inf_{x\in\Omega} \varrho_0(x) > 0, \tag{2.23}$$

$$\pi(.,0) = \pi_0(.) \in W_p^1(\Omega), \qquad \inf_{x\in\Omega} \pi_0(x) > 0, \tag{2.24}$$

$$\sigma(.,.,0) = \sigma_0(.,.) \in W_p^1(\mathbb{R}_+ \times \Omega), \qquad \sigma_0(.,.) \geq 0, \tag{2.25}$$

$$\nu(.,.,0) = \nu_0(.,.) \in W_p^1(\mathbb{R}_+ \times \Omega), \qquad \nu_0(.,.) \geq 0, \tag{2.26}$$

$$\exists \bar{M}' \geq \bar{m}_A \text{ tel que } \quad \sigma_0(m,x) = \nu_0(m,x) = 0 \quad \text{si}\, m \in]0, \bar{m}_a] \cup [\bar{M}', \infty[. \tag{2.27}$$

$$v|_{\partial\Omega} = 0 \tag{2.28}$$

$$T|_{\partial\Omega} = \bar{T}^* \in W_q^{2-\frac{1}{q},1-\frac{1}{2q}}(\partial\Omega\times]0,t_1[), \quad \inf_{(x,t)\in\partial\Omega\times]0,t_1[} \bar{T_0}^*(x,t) > 0, \quad t_1 > 0, \tag{2.29}$$

dans ce travail on a supposé également que la fonction Φ vérifie la condition suivante :

$$\Phi \in C^3(\Omega), \quad \nabla\Phi \cdot n = 0 \text{ sur } \partial\Omega \text{ (n est la normale exterieure à } \partial\Omega). \tag{2.30}$$

Pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution local, les inégalités de Sobolev ainsi que les estimations dans l'espace de sobolev constituent des instruments fondamentaux. Introduisons la notation

$$Q_t = \Omega \times]0,t[$$

et rappelons la définition des espaces fonctionnels $W_r^{2,1}(Q_t)$ et $W_r^{2-\frac{2}{r}}(\Omega)$, que nous allons utiliser : ils sont définis par les normes

$$\|\varphi\|_{W_r^{2,1}(Q_t)} = \|\varphi\|_{L^r(0,t,W_r^2(\Omega))} + \|\partial_t\varphi\|_{L^r(Q_t)}, \tag{2.31}$$

$$\|\varphi\|_{W_r^{2-\frac{2}{r}}(\Omega)} = \|\varphi\|_{L^r(\Omega)} + \|\nabla\varphi\|_{L^r(\Omega)} + \left(\int_\Omega\int_\Omega \frac{|\nabla\varphi(x)-\nabla\varphi(y)|^r}{|x-y|^{1+r}}dxdy\right)^{1/r}. \tag{2.32}$$

Pour les détails de ces espaces voir[3].

Chapitre 3

Equations linéarisées pour les densités

L'idée générale que nous adoptons pour l'étude de la solution locale est celle d'examiner d'abord les équations linéarisées et puis de chercher un point fixe d'un opérateur défini par la solution des équations linéarisées. Dans ce qui suit, les constantes figurant dans les inégalités seront désignées par un symbole indiquant leur dépendance seulement si leur dépendence d'autres quantités est utilisée dans le raisonnement successif. Autrement elles seront désignées simplement par c. Donc les constantes c dans de différentes inégalités, en général seront différentes. Nous convenons de prolonger les fonctions dépendant de T pour $T < 0$ (comme $\pi_s(.)$,$L_{gl}(.)$). Pour commencer, introduisons les classes :

$$\Theta_t^{(v)} = \{v \in W_p^{2,1}(Q_t)| \quad v \quad \text{vérifier à} \quad (2.21), (2.28)\}, \tag{3.1}$$

$$\Theta_t^{(T)} = \{T \in W_p^{2,1}(Q_t)| \quad T \quad \text{vérifier à} \quad (2.22), (2.29), (2.32)\}, \tag{3.2}$$

Soient données $(\bar{v}, \bar{T}) \in \Theta_{t_1}^{(v)} \times \Theta_{t_1}^{(T)}$, On considère les équations :

$$\partial_t \varrho + \nabla \cdot (\varrho \bar{v}) = 0, \tag{3.3}$$

$$\partial_t \pi + \nabla \cdot (\pi \bar{v}) = -H_{gl}(\bar{T}, \pi, \sigma) - H_{gs}(\bar{T}, \pi, \nu), \tag{3.4}$$

$$\partial_t \sigma(m) + \nabla \cdot (\sigma(m)\bar{u}(m)) + \partial_m [m h_{gl}(m)\sigma(m)] = \tag{3.5}$$

$$= [h_{gl}(m) - K_{ls}(\bar{T}, m)]\sigma(m) + K_{sl}(\bar{T}, m)\nu + \frac{m}{2}\int_0^m \beta_l(m', m - m')\sigma(m')\times$$

$$\sigma(m - m')dm' - m\sigma(m)\int_0^\infty \beta_l(m, m')\sigma(m')dm' - m\sigma(m)\int_0^\infty Z_{ls}(m', m)\times$$

$$\nu(m')dm' + g_0(m)[N^* - \tilde{N}(\sigma, \nu)]^+[\pi - \bar{\pi}_{v.s(l)}(\bar{T})]^+ - g_1(m)[\pi - \bar{\pi}_{v.s(l)}(\bar{T})]^- \sigma(m)$$

$$\partial_t \nu(m) + \nabla \cdot (\nu(m)\bar{w}(m)) + \partial_m [m h_{gs}(m)\nu(m)] = \tag{3.6}$$

$$= [h_{gs}(m) - K_{ls}(\bar{T}, m)]\nu(m) + K_{sl}(\bar{T}, m)\sigma(m) + \frac{m}{2}\int_0^m \beta_s(m - m', m')\nu(m')\times$$

$$\nu(m - m')dm' - m\nu(m)\int_0^\infty \beta_s(m, m')\nu(m')dm' + m\int_0^m Z_{ls}(m - m', m')\times$$

$$\nu(m - m')\sigma(m')dm' - m\nu(m)\int_0^\infty Z_{ls}(m, m')\sigma(m')dm' - g_2(m)[\pi - \bar{\pi}_{v.s(s)}(\bar{T})]^- \nu(m),$$

avec :

$$\bar{u} = \bar{v} - \frac{1}{\alpha_l(m)}\nabla\Phi, \qquad \bar{w} = \bar{v} - \frac{1}{\alpha_s(m)}\nabla\Phi. \tag{3.7}$$

Les équations sont obtenues, en substituant $v = \bar{v}$, $T = \bar{T}$ dans (3.3)-(3.6). On remarque que si $\bar{v}$ est données, l'équation (3.3) est linéaire, tandis que, même si $\bar{u}$, $\bar{T}$ sont données, les équations (3.4),(3.5),(3.6) ne sont pas léneaire. Dans le présent paragraphe nous envisageons l'équation (3.3) et les équations linéairisées (3.4),(3.5),(3.6) en renvoyant l'étude complète au paragraphe suivant. En ce qui concerne l'équation (3.3) qui est de type de transport, il est bien connue, si $\bar{v}$ est suffisament régulière on peut résoudre (3.3) par la méthode caractéristique avec les données initiales. On outre, on peut passer dans l'espace qui nous intéresse, en conservant l'inégalité des normes

3.1 Equation de continuité pour l'air sec

Les méthodes fondamentales de l'étude des équations du type (3.3) sont celle des caractéristiques, et celle de l'estimation dans les espaces de Sobolev. Pour cela nous allons illustrer l'application de ces méthodes dans le lemme suivant :

Lemme 3.1 : *Soit* $\bar{v} \in \Theta_{t_1}^{(v)}$. *Alors l'équation*

$$\partial_t \varrho + \nabla \cdot (\varrho \bar{v}) = 0,$$

avec la condition initiale (2.23) *admet une solution* ϱ *et une seule dans la classe :*

$$\varrho \in C^0([0, t_1]; W_p^1(\Omega)).$$

En outre on a :

$$\|\varrho(.,t)\|_{W_p^1(\Omega)}^p \leq q_\varrho(t), \qquad 0 < \alpha_{\varrho(t)} \leq \varrho(x,t) \leq \beta_{\varrho(t)} < \infty \quad dans \quad Q_{(t_1)}, \tag{3.8}$$

où :

$$\alpha_\varrho(t) = \inf_{x \in \Omega} \varrho_0(x) \exp(-cR_{(\bar{v},t)} t^{\frac{p-1}{p}}). \tag{3.9}$$

$$\beta_\varrho(t) = \sup_{x \in \Omega} \varrho_0(x) \exp(cR_{(\bar{v},t)} t^{\frac{p-1}{p}}).$$

$$q_{\varrho(t)} = \|\varrho_0\|_{W_p^1(\Omega)}^p \exp(cR_{(\bar{v},t)} t^{\frac{p-1}{p}}), \qquad R_{(\bar{v},t)} = \|\bar{v}\|_{W_p^{2,1}(Q_t)}.$$

Démonstration : On considère le problème de Cauchy suivant

$$\frac{dy(t)}{dt} = \bar{v}(y(t), t),$$

$$y(0) = x_0,$$

avec $x_0 \in \Omega$. La solution de cette famille de problèmes de Cauchy définit les trajectoires, que nous notons $y(t)$. Sur ces trajectoires l'équation se réduit à :

$$\frac{d}{dt}\varrho(y(t),t) = -\varrho(y(t),t)\nabla \cdot \bar{v}(y(t),t). \tag{3.10}$$

Comme $\bar{v}$ est donné, $\nabla \cdot \bar{v}$ est elle aussi donnée, donc (3.10) est une équation différentielle ordinaire, qui est, en outre linéaire. Comme on le connaît bien, la solution est donnée par

$$\varrho(x,t) = \varrho_0(x_0)\exp(-\int_0^t \nabla \cdot \bar{v}(y(t'),t')dt'),$$

où

$$y(t') = x_0 + \int_0^{t'} \bar{v}(y(t''),t'')dt'', \qquad x = y(t), \qquad 0 \leq t \leq t_1,$$

donc l'équation (3.10) admet une solution et une seule. On remarque que, comme $W_p^1(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$, et d'après l'inégalité de Hölder on a

$$\begin{aligned}\int_0^t \|\nabla \cdot \bar{v}\|_{L^\infty(\Omega)}dt' &\leq c\int_0^t \|\bar{v}\|_{W_p^2(\Omega)}dt' \\ &\leq c(\int_0^t 1dt')^{\frac{p-1}{p}}(\int_0^t \|\bar{v}\|^p_{W_p^2(\Omega)}dt')^{\frac{1}{p}} \\ &\leq ct^{\frac{p-1}{p}}\|\bar{v}\|_{L^p(0,t;W_p^2(\Omega))} \\ &\leq cR_{(\bar{v},t)}t^{\frac{p-1}{p}},\end{aligned}$$

et la condition $\inf\limits_{x\in\Omega}\varrho_0(x) > 0$; si de plus le $\sup\limits_{x\in\Omega}\varrho_0(x) < \infty$, alors on a

$$\inf_{x\in\Omega}\varrho_0(x)\exp(-\int_0^t \|\nabla \cdot \bar{v}\|_{L^\infty(\Omega)}dt') \leq \varrho(t,x) \leq \sup_{x\in\Omega}\varrho_0(x)\exp(+\int_0^t \|\nabla \cdot \bar{v}\|_{L^\infty(\Omega)}dt').$$

En posant

$$\alpha_\varrho(t) = \alpha_0\exp(-cR_{(\bar{v},t)}t^{\frac{p-1}{p}}),$$

avec $\alpha_0 = \inf_{x\in\Omega} \varrho_0(x)$, et

$$\beta_\varrho(t) = \beta_0 \exp(cR_{(\bar{v},t)}t^{\frac{p-1}{p}}),$$

avec $\beta_0 = \sup_{x\in\Omega} \varrho_0(x)$, on obtient

$$0 < \alpha_\varrho(t) \leq \varrho(t,x) \leq \beta_\varrho(t) < \infty.$$

Maintenant en multipliant l'équation (3.3) par ϱ^{p-1} et en faisant l'intègrale sur Ω, on obtient

$$\int_\Omega \varrho^{p-1}\partial_t\varrho dx = -\int_\Omega \varrho^{p-1}\bar{v}\cdot(\nabla\varrho)dx - \int_\Omega \nabla\cdot\bar{v}\varrho^p dx.$$

Grâce à $\bar{v} = 0$ sur la frontière, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{p}\int_\Omega \partial_t(\varrho)^p dx &= -\frac{1}{p}\int_\Omega \nabla(\varrho^p)\cdot\bar{v}dx - \int_\Omega \varrho^p(\nabla\cdot\bar{v})dx\\ &= \frac{1}{p}\int_\Omega \varrho^p(\nabla\cdot\bar{v})dx - \int_\Omega \varrho^p(\nabla\cdot\bar{v})dx.\end{aligned}$$

Donc on trouve que

$$\frac{1}{p}\int_\Omega \partial_t(\varrho)^p dx = \frac{1-p}{p}\int_\Omega \varrho^p(\nabla\cdot\bar{v})dx,$$

d'où on obtient

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\varrho^p|dx \leq \frac{|1-p|}{p}\|\nabla\cdot\bar{v}\|_{L^\infty(\Omega)}\int_\Omega |\varrho^p|dx,$$

ce qui nous donne

$$\frac{d}{dt}\|\varrho\|^p_{L^p(\Omega)} \leq |1-p|\|\nabla\cdot\bar{v}\|_{L^\infty(\Omega)}\|\varrho\|^p_{L^p(\Omega)}.$$

Comme $p > 4$, en vertu des inégalités de Sobolev, il exist une constante c' telle que

$$\|\nabla\cdot\bar{v}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c'\|\bar{v}\|_{W^2_p(\Omega)},$$

et que $\|\cdot\|_{W_p^1(\Omega)} \leq \|\cdot\|_{W_p^1(\Omega)}$ on en déduit que

$$\frac{d}{dt}\|\varrho\|^p_{L^p(\Omega)} \leq C_1\|\bar{v}\|_{W_p^2(\Omega)}\|\varrho\|^p_{W_p^1(\Omega)}. \tag{3.11}$$

D'autre part, on applique l'opérateur ∇ à (3.3), et on multiplie par $|\nabla\varrho|^{p-2}\nabla\varrho$ l'équation obtenue puis on l'intègre sur Ω, de sorte que l'on obtient :

$$\int_\Omega |\nabla\varrho|^{p-2}\nabla\varrho\cdot\nabla(\partial_t\varrho)dx = -\int_\Omega |\nabla\varrho|^{p-2}\nabla\varrho\cdot\nabla(\nabla\varrho\cdot\bar{v})dx$$
$$-\int_\Omega |\nabla\varrho|^{p-2}\nabla\varrho\cdot\nabla(\varrho\nabla\cdot\bar{v})dx.$$

Or, le traitement du premier membre donne :

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla\varrho|^{p-2}\nabla\varrho\cdot\nabla(\partial_t\varrho)dx &= \int_\Omega |\nabla\varrho|^{p-1}\frac{\nabla\varrho\cdot\nabla(\partial_t\varrho)}{|\nabla\varrho|}dx \\ &= \int_\Omega |\nabla\varrho|^{p-1}\frac{\nabla\varrho\cdot\partial_t(\nabla\varrho)}{|\nabla\varrho|}dx \\ &= \int_\Omega |\nabla\varrho|^{p-1}\partial_t(|\nabla\varrho|)dx \\ &= \frac{1}{p}\int_\Omega \partial_t(|\nabla\varrho|^p)dx \\ &= \frac{1}{p}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla\varrho|^p dx \\ &= \frac{1}{p}\frac{d}{dt}\|\nabla\varrho\|^p_{L^p(\Omega)}.\end{aligned} \tag{3.12}$$

D'autre part, le traitement du second membre donne :

$$\int_\Omega |\nabla\varrho|^{p-2}\nabla\varrho\cdot[\nabla(\nabla\varrho\cdot\bar{v}) + \nabla(\varrho\nabla\cdot\bar{v})]dx =$$

$$= \int_\Omega |\nabla\varrho|^{p-2}\sum_{i,j=1}^{3}\partial_{x_j}\varrho[\partial_{x_j}(\partial_{x_i}\varrho\cdot\bar{v}_i) + \partial_{x_j}(\varrho\nabla\cdot\bar{v})]dx$$

$$= \int_\Omega |\nabla\varrho|^{p-2}\sum_{i,j=1}^{3}\partial_{x_j}\varrho(\partial_{x_j}\partial_{x_i}\varrho)\bar{v}_i dx +$$

$$+\int_\Omega |\nabla\varrho|^{p-2}\sum_{i,j=1}^{3}(\partial_{x_j}\varrho)(\partial_{x_i}\varrho)\partial_{x_j}\bar{v}_i dx+\int_\Omega |\nabla\varrho|^{p-2}\sum_{j=1}^{3}\partial_{x_j}\varrho(\partial_{x_j}\varrho)(\nabla\cdot\bar{v})+$$

$$+\int_\Omega |\nabla\varrho|^{p-2}\sum_{j=1}^{3}\varrho(\partial_{x_j}\varrho)(\partial_{x_j}\nabla\cdot\bar{v})dx,$$

et comme on a

$$\sum_{j=1}^{3}\partial_{x_j}\varrho(\partial_{x_j}\varrho)=|\nabla\varrho|^2,$$

on aura donc

$$\int_\Omega |\nabla\varrho|^{p-2}\nabla\varrho\cdot[\nabla(\nabla\varrho\cdot\bar{v})+\nabla(\varrho\nabla\cdot\bar{v})]dx=\int_\Omega |\nabla\varrho|^{p-2}\sum_{i,j=1}^{3}\partial_{x_j}\varrho(\partial_{x_j}\partial_{x_i}\varrho)\bar{v}_i dx+$$

$$\int_\Omega |\nabla\varrho|^{p-2}\sum_{i,j=1}^{3}(\partial_{x_j}\varrho)(\partial_{x_i}\varrho)\partial_{x_j}\bar{v}_i dx+\int_\Omega |\nabla\varrho|^{p}(\nabla\cdot\bar{v})dx+$$

$$+\int_\Omega |\nabla\varrho|^{p-2}\sum_{j=1}^{3}\varrho(\partial_{x_j}\varrho)(\partial_{x_j}\nabla\cdot\bar{v})dx.$$

Or, on a

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla\varrho|^{p-2}\sum_{i,j=1}^{3}\partial_{x_j}\varrho(\partial_{x_j}\partial_{x_i}\varrho)\bar{v}_i dx&=\int_\Omega |\nabla\varrho|^{p-1}\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial_{x_j}\varrho(\partial_{x_j}\partial_{x_i}\varrho)}{|\nabla\varrho|}\bar{v}_i dx\\&=\int_\Omega |\nabla\varrho|^{p-1}\sum_{i=1}^{3}\partial_{x_i}(|\nabla\varrho|)\bar{v}_i dx\\&=\frac{1}{p}\int_\Omega \nabla|\nabla\varrho|^{p}\cdot\bar{v}dx\\&=-\frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla\varrho|^{p}\nabla\cdot\bar{v}dx,\end{aligned}$$

donc on aura

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla\varrho|^{p}=-\frac{p-1}{p}\int_\Omega |\nabla\varrho|^{p}\nabla\cdot\bar{v}dx+$$

$$-\int_\Omega |\nabla\varrho|^{p-2}\sum_{i,j=1}^{3}(\partial_{x_j}\varrho)(\partial_{x_i}\varrho)(\partial_{x_j}\bar{v}_i)dx-\int_\Omega |\nabla\varrho|^{p-2}\sum_{j=1}^{3}\varrho(\partial_{x_j}\varrho)(\partial_{x_j}\nabla\cdot\bar{v})dx.$$

En appliquant l'inégalité de Hölder, on obtient :

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\|\nabla\varrho\|^p_{L^p(\Omega)}\leq\frac{|p-1|}{p}\|\nabla\cdot\bar{v}\|_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla\varrho\|^p_{L^p(\Omega)}$$

$$+\|\nabla\varrho\|^{p-2}_{L^p(\Omega)}\sum_{i,j=1}^{3}\|\partial_{x_j}\varrho\|_{L^p(\Omega)}\|\partial_{x_i}\varrho\|_{L^p(\Omega)}\|\partial_{x_j}\bar{v}_i\|_{L^\infty(\Omega)}dx+$$

$$\|\nabla(\nabla\cdot\bar{v})\|_{L^p(\Omega)}\|\nabla\varrho\|^{p-2}_{L^p(\Omega)}\|\nabla\varrho\|_{L^p(\Omega)}\|\varrho\|_{L^\infty(\Omega)},$$

ce qui implique

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\|\nabla\varrho\|^p_{L^p(\Omega)}\leq\frac{|p-1|}{p}\|\nabla\cdot\bar{v}\|_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla\varrho\|^p_{L^p(\Omega)}$$

$$+\|\nabla\varrho\|^{p}_{L^p(\Omega)}\sum_{i,j=1}^{3}\|\partial_{x_j}\bar{v}_i\|_{L^\infty(\Omega)}+\|\nabla(\nabla\cdot\bar{v})\|_{L^p(\Omega)}\|\nabla\varrho\|^{p-1}_{L^p(\Omega)}\|\varrho\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

comme $p>4$, donc $W^1_p(\Omega)\hookrightarrow L^\infty(\Omega)$. D'où on obtient :

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\|\nabla\varrho\|^p_{L^p(\Omega)}\leq\frac{|p-1|}{p}\|\bar{v}\|_{W^2_p(\Omega)}\|\varrho\|^p_{W^1_p(\Omega)}$$

$$+c\|\varrho\|^p_{W^1_p(\Omega)}\|\bar{v}\|_{W^2_p(\Omega)}+c\|\bar{v}\|_{W^2_p(\Omega)}\|\varrho\|_{W^1_p(\Omega)},$$

donc on aura

$$\frac{d}{dt}\|\nabla\varrho\|^p_{L^p(\Omega)}\leq C_2\|\bar{v}\|_{W^2_p(\Omega)}\|\varrho\|^p_{W^1_p(\Omega)}. \tag{3.13}$$

En adjoignant les inégalités (3.11)-(3.13), On obtient :

$$\frac{d}{dt}(\|\varrho\|^p_{L^p(\Omega)}+\|\nabla\varrho\|^p_{L^p(\Omega)})\leq C\|\bar{v}\|_{W^2_p(\Omega)}\|\varrho\|^p_{W^1_p(\Omega)},$$

d'où

$$\frac{d}{dt}\|\varrho\|^p_{W^1_p(\Omega)}\leq C\|\bar{v}\|_{W^2_p(\Omega)}\|\varrho\|^p_{W^1_p(\Omega)}.$$

Par conséquent, avec la condition $\varrho_0 \in W_p^1(\Omega)$, on obtient

$$\|\varrho(.,t)\|_{W_p^1(\Omega)}^p \leq \|\varrho_0\|_{W_p^1(\Omega)}^p \exp(C\int_0^t \|\bar{v}\|_{W_p^2(Q_t)}dt'). \tag{3.14}$$

Or d'après l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned}\int_0^t \|\bar{v}\|_{W_p^2(\Omega)}dt' &\leq (\int_0^t |1|dt')^{\frac{p-1}{p}}(\int_0^t \|\bar{v}\|_{W_p^2(\Omega)}^p dt')^{\frac{1}{p}}\\ &\leq t^{\frac{p-1}{p}}(\int_0^t \|\bar{v}\|_{W_p^2(\Omega)}^p dt')^{\frac{1}{p}}\\ &\leq t^{\frac{p-1}{p}}\|\bar{v}\|_{L^p(0,t;W_p^2(\Omega))}\\ &\leq cR_{(\bar{v},t)}t^{\frac{p-1}{p}},\end{aligned}$$

donc

$$\|\varrho(.,t)\|_{W_p^1(\Omega)}^p \leq \|\varrho_0\|_{W_p^1(\Omega)}^p \exp(Ct^{\frac{p-1}{p}}\|\bar{v}\|_{W_p^{2,1}(Q_t)}). \tag{3.15}$$

Le lemme est démontré.□

3.2 Equation de continuité pour la vapeur d'eau

Maintenant on va examiner l'équation de continuité de la vapeur d'eau (3.4), plus précisement celle de la solution π sous l'hypothèse que $\bar{v}$ soit donnée, avec la condition initiale (2.24). Analoguement à l'équation (3.3), l'équation (3.4) peut être résolue, en utilisant la méthode des caractéristiques. Nous allons citer l'application de cette méthode dans le lemme suivant :

Lemme 3.2 : *Soient données* $\bar{v} \in \Theta_{t_1}^{(v)}$, $\bar{T} \in \Theta_{t_1}^{(T)}$, $\bar{\pi} \in C^0([0,t_1], W_p^1(\Omega))$, $\bar{\sigma} \in C^0([0,t_1], W_p^1(\mathbb{R}_+ \times \Omega))$. $\bar{\nu} \in C^0([0,t_1], W_p^1(\mathbb{R}_+ \times \Omega))$. *Supposons qu'il existe une constante* $\bar{M}_1 > 0$ *telle que :* $\mathrm{supp}(\bar{\sigma}(.,.,t)) \subset D_2$, $\quad \mathrm{supp}(\bar{\nu}(.,.,t)) \subset$

D_2, *Pour tout* $t \in [0, t_1]$ *avec*

$$D_2 = \left]0, \bar{M}_1\right[\times \Omega.$$

Alors l'équation

$$\partial_t \pi + \nabla \cdot (\pi . \bar{v}) = -H_{gl}(\bar{T}, \bar{\pi}, \bar{\sigma}) - H_{gs}(\bar{T}, \bar{\pi}, \bar{\nu}), \tag{3.16}$$

avec la condition initiale (2.24) *admet une solution* π *et une seule dans la classe :*

$$\pi \in C^0([0, t_1]; W_p^1(\Omega)).$$

En outre on a :

$$\|\pi(., t)\|^p_{W_p^1(\Omega)} \leq q_\pi(t), \tag{3.17}$$

où

$$q_{\pi(t)} = [\|\pi_0\|^p_{W_p^1(\Omega)} + c(R_{(\bar{\sigma},t)} + R_{(\bar{\nu},t)})(R_{(\bar{T},t)} t^{\frac{q-1}{q}} + R_{(\bar{\pi},t)} t)] \tag{3.18}$$

$$\times \exp(c(R_{(\bar{v},t)} t^{\frac{p-1}{p}} + (R_{(\bar{\sigma},t)} + R_{(\bar{\nu},t)})(R_{(\bar{T},t)} t^{\frac{q-1}{q}} + R_{(\bar{\pi},t)} t))),$$

$$R_{(\bar{T},t)} = \|\bar{T}\|_{W_q^{2,1}(Q_t)}, R_{(\bar{\pi},t)} = \|\bar{\pi}\|_{C^0([0,t], W_p^1(\Omega))},$$

$$R_{(\bar{\sigma},t)} = \|\bar{\sigma}\|_{C^0([0,t], W_p^1(D_2))}, R_{(\bar{\nu},t)} = \|\bar{\nu}\|_{C^0([0,t], W_p^1(D_2))}.$$

Démonstration : On a

$$\partial_t \pi + \bar{v} \cdot \nabla \pi = -\pi \nabla \cdot \bar{v} - H_{gl}(\bar{T}, \bar{\pi}, \bar{\sigma}) - H_{gs}(\bar{T}, \bar{\pi}, \bar{\nu}),$$

ce qui implique que

$$\frac{d\pi}{dt} = -\pi \nabla \cdot \bar{v} - H_{gl}(\bar{T}, \bar{\pi}, \bar{\sigma}) - H_{gs}(\bar{T}, \bar{\pi}, \bar{\nu}),$$

sur chaque trajectoire $x(t)$. En procédant de manière analogue à la démonstration du lemme précédent, on démontre l'existence et l'unicité de la solution π; on a donc

$$\pi(t,x(t)) = \pi_0(x_0)\exp(-\int_0^t \nabla\cdot\bar{v}(t',x(t'))dt') - \int_0^t (H_{gl}(\bar{T},\bar{\pi},\bar{\sigma})+H_{gs}(\bar{T},\bar{\pi},\bar{\nu}))$$
$$\times \exp(-\int_{t'}^t \nabla\cdot\bar{v}(t'',x(t''))dt'')dt'.$$

Maintenant, en multipliant (3.16) par π^{p-1} et en faisant l'intégrale sur Ω, on a

$$\int_\Omega \pi^{p-1}\partial_t\pi dx = -\int_\Omega \pi^{p-1}\bar{v}\cdot(\nabla\pi)dx - \int_\Omega(\nabla\cdot\bar{v})\pi^p dx +$$
$$-\int_\Omega \pi^{p-1}H_{gl}dx - \int_\Omega \pi^{p-1}H_{gs}dx.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}\int_\Omega \pi^{p-1}\partial_t\pi dx &= \frac{1}{p}\int_\Omega \partial_t(\pi^p)dx\\ &= \frac{1}{p}\frac{d}{dt}\int_\Omega \pi^p dx\\ &= \frac{1}{p}\frac{d}{dt}\|\pi\|^p_{L^p(\Omega)},\end{aligned}$$

et

$$-\int_\Omega \pi^{p-1}\bar{v}\cdot(\nabla\pi)dx - \int_\Omega(\nabla\cdot\bar{v})\pi^p dx - \int_\Omega \pi^{p-1}H_{gl}dx - \int_\Omega \pi^{p-1}H_{gs}dx$$

$$\begin{aligned}&= -\frac{1}{p}\int_\Omega \nabla(\pi^p)\cdot\bar{v}dx - \int_\Omega \pi^p(\nabla\cdot\bar{v})dx - \int_\Omega \pi^{p-1}H_{gl}dx - \int_\Omega \pi^{p-1}H_{gs}dx\\ &= \frac{1}{p}\int_\Omega \pi^p(\nabla\cdot\bar{v})dx - \int_\Omega \pi^p(\nabla\cdot\bar{v})dx - \int_\Omega \pi^{p-1}H_{gl}dx - \int_\Omega \pi^{p-1}H_{gs}dx\\ &= \frac{1-p}{p}\int_\Omega \pi^p(\nabla\cdot\bar{v})dx - \int_\Omega \pi^{p-1}H_{gl}dx - \int_\Omega \pi^{p-1}H_{gs}dx.\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \pi^p dx = (1-p)\int_\Omega \pi^p(\nabla\cdot\bar{v})dx - p\int_\Omega \pi^{p-1}H_{gl}dx - p\int_\Omega \pi^{p-1}H_{gs}dx.$$

En appliquant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\frac{d}{dt}\|\pi\|^p_{L^p(\Omega)} = |1-p|\int_\Omega |\pi^p(\nabla\cdot\bar{v})|dx +$$

$$-p[\int_\Omega (\pi^{p-1})^{\frac{p}{p-1}}dx]^{\frac{p-1}{p}}[\int_\Omega (H_{gl})^p dx]^{\frac{1}{p}} - p[\int_\Omega (\pi^{p-1})^{\frac{p}{p-1}}dx]^{\frac{p-1}{p}}[\int_\Omega (H_{gs})^p dx]^{\frac{1}{p}},$$

ou

$$\frac{d}{dt}\|\pi\|^p_{L^p(\Omega)} \leq$$

$$\leq |1-p|\|\nabla\cdot\bar{v}\|_{L^\infty(\Omega)}\|\pi\|^p_{L^p(\Omega)} + p\|H_{gl}\|_{L^p(\Omega)}\|\pi\|^{p-1}_{L^p(\Omega)} + p\|H_{gs}\|_{L^p(\Omega)}\|\pi\|^{p-1}_{L^p(\Omega)}.$$

Or, comme on a

$$\|\pi\|^{p-1}_{L^p(\Omega)} \leq (1 + \|\pi\|^p_{L^p(\Omega)}),$$

on obtient

$$\frac{d}{dt}\|\pi\|^p_{L^p(\Omega)} \leq$$

$$\leq c\|\pi\|^p_{L^p(\Omega)}\|\nabla\cdot\bar{v}\|_{L^\infty(\Omega)} + c\|H_{gl}\|_{L^p(\Omega)}(1+\|\pi\|^p_{L^p(\Omega)}) + c\|H_{gs}\|_{L^p(\Omega)}(1+\|\pi\|^p_{L^p(\Omega)}).$$

Comme $p > 4$, d'après l'inégalité de Sobolev on a

$$\begin{aligned}\|\nabla\cdot\bar{v}\|_{L^\infty(\Omega)} &\leq c\|\nabla\cdot\bar{v}\|_{W^1_p(\Omega)}\\ &\leq c\|\bar{v}\|_{W^2_p(\Omega)},\end{aligned}$$

et que $\|\cdot\|_{W^1_p(\Omega)} \leq \|\cdot\|_{W^1_p(\Omega)}$ on aura donc

$$\frac{d}{dt}\|\pi\|^p_{L^p(\Omega)} \leq C\|\pi\|^p_{W^1_p(\Omega)}[\|\bar{v}\|_{W^2_p(\Omega)} + \|H_{gl}\|_{W^1_p(\Omega)} + \|H_{gs}\|_{W^1_p(\Omega)}] \qquad (3.19)$$

$$+C[\|H_{gl}\|_{W^1_p(\Omega)} + \|H_{gs}\|_{W^1_p(\Omega)}].$$

Maintenant, on applique l'opérateur ∇ à l'équation (3.16) et, on multiplie par $|\nabla\pi|^{p-2}\nabla\pi$ l'équation obtenue, puis on l'intègre sur Ω, on obtient

$$\int_\Omega |\nabla\pi|^{p-2}\nabla\pi\nabla(\partial_t\pi)dx = -\int_\Omega |\nabla\pi|^{p-2}\nabla\pi\nabla(\nabla\pi\cdot\bar{v})dx +$$
$$-\int_\Omega |\nabla\pi|^{p-2}\nabla\pi\nabla(\pi\nabla\cdot\bar{v})dx - \int_\Omega |\nabla\pi|^{p-2}\nabla\pi\nabla(H_{gl}+H_{gs})dx$$

Or

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla\pi|^{p-2}\nabla\pi\cdot\nabla(\partial_t\pi)dx &= \int_\Omega |\nabla\pi|^{p-1}\frac{\nabla\pi\cdot\nabla(\partial_t\pi)}{|\nabla\pi|}dx\\
&= \int_\Omega |\nabla\pi|^{p-1}\frac{\nabla\pi\cdot\partial_t(\nabla\pi)}{|\nabla\pi|}dx\\
&= \int_\Omega |\nabla\pi|^{p-1}\partial_t(|\nabla\pi|)dx\\
&= \frac{1}{p}\int_\Omega \partial_t(|\nabla\pi|^p)dx\\
&= \frac{1}{p}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla\pi|^p dx\\
&= \frac{1}{p}\frac{d}{dt}\|\nabla\pi\|^p_{L^p(\Omega)},
\end{aligned}$$

et aussi grâce à $\bar{v}=0$ sur $\partial\Omega$, on a

$$\int_\Omega |\nabla\pi|^{p-2}\nabla\pi[\nabla(\nabla\pi\cdot\bar{v})+\nabla(\pi\nabla\cdot\bar{v})]dx + \int_\Omega |\nabla\pi|^{p-2}\nabla\pi\nabla(H_{gl}+H_{gs})dx =$$

$$= \int_\Omega |\nabla\pi|^{p-2}\sum_{i,j=1}^{3}\partial_{x_j}\pi[\partial_{x_j}(\partial_{x_i}\pi\cdot\bar{v}_i)+\partial_{x_j}(\pi\partial_{x_i}\bar{v}_i)]dx +$$
$$+\int_\Omega |\nabla\pi|^{p-2}\sum_{j=1}^{3}(\partial_{x_j}\pi)\partial_{x_j}(H_{gl}+H_{gs})dx$$
$$= \int_\Omega |\nabla\pi|^{p-2}\sum_{i,j=1}^{3}\partial_{x_j}\pi(\partial_{x_j}\partial_{x_i}\pi)\bar{v}_i dx +$$

$$\int_\Omega |\nabla\pi|^{p-2}\sum_{i,j=1}^{3}(\partial_{x_j}\pi)(\partial_{x_i}\pi)\partial_{x_j}\bar{v}_i dx+\int_\Omega |\nabla\pi|^{p-2}\sum_{j=1}^{3}\partial_{x_j}\pi(\partial_{x_j}\pi)(\nabla\cdot\bar{v})+$$

$$\int_\Omega |\nabla\pi|^{p-2}\sum_{j=1}^{3}\pi(\partial_{x_j}\pi)(\partial_{x_j}\nabla\cdot\bar{v})dx+\int_\Omega |\nabla\pi|^{p-2}\sum_{j=1}^{3}(\partial_{x_j}\pi)\partial_{x_j}(H_{gl}+H_{gs})dx,$$

et comme on a

$$\sum_{j=1}^{3}\partial_{x_j}\pi(\partial_{x_j}\pi)=|\nabla\pi|^2.$$

On aura

$$\int_\Omega |\nabla\pi|^{p-2}\nabla\pi\cdot[\nabla(\nabla\pi\cdot\bar{v})+\nabla(\pi\nabla\cdot\bar{v})]dx+\int_\Omega |\nabla\pi|^{p-2}\nabla\pi\nabla(H_{gl}+H_{gs})dx$$

$$=\int_\Omega |\nabla\pi|^{p-2}\sum_{i,j=1}^{3}\partial_{x_j}\pi(\partial_{x_j}\partial_{x_i}\pi)\bar{v}_i dx+$$

$$+\int_\Omega |\nabla\pi|^{p-2}\sum_{i,j=1}^{3}(\partial_{x_j}\pi)(\partial_{x_i}\pi)\partial_{x_j}\bar{v}_i dx+\int_\Omega |\nabla\pi|^{p}(\nabla\cdot\bar{v})+$$

$$+\int_\Omega |\nabla\pi|^{p-2}\sum_{j=1}^{3}\pi(\partial_{x_j}\pi)(\partial_{x_j}\nabla\cdot\bar{v})dx+\int_\Omega |\nabla\pi|^{p-2}\sum_{j=1}^{3}(\partial_{x_j}\pi)\partial_{x_j}(H_{gl}+H_{gs})dx,$$

et comme, on a

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla\pi|^{p-2}\sum_{i,j=1}^{3}\partial_{x_j}\pi(\partial_{x_j}\partial_{x_i}\pi)\bar{v}_i dx&=\int_\Omega |\nabla\pi|^{p-1}\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial_{x_j}\pi(\partial_{x_j}\partial_{x_i}\pi)}{|\nabla\pi|}\bar{v}_i dx\\&=\int_\Omega |\nabla\pi|^{p-1}\sum_{i=1}^{3}\partial_{x_i}(|\nabla\pi|)\bar{v}_i dx\\&=\frac{1}{p}\int_\Omega \nabla|\nabla\pi|^{p}\cdot\bar{v}dx\\&=-\frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla\pi|^{p}\nabla\cdot\bar{v}dx,\end{aligned}$$

donc on aura

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla\pi|^{p}dx=-\frac{p-1}{p}\int_\Omega |\nabla\pi|^{p}\nabla\cdot\bar{v}dx+$$

$$\le c_2[\|\bar\nu\|_{L^\infty(D_2)}\int_0^t \|\bar\pi\|_{W_p^1(\Omega)}dt' + \|\bar\nu\|_{L^\infty(D_2)}\int_0^t \|\bar T\|_{W_q^2(\Omega)}dt']$$

$$\le c_2\|\bar\nu\|_{L^\infty(D_2)}[t\|\bar\pi\|_{L^\infty(\Omega)} + (\int_0^t |1|^p dt')^{\frac{1}{p}}(\int_0^t \|\bar T\|^q_{W_q^2(\Omega)}dt')^{\frac{1}{q}}]$$

$$\le c_2\|\bar\nu\|_{L^\infty(D_2)}[t\|\bar\pi\|_{L^\infty(\Omega)} + t^{\frac{q-1}{q}}\|\bar T\|_{L^q([0,t];W_q^2(\Omega))}]$$

$$\le c_2\|\bar\nu\|_{L^\infty(D_2)}[t\|\bar\pi\|_{L^\infty(\Omega)} + t^{\frac{q-1}{q}}\|\bar T\|_{L^q([0,t];W_q^2(\Omega))}].$$

En substituant (3.22),(3.23) dans (3.21) on obtient :

$$\|\pi(.,t)\|^p_{W_p^1(\Omega)} \le$$

$$\le [\|\pi_0\|^p_{W_p^1(\Omega)} + c(R_{(\bar\sigma,t)} + R_{(\bar\nu,t)})(R_{(\bar T,t)}t^{\frac{q-1}{q}} + R_{(\bar\pi,t)}t)]$$

$$\times \exp(c(R_{(\bar v,t)}t^{\frac{p-1}{p}} + (R_{(\bar\sigma,t)} + R_{(\bar\nu,t)})(R_{(\bar T,t)}t^{\frac{q-1}{q}} + R_{(\bar\pi,t)}t))),$$

avec $R_{(\bar v,t)}, R_{(\bar\sigma,t)}, R_{(\bar\nu,t)}, R_{(\bar\pi,t)}$ définiées précédement.

Le lemme est démontré.□

3.3 Equation de continuité pour l'eau liquide

Passons maintenant à la résolution de l'équation (3.5). On a le lemme suivant :

Lemme 3.3 : *Soient données $\bar v \in \Theta_{t_1}^{(v)}$, $\bar T \in \Theta_{t_1}^{(T)}$, $\bar\pi \in C^0([0,t_1], W_p^1(\Omega))$, $\bar\sigma \in C^0([0,t_1], W_p^1(\mathbb{R}_+ \times \Omega))$, avec leur norme majorée par une constante R_0 dans les espaces prévus (indiqués). Alors il existe une constante $\bar M_1 < \infty$ telle que, pourvu que $\bar\sigma(m,x,t) = 0$ pour $m \notin]\frac{m_a}{2}, \bar M_1[$, l'équation*

$$\partial_t\sigma(m) + \nabla\cdot(\sigma(m)\bar u(m)) + \partial_m[mh_{gl}(m)\sigma(m)] = \tag{3.24}$$

$$= [h_{gl}(m) - K_{ls}(\bar T, m)]\sigma(m) + K_{sl}(\bar T, m)\bar\nu + \frac{m}{2}\int_0^m \beta_l(m', m-m')\bar\sigma(m')\times$$

$\bar{\sigma}(m-m')dm' - m\sigma(m)\int_0^\infty \beta_l(m,m')\bar{\sigma}(m')dm' - m\sigma(m)\int_0^\infty Z_{ls}(m',m)\times$
$\bar{\nu}(m')dm' + g_0(m)[N^* - \tilde{N}(\bar{\sigma},\bar{\nu})]^+[\bar{\pi}-\bar{\pi}_{v.s(l)}(\bar{T})]^+ - g_1(m)[\bar{\pi}-\bar{\pi}_{v.s(l)}(\bar{T})]^-\sigma(m),$

avec la condition initial (2.25), (2.27) *admette une solution et une seule dans la classe :*

$$\sigma \in C^0([0,t_1], W_p^1(\mathbb{R}_+\times\Omega)),$$

avec la propriété :

$$\sigma(m,x,t) = 0 \quad \text{pour} \quad m \notin \left]\frac{\bar{m}_a}{2}, \bar{M}_1\right[, \tag{3.25}$$

satisfaisant à l'inégalité :

$$\|\sigma(.,.,t)\|^p_{W_p^1(\mathbb{R}_+\times\Omega)} = \|\sigma(.,.,t)\|^p_{W_p^1(D_2)} \le q_{\sigma(t)}. \tag{3.26}$$

avec :

$$q_{\sigma(t)} = \{\|\sigma_0\|^p_{W_p^1(D_2)} + c[(1+R^2_{(\bar{\pi},t)} + R^2_{(\bar{\sigma},t)} + R^2_{(\bar{\nu},t)})t + R_{(\bar{v},t)}t^{\frac{p-1}{p}} + R^2_{(\bar{T},t)}t^{\frac{q-2}{q}}]\} \tag{3.27}$$

$\times \exp(c[(1+R^2_{(\bar{\pi},t)} + R^2_{(\bar{\sigma},t)} + R^2_{(\bar{\nu},t)})t + R_{(\bar{v},t)}t^{\frac{p-1}{p}} + R^2_{(\bar{T},t)}t^{\frac{q-2}{q}}])$, avec

$$R_{(\bar{v},t)} = \|\bar{v}\|_{W_p^{2,1}(Q_t)}, \quad R_{(\bar{T},t)} = \|\bar{T}\|_{W_q^{2,1}(Q_t)}.$$

$$R_{(\bar{\pi},t)} = \|\bar{\pi}\|_{C^0([0,t],W_p^1(\Omega))}, \quad R_{(\bar{\sigma},t)} = \|\bar{\sigma}\|_{C^0([0,t],W_p^1(D_2))}.$$

$$R_{(\bar{\nu},t)} = \|\bar{\nu}\|_{C^0([0,t],W_p^1(D_2))}.$$

Démonstration : Résolvons l'équation (3.24) le long des caractéristiques $(m(t),x(t))_{t\in[0,t_1]}$ définies comme solution du problème de Cauchy

$$\frac{dm(t)}{dt} = m(t)h_{gl}(\bar{T},\bar{\pi},t,x(t)), \quad \frac{dx(t)}{dt} = \bar{u}(m(t),t,x(t))$$

$$m(0) = m_0 \in [0, \bar{M}_1], \quad x(0) = x_0 \in \Omega.$$

On pose $\tilde{U}_l = (mh_{gl}, \bar{u}_l)$ et $\nabla_{(x,m)} = (\partial_m, \partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \partial_{x_3})$, alors l'équation (3.24) peut être écrite dans la forme

$$\begin{aligned}
&\partial_t\sigma + \nabla_{(m,x)} \cdot (\sigma(m)\tilde{U}_l) = [h_{gl}(m) - K_{ls}(\bar{T}, m)]\sigma(m) + K_{sl}(\bar{T}, m)\bar{\nu}(m) \\
&+\frac{m}{2}\int_0^m \beta_l(m', m-m')\bar{\sigma}(m')\bar{\sigma}(m-m')dm' - m\sigma(m)\int_0^\infty \beta_l(m, m')\bar{\sigma}(m')dm' \\
&-m\sigma(m)\int_0^\infty Z_{ls}(m', m)\bar{\nu}(m')dm' + g_0(m)[N^* - \tilde{N}(\bar{\sigma}, \nu)]^+[\bar{\pi} - \bar{\pi}_{vs(l)}(\bar{T})]^+ \\
&\qquad -g_1(m)[\bar{\pi} - \bar{\pi}_{vs(l)}(\bar{T})]^-\sigma(m).
\end{aligned}$$

Si on considère la dérivée totale de σ dans l'espace $D_2 =]0, \bar{M}_1[\times\Omega$

$$\frac{d}{dt} = \partial_t + mh_{gl}\partial_m + \sum_{j=1}^{3} \bar{u}_j \frac{\partial}{\partial x_j},$$

alors on peut écrire l'équation (3.24) dans la forme

$$\begin{aligned}
&\frac{d\sigma(m)}{dt} = -\sigma(m)\nabla_{(m,x)} \cdot \tilde{U}_l + [h_{gl}(m) - K_{ls}(\bar{T}, m)]\sigma(m) + K_{sl}(\bar{T}, m)\bar{\nu}(m) \\
&\frac{m}{2}\int_0^m \beta_l(m', m-m')\bar{\sigma}(m')\bar{\sigma}(m-m')dm' - m\sigma(m)\int_0^\infty \beta_l(m, m')\bar{\sigma}(m')dm \\
&-m\sigma(m)\int_0^\infty Z_{ls}(m', m)\bar{\nu}(m')dm' + g_0(m)[N^* - \tilde{N}(\bar{\sigma}, \nu)]^+[\bar{\pi} - \bar{\pi}_{vs(l)}(\bar{T})]^+ \\
&\qquad -g_1(m)[\bar{\pi} - \bar{\pi}_{vs(l)}(\bar{T})]^-\sigma(m).
\end{aligned}$$

Cette équation, ayant la dérivée totale $\frac{d\sigma}{dt}$ au premier membre, peut être résolue le long de la trajectoire $(m(t), x(t))$. Donc en procédant de manière analogue à la démonstration du lemme 3.1, on montre l'existence et l'unicité de la solution, sous l'hypothèse de la régularité des données. la solution obtenue est à la forme suivante :

$$\sigma(m(t), x(t), t) = \sigma_0(m_0, x_0)\exp\left(\int_0^t a_1(t')dt'\right) + \int_0^t b_1(t')\exp\left(\int_{t'}^t a_1(t'')dt''\right)dt',$$

où

$$a_1(t') = -\nabla_{(m,x)}\cdot\tilde{U}_l(t', y_{t'}(m_0, x_0)) + h_{gl}(m) - K_{ls}(\bar{T}, m) - m\int_0^\infty \beta_l(m, m')\bar{\sigma}(m')dm'$$

$$-m\int_0^\infty Z_{ls}(m', m)\bar{\nu}(m')dm' - g_1(m)[\bar{\pi} - \bar{\pi}_{vs}(\bar{T})]^-,$$

$$a_1(t'') = -\nabla_{(m,x)}\cdot\tilde{U}_l(t'', y_{t''}(m_0, x_0)) + h_{gl}(m) - K_{ls}(\bar{T}, m) - m\int_0^\infty \beta_l(m, m')\bar{\sigma}(m')dm'$$

$$-m\int_0^\infty Z_{ls}(m', m)\bar{\nu}(m')dm' - g_1(m)\sigma(m)[\bar{\pi} - \bar{\pi}_{vs}(\bar{T})]^-,$$

$$b_1(t') = \int_0^t [K_{sl}(\bar{T}, m)\bar{\nu}(m) + g_0(m)[N^* - \tilde{N}(\bar{\sigma}, \bar{\nu})]^+[\bar{\pi} - \bar{\pi}_{vs}(\bar{T})]^+$$

$$+\frac{m}{2}\int_0^m \beta_l(m', m - m')\bar{\sigma}(m')\bar{\sigma}(m - m')dm',$$

il s'ensuit qu'il y a une $\bar{M}_1$ telle que sous l'hypothèse $\bar{\sigma}(m, x, t) = 0$ pour $m \notin \left]\frac{\bar{m}_a}{2}, \bar{M}_1\right[$, soit vérifiée (3.25).

En ce qui concerne la fonction $\beta(m, m')$ qui figure dans , nous supposons qu'elle est une fonction suffisamment régulière et qu'il existe une constante $\bar{M}(\bar{M} < \infty)$ telle que

$$\beta(m, m') = 0 \quad si \quad m + m' \geq \bar{M}.$$

Cette condition est motivée non seulement pour des raisons techniques, mais aussi par le phénomène d'éclatement des grosses gouttelettes par la friction avec l'air. D'autre part, pour $m + m' \leq \bar{M}$ nous supposons qu'elle est majorée par une constante.

En outre pour des raisons techniques, nous introduisons la fonction de la moyenne locale de $\bar{\pi}$. on pose une fonction θ telle que :

1. $\theta \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)$,

2. $\theta \geq 0$ et $\theta(x) = \theta(|x|)$,

3. $\int_{\mathbb{R}^3} \theta(x)dx = 1$,

et en substituant π par $\pi * \theta$, définit par $\int_{\mathbb{R}^3} \pi(x-y)\theta(y)dy$, on remarque que c'est une regularisation de $\bar{\pi}$ et donc on constate facilement que même avec cette substitution, le lemme 3.3 reste valable, car pour sa démonstration on n'utilise que la continuité des fonctions du deuxième membre et $\bar{\pi}$ est continue.
Pour la simplicité de la notation, on pose

$$D_2 =]0, \bar{M}_1[\times\Omega,$$

où $\bar{M}_1$ est une constante suffisamment grande de sorte que, comme on l'a précisé

$$\sigma(m,x,t) = 0 \ \ pour \ \ m \geq \bar{M}_1, \ \ \forall t \in [0,t_1].$$

Maintenant, pour prouver le lemme, il suffit de démontrer l'inégalité (3.26) ; En multipliant l'équation (3.24) par $\sigma^{p-1}(m)$ et en intègrant sur D_2, on obtient :

$$\int_{D_2} \sigma^{p-1}\partial_t\sigma dxdm + \int_{D_2} \sigma^{p-1}\nabla\cdot(\sigma(m)\bar{u})dxdm +$$
$$+ \int_{D_2} \sigma^{p-1}(m)\partial_m[mh_{gl}\sigma(m)]dxdm = \int_{D_2} \sigma^{p-1}[h_{gl}(m) - K_{ls}(\bar{T},m)]\sigma dxdm +$$
$$+ \int_{D_2} \sigma^{p-1}K_{sl}(\bar{T},m)\bar{\nu}dxdm + \frac{1}{2}\int_{D_2} m \int_0^m \sigma^{p-1}\beta_l(m', m-m')\bar{\sigma}(m')\times$$
$$\bar{\sigma}(m-m')dm'dxdm - \int_{D_2} m \int_0^\infty \sigma^{p-1}\sigma(m)\beta_l(m,m')\bar{\sigma}(m')dm'dxdm +$$

$$-\int_{D_2} m \int_0^\infty \sigma^{p-1}\sigma(m) Z_{ls}(m',m)\bar{\nu}(m')dm'dxdm + \int_{D_2} \sigma^{p-1} g_0(m) \times$$

$$[N^* - \tilde{N}(\bar{\sigma},\bar{\nu})]^+[\bar{\pi}*\theta - \bar{\pi}_{vs(l)}(\bar{T})]^+ dxdm - \int_{D_2} \sigma^{p-1} g_1(m)[\bar{\pi}*\theta - \bar{\pi}_{v.s(l)}(\bar{T})]^- \sigma(m)dxdm.$$

Or on a

$$\begin{aligned}\int_{D_2} \sigma^{p-1}\partial_t \sigma dxdm &= \frac{1}{p}\int_{D_2} \partial_t \sigma^p dxdm\\ &= \frac{1}{p}\frac{d}{dt}\int_{D_2} \sigma^p dxdm\\ &= \frac{1}{p}\frac{d}{dt}\|\sigma\|^p_{L^p(D_2)},\end{aligned}$$

ainsi, on a

$$\begin{aligned}\int_{D_2} \sigma^{p-1}\nabla\cdot(\sigma(m)\bar{u})dxdm &= \int_{D_2} \sigma^{p-1}[\nabla\sigma\cdot\bar{u} + \sigma\nabla\cdot\bar{u}]dxdm\\ &= \int_{D_2} \sigma^{p-1}\nabla\sigma\cdot\bar{u}dxdm + \int_{D_2} \sigma^p\nabla\cdot\bar{u}dxdm\\ &= \frac{1}{p}\int_{D_2} \nabla\sigma^p\cdot\bar{u}dxdm + \int_{D_2} \sigma^p\nabla\cdot\bar{u}dxdm\\ &= \frac{p-1}{p}\int_{D_2} \sigma^p\nabla\cdot\bar{u}dxdm,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\int_{D_2} \sigma^{p-1}(m)\partial_m[mh_{gl}\sigma(m)]dxdm &= \frac{1}{p}\int_{D_2} \partial_m\sigma^p(mh_{gl})dxdm\\ &+ \int_{D_2} \sigma^p\partial_m(mh_{gl})dxdm\\ &= \frac{p-1}{p}\int_{D_2} \sigma^p\partial_m(mh_{gl})dxdm.\end{aligned}$$

D'autre part, comme $\bar{u}$ vérifie la relation

$$\nabla\cdot\bar{u} = \nabla\cdot\bar{v} - \frac{1}{\alpha_l(m)}\Delta\Phi,$$

en substituant cette relation dans l'équation, on a

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\int_{D_2}\sigma^p(m)dxdm+\frac{p-1}{p}\int_{D_2}\sigma^p(\nabla\cdot\bar{v}-\frac{1}{\alpha_l}\Delta\Phi)dxdm+$$

$$+\frac{p-1}{p}\int_{D_2}\sigma^p\partial_m(mh_{gl})dxdm=\int_{D_2}\sigma^p[h_{gl}(m)-K_{ls}(\bar{T},m)]dxdm+$$

$$+\int_{D_2}\sigma^{p-1}K_{sl}(\bar{T},m)\bar{\nu}dxdm+\frac{\bar{M}}{2}\int_{D_2}\int_0^m\sigma^{p-1}\beta_l(m',m-m')\bar{\sigma}(m')\times$$

$$\times\bar{\sigma}(m-m')dm'dxdm-\bar{M}\int_{D_2}\int_0^\infty\sigma^p\beta_l(m,m')\bar{\sigma}(m')dm'dxdm+$$

$$-\bar{M}\int_{D_2}\int_0^\infty\sigma^pZ_{ls}(m',m)\bar{\nu}(m')dm'dxdm+\int_{D_2}\sigma^{p-1}g_0(m)\times$$

$$[N^*-\tilde{N}(\bar{\sigma},\bar{\nu})]^+[\bar{\pi}*\theta-\bar{\pi}_{vs(l)}(\bar{T})]^+dxdm-\int_{D_2}\sigma^pg_1(m)[\bar{\pi}*\theta-\bar{\pi}_{v.s(l)}(\bar{T})]^-dxdm.$$

En utilisant l'inégalité de Hölder et en tenant compte que β_l, Z_{ls}, g_0, g_1, $[N^*-\tilde{N}(\bar{\sigma},\bar{\nu})]^+$ sont bornées, avec $q=\frac{p}{p-1}$, on en déduit que

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\|\sigma\|^p_{L^p(D_2)}\leq\frac{|1-p|}{p}(\|\nabla\cdot\bar{v}\|_{L^\infty(\Omega)}+\|\frac{1}{\alpha_l(m)}\Delta\Phi\|_{L^\infty(D_2)})\|\sigma\|^p_{L^p(D_2)}+$$

$$+\frac{|1-p|}{p}\|\partial_m(mh_{gl})\|_{L^\infty(D_2)}\|\sigma\|^p_{L^p(D_2)}+\|h_{gl}(m)-K_{ls}(\bar{T},m)\|_{L^\infty(D_2)}\|\sigma\|^p_{L^p(D_2)}+$$

$$+\|K_{ls}\|_{L^\infty(D_2)}[\int_{D_2}(\sigma^{p-1})^{\frac{p}{p-1}}dxdm]^{\frac{p-1}{p}}[\int_{D_2}\nu^pdxdm]^{\frac{1}{p}}+$$

$$+c_\beta\frac{\bar{M}}{2}\|\bar{\sigma}\|_{L^\infty(D_2)}[\int_{D_2}(\sigma^{p-1})^{\frac{p}{p-1}}dxdm]^{\frac{p-1}{p}}[\int_{D_2}(\bar{\sigma})^pdxdm]^{\frac{1}{p}}+$$

$$+\bar{M}c_\beta\|\sigma\|^p_{L^p(D_2)}\|\bar{\sigma}\|_{L^\infty(D_2)}+\bar{M}c\|\sigma\|^p_{L^p(D_2)}\|\bar{\nu}\|_{L^\infty(D_2)}+$$

$$+c[\int_{D_2}(\sigma^{p-1})^{\frac{p}{p-1}}dxdm]^{\frac{p-1}{p}}[\int_{D_2}(\bar{\pi}*\theta-\bar{\pi}_{vs(l)}(\bar{T}))^pdxdm]^{\frac{1}{p}}+$$

$$+c\|\sigma\|^p_{L^p(D_2)}\|\bar{\pi}*\theta-\bar{\pi}_{v.s(l)}(\bar{T})\|_{L^\infty(D_2)}.$$

Donc, en désignant par C_Φ la quantité constante $\|\frac{1}{\alpha_l(m)}\Delta\Phi\|_{L^\infty(D_2)}$, on a

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\|\sigma\|^p_{L^p(D_2)} \leq \frac{|1-p|}{p}(\|\nabla\cdot\bar{v}\|_{L^\infty(\Omega)} + C_\Phi)\|\sigma\|^p_{L^p(D_2)} +$$

$$+\frac{|1-p|}{p}\|\partial_m(mh_{gl})\|_{L^\infty(D_2)}\|\sigma\|^p_{L^p(D_2)} + \|h_{gl}(m) - K_{ls}(\bar{T},m)\|_{L^\infty(D_2)}\|\sigma\|^p_{L^p(D_2)}$$

$$+\|\sigma\|^{p-1}_{L^p(D_2)}\|K_{sl}(\bar{T},m)\|_{L^\infty(D_2)}\|\bar{\nu}\|_{L^p(D_2)} + c_\beta\frac{\bar{M}}{2}\|\sigma\|^{p-1}_{L^p(D_2)}\|\bar{\sigma}\|_{L^p(D_2)}\|\bar{\sigma}\|_{L^\infty(D_2)}$$

$$+c_\beta\bar{M}\|\sigma\|^p_{L^p(D_2)}\|\bar{\sigma}\|_{L^\infty(D_2)} + c\bar{M}\|\bar{\nu}\|_{L^\infty(D_2)}\|\sigma\|^p_{L^p(D_2)}$$

$$c\|\sigma\|^{p-1}_{L^p(D_2)}\|\bar{\pi} - \bar{\pi}_{v.s(l)}(\bar{T})\|_{L^p(D_2)} + c\|\sigma\|^p_{L^p(D_2)}\|\bar{\pi} - \bar{\pi}_{v.s(l)}(\bar{T})\|_{L^\infty(D_2)},$$

on, compte tenu que $p > 4$, donc $W^1_p(D_2) \hookrightarrow L^\infty(D_2)$, et que

$\|\partial_m(mh_{gl})\|_{L^\infty(D_2)}$, $\|mh_{gl} - K_{ls}\|_{L^\infty(D_2)} \leq c(\|\bar{\pi}\|_{W^1_p(\Omega)} + \|\bar{T}\|_{W^2_q(\Omega)})$, on a

$$\frac{d}{dt}\|\sigma\|^p_{L^p(D_2)} \leq$$

$$C[\|\bar{v}\|_{W^2_p(\Omega)}\|\sigma\|^p_{W^1_p(D_2)} + \|\sigma\|^p_{W^1_p(D_2)} +$$

$$+(\|\bar{\pi}\|_{W^1_p(\Omega)} + \|\bar{T}\|_{W^2_q(\Omega)})\|\sigma\|^p_{W^1_p(D_2)} + (\|\bar{\pi}\|_{W^1_p(\Omega)} + \|\bar{T}\|_{W^2_q(\Omega)})\|\sigma\|^p_{W^1_p(D_2)} +$$

$$+\|\sigma\|^{p-1}_{W^1_p(D_2)}\|\bar{T}\|_{W^2_q(\Omega)}\|\bar{\nu}\|_{W^1_p(D_2)} + \|\sigma\|^{p-1}_{W^1_p(D_2)}\|\bar{\sigma}\|^2_{W^1_p(D_2)} + \|\sigma\|^p_{W^1_p(D_2)}\|\bar{\sigma}\|_{W^1_p(D_2)} +$$

$$+\|\bar{\nu}\|_{W^1_p(D_2)}\|\sigma\|^p_{W^1_p(D_2)} + \|\sigma\|^{p-1}_{W^1_p(D_2)}(\|\bar{\pi}\|_{W^1_p(\Omega)} + \|\bar{T}\|_{W^2_q(\Omega)})$$

$$+\|\sigma\|^p_{W^1_p(D_2)}(\|\bar{\pi}\|_{W^1_p(\Omega)} + \|\bar{T}\|_{W^2_q(\Omega)}).$$

Encore, compte tenu de l'inégalité

$$\|\sigma\|^{p-1}_{L^p(D_2)} \leq (1 + \|\sigma\|^p_{L^p(D_2)}),$$

on obtient

$$\frac{d}{dt}\|\sigma\|^p_{L^p(D_2)} \leq$$

$$\leq C[\|\sigma\|^p_{W^1_p(D_2)}(1 + \|\bar{v}\|_{W^2_p(\Omega)} + 3(\|\bar{\pi}\|_{W^1_p(\Omega)} + \|\bar{T}\|_{W^2_q(\Omega)}) + \|\bar{\sigma}\|_{W^1_p(D_2)} + \|\bar{\nu}\|_{W^1_p(D_2)})$$

$$+(\|\sigma\|^p_{W^1_p(D_2)}+1)(\|\bar{T}\|_{W^1_q(\Omega)}\|\bar{\nu}\|_{W^1_p(D_2)}+\|\bar{\sigma}\|^2_{W^1_p(D_2)}+\|\bar{\pi}\|_{W^1_p(\Omega)}+\|\bar{T}\|_{W^2_q(\Omega)})],$$

ce qui implique que

$$\frac{d}{dt}\|\sigma\|^p_{L^p(D_2)}\leq$$

$$\leq C[\|\sigma\|^p_{W^1_p(D_2)}(1+\|\bar{v}\|_{W^2_p(\Omega)}+\|\bar{\pi}\|_{W^1_p(\Omega)}+\|\bar{T}\|_{W^2_q(\Omega)}+\|\bar{\sigma}\|_{W^1_p(D_2)}+\|\bar{\nu}\|_{W^1_p(D_2)})+$$

$$+(\|\sigma\|^p_{W^1_p(D_2)}+1)\times$$

$$\times(\frac{1}{2}(\|\bar{T}\|^2_{W^1_q(\Omega)}+\|\bar{\nu}\|^2_{W^1_p(D_2)})+\|\bar{\sigma}\|^2_{W^1_p(D_2)}+\frac{1}{2}(1+\|\bar{\pi}\|^2_{W^1_p(\Omega)})+\frac{1}{2}(1+\|\bar{T}\|^2_{W^2_q(\Omega)}))].$$

Donc on a

$$\frac{d}{dt}\|\sigma\|^p_{L^p(D_2)}\leq \tag{3.28}$$

$$\leq C[\|\sigma\|^p_{W^1_p(D_2)}(1+\|\bar{v}\|_{W^2_p(\Omega)}+\|\bar{\pi}\|_{W^1_p(\Omega)}+\|\bar{T}\|_{W^2_q(\Omega)}+\|\bar{\sigma}\|_{W^1_p(D_2)}+\|\bar{\nu}\|_{W^1_p(D_2)})+$$

$$+(\|\sigma\|^p_{W^1_p(D_2)}+1)(1+\|\bar{T}\|^2_{W^1_q(\Omega)}+\|\bar{\nu}\|^2_{W^1_p(D_2)}+\|\bar{\sigma}\|^2_{W^1_p(D_2)}+\|\bar{\pi}\|^2_{W^1_p(\Omega)})].$$

D'autre part, on applique l'opérateur ∇ à l'équation (3.24), et on multiplie par $|\nabla\sigma|^{p-2}\nabla\sigma$ l'équation obtenue puis on l'intègre sur D_2, de sorte que l'on obtient :

$$\int_{D_2}|\nabla\sigma|^{p-2}\nabla\sigma\cdot\nabla(\partial_t\sigma(m))dxdm+\int_{D_2}|\nabla\sigma|^{p-2}\nabla\sigma\cdot\nabla(\nabla\cdot(\sigma(m)\bar{u}))dxdm$$

$$+\int_{D_2}|\nabla\sigma|^{p-2}\nabla\sigma\cdot\nabla(\partial_m[mh_{gl}\sigma(m)])dxdm=$$

$$=\int_{D_2}|\nabla\sigma|^{p-2}\nabla\sigma\cdot\nabla[(h_{gl}(m)-K_{ls}(m)\sigma(m))]dxdm+$$

$$+\int_{D_2}|\nabla\sigma|^{p-2}\nabla\sigma\cdot\nabla[K_{sl}(\bar{T},m)\bar{\nu}]dxdm+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{D_2}|\nabla\sigma|^{p-2}\nabla\sigma\cdot\nabla[m\int_0^m\beta_l(m',m-m')\bar{\sigma}(m')\bar{\sigma}(m-m')dm']dxdm+$$

$$-\int_{D_2}|\nabla\sigma|^{p-2}\nabla\sigma\cdot\nabla[m\int_0^\infty\sigma(m)\beta_l(m,m')\bar{\sigma}(m')dm']dxdm+$$

$$-\int_{D_2} |\nabla\sigma|^{p-2}\nabla\sigma\cdot\nabla[m\int_0^\infty \sigma(m)Z_{ls}(m',m)\bar{\nu}(m')dm']dxdm+$$
$$+\int_{D_2} |\nabla\sigma|^{p-2}\nabla\sigma\cdot\nabla[g_0(m)[N^*-\tilde{N}(\bar{\sigma},\bar{\nu})]^+[\bar{\pi}-\bar{\pi}_{vs(l)}(\bar{T})]^+]dxdm+$$
$$-\int_{D_2} |\nabla\sigma|^{p-2}\nabla\sigma\cdot\nabla[g_1(m)[\bar{\pi}-\bar{\pi}_{v.s(l)}(\bar{T})]^-\sigma(m)]dxdm.$$

Or on a

$$\begin{aligned}\int_{D_2} |\nabla\sigma|^{p-2}\nabla\sigma\cdot\nabla(\partial_t\sigma)dxdm &= \int_{D_2}|\nabla\sigma|^{p-1}\frac{\nabla\sigma\cdot\nabla(\partial_t\sigma)}{|\nabla\sigma|}dxdm\\ &= \int_{D_2}|\nabla\sigma|^{p-1}\frac{\nabla\sigma\cdot\partial_t(\nabla\sigma)}{|\nabla\sigma|}dxdm\\ &= \int_{D_2}|\nabla\sigma|^{p-1}\partial_t(|\nabla\sigma|)dxdm\\ &= \frac{1}{p}\int_{D_2}\partial_t(|\nabla\sigma|^p)dxdm\\ &= \frac{1}{p}\frac{d}{dt}\int_{D_2}|\nabla\sigma|^p dxdm\\ &= \frac{1}{p}\frac{d}{dt}\|\nabla\sigma\|^p_{L^p(D_2)},\end{aligned}$$

et on a aussi

$$\int_{D_2} |\nabla\sigma|^{p-2}\nabla\sigma\cdot\nabla(\nabla\cdot(\sigma(m)\bar{u}))dxdm =$$

$$\begin{aligned}&= \int_{D_2}|\nabla\sigma|^{p-2}\nabla\sigma\cdot\nabla(\nabla\sigma\cdot\bar{u}+\sigma\nabla\cdot\bar{u})dxdm\\ &= \int_{D_2}|\nabla\sigma|^{p-2}\sum_{i,j=1}^{3}(\partial_{x_j}\sigma)\partial_{x_j}[\partial_{x_i}\sigma\cdot\bar{u}_i+\sigma\nabla\cdot\bar{u}]dxdm\\ &= \int_{D_2}|\nabla\sigma|^{p-2}\sum_{i,j=1}^{3}(\partial_{x_j}\sigma)(\partial_{x_j}\partial_{x_i}\sigma)\bar{u}_i dxdm+\end{aligned}$$

$$+\int_{D_2}|\nabla\sigma|^{p-2}\sum_{i,j=1}^{3}(\partial_{x_j}\sigma)(\partial_{x_i}\sigma)(\partial_{x_j}\bar{u}_i)dxdm+\int_{D_2}|\nabla\sigma|^p\nabla\cdot\bar{u}dxdm+$$

$$+\int_{D_2}|\nabla\sigma|^{p-2}\sum_{j=1}^{3}(\partial_{x_j}\sigma)\sigma\partial_{x_j}(\nabla\cdot\bar{u})dxdm$$

$$=\frac{p-1}{p}\int_{D_2}|\nabla\sigma|^{p}\nabla\cdot\bar{u}dxdm+\int_{D_2}|\nabla\sigma|^{p-2}\sum_{i,j=1}^{3}(\partial_{x_j}\sigma)(\partial_{x_i}\sigma)(\partial_{x_j}\bar{u}_i)dxdm+$$

$$+\int_{D_2}|\nabla\sigma|^{p-2}\sum_{j=1}^{3}(\partial_{x_j}\sigma)\sigma\partial_{x_j}(\nabla\cdot\bar{u})dxdm,$$

et

$$\int_{D_2}|\nabla\sigma|^{p-2}\nabla\sigma\cdot\nabla(\partial_m[mh_{gl}\sigma(m)])dxdm=$$

$$=\int_{D_2}|\nabla\sigma|^{p-2}\nabla\sigma\cdot\nabla(\partial_m[mh_{gl}]\sigma+mh_{gl}\partial_m\sigma)dxdm$$

$$=\int_{D_2}|\nabla\sigma|^{p-2}\sum_{j=1}^{3}(\partial_{x_j}\sigma)\partial_{x_j}[\partial_m(mh_{gl})\sigma+mh_{gl}\partial_m\sigma]dxdm$$

$$=\int_{D_2}|\nabla\sigma|^{p-2}\sum_{j=1}^{3}(\partial_{x_j}\sigma)[\partial_{x_j}\partial_m(mh_{gl})]\sigma dxdm$$

$$+\int_{D_2}|\nabla\sigma|^{p-2}\sum_{j=1}^{3}(\partial_{x_j}\sigma)\partial_m(mh_{gl})\partial_{x_j}\sigma dxdm$$

$$+\int_{D_2}|\nabla\sigma|^{p-2}\sum_{j=1}^{3}(\partial_{x_j}\sigma)\partial_{x_j}(mh_{gl})\partial_m\sigma dxdm+$$

$$+\int_{D_2}|\nabla\sigma|^{p-2}\sum_{j=1}^{3}(\partial_{x_j}\sigma)(\partial_{x_j}\partial_m\sigma)(mh_{gl})dxdm$$

$$=\frac{p-1}{p}\int_{D_2}|\nabla\sigma|^{p}\partial_m(mh_{gl})dxdm+\int_{D_2}|\nabla\sigma|^{p-2}\sum_{j=1}^{3}(\partial_{x_j}\sigma)\partial_{x_j}(mh_{gl})\partial_m\sigma dxdm$$

$$+\int_{D_2}|\nabla\sigma|^{p-2}\sum_{j=1}^{3}(\partial_{x_j}\sigma)(\partial_{x_j}\partial_m(mh_{gl})\sigma)dxdm$$

$$= \frac{p-1}{p}\int_{D_2}|\nabla\sigma|^p\partial_m(mh_{gl})dxdm + \int_{D_2}|\nabla\sigma|^{p-2}\sigma\nabla\sigma\cdot\nabla(\partial_m(mh_{gl}))dxdm$$
$$+\int_{D_2}|\nabla\sigma|^{p-2}\nabla\sigma\cdot\nabla(mh_{gl})\partial_m\sigma dxdm.$$

Donc on aura

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\int_{D_2}|\nabla\sigma|^p dxdm + \frac{p-1}{p}\int_{D_2}|\nabla\sigma|^p\nabla\cdot\bar{u}dxdm$$
$$+\int_{D_2}|\nabla\sigma|^{p-2}\sum_{i,j=1}^{3}(\partial_{x_j}\sigma)(\partial_{x_i}\sigma)(\partial_{x_j}\bar{u}_i)dxdm + \int_{D_2}|\nabla\sigma|^{p-2}\sigma\nabla\sigma\cdot\nabla(\nabla\cdot\bar{u})dxdm$$
$$+\frac{p-1}{p}\int_{D_2}|\nabla\sigma|^p\partial_m(mh_{gl})dxdm + \int_{D_2}|\nabla\sigma|^{p-2}\sigma\nabla\sigma\cdot\nabla(\partial_m(mh_{gl}))dxdm$$
$$+\int_{D_2}|\nabla\sigma|^{p-2}\nabla\sigma\cdot\nabla(mh_{gl})\partial_m\sigma dxdm =$$
$$= \int_{D_2}|\nabla\sigma|^{p-2}\nabla\sigma\cdot\nabla(h_{gl}(m) - K_{ls}(m))\sigma(m)dxdm +$$
$$+\int_{D_2}|\nabla\sigma|^{p-2}\nabla\sigma\cdot\nabla\sigma(m)(h_{gl}(m) - K_{ls}(m))dxdm +$$
$$+\int_{D_2}|\nabla\sigma|^{p-2}\nabla\sigma\cdot\nabla K_{sl}(\bar{T},m)\bar{\nu}dxdm + \int_{D_2}|\nabla\sigma|^{p-2}\nabla\sigma\cdot\nabla\bar{\nu}K_{sl}(\bar{T},m)dxdm +$$
$$+\frac{1}{2}\int_{D_2}m\int_0^m|\nabla\sigma|^{p-2}\nabla\sigma\cdot\beta_l(m',m-m')\nabla\bar{\sigma}(m')\bar{\sigma}(m-m')dm'dxdm +$$
$$+\frac{1}{2}\int_{D_2}m\int_0^m|\nabla\sigma|^{p-2}\nabla\sigma\cdot\beta_l(m',m-m')\bar{\sigma}(m')\nabla\bar{\sigma}(m-m')dm'dxdm +$$
$$-\int_{D_2}m\int_0^\infty|\nabla\sigma|^{p-2}\nabla\sigma\cdot\beta_l(m,m')\nabla\sigma(m)\bar{\sigma}(m')dm'dxdm +$$
$$-\int_{D_2}m\int_0^\infty|\nabla\sigma|^{p-2}\nabla\sigma\cdot\beta_l(m,m')\sigma(m)\nabla\bar{\sigma}(m')dm'dxdm +$$
$$-\int_{D_2}m\int_0^\infty|\nabla\sigma|^{p-2}\nabla\sigma\cdot Z_{ls}(m',m)\nabla\sigma(m)\bar{\nu}(m')dm'dxdm +$$

$$-\int_{D_2} m \int_0^\infty |\nabla\sigma|^{p-2}\nabla\sigma \cdot Z_{ls}(m',m)\sigma(m)\nabla\bar{\nu}(m')dm'dxdm+$$

$$+\int_{D_2} g_0(m)|\nabla\sigma|^{p-2}\nabla\sigma \cdot \nabla[\bar{\pi}-\bar{\pi}_{vs(l)}(\bar{T})]^+[N^*-\tilde{N}(\bar{\sigma},\bar{\nu})]^+dxdm+$$

$$+\int_{D_2} g_0(m)|\nabla\sigma|^{p-2}\nabla\sigma \cdot \nabla[N^*-\tilde{N}(\bar{\sigma},\bar{\nu})]^+[\bar{\pi}-\bar{\pi}_{vs(l)}(\bar{T})]^+dxdm+$$

$$-\int_{D_2} g_1(m)|\nabla\sigma|^{p-2}\nabla\sigma \cdot \nabla[\bar{\pi}-\bar{\pi}_{v.s(l)}(\bar{T})]^-\sigma(m)dxdm+$$

$$-\int_{D_2} g_1(m)|\nabla\sigma|^{p-2}\nabla\sigma \cdot \nabla\sigma(m)[\bar{\pi}-\bar{\pi}_{v.s(l)}(\bar{T})]^-dxdm.$$

Pour avoir une estimation de $|\nabla\sigma|^{p-2}\nabla\sigma\cdot\nabla(mh_{gl})\partial_m\sigma$, $|\nabla\sigma|^{p-2}\nabla\sigma\cdot\nabla\partial_m(mh_{gl})\sigma$, et $|\nabla\sigma|^{p-2}\nabla\sigma\cdot\nabla(h_{gl}(m)-K_{ls}(m))\sigma(m)$ nous avons besoin d'une régularité plus élevée de $\bar{\pi}$. Pour cela nous utilisons les propriétés régularisantes de la moyenne locale $\bar{\pi}*\theta$. De plus, comme $\bar{u}$ vérifie la relation

$$\nabla\cdot\bar{u} = \nabla\cdot\bar{v} - \frac{1}{\alpha_l(m)}\Delta\Phi,$$

en substituant ces relations dans l'équation, on a

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\int_{D_2}|\nabla\sigma|^p dxdm + \frac{p-1}{p}\int_{D_2}|\nabla\sigma|^p(\nabla\cdot\bar{v}-\frac{1}{\alpha_l}\Delta\Phi)dxdm+$$

$$+\int_{D_2}|\nabla\sigma|^{p-2}\sum_{i,j=1}^{3}(\partial_{x_j}\sigma)(\partial_{x_i}\sigma)(\partial_{x_j}\bar{v}_i-\frac{1}{\alpha_l}\partial_{x_j}\nabla\Phi)dxdm+$$

$$+\int_{D_2}|\nabla\sigma|^{p-2}\sigma\nabla\sigma\cdot(\nabla(\nabla\cdot\bar{v})-\frac{1}{\alpha_l}\nabla(\Delta\Phi))dxdm+$$

$$+\frac{p-1}{p}\int_{D_2}|\nabla\sigma|^p\partial_m(mh_{gl})dxdm+\int_{D_2}|\nabla\sigma|^{p-2}\sigma\nabla\sigma\cdot\nabla(\partial_m(mh_{gl}))dxdm+$$

$$+\int_{D_2}|\nabla\sigma|^{p-2}\nabla\sigma\cdot\nabla(mh_{gl})\partial_m\sigma dxdm=$$

$$=\int_{D_2}|\nabla\sigma|^{p-2}\nabla\sigma\cdot\nabla(h_{gl}(m)-K_{ls}(m))\sigma(m)dxdm+$$

$$+\int_{D_2}|\nabla\sigma|^p(h_{gl}(m)-K_{ls}(m))dxdm+\int_{D_2}|\nabla\sigma|^{p-2}\nabla\sigma\cdot\nabla K_{sl}(\bar{T},m)\bar{\nu}dxdm+$$
$$+\int_{D_2}|\nabla\sigma|^{p-2}\nabla\sigma\cdot\nabla\bar{\nu}K_{sl}(\bar{T},m)dxdm+$$
$$+\frac{1}{2}\int_{D_2}m\int_0^m|\nabla\sigma|^{p-2}\nabla\sigma\cdot\beta_l(m',m-m')\nabla\bar{\sigma}(m')\bar{\sigma}(m-m')dm'dxdm+$$
$$+\frac{1}{2}\int_{D_2}m\int_0^m|\nabla\sigma|^{p-2}\nabla\sigma\cdot\beta_l(m',m-m')\bar{\sigma}(m')\nabla\bar{\sigma}(m-m')dm'dxdm+$$
$$-\int_{D_2}m\int_0^\infty|\nabla\sigma|^p\beta_l(m,m')\bar{\sigma}(m')dm'dxdm+$$
$$-\int_{D_2}m\int_0^\infty|\nabla\sigma|^{p-2}\nabla\sigma\beta_l(m,m')\sigma\nabla\bar{\sigma}(m')dm'dxdm+$$
$$-\int_{D_2}m\int_0^\infty|\nabla\sigma|^pZ_{ls}(m',m)\bar{\nu}(m')dm'dxdm+$$
$$-\int_{D_2}m\int_0^\infty|\nabla\sigma|^{p-2}\nabla\sigma\cdot Z_{ls}(m',m)\nabla\bar{\nu}(m')\sigma(m)dm'dxdm+$$
$$+\int_{D_2}g_0(m)|\nabla\sigma|^{p-2}\nabla\sigma\cdot\nabla[(\bar{\pi}*\theta)-\bar{\pi}_{vs(l)}(\bar{T})]^+[N^*-\tilde{N}(\bar{\sigma},\bar{\nu})]^+dxdm+$$
$$+\int_{D_2}g_0(m)|\nabla\sigma|^{p-2}\nabla\sigma\cdot\nabla[N^*-\tilde{N}(\bar{\sigma},\bar{\nu})]^+[(\bar{\pi}*\theta)-\bar{\pi}_{vs(l)}(\bar{T})]^+dxdm+$$
$$-\int_{D_2}g_1(m)|\nabla\sigma|^{p-2}\nabla\sigma\cdot\nabla[(\bar{\pi}*\theta)-\bar{\pi}_{v.s(l)}(\bar{T})]^-\sigma(m)dxdm+$$
$$-\int_{D_2}g_1(m)|\nabla\sigma|^p[(\bar{\pi}*\theta)-\bar{\pi}_{v.s(l)}(\bar{T})]^-dxdm,$$

comme d'après l'expression de h_{gl}, on a

$$\begin{aligned}\nabla mh_{gl}&=K_1S_l(m)\nabla[(\bar{\pi}*\theta)-\bar{\pi}_{v.s(l)}(\bar{T})]\\&=K_1S_l(m)[(\bar{\pi}*\nabla\theta)-\nabla\bar{\pi}_{v.s(l)}(\bar{T})],\end{aligned}$$

il vient

$$\left|\int_{D_2}|\nabla\sigma|^{p-2}\nabla\sigma\cdot\nabla(mh_{gl})\partial_m\sigma dxdm\right|\leq$$

$$\leq \|\nabla m h_{gl}\|_{L^\infty(D_2)}\|\nabla\sigma\|^{p-2}_{L^p(D_2)}\|\nabla\sigma\|_{L^p(D_2)}\|\partial_m\sigma\|_{L^p(D_2)}$$
$$\leq c\|S_l\|_{L^\infty(D_2)}[\|\bar{\pi}\|_{W^1_p(\Omega)}\|\nabla\theta\|_{L^\infty(D_2)} - \|\bar{T}\|_{W^2_q(\Omega)}]\|\nabla\sigma\|^{p-1}_{L^p(D_2)}\|\partial_m\sigma\|_{L^p(D_2)}$$
$$\leq C[\|\bar{\pi}\|_{W^1_p(\Omega)} + \|\bar{T}\|_{W^2_q(\Omega)}]\|\nabla\sigma\|^{p-1}_{L^p(D_2)}\|\partial_m\sigma\|_{L^p(D_2)}.$$

Analoguement

$$|\int_{D_2}|\nabla\sigma|^{p-2}\sigma\nabla\sigma\cdot\nabla(\partial_m(mh_{gl}))dxdm| \leq$$

$$\leq \|\nabla\partial_m(mh_{gl})\|_{L^p(D_2)}\|\nabla\sigma\|^{p-2}_{L^p(D_2)}\|\nabla\sigma\|_{L^p(D_2)}\|\sigma\|_{L^\infty(D_2)}$$
$$\leq c\|\partial_m S_l\|_{L^\infty(D_2)}[\|\bar{\pi}\|_{W^1_p(\Omega)} + \|\bar{T}\|_{W^2_q(\Omega)}]\|\nabla\sigma\|^{p-1}_{L^p(D_2)}\|\sigma\|_{L^\infty(D_2)}$$
$$\leq C[\|\bar{\pi}\|_{W^1_p(\Omega)} + \|\bar{T}\|_{W^2_q(\Omega)}]\|\nabla\sigma\|^{p-1}_{L^p(D_2)}\|\sigma\|_{L^\infty(D_2)},$$

et

$$|\int_{D_2}|\nabla\sigma|^{p-2}\nabla\sigma\cdot\nabla(h_{gl}(m) - K_{ls}(m))\sigma(m)dxdm| \leq$$

$$\leq \|\nabla[h_{gl}(m) - K_{ls}(m)]\|_{L^\infty(D_2)}\|\nabla\sigma\|^{p-2}_{L^p(D_2)}\|\nabla\sigma\|_{L^p(D_2)}\|\sigma\|_{L^p(D_2)}$$
$$\leq (c[\|\bar{\pi}\|_{W^1_p(\Omega)} + \|\bar{T}\|_{W^2_q(\Omega)}] + c\|\bar{T}\|_{W^2_q(\Omega)})\|\nabla\sigma\|^{p-1}_{L^p(D_2)}\|\sigma\|_{L^p(D_2)}$$
$$\leq C[\|\bar{\pi}\|_{W^1_p(\Omega)} + \|\bar{T}\|_{W^2_q(\Omega)}]\|\nabla\sigma\|^{p-1}_{L^p(D_2)}\|\sigma\|_{L^p(D_2)}.$$

Donc on aura

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\|\nabla\sigma\|^p_{L^p(D_2)} \leq$$

$$\leq \frac{|p-1|}{p}\|\nabla\sigma\|^p_{L^p(D_2)}\|\nabla\cdot\bar{v}\|_{L^\infty(\Omega)} + \frac{|p-1|}{p}\|\nabla\sigma\|^p_{L^p(D_2)}\|\frac{1}{\alpha_l}\Delta\Phi\|_{L^\infty(D_2)}+$$

$$+\|\nabla\sigma\|^p_{L^p(D_2)}\sum_{i,j=1}^{3}\|\partial_{x_j}\bar{v}_i\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\nabla\sigma\|^p_{L^p(D_2)}\sum_{i,j=1}^{3}\|\frac{1}{\alpha_l}\partial_{x_j}\nabla\Phi\|_{L^\infty(D_2)}+$$

$$\|\nabla(\nabla\cdot\bar{v})\|_{L^p(\Omega)}\|\nabla\sigma\|^{p-1}_{L^p(D_2)}\|\sigma\|_{L^\infty(D_2)}+\|\nabla\sigma\|^{p-1}_{L^p(D_2)}\|\sigma\|_{L^\infty(D_2)}\|\frac{1}{\alpha_l}\nabla(\Delta\Phi)\|_{L^p(D_2)}+$$

$$\frac{|p-1|}{p}\|\partial_m(mh_{gl})\|_{L^\infty(D_2)}\|\nabla\sigma\|^p_{L^p(D_2)}+\|\nabla(\partial_m mh_{gl})\|_{L^p(D_2)}\|\nabla\sigma\|^{p-1}_{L^p(D_2)}\|\sigma\|_{L^\infty(D_2)}$$
$$+\|\nabla(mh_{gl})\|_{L^\infty(D_2)}\|\nabla\sigma\|^{p-1}_{L^p(D_2)}\|\partial_m\sigma\|_{L^p(D_2)}+$$
$$+\|\nabla(h_{gl}(m)-K_{ls}(m))\|_{L^\infty(D_2)}\|\nabla\sigma\|^{p-1}_{L^p(D_2)}\|\sigma\|_{L^p(D_2)}+$$
$$+\|\nabla\sigma\|^p_{L^p(D_2)}\|h_{gl}(m)-K_{ls}(m)\|_{L^\infty(D_2)}+\|\nabla K_{sl}(m)\|_{L^\infty(D_2)}\|\nabla\sigma\|^{p-1}_{L^p(D_2)}\|\bar{\nu}\|_{L^p(D_2)}+$$
$$+\|K_{sl}(m)\|_{L^\infty(D_2)}\|\nabla\sigma\|^{p-1}_{L^p(D_2)}\|\nabla\bar{\nu}\|_{L^p(D_2)}+\bar{M}c_\beta\|\nabla\sigma\|^{p-1}_{L^p(D_2)}\|\nabla\bar{\sigma}\|_{L^p(D_2)}\|\bar{\sigma}\|_{L^\infty(D_2)}$$
$$+\bar{M}c_\beta\|\nabla\sigma\|^{p-1}_{L^p(D_2)}\|\bar{\sigma}\|_{L^\infty(D_2)}\|\nabla\bar{\sigma}\|_{L^p(D_2)}+\bar{M}c_\beta\|\nabla\sigma\|^{p}_{L^p(D_2)}\|\bar{\sigma}\|_{L^\infty(D_2)}+$$
$$+\bar{M}c_\beta\|\nabla\sigma\|^{p-1}_{L^p(D_2)}\|\sigma\|_{L^\infty(D_2)}\|\nabla\bar{\sigma}\|_{L^p(D_2)}+c\bar{M}\|\nabla\sigma\|^{p}_{L^p(D_2)}\|\bar{\nu}\|_{L^\infty(D_2)}+$$
$$+c\bar{M}\|\nabla\sigma\|^{p-1}_{L^p(D_2)}\|\nabla\bar{\nu}\|_{L^p(D_2)}\|\sigma\|_{L^\infty(D_2)}+$$
$$+c\|\nabla\sigma\|^{p-1}_{L^p(D_2)}\|\nabla[\bar{\pi}*\theta-\bar{\pi}_{vs(l)}(\bar{T})]^+\|_{L^p(D_2)}+c\|\nabla\sigma\|^{p-1}_{L^p(D_2)}\|[\bar{\pi}*\theta-\bar{\pi}_{vs(l)}(\bar{T})]^+\|_{L^p(D_2)}$$
$$+c\|\nabla\sigma\|^{p-1}_{L^p(D_2)}\|\nabla[\bar{\pi}*\theta-\bar{\pi}_{vs(l)}(\bar{T})]^+\|_{L^\infty(D_2)}\|\sigma\|_{L^p(D_2)}+$$
$$+c\|\nabla\sigma\|^{p}_{L^p(D_2)}\|[\bar{\pi}*\theta-\bar{\pi}_{vs(l)}(\bar{T})]^+\|_{L^\infty(D_2)},$$

ce qui implique que

$$\frac{d}{dt}\|\nabla\sigma\|^p_{L^p(D_2)}\leq \tag{3.29}$$
$$\leq C[\|\nabla\sigma\|^p_{L^p(D_2)}\|\nabla\cdot\bar{v}\|_{L^\infty(\Omega)}+\|\nabla\sigma\|^p_{L^p(D_2)}+\|\nabla(\nabla\cdot\bar{v})\|_{L^p(\Omega)}\|\nabla\sigma\|^{p-1}_{L^p(D_2)}\|\sigma\|_{L^\infty(D_2)}+$$
$$+\|\nabla\sigma\|^{p-1}_{L^p(D_2)}\|\sigma\|_{L^p(D_2)}+3\|\nabla\sigma\|^p_{L^p(D_2)}(\|\bar{\pi}\|_{W^1_p(\Omega)}+\|\bar{T}\|_{W^2_q(\Omega)})+$$
$$+2\|\nabla\sigma\|^{p-1}_{L^p(D_2)}(\|\bar{\pi}\|_{W^1_p(\Omega)}+\|\bar{T}\|_{W^2_q(\Omega)})+$$
$$+\|\partial_m\sigma\|_{L^p(D_2)}(\|\bar{\pi}\|_{W^1_p(\Omega)}+\|\bar{T}\|_{W^2_q(\Omega)})\|\nabla\sigma\|^{p-1}_{L^p(D_2)}+$$
$$+(\|\bar{\pi}\|_{W^1_p(\Omega)}+\|\bar{T}\|_{W^2_q(\Omega)})\|\nabla\sigma\|^{p-1}_{L^p(D_2)}\|\sigma\|_{L^\infty(D_2)}+\|\bar{T}\|_{W^2_q(\Omega)}\|\nabla\sigma\|^{p-1}_{L^p(D_2)}\|\bar{\nu}\|_{L^p(D_2)}+$$
$$+2(\|\bar{\pi}\|_{W^1_p(\Omega)}+\|\bar{T}\|_{W^2_q(\Omega)})\|\nabla\sigma\|^{p-1}_{L^p(D_2)}\|\sigma\|_{L^p(D_2)}+$$
$$+\|\bar{T}\|_{W^2_q(\Omega)}\|\nabla\sigma\|^{p-1}_{L^p(D_2)}\|\nabla\bar{\nu}\|_{L^p(D_2)}+2\|\nabla\sigma\|^{p-1}_{L^p(D_2)}\|\nabla\bar{\sigma}\|_{L^p(D_2)}\|\bar{\sigma}\|_{L^\infty(D_2)}+$$

$$\|\nabla\sigma\|^p_{L^p(D_2)}\|\bar{\sigma}\|_{L^\infty(D_2)} + \|\nabla\sigma\|^{p-1}_{L^p(D_2)}\|\sigma\|_{L^\infty(D_2)}\|\nabla\bar{\sigma}\|_{L^p(D_2)}+$$

$$\|\nabla\sigma\|^p_{L^p(D_2)}\|\bar{\nu}\|_{L^\infty(D_2)} + \|\nabla\sigma\|^{p-1}_{L^p(D_2)}\|\nabla\bar{\nu}\|_{L^p(D_2)}\|\sigma\|_{L^\infty(D_2)}].$$

Maintenant, on applique l'opérateur ∂_m à l'équation (3.24) et on multiplie par $|\partial_m\sigma|^{p-2}\partial_m\sigma$ l'équation obtenue, on l'intègre sur D_2, ce qui nous donne

$$\int_{D_2}|\partial_m\sigma|^{p-2}\partial_m\sigma\partial_m(\partial_t\sigma(m))dxdm + \int_{D_2}|\partial_m\sigma|^{p-2}\partial_m\sigma\partial_m(\nabla\cdot(\sigma(m)\bar{u}))dxdm+$$

$$+\int_{D_2}|\partial_m\sigma|^{p-2}\partial_m\sigma\partial_m(\partial_m[mh_{gl}\sigma(m)])dxdm =$$

$$= \int_{D_2}|\partial_m\sigma|^{p-2}\partial_m\sigma\partial_m[(h_{gl}(m) - K_{ls}(m)\sigma(m))]dxdm+$$

$$+\int_{D_2}|\partial_m\sigma|^{p-2}\partial_m\sigma\cdot\partial_m[K_{sl}(\bar{T},m)\bar{\nu}]dxdm+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{D_2}|\partial_m\sigma|^{p-2}\partial_m\sigma\partial_m[m\int_0^m\beta_l(m',m-m')\bar{\sigma}(m')\bar{\sigma}(m-m')dm']dxdm+$$

$$-\int_{D_2}|\partial_m\sigma|^{p-2}\partial_m\sigma\partial_m[m\int_0^\infty\sigma(m)\beta_l(m,m')\bar{\sigma}(m')dm']dxdm+$$

$$-\int_{D_2}|\partial_m\sigma|^{p-2}\partial_m\sigma\partial_m[m\int_0^\infty\sigma(m)Z_{ls}(m',m)\bar{\nu}(m')dm']dxdm+$$

$$+\int_{D_2}|\partial_m\sigma|^{p-2}\partial_m\sigma\partial_m[g_0(m)[N^* - \tilde{N}(\bar{\sigma},\bar{\nu})]^+[\bar{\pi} - \bar{\pi}_{vs(l)}(\bar{T})]^+]dxdm+$$

$$-\int_{D_2}|\partial_m\sigma|^{p-2}\partial_m\sigma\partial_m[g_1(m)[\bar{\pi} - \bar{\pi}_{v.s(l)}(\bar{T})]^-\sigma(m)]dxdm.$$

Cela implique que

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\int_{D_2}|\partial_m\sigma|^p dxdm + \int_{D_2}|\partial_m\sigma|^{p-2}\partial_m\sigma[\partial_m\nabla\sigma(m)\cdot\bar{u} + \nabla\sigma(m)\cdot\partial_m\bar{u}$$

$$+\partial_m\sigma\nabla\cdot\bar{u} + \sigma\partial_m\nabla\cdot\bar{u}]dxdm + \int_{D_2}|\partial_m\sigma|^{p-2}\partial_m\sigma[\partial^2_m(mh_{gl})\sigma + mh_{gl}\partial^2_m\sigma dxdm$$

$$+2\partial_m\sigma\partial_m(mh_{gl})]dxdm = \int_{D_2}|\partial_m\sigma|^{p-2}\partial_m\sigma\partial_m(h_{gl}(m) - K_{ls}(m))\sigma(m)dxdm$$

$$+\int_{D_2}|\partial_m\sigma|^{p-2}\partial_m\sigma\partial_m\sigma(m)(h_{gl}(m)-K_{ls}(m))dxdm+$$

$$+\int_{D_2}|\partial_m\sigma|^{p-2}\partial_m\sigma\partial_m K_{sl}(\bar{T},m)\bar{\nu}dxdm+\int_{D_2}|\partial_m\sigma|^{p-2}\partial_m\sigma K_{sl}(\bar{T},m)\partial_m\bar{\nu}dxdm+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{D_2}|\partial_m\sigma|^{p-2}\partial_m\sigma\int_0^m\beta_l(m',m-m')\bar{\sigma}(m')\bar{\sigma}(m-m')dm'dxdm+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{D_2}|\partial_m\sigma|^{p-2}\partial_m\sigma[m\partial_m\int_0^m\beta_l(m',m-m')\bar{\sigma}(m')\bar{\sigma}(m-m')dm']dxdm+$$

$$-\int_{D_2}|\partial_m\sigma|^{p-2}\partial_m\sigma\int_0^\infty\sigma(m)\beta_l(m,m')\bar{\sigma}(m')dm'dxdm+$$

$$-\int_{D_2}|\partial_m\sigma|^{p-2}\partial_m\sigma[m\partial_m\int_0^\infty\sigma(m)\beta_l(m,m')\bar{\sigma}(m')dm']dxdm+$$

$$-\int_{D_2}|\partial_m\sigma|^{p-2}\partial_m\sigma\int_0^\infty\sigma(m)Z_{ls}(m',m)\bar{\nu}(m')dm'dxdm+$$

$$-\int_{D_2}|\partial_m\sigma|^{p-2}\partial_m\sigma[m\partial_m\int_0^\infty\sigma(m)Z_{ls}(m',m)\bar{\nu}(m')dm']dxdm+$$

$$+\int_{D_2}|\partial_m\sigma|^{p-2}\partial_m\sigma\partial_m g_0(m)[\bar{\pi}*\theta-\bar{\pi}_{vs(l)}(\bar{T})]^+[N^*-\tilde{N}(\bar{\sigma},\bar{\nu})]^+dxdm+$$

$$+\int_{D_2}|\partial_m\sigma|^{p-2}\partial_m\sigma g_0(m)[\bar{\pi}*\theta-\bar{\pi}_{vs(l)}(\bar{T})]^+\partial_m[N^*-\tilde{N}(\bar{\sigma},\bar{\nu})]^+dxdm$$

$$-\int_{D_2}|\partial_m\sigma|^{p-2}\partial_m\sigma\partial_m g_1(m)[\bar{\pi}*\theta-\bar{\pi}_{v.s(l)}(\bar{T})]^-\sigma(m)dxdm+$$

$$-\int_{D_2}|\partial_m\sigma|^{p-2}\partial_m\sigma g_1(m)[\bar{\pi}*\theta-\bar{\pi}_{v.s(l)}(\bar{T})]^-\partial_m\sigma(m)dxdm.$$

De plus, à l'aide des relations

$$\begin{aligned}\partial_m\bar{u}&=\partial_m(\bar{v}-\frac{1}{\alpha_l}\nabla\Phi)\\&=-\partial_m(\frac{1}{\alpha_l})\nabla\Phi,\end{aligned}$$

et

$$\partial_m\partial_x\bar{u}=\partial_m\partial_x\bar{v}=0,$$

on transforme l'équation dans la forme

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\int_{D_2}|\partial_m\sigma|^p dxdm+\frac{p-1}{p}\int_{D_2}|\partial_m\sigma|^p(\nabla\cdot\bar{v}-\frac{1}{\alpha_l}\Delta\Phi)dxdm+$$

$$-\int_{D_2}|\partial_m\sigma|^{p-2}\partial_m\sigma\nabla\sigma\cdot\nabla\Phi\partial_m\frac{1}{\alpha_l}dxdm+$$

$$-\int_{D_2}|\partial_m\sigma|^{p-2}\partial_m\sigma\sigma\Delta\Phi\partial_m\frac{1}{\alpha_l}dxdm+\frac{2p-1}{p}\int_{D_2}|\partial_m\sigma|^p\partial_m(mh_{gl})dxdm+$$

$$+\int_{D_2}|\partial_m\sigma|^{p-2}\partial_m\sigma\sigma\partial_m^2(mh_{gl})dxdm=$$

$$=\int_{D_2}|\partial_m\sigma|^{p-2}\partial_m\sigma\partial_m(h_{gl}(m)-K_{ls}(m))\sigma(m)dxdm+$$

$$+\int_{D_2}|\partial_m\sigma|^{p-2}\partial_m\sigma\partial_m\sigma(m)(h_{gl}(m)-K_{ls}(m))dxdm+$$

$$+\int_{D_2}|\partial_m\sigma|^{p-2}\partial_m\sigma\partial_m K_{sl}(\bar{T},m)\bar{\nu}dxdm+\int_{D_2}|\partial_m\sigma|^{p-2}\partial_m\sigma K_{sl}(\bar{T},m)\partial_m\bar{\nu}dxdm$$

$$+\frac{1}{2}\int_{D_2}|\partial_m\sigma|^{p-2}\partial_m\sigma\int_0^m\beta_l(m',m-m')\bar{\sigma}(m')\bar{\sigma}(m-m')dm'dxdm+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{D_2}m\int_0^m|\partial_m\sigma|^{p-2}\partial_m\sigma\partial_m\beta_l(m',m-m')\bar{\sigma}(m')\bar{\sigma}(m-m')dm'dxdm+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{D_2}m\int_0^m|\partial_m\sigma|^{p-2}\partial_m\sigma\beta_l(m',m-m')\bar{\sigma}(m')\partial_m\bar{\sigma}(m-m')dm'dxdm+$$

$$-\int_{D_2}|\partial_m\sigma|^{p-2}\partial_m\sigma\int_0^\infty\sigma(m)\beta_l(m,m')\bar{\sigma}(m')dm'dxdm+$$

$$-\int_{D_2}m\int_0^\infty|\partial_m\sigma|^{p-2}\partial_m\sigma\partial_m\beta_l(m,m')\sigma(m)\bar{\sigma}(m')dm'dxdm+$$

$$-\int_{D_2}m\int_0^\infty|\partial_m\sigma|^{p-2}\partial_m\sigma\beta_l(m,m')\partial_m\sigma(m)\bar{\sigma}(m')dm'dxdm+$$

$$-\int_{D_2}|\partial_m\sigma|^{p-2}\partial_m\sigma\int_0^\infty\sigma(m)Z_{ls}(m',m)\bar{\nu}(m')dm'dxdm+$$

$$-\int_{D_2}m\int_0^\infty|\partial_m\sigma|^{p-2}\partial_m\sigma\partial_m Z_{ls}(m',m)\bar{\nu}(m')\sigma(m)dm'dxdm$$

$$-\int_{D_2} m \int_0^{\infty} |\partial_m \sigma|^{p-2} \partial_m \sigma Z_{ls}(m', m)\bar{\nu}(m')\partial_m \sigma(m) dm' dx dm +$$

$$+\int_{D_2} |\partial_m \sigma|^{p-2} \partial_m \sigma \partial_m g_0(m)[\bar{\pi} * \theta - \bar{\pi}_{vs(l)}(\bar{T})]^+ [N^* - \tilde{N}(\bar{\sigma}, \bar{\nu})]^+ dx dm +$$

$$+\int_{D_2} |\partial_m \sigma|^{p-2} \partial_m \sigma g_0(m)[\bar{\pi} * \theta - \bar{\pi}_{vs(l)}(\bar{T})]^+ \partial_m [N^* - \tilde{N}(\bar{\sigma}, \bar{\nu})]^+ dx dm +$$

$$-\int_{D_2} |\partial_m \sigma|^{p-2} \partial_m \sigma \partial_m g_1(m)[\bar{\pi} * \theta - \bar{\pi}_{v.s(l)}(\bar{T})]^- \sigma(m) dx dm +$$

$$-\int_{D_2} |\partial_m \sigma|^{p-2} \partial_m \sigma g_1(m)[\bar{\pi} * \theta - \bar{\pi}_{v.s(l)}(\bar{T})]^- \partial_m \sigma(m) dx dm.$$

L'estimation des autre termes est analogue à ce que nous avons déja traité en haut. Donc en utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\|\partial_m \sigma\|^p_{L^p(D_2)} \leq$$

$$\leq \frac{|p-1|}{p}\|\partial_m \sigma\|^p_{L^p(D_2)}\|\nabla \cdot \bar{v}\|_{L^\infty(\Omega)} + c_\Phi \frac{|p-1|}{p}\|\partial_m \sigma\|^p_{L^p(D_2)} +$$

$$+c_\Phi \|\partial_m \sigma\|^{p-1}_{L^p(D_2)}\|\nabla \sigma\|_{L^p(D_2)} + c_\Phi \|\partial_m \sigma\|^{p-1}_{L^p(D_2)}\|\sigma\|_{L^p(D_2)} +$$

$$+\frac{2p-1}{p}\|\partial_m(mh_{gl})\|_{L^\infty(D_2)}\|\partial_m \sigma\|^p_{L^p(D_2)} + \|\partial^2_m(mh_{gl})\|_{L^\infty(D_2)}\|\partial_m \sigma\|^{p-1}_{L^p(D_2)}\|\sigma\|_{L^p(D_2)}$$

$$+\|\partial_m(h_{gl}(m) - K_{ls}(m))\|_{L^\infty(D_2)}\|\partial_m \sigma\|^{p-1}_{L^p(D_2)}\|\sigma\|_{L^p(D_2)} +$$

$$+\|\partial_m \sigma\|^p_{L^p(D_2)}\|h_{gl}(m) - K_{ls}(m)\|_{L^\infty(D_2)} + \|\partial_m K_{sl}(m)\|_{L^\infty(D_2)}\|\partial_m \sigma\|^{p-1}_{L^p(D_2)}\|\bar{\nu}\|_{L^p(D_2)}$$

$$+\|K_{sl}(m)\|_{L^\infty(D_2)}\|\partial_m \sigma\|^{p-1}_{L^p(D_2)}\|\partial_m \bar{\nu}\|_{L^p(D_2)} +$$

$$+c_\beta \|\partial_m \sigma\|^{p-1}_{L^p(D_2)}\|\bar{\sigma}\|_{L^p(D_2)}\|\bar{\sigma}\|_{L^\infty(D_2)} + c_\beta \bar{M}\|\partial_m \sigma\|^{p-1}_{L^p(D_2)}\|\bar{\sigma}\|_{L^p(D_2)}\|\bar{\sigma}\|_{L^\infty(D_2)}$$

$$+c_\beta \bar{M}\|\partial_m \sigma\|^{p-1}_{L^p(D_2)}\|\bar{\sigma}\|_{L^\infty(D_2)}\|\partial_m \bar{\sigma}\|_{L^p(D_2)} + c_\beta \|\partial_m \sigma\|^{p-1}_{L^p(D_2)}\|\sigma\|_{L^p(D_2)}\|\bar{\sigma}\|_{L^\infty(D_2)} +$$

$$+c_\beta \bar{M}\|\partial_m \sigma\|^{p-1}_{L^p(D_2)}\|\sigma\|_{L^p}\|\bar{\sigma}\|_{L^\infty(D_2)} + c_\beta \bar{M}\|\partial_m \sigma\|^p_{L^p(D_2)}\|\bar{\sigma}\|_{L^\infty(D_2)} +$$

$$+\|\partial_m \sigma\|^{p-1}_{L^p(D_2)}\|\sigma\|_{L^p(D_2)}\|\bar{\nu}\|_{L^\infty(D_2)} + c\bar{M}\|\partial_m \sigma\|^{p-1}_{L^p(D_2)}\|\sigma\|_{L^p(D_2)}\|\bar{\nu}\|_{L^\infty(D_2)} +$$

$$c\bar{M}\|\partial_m\sigma\|^p_{L^p(D_2)}\|\bar{\nu}\|_{L^\infty(D_2)} + +c\|\partial_m\sigma\|^{p-1}_{L^p(D_2)}\|\partial_m[\bar{\pi}*\theta - \bar{\pi}_{vs(l)}(\bar{T})]^+\|_{L^p(D_2)}+$$

$$c\|\partial_m\sigma\|^{p-1}_{L^p(D_2)}\|[\bar{\pi}*\theta - \bar{\pi}_{vs(l)}(\bar{T})]^+\|_{L^p(D_2)}+$$

$$+c\|\partial_m\sigma\|^{p-1}_{L^p(D_2)}\|\partial_m[\bar{\pi}*\theta - \bar{\pi}_{vs(l)}(\bar{T})]^+\|_{L^\infty(D_2)}$$

$$+\|\sigma\|_{L^p(D_2)} + c\|\partial_m\sigma\|^p_{L^p(D_2)}\|[\bar{\pi}*\theta - \bar{\pi}_{vs(l)}(\bar{T})]^+\|_{L^\infty(D_2)}.$$

En outre à l'aide de la définition de h_{gl}, on obtient

$$\frac{d}{dt}\|\partial_m\sigma\|^p_{L^p(D_2)} \leq \tag{3.30}$$

$$\leq C[\|\partial_m\sigma\|^p_{L^p(D_2)}\|\nabla\cdot\bar{v}\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\partial_m\sigma\|^p_{L^p(D_2)} + \|\partial_m\sigma\|^{p-1}_{L^p(D_2)}\|\nabla\sigma\|_{L^p(D_2)}+$$

$$+\|\partial_m\sigma\|^{p-1}_{L^p(D_2)}\|\sigma\|_{L^p(D_2)} + (\|\bar{\pi}\|_{W^1_p(\Omega)} + \|\bar{T}\|_{W^2_q(\Omega)})\|\partial_m\sigma\|^p_{L^p(D_2)}+$$

$$+(\|\bar{\pi}\|_{W^1_p(\Omega)} + \|\bar{T}\|_{W^2_q(\Omega)})\|\partial_m\sigma\|^{p-1}_{L^p(D_2)}\|\sigma\|_{L^p(D_2)}+$$

$$+(\|\bar{\pi}\|_{W^1_p(\Omega)} + \|\bar{T}\|_{W^2_q(\Omega)})\|\partial_m\sigma\|^{p-1}_{L^p(D_2)}\|\sigma\|_{L^p(D_2)}+$$

$$+(\|\bar{\pi}\|_{W^1_p(\Omega)} + \|\bar{T}\|_{W^2_q(\Omega)})\|\partial_m\sigma\|^p_{L^p(D_2)} + \|\bar{T}\|_{W^2_q(\Omega)}\|\partial_m\sigma\|^{p-1}_{L^p(D_2)}\|\bar{\nu}\|_{L^p(D_2)}+$$

$$+\|\bar{T}\|_{W^2_q(\Omega)}\|\partial_m\sigma\|^{p-1}_{L^p(D_2)}\|\partial_m\bar{\nu}\|_{L^p(D_2)} + \|\partial_m\sigma\|^{p-1}_{L^p(D_2)}\|\bar{\sigma}\|_{L^p(D_2)}\|\bar{\sigma}\|_{L^\infty(D_2)}+$$

$$+\|\partial_m\sigma\|^{p-1}_{L^p(D_2)}\|\partial_m\bar{\sigma}\|_{L^p(D_2)}\|\bar{\sigma}\|_{L^\infty(D_2)} + \|\partial_m\sigma\|^p_{L^p(D_2)}\|\bar{\sigma}\|_{L^\infty(D_2)}+$$

$$+\|\partial_m\sigma\|^p_{L^p(D_2)}\|\bar{\nu}\|_{L^\infty(D_2)} + \|\partial_m\sigma\|^{p-1}_{L^p(D_2)}\|\bar{\nu}\|_{L^p(D_2)}\|\sigma\|_{L^\infty(D_2)}+$$

$$+\|\partial_m\sigma\|^{p-1}_{L^p(D_2)}\|\bar{\sigma}\|_{L^p(D_2)}\|\sigma\|_{L^\infty(D_2)}+$$

$$+\|\partial_m\sigma\|^{p-1}_{L^p(D_2)}(\|\bar{\pi}\|_{W^1_p(\Omega)} + \|\bar{T}\|_{W^2_q(\Omega)}) + \|\partial_m\sigma\|^{p-1}_{L^p(D_2)}(\|\bar{\pi}\|_{W^1_p(\Omega)} + \|\bar{T}\|_{W^2_q(\Omega)})+$$

$$+\|\partial_m\sigma\|^{p-1}_{L^p(D_2)}(\|\bar{\pi}\|_{W^1_p(\Omega)} + \|\bar{T}\|_{W^2_q(\Omega)})\|\sigma\|_{L^p(D_2)}+$$

$$+\|\partial_m\sigma\|^p_{L^p(D_2)}(\|\bar{\pi}\|_{W^1_p(\Omega)} + \|\bar{T}\|_{W^2_q(\Omega)})].$$

En sommant l'inégalité (3.29) et (3.30), on obtient

$$\frac{d}{dt}[\|\nabla\sigma\|^p_{L^p(D_2)} + \|\partial_m\sigma\|^p_{L^p(D_2)}] \leq C[(\|\nabla\sigma\|^p_{L^p(D_2)} + \|\partial_m\sigma\|^p_{L^p(D_2)})\times$$

$$[1+\|\nabla\cdot\bar{v}\|_{L^\infty(\Omega)}+3(\|\bar{\pi}\|_{W^1_p(\Omega)}+\|\bar{T}\|_{W^2_q(\Omega)})+\|\bar{\sigma}\|_{L^\infty(D_2)}+\|\bar{\nu}\|_{L^\infty(D_2)}]+$$

$$+(\|\nabla\sigma\|^{p-1}_{L^p(D_2)}\|+\|\partial_m\sigma\|^{p-1}_{L^p(D_2)})[\|\sigma\|_{L^p(D_2)}+2\|\bar{T}\|_{W^2_q(\Omega)}\|\bar{\nu}\|_{L^p(D_2)}+$$

$$+\|\bar{T}\|_{W^2_q(\Omega)}(\|\nabla\bar{\nu}\|_{L^p}+\|\partial_m\bar{\nu}\|_{L^p(D_2)})+c\|\bar{\sigma}\|_{L^\infty(D_2)}(\|\nabla\bar{\sigma}\|_{L^p(D_2)}+\|\partial_m\bar{\sigma}\|_{L^p(D_2)})+$$

$$+4(\|\bar{\pi}\|_{W^1_p(\Omega)}+\|\bar{T}\|_{W^2_q(\Omega)})\|\sigma\|_{L^p(D_2)}+$$

$$+(\|\partial_m\sigma\|_{L^p(D_2)}+\|\nabla\sigma\|_{L^p(D_2)})(1+\|\bar{\pi}\|_{W^1_p(\Omega)}+\|\bar{T}\|_{W^2_q(\Omega)})+$$

$$+(\|\bar{\pi}\|_{W^1_p(\Omega)}+\|\bar{T}\|_{W^2_q(\Omega)})(\|\sigma\|_{L^p(D_2)}+\|\sigma\|_{L^\infty(D_2)})+2(\|\bar{\pi}\|_{W^1_p(\Omega)}+\|\bar{T}\|_{W^2_q(\Omega)})+$$

$$+\|\sigma\|_{L^\infty(D_2)}(\|\nabla\bar{\sigma}\|_{L^p(D_2)}+\|\bar{\sigma}\|_{L^p(D_2)})+\|\sigma\|_{L^\infty(D_2)}(\|\nabla\bar{\nu}\|_{L^p(D_2)}+\|\bar{\nu}\|_{L^p}(D_2))]+$$

$$+\|\nabla\sigma\|^{p-1}_{L^p(D_2)}\|\nabla(\nabla\cdot\bar{v})\|_{L^p(\Omega)}\|\sigma\|_{L^\infty(D_2)}+\|\partial_m\sigma\|^{p-1}_{L^p(D_2)}\|\bar{\sigma}\|_{L^p(D_2)}\|\bar{\sigma}\|_{L^\infty(D_2)}],$$

ou, en utilisant le gradiant $\nabla_{(x,m)}$ de σ dans D_2,

$$\frac{d}{dt}\|\nabla_{(x,m)}\sigma\|^p_{L^p(D_2)}\leq$$

$$\leq C[\|\nabla_{(x,m)}\sigma\|^p_{L^p(D_2)}[1+\|\nabla\cdot\bar{v}\|_{L^\infty(\Omega)}+3(\|\bar{\pi}\|_{W^1_p(\Omega)}+\|\bar{T}\|_{W^2_q(\Omega)})+\|\bar{\sigma}\|_{L^\infty(D_2)}+\|\bar{\nu}\|_{L^\infty(D_2)}]$$

$$+\|\nabla_{(x,m)}\sigma\|^{p-1}_{L^p(D_2)}[\|\sigma\|_{L^p(D_2)}+2\|\bar{T}\|_{W^2_q(\Omega)}\|\bar{\nu}\|_{L^p(D_2)}+\|\bar{T}\|_{W^2_q(\Omega)}\|\nabla_{(x,m)}\bar{\nu}\|_{L^p(D_2)}+$$

$$+c\|\bar{\sigma}\|_{L^\infty(D_2)}(\|\nabla_{(x,m)}\sigma\|_{L^p(D_2)})+4(\|\bar{\pi}\|_{W^1_p(\Omega)}+\|\bar{T}\|_{W^2_q(\Omega)})\|\sigma\|_{L^p(D_2)}+$$

$$+(\|\nabla_{(x,m)}\sigma\|_{L^p(D_2)})(1+\|\bar{\pi}\|_{W^1_p(\Omega)}+\|\bar{T}\|_{W^2_q(\Omega)})+$$

$$+(\|\bar{\pi}\|_{W^1_p(\Omega)}+\|\bar{T}\|_{W^2_q(\Omega)})(\|\sigma\|_{L^p(D_2)}+\|\sigma\|_{L^\infty(D_2)})+2(\|\bar{\pi}\|_{W^1_p(\Omega)}+\|\bar{T}\|_{W^2_q(\Omega)})+$$

$$+\|\sigma\|_{L^\infty(D_2)}(\|\nabla\bar{\sigma}\|_{L^p(D_2)}+\|\bar{\sigma}\|_{L^p(D_2)})+\|\sigma\|_{L^\infty(D_2)}(\|\nabla\bar{\nu}\|_{L^p(D_2)}+\|\bar{\nu}\|_{L^p(D_2)})]+$$

$$+\|\nabla_{(x,m)}\sigma\|^{p-1}_{L^p(D_2)}(\|\sigma\|_{L^\infty(D_2)}\|\nabla(\nabla\cdot\bar{v})\|_{L^p(D_2)}+\|\bar{\sigma}\|_{L^p(D_2)}\|\bar{\sigma}\|_{L^\infty(D_2)})].$$

En tenant compte de la relation $p>4$, et donc $W^1_p(D_2)\hookrightarrow L^\infty(D_2)$, on en déduit que

$$\frac{d}{dt}\|\nabla_{(x,m)}\sigma\|^p_{L^p(D_2)}\leq$$

$$\leq C[\|\sigma\|^p_{W^1_p(D_2)}[3+2\|\bar{v}\|_{W^1_p(\Omega)}+8(\|\bar{\pi}\|_{W^1_p(\Omega)}+\|\bar{T}\|_{W^2_q(\Omega)})+4\|\bar{\sigma}\|_{W^1_p(D_2)}+3\|\bar{\nu}\|_{W^1_p(D_2)}]+$$

$$+\|\sigma\|^{p-1}_{W^1_p(D_2)}[3\|\bar{T}\|_{W^2_q(\Omega)}\|\bar{\nu}\|_{W^1_p(D_2)}+2(\|\bar{\pi}\|_{W^1_p(\Omega)}+\|\bar{T}\|_{W^2_q(\Omega)})+\|\bar{\sigma}\|^2_{W^1_p(D_2)}].$$

En utilisant encore

$$\|\sigma\|^{p-1}_{W^1_p(D_2)}\leq(1+\|\sigma\|^p_{W^1_p(D_2)}),$$

on obtient

$$\frac{d}{dt}\|\nabla_{(x,m)}\sigma\|^p_{L^p(D_2)}\leq$$

$$\leq C[\|\sigma\|^p_{W^1_p(D_2)}[1+\|\bar{v}\|_{W^1_p(\Omega)}+\|\bar{\pi}\|_{W^1_p(\Omega)}+\|\bar{T}\|_{W^2_q(\Omega)}+\|\bar{\sigma}\|_{W^1_p(D_2)}+\|\bar{\nu}\|_{W^1_p(D_2)}]+$$

$$+\|\sigma\|^{p-1}_{W^1_p(D_2)}[\|\bar{T}\|_{W^2_q(\Omega)}\|\bar{\nu}\|_{W^1_p(D_2)}+\|\bar{\pi}\|_{W^1_p(\Omega)}+\|\bar{T}\|_{W^2_q(\Omega)}+\|\bar{\sigma}\|^2_{W^1_p(D_2)}],$$

ce qui implique que

$$\frac{d}{dt}\|\nabla_{(x,m)}\sigma\|^p_{L^p(D_2)}\leq$$

$$\leq C[\|\sigma\|^p_{W^1_p(D_2)}[1+\|\bar{v}\|_{W^2_p(\Omega)}+\|\bar{\pi}\|_{W^1_p(\Omega)}+\|\bar{T}\|_{W^2_q(\Omega)}+\|\bar{\sigma}\|_{W^1_p(D_2)}+\|\bar{\nu}\|_{W^1_p(D_2)}]$$

$$+(1+\|\sigma\|^p_{W^1_p(D_2)})\times$$

$$\times[\frac{1}{2}(\|\bar{T}\|^2_{W^2_q(\Omega)}+\|\bar{\nu}\|^2_{W^1_p(D_2)})+\frac{1}{2}(1+\|\bar{\pi}\|^2_{W^1_p(\Omega)})+\frac{1}{2}(1+\|\bar{T}\|^2_{W^2_q(\Omega)})+\|\bar{\sigma}\|^2_{W^1_p(D_2)}].$$

Donc

$$\frac{d}{dt}\|\nabla_{(x,m)}\sigma\|^p_{L^p(D_2)}\leq \tag{3.31}$$

$$\leq C[\|\sigma\|^p_{W^1_p(D_2)}[1+\|\bar{v}\|_{W^2_p(\Omega)}+\|\bar{\pi}\|_{W^1_p(\Omega)}+\|\bar{T}\|_{W^2_q(\Omega)}+\|\bar{\sigma}\|_{W^1_p(D_2)}+\|\bar{\nu}\|_{W^1_p(D_2)}]$$

$$+(1+\|\sigma\|^p_{W^1_p(D_2)})[1+\|\bar{T}\|^2_{W^2_q(\Omega)}+\|\bar{\nu}\|^2_{W^1_p(D_2)}+\|\bar{\pi}\|^2_{W^1_p(\Omega)}+\|\bar{\sigma}\|^2_{W^1_p(D_2)}]].$$

Pour arriver à l'estimation de σ, on somme les inégalités (3.28) et (3.31), de sorte qu'on obtient

$$\frac{d}{dt}\|\nabla_{(x,m)}\sigma\|^p_{L^p(D_2)}\leq$$

$$C[2(\|\sigma\|^p_{W^1_p(D_2)})[1+\|\bar{v}\|_{W^2_p(\Omega)}+\|\bar{\pi}\|_{W^1_p(\Omega)}+\|\bar{T}\|_{W^2_q(\Omega)}+\|\bar{\sigma}\|_{W^1_p(D_2)}+\|\bar{\nu}\|_{W^1_p(D_2)}]+$$

$$+2(1+\|\sigma\|^p_{W^1_p(D_2)})[1+\|\bar{T}\|^2_{W^2_q(\Omega)}+\|\bar{\nu}\|^2_{W^1_p(D_2)}+\|\bar{\pi}\|^2_{W^1_p(\Omega)}+\|\bar{\sigma}\|^2_{W^1_p(D_2)}].$$

On a donc

$$\frac{d}{dt}\|\sigma\|^p_{W^1_p(D_2)}\leq$$

$$\leq C[\|\sigma\|^p_{W^1_p(D_2)}[1+\|\bar{v}\|_{W^2_p(\Omega)}+\|\bar{\pi}\|_{W^1_p(\Omega)}+\|\bar{T}\|_{W^2_q(\Omega)}+\|\bar{\sigma}\|_{W^1_p(D_2)}+\|\bar{\nu}\|_{W^1_p(D_2)}]+$$

$$+(1+\|\sigma\|^p_{W^1_p(D_2)})[1+\|\bar{T}\|^2_{W^2_q(\Omega)}+\|\bar{\nu}\|^2_{W^1_p(D_2)}+\|\bar{\pi}\|^2_{W^1_p(\Omega)}+\|\bar{\sigma}\|^2_{W^1_p(D_2)}]],$$

ou

$$\frac{d}{dt}\|\sigma\|^p_{W^1_p(D_2)}\leq$$

$$c(1+\|\bar{v}\|_{W^2_p(\Omega)}+\|\bar{\pi}\|^2_{W^1_p(\Omega)}+\|\bar{T}\|^2_{W^2_q(\Omega)}+\|\bar{\sigma}\|^2_{W^1_p(D_2)}+\|\bar{\nu}\|^2_{W^1_p(D_2)})$$

$$(\|\sigma\|^p_{W^1_p(D_2)}+1).$$

En rappelant l'hypothèse $\sigma_0\in W^1_p(\Omega)$, on en déduit que

$$\|\sigma(.,.,t)\|^p_{W^1_p(D_2)}\leq \tag{3.32}$$

$$\|\sigma_0\|^p_{W^1_p(D_2)}\exp[C\int_0^t(1+\|\bar{v}\|_{W^2_p(\Omega)}+\|\bar{\pi}\|^2_{W^1_p(\Omega)}+\|\bar{T}\|^2_{W^2_q(\Omega)}+\|\bar{\sigma}\|^2_{W^1_p(D_2)}+\|\bar{\nu}\|^2_{W^1_p(D_2)})dt']$$

$$+\int_0^t(1+\|\bar{v}\|_{W^2_p(\Omega)}+\|\bar{\pi}\|^2_{W^1_p(\Omega)}+\|\bar{T}\|^2_{W^2_q(\Omega)}+\|\bar{\sigma}\|^2_{W^1_p(D_2)}+\|\bar{\nu}\|^2_{W^1_p(D_2)})\times$$

$$\exp[C\int_{t'}^t(1+\|\bar{v}\|_{W^2_p(\Omega)}+\|\bar{\pi}\|^2_{W^1_p(\Omega)}+\|\bar{T}\|^2_{W^2_q(\Omega)}+\|\bar{\sigma}\|^2_{W^1_p(D_2)}+\|\bar{\nu}\|^2_{W^1_p(D_2)})dt'']dt'.$$

Or d'après inégalité de Hölder on a

$$\int_0^t\|\bar{v}\|_{W^2_p(\Omega)}dt'\leq t^{\frac{p-1}{p}}\|\bar{v}\|_{L^p([0,t];W^2_p(\Omega))},$$

et

$$\int_0^t\|\bar{T}\|^2_{W^2_q(\Omega)}dt'\leq t^{\frac{q-2}{q}}\|\bar{T}\|^2_{L^q([0,t];W^2_q(\Omega))}.$$

D'autre part on a

$$\int_0^t \|\bar{\sigma}\|^2_{W_p^1(D_2)}dt' \leq t\|\bar{\sigma}\|^2_{L^\infty([0,t];W_p^1(D_2))},$$

analoguement pour $\int_0^t \|\bar{\nu}\|^2_{W_p^1(D_2)}dt'$ et $\int_0^t \|\bar{\pi}\|^2_{W_p^1(\Omega)}dt'$. En substituant ces relations dans (3.32) on obtient :

$$\|\sigma(.,.,t)\|^p_{W_p^1(D_2)} \leq$$

$$\{\|\sigma_0\|^p_{W_p^1(D_2)} + c[(1 + R^2_{(\bar{\pi},t)} + R^2_{(\bar{\sigma},t)} + R^2_{(\bar{\nu},t)})t + R_{(\bar{v},t)}t^{\frac{p-1}{p}} + R^2_{(\bar{T},t)}t^{\frac{q-2}{q}}]\}$$
$$\times \exp(c[(1 + R^2_{(\bar{\pi},t)} + R^2_{(\bar{\sigma},t)} + R^2_{(\bar{\nu},t)})t + R_{(\bar{v},t)}t^{\frac{p-1}{p}} + R^2_{(\bar{T},t)}t^{\frac{q-2}{q}}]),$$

avec $R_{(\bar{v},t)}, R_{(\bar{\sigma},t)}, R_{(\bar{\nu},t)}, R_{(\bar{\pi},t)}$, définiées précédement.

Le lemme est démontré.□

3.4 Equation de continuité pour l'eau solide

Passons maintenant à la résolution de l'équation (3.6). On a le lemme suivant :

Lemme 3.4 : *Soient données $\bar{v} \in \Theta^{(v)}_{t_1}$, $\bar{T} \in \Theta^{(T)}_{t_1}$, $\bar{\pi} \in C^0([0,t_1], W_p^1(\Omega))$, et $\bar{\nu} \in ([0,t_1], W_p^1(\mathbb{R}_+ \times \Omega))$ avec leur norme majorée par une constante R_0 dans les espaces prévus (indiqués). Alors il existe une constante $\bar{M}_1 < \infty$ telle que, pourvu que $\bar{\nu}(m,x,t) = 0$ pour $m \notin \left]\frac{m_a}{2}, \bar{M}_1\right[$, l'équation*

$$\partial_t \nu(m) + \nabla \cdot (\nu(m)\bar{w}(m)) + \partial_m[mh_{gs}(m)\nu(m)] = \tag{3.33}$$

$$= [h_{gs}(m) - K_{ls}(\bar{T},m)]\nu(m) + K_{sl}(\bar{T},m)\bar{\sigma}(m) + \frac{m}{2}\int_0^m \beta_s(m-m',m')\bar{\nu}(m')\times$$
$$\bar{\nu}(m-m')dm' - m\nu(m)\int_0^\infty \beta_s(m,m')\bar{\nu}(m')dm' + m\int_0^\infty Z_{ls}(m-m',m')\times$$

$$\bar{\nu}(m-m')\bar{\sigma}(m')dm'-m\nu(m)\int_0^\infty Z_{ls}(m,m')\bar{\sigma}(m')dm'-g_2(m)[\pi-\bar{\pi}_{v.s(s)}(\bar{T})]^-\nu(m),$$

avec la condition initial (2.26), (2.27) *admette une solution et une seule dans la classe :*

$$\nu \in C^0([0,t_1], W_p^1(\mathbb{R}_+\times\Omega)),$$

avec la propriété :

$$\nu(m,x,t)=0 \quad pour \quad m \notin \left]\frac{\bar{m}_a}{2},\bar{M}_1\right[, \tag{3.34}$$

satisfaisant à l'inégalitée :

$$\|\nu(.,.,t)\|^p_{W_p^1(\mathbb{R}_+\times\Omega)} = \|\nu(.,.,t)\|^p_{W_p^1(D_2)} \leq q_{\nu(t)}, \tag{3.35}$$

avec

$$q_{\nu(t)} = \{\|\nu_0\|^p_{W_p^1(D_2)} + c[(1+R^2_{(\bar{\pi},t)}+R^2_{(\bar{\sigma},t)}+R^2_{(\bar{\nu},t)})t + R_{(\bar{v},t)}t^{\frac{p-1}{p}} + R^2_{(\bar{T},t)}t^{\frac{q-2}{q}}]\} \tag{3.36}$$

$$\times \exp(c[(1+R^2_{(\bar{\pi},t)}+R^2_{(\bar{\sigma},t)}+R^2_{(\bar{\nu},t)})t + R_{(\bar{v},t)}t^{\frac{p-1}{p}} + R^2_{(\bar{T},t)}t^{\frac{q-2}{q}}]),$$

avec

$$R_{(\bar{v},t)} = \|\bar{v}\|_{W_p^{2,1}(Q_t)}, \quad R_{(\bar{T},t)} = \|\bar{T}\|_{W_q^{2,1}(Q_t)}$$

$$R_{(\bar{\pi},t)} = \|\bar{\pi}\|_{C^0([0,t],W_p^1(\Omega))}, \quad R_{(\bar{\sigma},t)} = \|\bar{\sigma}\|_{C^0([0,t],W_p^1(D_2))},$$

$$R_{(\bar{\nu},t)} = \|\bar{\nu}\|_{C^0([0,t],W_p^1(D_2))}.$$

Démonstration : Résolvons l'équation (3.33) le long des caractéristiques $(m(t),x(t))_{t\in[0,t_1]}$ définies comme solution du problème de Cauchy

$$\frac{dm(t)}{dt} = m(t)h_{gs}(\bar{T},\bar{\pi},t,x(t)), \quad \frac{dx(t)}{dt} = \bar{w}(m(t),t,x(t))$$

$$m(0)=m_0\in[0,\bar{M}_1], \quad x(0)=x_0\in\Omega.$$

On pose $\tilde{U}_l = (mh_{gs}, \bar{w})$ et $\nabla_{(x,m)} = (\partial_m, \partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \partial_{x_3})$, alors l'équation (3.33) peut être écrite dans la forme

$$\partial_t \nu + \nabla_{(m,x)} \cdot (\nu(m)\tilde{U}_s) = [h_{gs}(m) - K_{ls}(\bar{T}, m)]\nu(m) + K_{sl}(\bar{T}, m)\bar{\sigma}(m)$$

$$+\frac{m}{2}\int_0^m \beta_s(m', m-m')\bar{\nu}(m')\bar{\nu}(m-m')dm' - m\nu(m)\int_0^\infty \beta_s(m, m')\bar{\nu}(m')dm'$$

$$+m\int_0^m Z_{ls}(m-m', m')\bar{\nu}(m-m')\bar{\sigma}(m')dm' - m\nu(m)\int_0^\infty Z_{ls}(m', m)\bar{\sigma}(m')dm'$$

$$-g_2(m)[\bar{\pi} - \bar{\pi}_{vs(s)}(\bar{T})]^- \nu.$$

Si on considère la dérivée totale de ν : $\frac{d}{dt} = \partial_t + mh_{gs}\partial_m + \bar{w} \cdot \nabla$ dans l'espace $D_2 =]0, \bar{M}_1[\times\Omega$, alors on peut écrire l'équation (3.33) dans la forme

$$\frac{d\nu(m)}{dt} = -\nu(m)\nabla_{(m,x)} \cdot \tilde{U}_s + [h_{gs}(m) - K_{ls}(\bar{T}, m)]\nu(m) + K_{sl}(\bar{T}, m)\bar{\sigma}(m)$$

$$+\frac{m}{2}\int_0^m \beta_s(m', m-m')\bar{\nu}(m')\bar{\nu}(m-m')dm' - m\nu(m)\int_0^\infty \beta_s(m, m')\bar{\nu}(m')dm'$$

$$+m\int_0^m Z_{ls}(m-m', m')\bar{\nu}(m-m')\bar{\sigma}(m')dm' - m\nu(m)\int_0^\infty Z_{ls}(m', m)\bar{\sigma}(m')dm'$$

$$-g_2(m)[\bar{\pi} - \bar{\pi}_{vs(s)}(\bar{T})]^- \nu.$$

Cette équation, ayant la dérivée totale $\frac{d\sigma}{dt}$ au premier membre, peut être résolue le long de la trajectoire $(m(t), x(t))$. Donc en procédant de manière analogue à la démonstration du lemme 3.3, on montre l'existence et l'unicité de la solution, sous l'hypothèse de la régularité des données. La solution obtenue est à la forme suivante :

$$\nu(m(t), x(t), t) = \nu_0(m_0, x_0)\exp\Big(\int_0^t a_2(t')dt'\Big) + \int_0^t b_2(t')\exp\Big(\int_{t'}^t a_2(t'')dt''\Big)dt',$$

où

$$a_2(t') = -\nabla_{(m,x)} \cdot \tilde{U}_s(t', y_{t'}(m_0, x_0)) + h_{gs}(m) - K_{ls}(\bar{T}, m) - m \int_0^\infty \beta_s(m, m')\bar{\nu}(m')dm'$$

$$-m \int_0^\infty Z_{ls}(m', m)\bar{\sigma}(m')dm' - g_2(m)[\bar{\pi} - \bar{\pi}_{vs}(\bar{T})]^-,$$

$$a_2(t'') = -\nabla_{(m,x)} \cdot \tilde{U}_s(t'', y_{t''}(m_0, x_0)) + h_{gs}(m) - K_{ls}(\bar{T}, m) - m \int_0^\infty \beta_s(m, m')\bar{\nu}(m')dm'$$

$$-m \int_0^\infty Z_{ls}(m', m)\bar{\sigma}(m')dm' - g_2(m)[\bar{\pi} - \bar{\pi}_{vs}(\bar{T})]^-,$$

$$b_2(t') = K_{sl}(\bar{T}, m)\bar{\sigma}(m) + \frac{m}{2} \int_0^m \beta_s(m', m - m')\bar{\nu}(m')\bar{\nu}(m - m')dm'$$

$$+m \int_0^m Z_{ls}(m - m', m')\bar{\nu}(m - m')\bar{\sigma}(m')dm'.$$

On remarque que, comme dans le cas du lemme 3.3, le lemme 3.4 reste valable même si on substitue $\bar{\pi} * \theta$ à la place de $\bar{\pi}$. Pour la suivante, nous avons besoin de la régularité de $\bar{\pi} * \theta$ et donc nous la mentionnons explicitement.

Maintenant, pour prouver le lemme, il suffit de démontrer l'inégalité (3.35).

Par un calcule similaire au lemme 3.3 et après des simplifications on obtient :

Si, on multiplie l'équation (3.33) par $\nu^{p-1}(m)$ et on l'intègre sur D_2, on trouve :

$$\frac{d}{dt}\|\nu\|^p_{L^p(D_2)} \leq$$

$$\leq C[\|\nu\|^p_{W^1_p(D_2)}(1 + \|\bar{w}\|_{W^2_p(\Omega)} + \|\bar{\pi}\|_{W^1_p(\Omega)} + \|\bar{T}\|_{W^2_q(\Omega)} + \|\bar{\sigma}\|_{W^1_p(D_2)} + \|\bar{\nu}\|_{W^1_p(D_2)})$$

$$+(\|\nu\|^p_{W^1_p(D_2)} + 1)(\|\bar{T}\|^2_{W^2_q(\Omega)} + \|\bar{\nu}\|^2_{W^1_p(D_2)} + \|\bar{\sigma}\|^2_{W^1_p(D_2)})].$$

$$\frac{d}{dt}\|\nu\|^p_{L^p(D_2)} \leq \tag{3.37}$$

$$C[\|\nu\|^p_{W^1_p}(1 + \|\bar{w}\|_{W^2_p(\Omega)} + \|\bar{\pi}\|_{W^1_p(\Omega)(D_2)} + \|\bar{T}\|_{W^2_q(\Omega)} + \|\bar{\sigma}\|_{W^1_p(D_2)} + \|\bar{\nu}\|_{W^1_p(D_2)})$$

$$
\begin{aligned}
&-\int_{D_2} m \int_0^\infty |\nabla\sigma|^{p-2}\nabla\sigma\cdot\beta_l(m,m')\nabla\sigma(m)\bar{\sigma}(m')dm'dxdm\\
&-\int_{D_2} m \int_0^\infty |\nabla\sigma|^{p-2}\nabla\sigma\cdot\beta_l(m,m')\sigma(m)\nabla\bar{\sigma}(m')dm'dxdm\\
&-\int_{D_2} g_1(m)|\nabla\sigma|^{p-2}\nabla\sigma\cdot\nabla[\bar{\pi}-\bar{\pi}_{v.s(l)}(\bar{T})]^-\sigma(m)dxdm\\
&-\int_{D_2} g_1(m)|\nabla\sigma|^{p-2}\nabla\sigma\cdot\nabla\sigma(m)[\bar{\pi}-\bar{\pi}_{v.s(l)}(\bar{T})]^-dxdm.
\end{aligned}
$$

Pour avoir une estimation de $|\nabla\sigma|^{p-2}\nabla\sigma\cdot\nabla(mh_{gl})\partial_m\sigma$, $|\nabla\sigma|^{p-2}\nabla\sigma\cdot\nabla\partial_m(mh_{gl})\sigma$, et $|\nabla\sigma|^{p-2}\nabla\sigma\cdot\nabla(h_{gl}(m)-K_{ls}(m))\sigma(m)$ nous avons besoin d'une régularité plus élevée de $\bar{\pi}$. Pour cela nous utilisons les propriétés régularisantes de la moyenne locale $\bar{\pi}*\theta$. Remarquons qu'on a

$$
\begin{aligned}
&|\int_{D_2}|\nabla\sigma|^{p-2}\nabla\sigma\cdot\nabla(mh_{gl})\partial_m\sigma dxdm|\leq\\
&\leq C[\|\bar{\pi}\|_{W_p^1(\Omega)}+\|\bar{T}\|_{W_q^2(\Omega)}]\|\nabla\sigma\|_{L^p(D_2)}^{p-1}\|\partial_m\sigma\|_{L^p(D_2)}.
\end{aligned}
$$

Analoguement

$$
\begin{aligned}
&|\int_{D_2}|\nabla\sigma|^{p-2}\sigma\nabla\sigma\cdot\nabla(\partial_m(mh_{gl}))dxdm|\leq\\
&\leq C[\|\bar{\pi}\|_{W_p^1(\Omega)}+\|\bar{T}\|_{W_q^2(\Omega)}]\|\nabla\sigma\|_{L^p(D_2)}^{p-1}\|\sigma\|_{L^\infty(D_2)},
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
&|\int_{D_2}|\nabla\sigma|^{p-2}\nabla\sigma\cdot\nabla(h_{gl}(m)-K_{ls}(m))\sigma(m)dxdm|\leq\\
&\leq C[\|\bar{\pi}\|_{W_p^1(\Omega)}+\|\bar{T}\|_{W_q^2(\Omega)}]\|\nabla\sigma\|_{L^p(D_2)}^{p-1}\|\sigma\|_{L^p(D_2)}.
\end{aligned}
$$

De plus, comme $\bar{u}$ vérifie la relation

$$\nabla\cdot\bar{u}=\nabla\cdot\bar{v}-\frac{g}{\alpha_l(m)}\vec{e}_3,$$

en substituant ces relations dans l'équation, on aura

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\|\nabla\sigma\|^p_{L^p(D_2)} \leq$$

$$\leq -\int_0^{\bar{M}_1}\int_{\partial\Omega}|\nabla\sigma|^p\bar{u}_i\cdot n_i dSdm + \frac{|p-1|}{p}\|\nabla\sigma\|^p_{L^p(D_2)}\|\nabla\cdot\bar{v}\|_{L^\infty(\Omega)}+$$

$$+\frac{|p-1|}{p}\|\nabla\sigma\|^p_{L^p(D_2)}\|\frac{g}{\alpha_l}\vec{e}_3\|_{L^\infty(D_2)} + \|\nabla\sigma\|^p_{L^p(D_2)}\sum_{i,j=1}^{3}\|\partial_{x_j}\bar{v}_i\|_{L^\infty(\Omega)}+$$

$$+\|\nabla\sigma\|^p_{L^p(D_2)}\sum_{i,j=1}^{3}\|\frac{1}{\alpha_l}\partial_{x_j}\nabla\Phi\|_{L^\infty(D_2)} + \|\nabla(\nabla\cdot\bar{v})\|_{L^p(\Omega)}\|\nabla\sigma\|^{p-1}_{L^p(D_2)}\|\sigma\|_{L^\infty(D_2)}$$

$$+\|\nabla\sigma\|^{p-1}_{L^p(D_2)}\|\sigma\|_{L^p(D_2)}\|\frac{1}{\alpha_l}\nabla(\Delta\Phi)\|_{L^\infty(D_2)}+\frac{|p-1|}{p}\|\partial_m(mh_{gl})\|_{L^\infty(D_2)}\|\nabla\sigma\|^p_{L^p(D_2)}$$

$$+\|\nabla(\partial_m mh_{gl})\|_{L^p(D_2)}\|\nabla\sigma\|^{p-1}_{L^p(D_2)}\|\sigma\|_{L^\infty(D_2)}+$$

$$+\|\nabla(mh_{gl})\|_{L^\infty(D_2)}\|\nabla\sigma\|^{p-1}_{L^p(D_2)}\|\partial_m\sigma\|_{L^p(D_2)}+$$

$$+\|\nabla(h_{gl}(m)-K_{ls}(m))\|_{L^p(D_2)}\|\nabla\sigma\|^{p-1}_{L^p(D_2)}\|\sigma\|_{L^\infty(D_2)}+$$

$$+\|\nabla\sigma\|^p_{L^p(D_2)}\|h_{gl}(m)-K_{ls}(m)\|_{L^\infty(D_2)}+$$

$$+\bar{M}c_\beta\|\nabla\sigma\|^{p-1}_{L^p(D_2)}\|\nabla\bar{\sigma}\|_{L^p(D_2)}\|\bar{\sigma}\|_{L^\infty(D_2)}+\bar{M}c_\beta\|\nabla\sigma\|^{p-1}_{L^p(D_2)}\|\bar{\sigma}\|_{L^\infty(D_2)}\|\nabla\bar{\sigma}\|_{L^p(D_2)}$$

$$+\bar{M}c_\beta\|\nabla\sigma\|^p_{L^p(D_2)}\|\bar{\sigma}\|_{L^\infty(D_2)} + \bar{M}c_\beta\|\nabla\sigma\|^{p-1}_{L^p(D_2)}\|\sigma\|_{L^\infty(D_2)}\|\nabla\bar{\sigma}\|_{L^p(D_2)}+$$

$$+c\|\nabla\sigma\|^{p-1}_{L^p(D_2)}\|\nabla[\bar{\pi}*\theta-\bar{\pi}_{vs(l)}(\bar{T})]^+\|_{L^p(D_2)}\|\sigma\|_{L^\infty(D_2)}+$$

$$+c\|\nabla\sigma\|^p_{L^p(D_2)}\|[\bar{\pi}*\theta-\bar{\pi}_{vs(l)}(\bar{T})]^+\|_{L^\infty(D_2)},$$

comme on a déjà vu

$$-\int_0^{\bar{M}_1}\int_{\partial\Omega}|\nabla\sigma|^p\bar{u}_i\cdot n_i dSdm \leq -\int_0^{\bar{M}_1}\int_{\Gamma_0}|\nabla\sigma|^p\bar{u}_i\cdot n_i dSdm,$$

ce qui implique que

$$\frac{d}{dt}\|\nabla\sigma\|^p_{L^p(D_2)} \leq \tag{5.16}$$

$$\leq -\int_0^{\bar{M}_1}\int_{\Gamma_0}|\nabla\sigma|^p\bar{u}_i\cdot n_i dSdm + C[\|\nabla\sigma\|^p_{L^p(D_2)}\|\nabla\cdot\bar{v}\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\nabla\sigma\|^p_{L^p(D_2)}$$
$$+\|\nabla(\nabla\cdot\bar{v})\|_{L^p(\Omega)}\|\nabla\sigma\|^{p-1}_{L^p(D_2)}\|\sigma\|_{L^\infty(D_2)} + \|\nabla\sigma\|^{p-1}_{L^p}\|\sigma\|_{L^p(D_2)}+$$
$$+3\|\nabla\sigma\|^p_{L^p(D_2)}(\|\bar{\pi}\|_{W^1_p(\Omega)} + \|\bar{T}\|_{W^2_q(\Omega)})+$$
$$+\|\partial_m\sigma\|_{L^p(D_2)}(\|\bar{\pi}\|_{W^1_p(\Omega)} + \|\bar{T}\|_{W^2_q(\Omega)})\|\nabla\sigma\|^{p-1}_{L^p(D_2)}+$$
$$+2(\|\bar{\pi}\|_{W^1_p(\Omega)} + \|\bar{T}\|_{W^2_q(\Omega)})\|\nabla\sigma\|^{p-1}_{L^p(D_2)}\|\sigma\|_{L^\infty(D_2)}+$$
$$+3\|\nabla\sigma\|^{p-1}_{L^p(D_2)}\|\nabla\bar{\sigma}\|_{L^p(D_2)}\|\bar{\sigma}\|_{L^\infty(D_2)} + \|\nabla\sigma\|^p_{L^p(D_2)}\|\bar{\sigma}\|_{L^\infty(D_2)}+$$
$$+\|\nabla\sigma\|^{p-1}_{L^p(D_2)}\|\sigma\|_{L^\infty(D_2)}\|\nabla\bar{\sigma}\|_{L^p(D_2)}].$$

Après tout ces calculs, on peut pas arriver à une estimation pour σ car le terme $|\nabla\sigma|^p$ de l'intègrale $-\frac{1}{p}\int_0^{\bar{M}_1}\int_{\partial\Omega}|\nabla\sigma|^p\bar{u}\cdot nds$ n'est pas encore connait sur la frontière. C'est-à-dire que pour le moment on peut pas aller plus loin à cause de cette difficulté. Donc, pour surmonter la difficulté il faut trouver une condition sur la frontière pour que $|\nabla\sigma|^p$ soit bien défini. Pour cette raison, on renvoit ce problème à des études futures.

Bibliographie

[1] Haïm Brezis : *Analyse fonctionelle (Théorie et applications)*, Masson 1987.

[2] H.Fujita Yashima : *Modélisation de la physique des fluides*, cours de l'université de Guelma, 2010

[3] Ladyzhenskaya, O. A., Solonnikov, V. A., Ural'tseva, N. N. : *Linear and quasi-linear equations of parabolic type (translated from Russian). Amer. Math. Soc., 1968.*

[4] H.Fujita Yashima, V.Campana, M.Z.Aissaoui : *Système d'équations d'un modèle du mouvement de l'air impliquant la transition de phase de l'eau dans l'atmosphère.* Quaderno Dip. Mat. Univ. Torino, N. 12/2009

[5] L.Kantorovitch, G.Akilov : *Analyse fonctionelle, Tome 2* (*traduit de russe*). EDITIONS MIR, 1981.

[6] Steave C.SELVADURAY, Hisao FUJITA YASHIMA : *Equazioni del moto dell'aria e transizione di fase dell'acqua nei tre stati :Gassoso,Liquido e Solido.* (*Mécanique des fluides.*) à paraître sur Memorie Accad.Sci.Torino.