République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 – Guelma

Faculté de Mathématiques et de l'Informatique et Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire de Fin d'Etude
Master Académique en Mathématiques
Option : EDP

THEME

Turbulence et opérateur de moyenne locale dans les équations des fluides visqueux

Présenté par :
Benssaad Meryem

Dirigé par : Dr. F. Ellaggoune **MCA** **Univ. Guelma**

Jury :

Examinateur 1 : Dr. H. Fujita Yashima **Prof** **Univ-Guelma**
Examinateur 2 : Dr. A. Debbouche **MCA** **Univ-Guelma**

Session Juin 2012

Turbulence et opérateur de moyenne locale dans les équations des fluides visqueux

Benssaad Meryem
Mémoire de master en mathématiques
Université de Guelma

2 juin 2012

Remerciements

Je tiens à exprimer mes remerciements les plus vifs à mon encadreur Mr Ellaggoune Fateh, qui n'a épargné aucun effort pour m'assister et m'orienter durant ma période de projet, pour avoir accepté d'encadrer ce projet de fin d'études, pour la confiance qu'il m'a témoigné.

De la même manière, j'adresse mes vifs remerciements au Docteur Hisao Fujita Yashima, pour son soutien, sa grande disponibilité et surtout ses conseils et ses encouragements tout au long de mes recherches.

Je remercie également Mr Aissaoui Mohamed Zine responsable de notre Master et directeur du laboratoire de Mathématiques appliquées et de modélisation.

Mes remerciements vont à tous les membres de ma famille et mes parents sans qui je ne serais pas là. Merci de m'avoir toujours soutenu tout au long de ces années d'études. Enfin, que tout ceux qui ont contribué de prés ou de loin à la réalisation de mon projet, trouvent ici l'expression de mes sentiments les plus distingués.

Je remercie, enfin, les membres du jury d'avoir accepté d'examiner ce modeste travail.

Table des matières

Résumé

On considère les équations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible, équation de Navier-Stokes, et y applique un opérateur de moyenne locale en forme d'un opérateur intégral. En analysant le comportement du terme non linéaire, on charche à estimer l'éventuel transfert de l'énergie dans [5] on a établi une estimation relative à l'opérateur de moyenne locale d'ordre 1. Dans le présent travail nous allons établir une estimation relative à l'opérateur de moyenne locale d'ordre m

Chapitre 1

Introduction :

La turbulence ou écoulement turbulent s'observe assez souvent dans la nature et intéresse beaucoup des physiciens et d'ingégneurs, qui s'occupent de la mécanique dés fluides et ses applications. Malgré un grand nombre de recherches sur le sujet, la nature Physique-Mathématique de la turbulence n'est pas encore éclaricie.

Dans ce mémoire, nous nous inspirons de la théorie de Kolmogorov et Obukhov de 1941 [2] (la théorie K41) pour étudier le problème de la turbulence dans le cas de trois dimensions. La théorie de Kolmogorov et Obukhov sont basés sur le modèle physique qui suppose le champ de vitesse d'un écoulement turbulent caractérisé par des perturbations de différentes longueurs qui exercent des influences différentes qualitativement sur un phénomène turbulent.

Nous considérons les équations de Navier-Stokes sur le tore à trois dimensions $\mathbb{T}^3$ et de leur solution stationnaire. Même si ce domaine n'est pas naturel pour étudier un mouvement fluide, le choix de la $\mathbb{T}^3$ nous permet de faire usage des séries de Fourier.

Pour étudier la turbulence, nous examinons les relations entre $\bar{v}$ le moyenne locale de la vitesse v et la fluctuation $u = v - \bar{v}$ et pour ce faire, nous introduisons une famille des opérateurs moyenne locale paramétrée par des longueurs caractéristiques $\varepsilon_q > 0, \quad q = 1, .., m$, plus précisément le produit de convolution avec la fonction

$$\Theta_{\{\varepsilon\}} = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{1 + \sum_{q=1}^{m} \varepsilon_q |k|^{2q}}\right)$$

Cet opérateur, par ces propriétés particulières, donne des caractérisations intéressantes de la moyenne locale de la solution de l'équation aux dérévées partielles, En particulier en l'appliquant aux équations de Navier-Stokes, on pourra donner des caractérisations de la moyenne locale et de la fluctuation, qui n'est autre que la différence de la solution et de la moyenne locale.

L'un des thèmes principaux de l'étude de la turbulence est le transfert d'énergie éventuelle ("cascade") des mouvements de grande longueur à des mouvements de faible longueur (à partir de macrocomposent ou microcomposent, en utilisant la langage de Obukhov). Kolmogorov et Obukhov suggèrent que la cause d'un transfert d'énergie éventuelle pourrait être attribué à la présence du terme non linéaire. Le but de ce mémoire est de donner une estimation du transfert d'énergie éventuelle des mouvements de grande longueur (moyenne locale) à des mouvements de faible longueur (fluctuation) à l'état stationnaire, qui correspond à la solution stationnaire.

Cette étude suit la travail de Carretto [5], où elle a étudié le cas $m = 1$ (c'est-à-dire $\varepsilon_1 = \delta > 0$, $\varepsilon_2 = ... = \varepsilon_m = 0$) ; donc le résultat du présent mémoire généralise le résultat obtenu dans [5]

Chapitre 2

Rappel

2.1 Transformation de Fourier :

Etant donnée une fonction f Lebesgue-mesurable dans $\mathbb{R}^n$, à valeurs réelles ou complexes, on se propose d'étudier sa transformée de Fourier $\hat{f}$ définie par :

$$\hat{f}\begin{cases} \mathbb{R}^n \to C \\ \xi \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ix\xi}dx, \end{cases} \tag{2.1}$$

avec $x \in \mathbb{R}^n$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, et $x\xi = x_1\xi_1 + ... + x_n\xi_n$.

Il existe des variantes dans la définition de la transformée de Fourier. On rencontre aussi :

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2i\pi x\xi}dx,$$

ou :

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ix\xi}dx.$$

2.2 Transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^n)$:

Définition 2.2.1 *Pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, la fonction $\hat{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ est continue et bornée par $\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$ (c'est-à-dire $\|\hat{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$).*

La fonction $\hat{f}$, qu'on note aussi $\mathcal{F}(f)$, est appelée la transformée de Fourier de f, et l'application

$$\mathcal{F} : \begin{cases} L^1(\mathbb{R}^n) \to C_0(\mathbb{R}^n) \\ \quad f \mapsto \hat{f} \end{cases} \tag{2.2}$$

est la transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Lemme 2.2.1 ***(Riemann-Lebesgue)*** *: Pour $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\hat{f}$ existe, et on a*

$$\lim_{|\xi| \to +\infty} \hat{f}(\xi) = 0.$$

Proposition 2.2.1 *La fonction f est dans $L^1(\mathbb{R}^n)$ donc la fonction $\hat{f}$ est aussi intégrable c'est-à-dire $\hat{f}$ est bien définie*

L'aplication :

$$\begin{cases} \mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^\infty(\mathbb{R}^n) \\ \qquad f \mapsto \mathcal{F}(f), \end{cases}$$

est un application linéaire continue de $L^1(\mathbb{R}^n)$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Remarque 2.2.1 **1.***On note $\overline{\mathcal{F}}$ la transformation de Fourier conjuguée, donnée sur $L^1(\mathbb{R}^n)$ par*

$$\overline{\mathcal{F}}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{ix\xi} dx.$$

2.*Soit f une fonction définiée dans $\mathbb{R}^n$.*

a. *Si f est à valeurs complexes, on note $\overline{f}$ sa conjuguée.*

b. *La symétrisée f_σ de f est la fonction définie par $f_\sigma(x) = f(-x)$.*

c. *La translatée $\tau_a f$ de f est la fonction définie par $\tau_a f(x) = f(x-a)$ où a est un point donné de $\mathbb{R}^n$.*

Théorème 2.2.1 ***(Formule d'inversion) :*** *Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ alors*

$$\hat{\hat{f}} = (2\pi)^n f_\sigma \qquad\qquad p.p.$$

En d'autres termes, on a pour presque tout x dans $\mathbb{R}^n$

$$\hat{\hat{f}} = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)e^{ix\xi}d\xi.$$

Proposition 2.2.2 *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.*

1.*Pour $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ fixé,on a*

$$\mathcal{F}(f(\lambda x))(\xi) = \frac{1}{|\lambda|^n}\mathcal{F}(\frac{\xi}{\lambda}).$$

2.*Pour $a \in \mathbb{R}^n$ fixé, on a*

$$\mathcal{F}(\tau_a f)(\xi) = e^{-ia\xi}\mathcal{F}(f)(\xi) \quad et \quad \mathcal{F}(e^{ia\xi}f(x))(\xi) = \tau_a(\mathcal{F}(f))(\xi).$$

2.2.1 Convolution et Transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^n)$:

Un des résultats fondamentaux de ce chapitre fait le lien entre la transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^n)$ et la convolution. Il permet notamment de ramener la résolution des équations de convolution (et donc des équations aux dérivées partielles à coefficients constants) à des problémes de division.

Théorème 2.2.2 *Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ avec $1 \leq p \leq \infty$. Alors, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$, la fonction*

$$y \mapsto f(x-y)g(y),$$

est intégrable sur $\mathbb{R}^n$, on pose

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy.$$

Alors,

$$f * g \in L^1(\mathbb{R}^n) \quad \text{et} \quad \|f * g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^p}. \tag{2.3}$$

Proposition 2.2.3 *Pour tous $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, on a*

$$\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}. \tag{2.4}$$

Théorème 2.2.3 ***(Formule de dualité)*** *: Pour tous $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, on a*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{g}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)g(\xi)d\xi. \tag{2.5}$$

Proposition 2.2.4 *Si $f, \hat{f}$ et g, sont dans $L^1(\mathbb{R}^n)$, alors $fg \in L^1(\mathbb{R}^n)$, et de plus on a*

$$\widehat{fg} = \frac{1}{(2\pi)^n}\hat{f} * \hat{g}. \tag{2.6}$$

$$\overline{\mathcal{F}}(fg) = \overline{\mathcal{F}}(f) * \overline{\mathcal{F}}(g). \tag{2.7}$$

2.3 Transformation de Fourier d'une dérivée :

Soit f une fonction réelle ou complexe, différentiable en un point a de $\mathbb{R}^n$. On note $\partial_j f(a)$, la j-ième dérivée partielle de f on a :

$$\partial_{x_j} f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a_1, ..., a_n),$$

où $a = (a_1, ..., a_n)$.

Proposition 2.3.1 *Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap C^1(\mathbb{R}^n)$ et $j \in [1, n] \cap \mathbb{N}$.*
Si $\partial_{x_j} f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, alors

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n, \widehat{\partial_{x_j} f}(\xi) = i\xi_j \hat{f}(\xi). \tag{2.8}$$

Remarque 2.3.1 *Si f est un fonction de classe $C^2(\mathbb{R}^n) \cap H^2(\mathbb{R}^n)$, on a :*

$$\mathcal{F}((1 - \varepsilon\Delta)f(x))(\xi) = (1 + \varepsilon|\xi|^2)\hat{f}(x).$$

2.3.1 Corollaire :

L'opérateur :

$$(1 - \varepsilon\Delta)^{-1} : H^k(\mathbb{R}^3) \to H^{k+2}(\mathbb{R}^3). \tag{2.9}$$

où $k \in N$

2.3.2 Dérivée d'une Transformée de Fourier :

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, telle que la fonction $g(x) = x_j f(x)$ soit dans $L^1(\mathbb{R}^n)$. Alors $\hat{f}$ admet une dérivée $\partial_{\xi_j} \hat{f}$ continue et bornée sur $\mathbb{R}^n$, donnée par

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n, \partial_{\xi_j} \mathcal{F}(f)(\xi) = -i\mathcal{F}(x_j f)(\xi). \tag{2.10}$$

2.4 Operateur de moyenne locale :

Considérons une fonction $f(x)$ définie sur $\mathbb{R}^n$, au moins localement intégrable, à valeurs réelles. Si nous voulons considérer sa moynne locale, nous pouvons définir

$$\bar{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)\Theta(y)dy, \tag{2.11}$$

avec une fonction convenable $\Theta(\cdot)$ telle que

$$\Theta(x) \geq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n, \tag{2.12}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Theta(x)dx = 1. \tag{2.13}$$

En outre, pour que $\tilde{f}(x)$ soit une moyenne locale, il faut que $\Theta(x)$ soit relativement grande pour $|x|$ petit et qu'elle soit petite (ou nulle) pour $|x|$ grand.

2.5 Définition de l'operateur de moyenne locale d'ordre 1 :

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 2, si $u(\cdot)$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n) \cap H^2(\mathbb{R}^n)$, alors on a :

$$\mathcal{F}((1-\varepsilon\Delta)u)(\xi) = (1+\varepsilon|\xi|^2)\hat{u}(\xi), \tag{2.14}$$

donc si

$$\varphi = (1-\varepsilon\Delta)u, \tag{2.15}$$

alors, on a

$$\hat{\varphi}(\xi) = (1+\varepsilon|\xi|^2)\hat{u}(\xi),$$

où

$$\frac{\hat{\varphi}(\xi)}{1+\varepsilon|\xi|^2} = \hat{u}(\xi),$$

si on applique la transformation inverse de Fourier, on a :

$$u(x) = \overline{\mathcal{F}}\left(\frac{\hat{\varphi}(\xi)}{1+\varepsilon|\xi|^2}\right) = \left(\overline{\mathcal{F}}\left(\frac{1}{1+\varepsilon|\xi|^2}\right) * \varphi\right)(x). \tag{2.16}$$

Proposition 2.5.1 *On a*

$$\frac{1}{1+\varepsilon|\xi|^2} \in L^2(\mathbb{R}^n) \qquad pour \quad n = 1, 2, 3$$

et n'appartient pas à $L^2(\mathbb{R}^n)$, pour $n \geq 4$

Démonstration : On a

$$\frac{1}{1+\varepsilon|\xi|^2} \in L^2(\mathbb{R}^n) \Longleftrightarrow \frac{1}{(1+\varepsilon|\xi|^2)^2} \in L^1(\mathbb{R}^n),$$

or

$$\frac{1}{(1+\varepsilon|\xi|^2)^2} \leq 1, \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

$$\frac{1}{(1+\varepsilon|\xi|^2)^2} \leq \frac{1}{\varepsilon^2|\xi|^2}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+\varepsilon|\xi|^2)^2} d\xi \leq \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}} 1|s^{n-1}|r^{n-1}dr + \int_{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon^2 r^4}|s^{n-1}|r^{n-1}dr < \infty,$$

pour $n = 1, 2, 3$

donc

$$\frac{1}{1+\varepsilon|\xi|^2} \in L^2(\mathbb{R}^n) \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, 3.$$

Nous définissons

$$\boxed{\Theta_\varepsilon(x) = \overline{\mathcal{F}}\left(\frac{1}{1+\varepsilon|\xi|^2}\right).}$$

Proposition 2.5.2 *On a :*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Theta_\varepsilon(x)dx = 1 \qquad \forall \varepsilon > 0. \tag{2.17}$$

Démonstration : On a

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Theta_\varepsilon(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \Theta_\varepsilon(x)e^{-2\pi i x \cdot 0}dx = \mathcal{F}(\Theta_\varepsilon)(0) = \frac{1}{1+\varepsilon|\xi|^2}\bigg|_{\varepsilon=0} = 1$$

2.6 Définition de l'operateur de moyenne locale d'ordre m :

$$\mathcal{F}((1+\sum_{k=1}^{m}\varepsilon_k(-1)^k\Delta^k)u)(\xi)=(1+\sum_{k=1}^{m}\varepsilon_k|\xi|^{2k})\hat{u}(\xi), \tag{2.18}$$

donc si

$$\varphi_{\{\varepsilon\}}=(1+\sum_{k=1}^{m}\varepsilon_k(-1)^k\Delta^k)u, \tag{2.19}$$

alors, on a

$$\hat{\varphi}_{\{\varepsilon\}}(\xi)=(1+\sum_{k=1}^{m}\varepsilon_k|\xi|^{2k})\hat{u}(\xi).$$

Ou

$$\frac{\hat{\varphi}_{\{\varepsilon\}}(\xi)}{1+\sum\limits_{k=1}^{m}\varepsilon_k|\xi|^{2k}}=\hat{u}(\xi),$$

si on applique la transformation inverse de Fourier, on a

$$u(x)=\overline{\mathcal{F}}\left(\frac{\hat{\varphi}_{\{\varepsilon\}}(\xi)}{1+\sum\limits_{k=1}^{m}\varepsilon_k|\xi|^{2k}}\right)=\left(\overline{\mathcal{F}}\left(\frac{1}{1+\sum\limits_{k=1}^{m}\varepsilon_k|\xi|^{2k}}\right)*\varphi_{\{\varepsilon\}}\right)(x).$$

Remarque : On a :

$$\frac{1}{1+\sum\limits_{k=1}^{m}\varepsilon_k|\xi|^{2k}}\in L^2(\mathbb{R}^n)\quad \text{pour,}\quad n<4m.$$

On note

$$\Theta_{\{\varepsilon\}}(x)=\overline{\mathcal{F}}\left(\frac{1}{1+\sum\limits_{k=1}^{m}\varepsilon_k|\xi|^{2k}}\right),$$

telle que

$$\int_{\mathbb{R}^n}\Theta_{\{\varepsilon\}}(x)dx=1\qquad \forall\varepsilon>0.$$

2.7 Equation de Navier-Stockes :

Les propriétés mathématiques du système d'équations du movement d'un fluide visqueux et incomppressible, appelées équations de Navier-Stokes, constituent la base technique pour l'étude mathématiques de toutes les équations de la mécaniques du fluides. En effet, les équations de Navier-Stokes peuvent être étudiées dans des espaces fonctionnels qui peuvent servir de base même pour les autres équations. Pour cette raison, nous prêtons une attention particuliére aux équations de Navier-Stokes.

2.7.1 Conservation de la masse :

Soit $\rho(x,t)$, la densité d'un fluide au point x à l'instant t et $v(x,t)$ est la vitesse

la loi de conservation de la masse d'un fluide contenu dans un domaine Ω s'écrit

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) = 0 \tag{2.20}$$

il s'appelle aussi l'équation de continuité

2.7.2 conservations de la quantité de mouvement :

On rappelle que l'équation de la conservation dans le cas du M.M

$$\frac{d}{dt}\int_D \rho v dx = \int_{\partial D} T ds + \int_D \rho F dx$$

telle que T représente la force surfacique et F la force externe

en explicitant les composante on aura la loi conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{d}{dt}\int_D \rho v_j dx = \int_{\partial D} T_j ds + \int_D \rho f_j dx \tag{2.21}$$

Théorème 2.7.1 *Il existe un tenseur σ de composantes $\sigma_{jk}(x,t)$ telle que*

$$T_j(x,t,n) = \sigma_{jk} n_k$$

Donc pour tout point où v_j et σ_{jk} sont assez régulières on aura l'équation aux derivées partielles associée a la loi de conservation

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_j) + (\rho v_j v_k)_{,k} = \sigma_{jk,k} + \rho f_j \tag{2.22}$$

2.7.3 Incompressibilité de fluide :

Un fluide est dite incompressible lorsque son volume demeure constant sous l'action d'une pression externe

$$\rho(x,t) = \bar{\rho} \Rightarrow \{\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad \text{et} \quad \nabla \rho = 0\},$$

donc d'après la conservation de la masse on trouve

$$\nabla \cdot v = 0 \tag{2.23}$$

2.7.4 Conservation de la quantité de mouvement pour un fluide visqueux Newtonien :

soit l'equation de conservation

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial v_j}{\partial t} + \rho \sum_{k=1}^{3} v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_k} = \rho f_j + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{jk}}{\partial x_k} \\ \sigma_{jk} = \sigma^0_{jk} + \sigma'_{jk} \end{cases} \tag{2.24}$$

c'est à dire σ est exprimé on deux partie celle de la pression et celle de la viscosité avec

$$\begin{cases} \sigma^0_{jk} = -\delta_{jk} p \\ \sigma'_{jk} = \alpha(\frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_j}) + \beta \delta_{jk} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial v_i}{x_i} \end{cases} \tag{2.25}$$

avec $\alpha = \eta$, $\beta = \xi - \frac{2}{3}\eta$ en substituant (2.24) dans (2.23) on obtient

$$\rho\frac{\partial}{\partial t}v_j + \rho(\sum_{k=1}^{3} v_k\frac{\partial}{\partial x_k})_j + \frac{\partial}{\partial x}p = \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}[\eta(\frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_j} - \frac{2}{3}\delta_{jk}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial v_i}{\partial x_i})] + \frac{\partial}{\partial x_j}(\xi\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial v_i}{\partial x_i}) + \rho f_j \tag{2.26}$$

l'équation (2.25) est appelé l'équation fondamentale du mouvement d'un fluide visquex Newtonien

Cas d'un fluide incomprissible. L'équation (2.25) s'écrit avec $\nabla \cdot v = 0$ et le coefficient de viscosité η est constante, on obtient

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t} + \rho(v\cdot\nabla)v + \nabla p = \eta\Delta v + \rho f$$

dans le cas où ρ est constante $\rho = \bar{\rho}$

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + (v\cdot\nabla)v + \nabla p = \eta\Delta v + f \\ \nabla\cdot v = 0 \end{cases} \tag{2.27}$$

l'équation (2.26) est une équation de Navier-Stockes

L'équation de Navier-Stockes stationnaires est donné par :

$$\begin{cases} (v\cdot\nabla)v + \nabla p = \eta\Delta v + f \\ \nabla\cdot v = 0 \end{cases}$$

Chapitre 3

Equations de Navier-Stokes dans le tore 3D

3.1 Détermination de l'équation de Navier-Stockes dans le tore 3D :

L'écoulement turbulent d'un fluide visqueux incompressible peuvent être décrit par la détermination du système d'équation de Navier Stokes en 3D :

$$\begin{cases} \partial_t v + (v \cdot \nabla)v + \nabla p - \nu \Delta v = f \\ \nabla \cdot v = 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

$t \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{R}^3$. Les quantités que nous considérons dans l'étude de ce problème sont :

$v(x,t)$: vitesse, $p(x,t)$: la pression et $f(x,t)$: la force externe.

Nous considérons le tore 3D $\mathbb{T}^3 = \mathbb{R}^3/(2\pi\mathbb{Z})^3$. Nous nous souvenons que les fonctions définies sur le tore $\mathbb{T}^3$, peut être considèrée comme des fonctios pèriodiques de pèriode 2π en x_1, x_2 et x_3.

Nous posons :

$$\widetilde{V}^\infty = \{v \in C^\infty(\mathbb{T}^3, \mathbb{R}^3) | \nabla \cdot v = 0, \int_{\mathbb{T}^3} v dx = 0\},$$

et nous définissions l'espace de Hilbert

$$\widetilde{\mathcal{H}} = \overline{\widetilde{V}\infty}^{L^2(\mathbb{T}^3,\mathbb{R}^3)},$$

avec le produit scalaire dèfinie par :

$$< u, v >_{\widetilde{\mathcal{H}}} = \int_{\mathbb{T}^3} uvdx.$$

Nous introduisons l'opérateur de projection orthogonale $\mathcal{P}_{\widetilde{\mathcal{H}}}$ de $L^2(\mathbb{T}^3, \mathbb{R}^3)$ sur $\widetilde{\mathcal{H}}$. Nous pouvons facilement prouver les propriétés suivantes

$$\mathcal{P}_{\widetilde{\mathcal{H}}} \nabla p = 0,$$

$$\mathcal{P}_{\widetilde{\mathcal{H}}} \Delta v = \Delta v,$$

Le système (3.1) peut être écrire sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial t} v + \mathcal{P}_{\widetilde{\mathcal{H}}}(v \cdot \nabla)v - \nu \triangle v = \mathcal{P}_{\widetilde{\mathcal{H}}} f. \tag{3.2}$$

Le système stationnaire associè :

$$\mathcal{P}_{\widetilde{\mathcal{H}}}(v.\nabla)v - \nu \Delta v = \mathcal{P}_{\widetilde{\mathcal{H}}} f, \tag{3.3}$$

admet ou moins une solution appelée solution stationnaire de (3.3) [3].

Il est connu que toute fonction pèriodique $v \in L^2(\mathbb{T}^3, \mathbb{R}^3)$ peut être dèveloppé en séries de Fourier

Posons :

$$\mathbb{Z}_1^3 = \{k = (k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{Z}^3 | \quad (k_1 > 0) \vee (k_1 = 0, k_2 > 0) \vee (k_1 = 0, k_2 = 0, k_3 > 0)\}, \tag{3.4}$$

nous avons

$$v = \sum_{k \in \mathbb{Z}_1^3} (\alpha_{1,k} \frac{\sin(k \cdot x)}{2\pi\sqrt{\pi}} + \alpha_{2,k} \frac{\cos(k \cdot x)}{2\pi\sqrt{\pi}}) + \alpha_0. \tag{3.5}$$

Où $\alpha_{1,k}$, $\alpha_{2,k}$ et α_0 appartiennent á $\mathbb{R}^3$ et

$$\alpha_{1,k} = \int_{\mathbb{T}^3} v\frac{sin(k\cdot x)}{2\pi\sqrt{\pi}}, \qquad \alpha_{2,k} = \int_{\mathbb{T}^3} v\frac{cos(k\cdot x)}{2\pi\sqrt{\pi}}dx,$$

$$\alpha_0 = \int_{\mathbb{T}^3} \frac{v}{(2\pi)^3}dx,$$

pour $k \in \mathbb{Z}_1^3$

et comme $\int_{\mathbb{T}^3} vdx = 0$ donc $\alpha_0 = 0$.

A partir de (3.5) on a :

$$\|v\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}_1^3}(|\alpha_{1,k}|^2 + |\alpha_{2,k}|^2) = \sum_{(j,k)\in\mathbb{L}} |\alpha_{j,k}|^2,$$

et $\mathbb{L} = \{1,2\} \times \mathbb{Z}_1^3$.

En effet

$$\int_{\mathbb{T}^3} \sin(k\cdot x)\sin(k'\cdot x) = 4\pi^3\delta_{kk'}$$

$$\int_{\mathbb{T}^3} \cos(k\cdot x)\cos(k'\cdot x) = 4\pi^3\delta_{kk'}$$

$$\int_{\mathbb{T}^3} \sin(k\cdot x)\cos(k'\cdot x) = 0$$

donc on a :

$$\begin{aligned}\|v\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)} &= \int_{\mathbb{T}^3}(\sum_{k\in Z_1^3}(\alpha_{1,k}\frac{\sin(k\cdot x)}{2\pi\sqrt{\pi}} + \alpha_{2,k}\frac{\cos(k\cdot x)}{2\pi\sqrt{\pi}}))^2dx \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}_1^3}(|\alpha_{1,k}|^2 + |\alpha_{2,k}|^2).\end{aligned}$$

d'où le résultat est obtenue □

Proposition 3.1.1 **1.**

$$(e_{j,k}\frac{sin(k\cdot x)}{2\pi\sqrt{\pi}}, e_{j,k}\frac{cos(k\cdot x)}{2\pi\sqrt{\pi}}), \tag{3.6}$$

avec $j = 1,2$ et $k \in \mathbb{Z}_1^3$, est une base orthonormée de $\mathcal{H}$ dans le cas $3D$

2. *les vecteurs $\alpha_{1,k}$ et $\alpha_{2,k}$ appartiennent au sous-espase bi-dimensionnel orthogonal à vecteur k. Donc il est possible de fixer une base orthogonale $e_{1,k}, e_{2,k}$ sur un saus-espace et pour exprimer $\alpha_{1,k}$ et $\alpha_{2,k}$ comme une combinaison linéaire à l'aide de cette base.*

De cette façon nous avans l'expression suivante de v

$$\begin{aligned} v &= \sum_{k\in Z_1^3}[(\alpha_{1,k,1}e_{1,k}+\alpha_{1,k,2}e_{2,k})\frac{sin(k\cdot x)}{2\pi\sqrt{\pi}}+(\alpha_{2,k,1}e_{1,k}+\alpha_{2,k,2}e_{2,k})\frac{cos(k\cdot x)}{2\pi\sqrt{\pi}}] \\ &= \frac{1}{2}\sum_{Z_*^3}[(\alpha_{1,k,1}e_{1,k}+\alpha_{1,k,2}e_{2,k})\frac{sin(k\cdot x)}{2\pi\sqrt{\pi}}+(\alpha_{2,k,1}e_{1,k}+\alpha_{2,k,2}e_{2,k})\frac{cos(k\cdot x)}{2\pi\sqrt{\pi}}], \end{aligned}$$

où $\mathbb{Z}_*^3=\mathbb{Z}^3\backslash\{(0,0,0)\}$, et où nous mettons

$$\alpha_{1,k,1}=\alpha_{1,k}\cdot e_{1,k}$$

$$\alpha_{1,k,2}=\alpha_{1,k}\cdot e_{2,k}$$

$$\alpha_{,k,1}=\alpha_{,k}\cdot e_{1,k}$$

$$\alpha_{2,k,2}=\alpha_{2,k}\cdot e_{2,k}$$

3. *si $v\in\widetilde{H}$, on a :*

$$\alpha_{1,k}\cdot k=0, \qquad \alpha_{2,k}\cdot k=0. \tag{3.7}$$

En effet

On a

$$\nabla\cdot v=\sum_{k\in Z_1^3}(\alpha_{1,k}\cdot k\frac{\cos(k\cdot x)}{2\pi\sqrt{\pi}}-\alpha_{2,k}\cdot k\frac{sin(k\cdot x)}{2\pi\sqrt{\pi}}).$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}^3}(\nabla\cdot v)^2dx &= \int_{\mathbb{T}^3}(\sum_{k\in Z_1^3}(\alpha_{1,k}\cdot k\frac{\cos(k\cdot x)}{2\pi\sqrt{\pi}}-\alpha_{2,k}\cdot k\frac{\sin(k\cdot x)}{2\pi\sqrt{\pi}}))^2dx \\ &= \int_{\mathbb{T}^3}\sum_{k\in Z_1^3}(\alpha_{1,k}\cdot k)^2+(\alpha_{2,k}\cdot k)^2 \end{aligned}$$

et comme $\nabla \cdot v = 0$, donc $\alpha_{1,k} = 0$ et $\alpha_{2,k} = 0$

d'où le résultat est obtenue$\square$

3.2 Expression du terme non-linéaire en série de Fourier :

Comme le terme non-linéaire de l'équation de Navier-Stokes est responsable de l'éventuel transfert de l'énergie des mouvements de grande longueur d'ondes aux mouvements de petite longueur d'ondes, on va examiner l'expression du terme $(v \cdot \nabla)v$ en série de Fourier.

$$
\begin{aligned}
(v \cdot \nabla)v = \frac{1}{32\pi^3} \sum_{k' \in Z_*^3} \sum_{k'' \in Z_*^3} & [(k'' \cdot \alpha_{1,k'})\alpha_{2,k''} - (k'' \cdot \alpha_{2,k'})\alpha_{2,k''}] \sin((k' + k'') \cdot x) \\
& + [(k'' \cdot \alpha_{1,k'})\alpha_{1,k''} - (k'' \cdot \alpha_{2,k'})\alpha_{2,k''}] \sin((k' - k'') \cdot x) + \\
& + [(k'' \cdot \alpha_{2,k'})\alpha_{1,k''} + (k'' \cdot \alpha_{1,k'})\alpha_{2,k''}] \cos((k' + k'') \cdot x) + \\
& + [(k'' \cdot \alpha_{2,k'})\alpha_{1,k''} - (k'' \cdot \alpha_{1,k'})\alpha_{2,k''}] \sin((k' - k'') \cdot x)
\end{aligned}
$$

preuve : On a :

$$(v\cdot\nabla)v=\frac{1}{2}\sum_{k'\in Z^3_*}(\alpha_{1,k'}\frac{(k'x)}{2\pi\sqrt{\pi}}+\alpha_{2,k'}\frac{\cos(k'x)}{2\pi\sqrt{\pi}})\cdot\frac{1}{2}\sum_{k''\in Z^3_*}(k''\cdot\alpha_{1,k''}\frac{\cos(k''x)}{2\pi\sqrt{\pi}}-$$
$$-k''\cdot\alpha_{2,k''}\frac{\sin(k''x)}{2\pi\sqrt{\pi}})$$
$$=\frac{1}{16\pi^3}\sum_{k'\in Z^3_*}\sum_{k''\in Z^3_*}(\alpha_{1,k'}\sin(k'x)+\alpha_{2,k'}\cos(k'x))(\alpha_{1,k''}\cdot k''\cos(k''x)-$$
$$-\alpha_{2,k''}\cdot\sin(k''x))$$
$$=\frac{1}{16\pi^3}\sum_{k'\in Z^3_*}\sum_{k''\in Z^3_*}(k''\cdot\alpha_{1,k'})\alpha_{1,k''}\sin(k'x)\cos(k''x)-$$
$$-(k''\cdot\alpha_{1,k'})\alpha_{2,k''}\sin(k'x)\sin(k''x)+(k''\cdot\alpha_{2,k'})\alpha_{1,k''}\cos(k'x)\cos(k''x)-$$
$$-(k''\cdot\alpha_{2,k'})\alpha_{2,k''}\cos(k'x)\sin(k''x)$$
$$=\frac{1}{32\pi^3}\sum_{k'\in Z^3_*}\sum_{k''\in Z^3_*}2(k''\cdot\alpha_{1,k'})\alpha_{1,k''}\sin(k'x)\cos(k''x)+$$
$$+(k''\cdot\alpha_{1,k'})\alpha_{1,k''}\cos(k'x)\sin(k''x)-$$
$$(k''\cdot\alpha_{1,k'})\alpha_{1,k''}\cos(k'x)\sin(k''x)-2(k''\cdot\alpha_{1,k'})\alpha_{2,k''}\sin(k'x)sin(k''x)+$$
$$+(k''\cdot\alpha_{1,k'})\alpha_{2,k''}\cos(k'x)cos(k''x)-(k''\cdot\alpha_{1,k'})\alpha_{2,k''}\cos(k'x)cos(k''x)+$$
$$+2(k''\cdot\alpha_{2,k'})\alpha_{1,k''}\cos(k'x)cos(k''x)+$$
$$(k''\cdot\alpha_{2,k'})\alpha_{1,k''}\sin(k'x)sin(k''x)-(k''\cdot\alpha_{2,k'})\alpha_{1,k''}\sin(k'x)sin(k''x)$$
$$-2(k''\cdot\alpha_{2,k'})\alpha_{2,k''}\cos(k'x)sin(k''x)+(k''\cdot\alpha_{2,k'})\alpha_{2,k''}\sin(k'x)cos(k''x)-$$
$$-(k''\cdot\alpha_{2,k'})\alpha_{2,k''}\sin(k'x)cos(k''x)$$
$$=\frac{1}{32\pi^3}\sum_{k'\in Z^3_*}\sum_{k''\in Z^3_*}[(k''\cdot\alpha_{1,k'})\alpha_{2,k''}+(k''\cdot\alpha_{2,k'})\alpha_{2,k''}]\sin((k'+k'')\cdot x)+$$
$$+[(k''\cdot\alpha_{1,k'})\alpha_{2,k''}-(k''\cdot\alpha_{2,k'})\alpha_{2,k''}]\sin((k'-k'')\cdot x)+$$
$$+[(k''\cdot\alpha_{2,k'})\alpha_{1,k''}+(k''\cdot\alpha_{1,k'})\alpha_{2,k''}]\cos((k'+k'')\cdot x)$$
$$+[(k''\cdot\alpha_{2,k'})\alpha_{1,k''}-(k''\cdot\alpha_{1,k'})\alpha_{2,k''}]\sin((k'-k'')\cdot x).$$

d'où le résultat $\square$

Proposition 3.2.1 *Les termes $(v \cdot \nabla)v, v$ satisfont le propriété*

$$\langle (v \cdot \nabla)v, v \rangle = 0, \tag{3.8}$$

au contraire

$$\langle (v \cdot \nabla)v, \Delta v \rangle \neq 0. \tag{3.9}$$

preuve : On a

$$\begin{aligned}
\langle (v \cdot \nabla)v, v \rangle &= \int_{\mathbb{T}^3} (v \cdot \nabla)vv dx \\
&= \sum_{i,j=1}^{3} \int_{\mathbb{T}^3} v_j v_i \frac{\partial v_i}{x_j} dx \\
&= -\sum_{i,j=1}^{3} \int_{\mathbb{T}^3} v_i \frac{\partial}{\partial x_j (v_j v_i)} \\
&= -\sum_{i,j=1}^{3} \int_{\mathbb{T}^3} v_i (\frac{\partial v_j}{\partial x_j} \cdot v_i + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}) \\
&= -\sum_{i,j=1}^{3} \int_{\mathbb{T}^3} v_j v_i \frac{\partial v_i}{x_j} dx \\
&= -\int_{\mathbb{T}^3} (v \cdot \nabla)vv dx \\
&= -\langle (v \cdot \nabla)v, v \rangle
\end{aligned}$$

Donc $\langle (v \cdot \nabla)v, v \rangle = 0.$ $\square$

3.3 Egalité de l'énergie :

En faisant le produit scalaire de (3.2) avec v et en l'intégrant entre 0 á t, á l'aide de (3.8), on obtient

$$\frac{1}{2}\|v(t)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)} - \frac{1}{2}\|v(0)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)} + \nu \int_0^t \|\nabla v\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)} dt' = \int_0^t \langle f, v\rangle dt' \tag{3.10}$$

preuve : On a

$$\frac{\partial}{\partial t} v + \mathcal{P}_{\tilde{\mathcal{H}}}(v \cdot \nabla) v - \nu \triangle v = \mathcal{P}_{\tilde{\mathcal{H}}} f.$$

On multiple par v

$$\langle \frac{d}{dt} v, v\rangle + \langle (v \cdot \nabla) v, v\rangle - \nu \langle \triangle v, v\rangle = \langle f, v\rangle$$

$$\int_{\mathbb{T}^3} \frac{d}{dt} v v dx - \nu \int_{\mathbb{T}^3} \triangle v v dx = \langle f, v\rangle$$

$$\frac{d}{2dt} \int_{\mathbb{T}^3} v^2 dx + \nu \int_{\mathbb{T}^3} (\nabla v)^2 dx = \langle f, v\rangle$$

$$\frac{d}{2dt} \|v(t)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)} + \nu \|\nabla v\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)} = \langle f, v\rangle.$$

On intègre sur $]0, t[$ on trouve :

$$\frac{1}{2} \int_0^t \frac{d}{dt'} \|v(t')\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)} dt' + \nu \int_0^t \|\nabla v\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)} dt' = \int_0^t \langle f, v\rangle dt'$$

$$\frac{1}{2}\|v(t)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)} - \frac{1}{2}\|v(0)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)} + \nu \int_0^t \|\nabla v\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)} dt' = \int_0^t \langle f, v\rangle dt'.$$

d'où le résultat □

La solution stationnaire est :

$$\nu \|\nabla v\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)} = \langle f, v\rangle. \tag{3.11}$$

L'expression de la série de Fourier (3.11) présente sous la forme suivante

$$\nu \sum_{(j,k)\in\mathbb{L}} |k|^2|\alpha_{j,k}|^2 = \sum_{(j,k)\in\mathbb{L}} f_{j,k}\cdot\alpha_{j,k}, \tag{3.12}$$

où nous mettons

$$f_{1,k} = \int_{\mathbb{T}^3} f\frac{\sin(k\cdot x)}{2\pi\sqrt{\pi}}dx, \qquad f_{2,k} = \int_{\mathbb{T}^3} f\frac{\cos(k\cdot x)}{2\pi\sqrt{\pi}}dx$$

et $\mathbb{L} = \{1,2\}\times\mathbb{Z}_1^3$

Nous allons maintenant, en faisant le produit scalaire de Δv avec les deux membres de l'équation (3.2) et en l'intégrant entre 0 à t, on trouve le bilan énergétique

$$\frac{1}{2}\|\nabla v(t)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)} - \frac{1}{2}\|\nabla v(0)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)} - \int_0^t \langle(v\cdot\nabla)v,\Delta v\rangle dt' + \tag{3.13}$$

$$+\nu\int_0^t \|\Delta v\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)}dt' = -\int_0^t\langle f,\Delta v\rangle dt'.$$

preuve : On multiple l'équation (3.2) par Δv :

$$\langle\frac{d}{dt}v,\Delta v\rangle + \langle(v\cdot\nabla)v,\Delta v\rangle - \nu\langle\Delta v,\Delta v\rangle = \langle f,\Delta v\rangle$$

$$\int_{\mathbb{T}^3} v\Delta v dx + \langle(v\cdot\nabla)v,\Delta v\rangle - \nu\|\Delta v\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)} = \langle f,\Delta v\rangle$$

$$-\int_{\mathbb{T}^3}\frac{d}{dt}\nabla v\nabla v dx + \langle(v\cdot\nabla)v,\Delta v\rangle - \nu\|\Delta v\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)} = \langle f,\Delta v\rangle$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathbb{T}^3}(\nabla v)^2dx + \langle(v\cdot\nabla)v,\Delta v\rangle - \nu\|\Delta v\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)} = \langle f,\Delta v\rangle$$

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla v\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)} + \langle(v\cdot\nabla)v,\Delta v\rangle - \nu\|\Delta v\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)} = \langle f,\Delta v\rangle$$

et on intègre sur $]0,t[$. On trouve l'equation (3.13). □

En particulier, si v est la solution stationnairedonc nous avons

$$\nu\|\Delta v\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)} - \langle(v\cdot\nabla)v,\Delta v\rangle = \langle f,-\Delta v\rangle. \tag{3.14}$$

Cependant nous rappelant en $3D$, que nous avons

$$\langle (v \cdot \nabla) v, \Delta v \rangle \neq 0, \tag{3.15}$$

heureusement il est possible de trouver une estimation pour ce terme. Puisque, nous pouvons prouver

$$|\langle (v \cdot \nabla) v, \Delta v \rangle| \leq \frac{\nu}{2} \|\Delta v\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)} + \frac{2}{\nu^3} c \|\nabla v\|^6_{L^2(\mathbb{T}^3)}. \tag{3.16}$$

Preuve : d'apres l'inégalité de Hôlder, on peut obtenir

$$\langle (v \cdot \nabla) v, \Delta v \rangle \leq \|\nabla v\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \|\nabla v\|^2_{L^4(\mathbb{T}^3)}$$

et par l'application de Hôlder et les inégalités de Sobolev, il est possible de donner une estimation de $\|\nabla v\|^2_{L^4(\mathbb{T}^3)}$ comme suit

$$\|\nabla v\|^2_{L^4(\mathbb{T}^3)} \leq c \|\nabla v\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{T}^3)} \|\Delta v\|^{\frac{3}{2}}_{L^2(\mathbb{T}^3)},$$

donc

$$\langle (v \cdot \nabla) v, \Delta v \rangle \leq c \|\nabla v\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{T}^3)} \|\Delta v\|^{\frac{3}{2}}_{L^2(\mathbb{T}^3)},$$

Enfin, en utilisant l'inégalité de Young, nous obtenons

$$c \|\nabla v\|^{\frac{3}{2}}_{L^2(\mathbb{T}^3)} \|\Delta v\|^{\frac{3}{2}}_{L^2(\mathbb{T}^3)} \leq \frac{\nu}{2} \|\Delta v\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)} + \frac{2}{\nu^3} c \|\nabla v\|^6_{L^2(\mathbb{T}^3)},$$

d'où le résultat. $\square$

De (3.14) et (3.16), il résulte une estimation pour les $\nu \|\Delta v\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)}$ qui est :

$$\frac{\nu}{2} \|\Delta v\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)} \leq \frac{2}{\nu^3} c \|\nabla v\|^6_{L^2(\mathbb{T}^3)} + \|\nabla f\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \|\nabla v\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}. \tag{3.17}$$

L'expression de série de Fourier de (3.17) se présente sous la forme

$$\frac{\nu}{2} \sum_{j,k \in \mathbb{L}} |k|^4 |\alpha_{j,k}|^2 \leq \frac{2^3}{\nu} c \Big(\sum_{j,k \in \mathbb{L}} |k|^2 |\alpha_{j,k}|^2 \Big)^3 + \Big(\sum_{j,k \in \mathbb{L}} |k|^2 |f_{j,k}|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{j,k \in \mathbb{L}} |k|^2 |\alpha_{j,k}|^2 \Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.18}$$

Chapitre 4

Equation de Navier-stokes et moyenne locale de la vitesse

4.1 Comparaison avec la moyenne locale d'ordre 1 :

Dans l'étude de la turbulence on utilise souvent la "moyenne" et la "fluctuation".

Ici on propose un opérateur particulier de la moyenne locale et on va estimer l'éventuel transfert de l'énergie les mouvements de moyenne locale aux "fluctuations".

En général, une moyenne locale d'une fonction $\varphi(x)$ sur $\mathbb{R}^3$ peut être défini comme convolution

$$\bar{\varphi}(x) = (\tilde{\Theta} * \varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{\Theta}(x-y)\varphi(y)dy,$$

avec une fonction $\tilde{\Theta}(x)$ de sorte que

$$\tilde{\Theta}(x) \geq 0, \qquad \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{\Theta}(x)dx = 1.$$

Dans cet partie nous considérons la famille de fonctions

$$\Theta_\delta(x) = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{1+\delta|\xi|^2}\right)(x), \qquad \delta > 0, \tag{4.1}$$

où $\mathcal{F}^{-1}$ désigne la transformée inverse de Fourier, et δ est la largeur caractéristique de la fonction du poids que nous utilisons pour définir la moyenne locale.

La fonction Θ_δ a la forme explicite

$$\Theta_\delta(x) = \frac{1}{4\pi\delta|x|}e^{-\frac{|x|}{\sqrt{\delta}}}. \tag{4.2}$$

En fait, nous avons

$$\begin{aligned}\Theta_\delta(x) &= \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{1+\delta|\xi|^2}\right)\\ &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\exp i(x\cdot\xi)}{1+\delta|\xi|^2}dx\\ &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3}\exp\frac{(i(x_1\xi_1+x_2\xi_2+x_3\xi_3))}{1+\delta(\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2)}d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3.\end{aligned}$$

On peut aussi constater que :

$$\Theta_\delta \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3, \qquad \int_{\mathbb{R}^3}\Theta_\delta(x)dx = 1.$$

Grâce à

$$\|\Theta_\delta * \varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq \|\Theta_\delta\|_{L^1(\mathbb{R}^3)}\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} = \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}, \tag{4.3}$$

il est possible de définir l'opérateur moyenne locale $\Theta_\delta *$ sur la classe de fonctions $L^\infty(\mathbb{R}^3)$.

Alors il existe une fonction $g(\delta)$, $\delta > 0$, de telle sorte que

$$g(\delta) \to 0 \quad pour \quad \delta \to 0,$$

et que

$$M_\delta + \nu \sum_{(j,k)\in\mathbb{L}} \frac{|k|^2}{(1+\delta|k|^2)^2}|\alpha_{j,k}|^2 = \sum_{(j,k)\in\mathbb{L}} \frac{1}{(1+\delta|k|^2)^2} f_{j,k}\cdot\alpha_{j,k}.$$

$$|M_\delta| \le C_1 g(\delta)\|v\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}\|\Delta v\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)} \le C_2 g(\delta)(\sum_{(j,k)\in\mathbb{L}}|\alpha_{j,k}|^2)^{\frac{1}{2}}\times \tag{4.9}$$

$$\times[\frac{2}{\nu^3}c(\sum_{(j,k)\in\mathbb{L}}|k|^2|\alpha_{j,k}|^2)^3 + (\sum_{(j,k)\in\mathbb{L}}|k|^2|f_{j,k}|^2)^{\frac{1}{2}}(\sum_{(j,k)\in\mathbb{L}}|k|^2|\alpha_{j,k}|^2)^{\frac{1}{2}}],$$

où

$$M_\delta = \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}^3_*}\frac{1}{(1+\delta|k|^2)^2}\left[\left\langle(v\cdot\nabla)v, \alpha_{1,k}\frac{sin(k\cdot x)}{2\pi\sqrt{\pi}}\right\rangle + \left\langle(v\cdot\nabla)v, \alpha_{2,k}\frac{cos(k\cdot x)}{2\pi\sqrt{\pi}}\right\rangle\right], \tag{4.10}$$

et avec les constantes C_1, C_2 indépendante de δ.

Plus précisément, la fonction $g(\delta)$ est donnée par

$$g(\delta) = \inf_{0<\varepsilon<1}\left[\left(\sum_{k'\in\mathbb{Z}^3_*}\frac{1}{|k'|^{3+\varepsilon}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sup_{k\in\mathbb{Z}^3_*}\frac{1}{|k|^{\frac{7-\varepsilon}{2}}}\left(\frac{2\delta|k|^2+\delta^2|k|^4}{(1+\delta|k|^2)^2}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right], \tag{4.11}$$

où $\mathbb{Z}^3_* = \mathbb{Z}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$.

Ce théorème donne une estimation de l'énergie éventuelle «en cascade» des mouvements de grande longueur à des mouvements de faible longueur. cette estimation de transfert d'énergie dépend de δ, de telle sorte qu'il tend vers 0 quand δ est proche de 0

$$
\begin{aligned}
e_{j,k}\frac{sin(k\cdot x)}{2\pi\sqrt{\pi}} &= \left(1+\sum_{q=1}^{m}\varepsilon_q(-1)^q\Delta^q\right)\Theta_{\{\varepsilon\}} * \frac{sin(k\cdot x)}{2\pi\sqrt{\pi}} \\
&= \Theta_{\{\varepsilon\}} * \left(1+\sum_{q=1}^{m}\varepsilon_q(-1)^q\Delta^q\right) e_{j,k}\frac{sin(k\cdot x)}{2\pi\sqrt{\pi}} \\
&= \left(1+\sum_{q=1}^{m}\varepsilon_q|k|^{2q}\right)\Theta_{\{\varepsilon\}} * e_{j,k}\frac{sin(k\cdot x)}{2\pi\sqrt{\pi}}
\end{aligned}
$$

donc on obtient les relations

$$
\Theta_{\{\varepsilon\}} * e_{j,k}\frac{\sin(k\cdot x)}{2\pi\sqrt{\pi}} = \frac{1}{1+\sum\limits_{q=1}^{m}\varepsilon_q|k|^{2q}}e_{j,k}\frac{\sin(k\cdot x)}{2\pi\sqrt{\pi}}, \qquad j=\{1,2\}, \quad k\in\mathbb{Z}_1^3 \tag{4.20}
$$

$$
\Theta_{\{\varepsilon\}} * e_{j,k}\frac{\cos(k\cdot x)}{2\pi\sqrt{\pi}} = \frac{1}{1+\sum\limits_{q=1}^{m}\varepsilon_q|k|^{2q}}e_{j,k}\frac{\cos(k\cdot x)}{2\pi\sqrt{\pi}}, \qquad j=\{1,2\}, \quad k\in\mathbb{Z}_1^3. \tag{4.21}
$$

en utilisant les relations (4.20), (4.21) on peut définir l'opérateur $\Theta_{\{\varepsilon\}}*$ sur $\tilde{\mathcal{H}}$

alors, si $v\in\widetilde{\mathcal{H}}$,

$$
\begin{aligned}
\Theta_{\{\varepsilon\}} * v &= \Theta_{\{\varepsilon\}} * \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}_1^3}\alpha_{1,k}\frac{sin(k\cdot x)}{2\pi\sqrt{\pi}} + \alpha_{2,k}\frac{cos(k\cdot x)}{2\pi\sqrt{\pi}}\Big) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}_1^3}\Big(\alpha_{1,k}\Theta_{\{\varepsilon\}} * \frac{\sin(k\cdot x)}{2\pi\sqrt{\pi}} + \alpha_{2,k}\Theta_{\{\varepsilon\}} * \frac{\cos(k\cdot x)}{2\pi\sqrt{\pi}}\Big) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}_1^3}\Big(\frac{\alpha_{1,k}}{1+\sum\limits_{q=1}^{m}\varepsilon_q|k|^{2q}}\frac{sin(k\cdot x)}{2\pi\sqrt{\pi}} + \frac{\alpha_{2,k}}{1+\sum\limits_{q=1}^{m}\varepsilon_q|k|^{2q}}\frac{\cos(k\cdot x)}{2\pi\sqrt{\pi}}\Big).
\end{aligned}
$$

Si de plus on considère $v \in \widetilde{\mathcal{H}}$ une fonction périodique dans $\mathbb{R}^3$, nous avons

$$\Theta_{\{\varepsilon\}} * v(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \Theta_{\{\varepsilon\}}(x-y)v(y)dy,$$

lorsque l'intègrale est bien défini. Ainsi, pour $v \in \widetilde{\mathcal{H}}$, nous appelons $\Theta_{\{\varepsilon\}} * v$ la moyenne locale de v et nous avons établi

$$\bar{v} = \Theta_{\{\varepsilon\}} * v.$$

4.5 Le bilan énergétique macrocomposent avec la moyenne locale d'ordere m :

Proposition 4.5.1 *Soit $\bar{v}$ la moyenne locale de v, nous avons le bilan énergétique*

$$\frac{1}{2}\|\bar{v}(t)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)} - \frac{1}{2}\|\bar{v}(0)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)} + \int_0^t \langle \Theta_\delta * \mathcal{P}_{\widetilde{\mathcal{H}}}(v\cdot\nabla)v, \bar{v}\rangle dt' + \tag{4.22}$$

$$+\nu \int_0^t \|\nabla\bar{v}\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)} dt' = \int_0^t \langle \bar{f}, \bar{v}\rangle dt'.$$

Si $\bar{v}$ est la solution stationnaire, nous avons

$$\langle \Theta_\delta * \mathcal{P}_{\widetilde{\mathcal{H}}}(v\cdot\nabla)v, \bar{v}\rangle + \nu\|\nabla\bar{v}\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)} = \langle \bar{f}, \bar{v}\rangle, \tag{4.23}$$

Dèmonstration : on a

$$\frac{\partial}{\partial t}v + \mathcal{P}_{\widetilde{\mathcal{H}}}(v\cdot\nabla)v - \nu\Delta v = \mathcal{P}_{\widetilde{\mathcal{H}}}f,$$

on applique l'opérateur de moyenne locale dans l'équation de Navier-Stokes

$$\Theta_{\{\varepsilon\}} * (\frac{d}{dt}v + \mathcal{P}_{\widetilde{\mathcal{H}}}(v\cdot\nabla)v - \nu\Delta v) = \Theta_{\{\varepsilon\}} * \mathcal{P}_{\widetilde{\mathcal{H}}}f$$

$$\frac{d}{dt}\Theta_{\{\varepsilon\}} * v + \Theta_{\{\varepsilon\}} * \mathcal{P}_{\widetilde{\mathcal{H}}}(v\cdot\nabla)v - \nu\Delta\Theta_{\{\varepsilon\}} * v = \bar{f}$$

$$\frac{d}{dt}\bar{v} + \Theta_{\{\varepsilon\}} * \mathcal{P}_{\widetilde{\mathcal{H}}}(v\cdot\nabla)v - \nu\Delta\bar{v} = \bar{f},$$

maintenant on multiplie par $\bar{v}$ et on intégre entre 0 à t

$$\int_0^t \langle \frac{d}{dt}\bar{v},\bar{v}\rangle dt' + \int_0^t \langle \Theta_{\{\varepsilon\}} * \mathcal{P}_{\widetilde{\mathcal{H}}}(v\cdot\nabla)v,\bar{v}\rangle dt' - \nu\int_0^t \langle\Delta\bar{v},\bar{v}\rangle dt' = \int_0^t \langle\bar{f},\bar{v}\rangle dt'$$

$$\int_0^t\int_{\mathbb{T}^3}\frac{d}{dt}\bar{v}\bar{v}dxdt' + \int_0^t \langle \Theta_{\{\varepsilon\}} * \mathcal{P}_{\widetilde{\mathcal{H}}}(v\cdot\nabla)v,\bar{v}\rangle dt' - \nu\int_0^t\int_{\mathbb{T}^3}\Delta\bar{v}\bar{v}dxdt' = \int_0^t \langle\bar{f},\bar{v}\rangle dt'$$

$$\int_0^t\int_{\mathbb{T}^3}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\bar{v}^2dxdt' + \int_0^t \langle \Theta_{\{\varepsilon\}} * \mathcal{P}_{\widetilde{\mathcal{H}}}(v\cdot\nabla)v,\bar{v}\rangle dt' + \nu\int_0^t\int_{\mathbb{T}^3}(\nabla\bar{v})^2dxdt' = \int_0^t \langle\bar{f},\bar{v}\rangle dt'$$

$$\frac{1}{2}\int_0^t\frac{d}{dt}\|\bar{v}\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)}dt' + \int_0^t \langle \Theta_{\{\varepsilon\}} * \mathcal{P}_{\widetilde{\mathcal{H}}}(v\cdot\nabla)v,\bar{v}\rangle dt' + \nu\int_0^t\|\nabla\bar{v}\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)}dt' = \int_0^t \langle\bar{f},\bar{v}\rangle dt'.$$

D'ou

$$\frac{1}{2}\|\bar{v}(t)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)} - \frac{1}{2}\|\bar{v}(0)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)} + \int_0^t \langle \Theta_\delta * \mathcal{P}_{\widetilde{\mathcal{H}}}(v\cdot\nabla)v,\bar{v}\rangle dt' +$$

$$+\nu\int_0^t\|\nabla\bar{v}\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)}dt' = \int_0^t \langle\bar{f},\bar{v}\rangle dt',$$

et si $\bar{v}$ est un solution stationnaire, nous obtenons facilement

$$\langle \Theta_\delta * \mathcal{P}_{\widetilde{\mathcal{H}}}(v\cdot\nabla)v,\bar{v}\rangle + \nu\|\nabla\bar{v}\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)} = \langle\bar{f},\bar{v}\rangle.$$

□

D'autre part l'expression de la série de Fourier est donnée par :

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^3_1}\frac{1}{(1+\sum\limits_{q=1}^{m}\varepsilon_q|k|^{2q})^2}\left[\left\langle (v\cdot\nabla)v,\alpha_{1,k}\frac{sin(k\cdot x)}{2\pi\sqrt{\pi}}\right\rangle + \left\langle (v\cdot\nabla)v,\alpha_{2,k}\frac{cos(k\cdot x)}{2\pi\sqrt{\pi}}\right\rangle\right] +$$

$$+\nu\sum_{(j,k)\in\mathbb{L}}\frac{|k|^2}{(1+\sum\limits_{q=1}^{m}|k|^{2q})^2}|\alpha_{j,k}|^2 = \sum_{(j,k)\in\mathbb{L}}\frac{1}{(1+\sum\limits_{q=1}^{m}|k|^{2q})^2}f_{j,k}\alpha_{j,k}. \tag{4.24}$$

4.6 Une estimation du terme non linéaire avec l'opérateur d'ordre m :

Théorème 4.6.1 *Nous supposons que v est une solution stationnaire des équations de Navier-Stokes*

$$\frac{\partial}{\partial t}v + \mathcal{P}_{\widetilde{\mathcal{H}}}(v\cdot\nabla)v - \nu\Delta v = \mathcal{P}_{\widetilde{\mathcal{H}}}f.$$

Alors il existe une fonction $g(\varepsilon)$, $\varepsilon_q > 0$ et $q = 1, .., m$, de telle sorte que

$$g(\varepsilon)\to 0 \quad pour \quad \varepsilon_q \to 0 \quad q = 1, .., m$$

et que

$$M_\varepsilon + \nu\sum_{(j,k)\in\mathbb{L}}\frac{|k|^2}{(1+\sum\limits_{q=1}^{m}\varepsilon_q|k|^{2q})^2}|\alpha_{j,k}|^2 = \sum_{(j,k)\in\mathbb{L}}\frac{1}{(1+\sum\limits_{q=1}^{m}\varepsilon_q|k|^{2q})^2}f_{j,k}\cdot\alpha_{j,k}.$$

$$|M_\varepsilon| \le C_1 g(\varepsilon)\|v\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}\|\Delta v\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)} \le C_2 g(\varepsilon)(\sum_{(j,k)\in\mathbb{L}}|\alpha_{j,k}|^2)^{\frac{1}{2}}\times \tag{4.25}$$

$$\times[\frac{2}{\nu^3}c(\sum_{(j,k)\in\mathbb{L}}|k|^2|\alpha_{j,k}|^2)^3 + (\sum_{(j,k)\in\mathbb{L}}|k|^2|f_{j,k}|^2)^{\frac{1}{2}}(\sum_{(j,k)\in\mathbb{L}}|k|^2|\alpha_{j,k}|^2)^{\frac{1}{2}}],$$

où

$$M_\varepsilon = \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}^3_*}\frac{1}{(1+\sum\limits_{q=1}^{m}\varepsilon_q|k|^{2q})^2}[\langle(v\cdot\nabla)v, \alpha_{1,k}\frac{sin(k\cdot x)}{2\pi\sqrt{\pi}}\rangle + \tag{4.26}$$

$$+\langle(v\cdot\nabla)v, \alpha_{2,k}\frac{cos(k\cdot x)}{2\pi\sqrt{\pi}}\rangle]$$

et avec les constantes C_1, C_2 indépendante de ε.

Plus précisément, la fonction $g(\varepsilon)$ est donnée par

$$g(\varepsilon)=\inf_{0<\gamma<1}\left[\left(\sum_{k'\in\mathbb{Z}^3_*}\frac{1}{k'^{3+\gamma}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sup_{k\in\mathbb{Z}^3_*}\frac{1}{|k|^{\frac{7-\gamma}{2}}}\left(\frac{2\sum_{q=1}^{m}\varepsilon_q|k|^{2q}+\left(\sum_{q=1}^{m}\varepsilon_q|k|^{2q}\right)^2}{\left(1+\sum_{q=1}^{m}\varepsilon_q|k|^{2q}\right)^2}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right], \tag{4.27}$$

où $\mathbb{Z}^3_*=\mathbb{Z}^3\setminus\{(0,0,0)\}$.

Dèmostration : De (3.5) et (3.6), en utilisant le changement de variables $k''=(k-k')$ et les relations

$$\int_{\mathbb{T}^3}\sin(k\cdot x)\sin(k'\cdot x)=4\pi^3\delta_{kk'}$$

$$\int_{\mathbb{T}^3}\cos(k\cdot x)\cos(k'\cdot x)=4\pi^3\delta_{kk'}$$

$$\int_{\mathbb{T}^3}\sin(k\cdot x)\cos(k'\cdot x)=0$$

on obtient

$$\langle(v\cdot\nabla)v,\alpha_{1,k}\frac{sin(k\cdot x)}{2\pi\sqrt{\pi}}\rangle+\langle(v\cdot\nabla)v,\alpha_{2,k}\frac{cos(k\cdot x)}{2\pi\sqrt{\pi}}\rangle=I_1^{[k]}+I_2^{[k]}+I_3[k]+I_4^{[k]} \tag{4.28}$$

où

$$I_1^{[k]}=\frac{1}{4}\sum_{k'\in\mathbb{Z}^3_*,k'\neq k}\frac{(k-k')\cdot\alpha_{1,k'}\alpha_{1,k-k'}-(k-k')\cdot\alpha_{2,k'}\alpha_{2,k-k'}}{2(2\pi\sqrt{\pi})}\cdot\alpha_{1,k}$$

$$I_2^{[k]}=\frac{1}{4}\sum_{k'\in\mathbb{Z}^3_*,k'\neq k}\frac{(k'-k)\cdot\alpha_{1,k'}\alpha_{1,k'-k}+(k'-k)\cdot\alpha_{2,k'}\alpha_{2,k'-k}}{2(2\pi\sqrt{\pi})}\cdot\alpha_{1,k}$$

$$I_3^{[k]}=\frac{1}{4}\sum_{k'\in\mathbb{Z}^3_*,k'\neq k}\frac{(k-k')\cdot\alpha_{2,k'}\alpha_{1,k-k'}+(k-k')\cdot\alpha_{1,k'}\alpha_{2,k-k'}}{2(2\pi\sqrt{\pi})}\cdot\alpha_{2,k}$$

$$I_4^{[k]} = \frac{1}{4} \sum_{k' \in \mathbb{Z}_*^3, k' \neq k} \frac{(k'-k) \cdot \alpha_{2,k'} \alpha_{1,k'-k} - (k'-k) \cdot \alpha_{1,k'} \alpha_{2,k'-k}}{2(2\pi\sqrt{\pi})} \cdot \alpha_{2,k}$$

de (4.26) et (4.28) et comme $\langle (v \cdot \nabla) v, v \rangle = 0$, il s'ensuit que :

$$\langle (v \cdot \nabla) v, v \rangle = \langle (v \cdot \nabla) v, \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}_*^3} (\alpha_{1,k} \frac{\sin(k \cdot x)}{2\pi\sqrt{\pi}} + \alpha_{2,k} \frac{\cos(k \cdot x)}{2\pi\sqrt{\pi}}) \rangle \tag{4.29}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}_*^3} \langle (v \cdot \nabla) v, \alpha_{1,k} \frac{\sin(k \cdot x)}{2\pi\sqrt{\pi}} \rangle + \langle (v \cdot \nabla) v, \alpha_{2,k} \frac{\cos(k \cdot x)}{2\pi\sqrt{\pi}} \rangle$$

donc on peut écrire M_ε comme suite

$$M_\varepsilon = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}_*^3} \frac{1}{(1 + \sum_{q=1}^{m} \varepsilon_q |k|^{2q})^2} [\langle (v \cdot \nabla) v, \alpha_{1,k} \frac{\sin(k \cdot x)}{2\pi\sqrt{\pi}} \rangle +$$

$$+ \langle (v \cdot \nabla) v, \alpha_{2,k} \frac{cos(k \cdot x)}{2\pi\sqrt{\pi}} \rangle] - \langle (v \cdot \nabla) v, v \rangle$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}_*^3} (\frac{1}{(1 + \sum_{q=1}^{m} \varepsilon_q |k|^{2q})^2} - 1) [\langle (v \cdot \nabla) v, \alpha_{1,k} \frac{sin(k \cdot x)}{2\pi\sqrt{\pi}} \rangle + \langle (v \cdot \nabla) v, \alpha_{2,k} \frac{cos(k \cdot x)}{2\pi\sqrt{\pi}} \rangle]$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}_*^3} \frac{-2 \sum_{q=1}^{m} \varepsilon_q |k|^{2q} - (\sum_{q=1}^{m} \varepsilon_q |k|^{2q})^2}{(1 + \sum_{q=1}^{m} \varepsilon_q |k|^{2q})^2} [\langle (v \cdot \nabla) v, \alpha_{1,k} \frac{sin(k \cdot x)}{2\pi\sqrt{\pi}} \rangle +$$

$$+ \langle (v \cdot \nabla) v, \alpha_{2,k} \frac{cos(k \cdot x)}{2\pi\sqrt{\pi}} \rangle]$$

$$= \frac{1}{32\pi\sqrt{\pi}} \sum_{k \in \mathbb{Z}_*^3} \frac{-2 \sum_{q=1}^{m} \varepsilon_q |k|^{2q} - (\sum_{q=1}^{m} \varepsilon_q |k|^{2q})^2}{(1 + \sum_{q=1}^{m} \varepsilon_q |k|^{2q})^2} \sum_{k' \in \mathbb{Z}_*^3, k' \neq k} \Phi_{k,k'},$$

avec

$$\Phi_{k,k'} = [(k-k')\cdot\alpha_{1,k'}\alpha_{1,k-k'} - (k-k')\cdot\alpha_{2,k'}\alpha_{2,k-k'} + (k'-k)\cdot\alpha_{1,k'}\alpha_{1,k'-k} + (k'-k)\cdot\alpha_{2,k'}\alpha_{2,k'-k}]\cdot\alpha_{1,k} + [(k-k')\cdot\alpha_{2,k'}\alpha_{1,k-k'} + (k-k')\cdot\alpha_{1,k'}\alpha_{2,k-k'} + (k'-k)\cdot\alpha_{2,k'}\alpha_{1,k'-k} - (k'-k)\cdot\alpha_{1,k'}\alpha_{2,k'-k}]\cdot\alpha_{2,k},$$

et on note

$$A_k^2 = |\alpha_{1,k}|^2 + |\alpha_{2,k}|^2,$$

nous avons

$$|\Phi_{k,k'}| \leq 4\sqrt{2}|k-k'|A_k A_{k'} A_{k-k'},$$

donc de (4.29), on a

$$|M_\delta| \leq C_1[\sum_{k\in\mathbb{Z}_*^3} \frac{2\sum_{q=1}^{m}\varepsilon_q|k|^{2q} + (\sum_{q=1}^{m}\varepsilon_q|k|^{2q})^2}{(1+\sum_{q=1}^{m}\varepsilon_q|k|^{2q})^2} \sum_{k'\in\mathbb{Z}_*^3, k\neq k'} |k-k'|A_k A_{k'} A_{k-k'}], \tag{4.30}$$

avec $C_1 = \frac{\sqrt{2}}{8\pi\sqrt{\pi}}$.

De plus, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour tous les $\gamma \in]0,1[$, on a

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}_*^3}\sum_{k'\in\mathbb{Z}_*^3, k'\neq k} \frac{2\sum_{q=1}^{m}\varepsilon_q|k|^{2q} + (\sum_{q=1}^{m}\varepsilon_q|k|^{2q})^2}{(1+\sum_{q=1}^{m}\varepsilon_q|k|^{2q})^2}|k-k'|A_k A_{k'} A_{k-k'} \leq Q_\gamma^{\frac{1}{2}} R_\gamma^{\frac{1}{2}}$$

où

$$Q_\gamma = \sum_{k\in\mathbb{Z}^3{}_*}\left(\sum_{k'\in\mathbb{Z}_*^3, k'\neq k}|k-k'|A_{k'}A_{k-k'}|k|^{-\frac{1+\gamma}{2}}\right)^2$$

$$R_\gamma = \sum_{k\in\mathbb{Z}_*^3}\left(\frac{-2\sum_{q=1}^{m}\varepsilon_q|k|^{2q} - (\sum_{q=1}^{m}\varepsilon_q|k|^{2q})^2}{(1+\sum_{q=1}^{m}\varepsilon_q|k|^{2q})^2}\right)^2|k|^{\frac{1+\gamma}{2}}A_k^2,$$

donc
$$|M_\delta| \leq C_1 Q_\gamma^{\frac{1}{2}} R_\gamma^{\frac{1}{2}}, \tag{4.31}$$

d'après la relation
$$\frac{1}{|k-k'|}\frac{1}{|k|^{\frac{1+\varepsilon}{2}}} \leq \frac{1}{|k-k'|^{\frac{3+\varepsilon}{2}}} + \frac{1}{|k|^{\frac{3+\varepsilon}{2}}},$$

on obtient
$$Q_\gamma \leq 2(Q_\varepsilon^{[1]} + Q_\varepsilon^{[2]}),$$

où
$$Q_\epsilon^{[1]} = \sum_{k\in\mathbb{Z}_*^3}\left(\sum_{k'\in\mathbb{Z}_*^3, k'\neq k} |k-k'|^2 A_{k-k'}A_{k'}\frac{1}{|k-k'|^{\frac{3+\varepsilon}{2}}}\right)^2,$$
$$Q_\gamma^{[2]} = \sum_{k\in\mathbb{Z}_*^3}\left(\sum_{k'\in\mathbb{Z}_*^3, k'\neq k} |k-k'|^2 A_{k-k'}A_{k'}\frac{1}{|k|^{\frac{3+\gamma}{2}}}\right)^2,$$

comme $\frac{1}{|k|^{\frac{3+\gamma}{2}}}$, ne dépend pas de k', on aura
$$Q_\gamma^{[2]} = \sum_{k\in\mathbb{Z}_*^3}\frac{1}{|k|^{(3+\gamma)}}\left(\sum_{k'\in\mathbb{Z}_*^3, k'\neq k} |k-k'|^2 A_{k-k'}A_{k'}\right)^2$$
$$\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}_*^3}\frac{1}{|k|^{(3+\gamma)}}\left(\sum_{k'\in\mathbb{Z}_*^3, k'\neq k} |k-k'|^4 A_{k-k'}^2\right)\left(\sum_{k'\in\mathbb{Z}_*^3} A_{k'}^2\right).$$

en rappelant, les relations
$$\sum_{k'\in\mathbb{Z}_*^3, k'\neq k} |k-k'|^4 A_{k-k'}^2 = \|\Delta v\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2, \quad \sum_{k'\in\mathbb{Z}_*^3} A_{k'}^2 = \|v\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2,$$

nous obtenons
$$Q_\gamma^{[2]} \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}_*^3}\frac{1}{|k|^{(3+\gamma)}}\|v\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2\|\Delta v\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2. \tag{4.32}$$

Maintenant, nous devons étudier $Q_\gamma^{[1]}$. D'apré l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$Q_\gamma^{[1]} \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}_*^3}\left(\sum_{k'\in\mathbb{Z}_*^3,k'\neq k} A_{k'}^2|k-k'|^2 A_{k-k'}\frac{1}{|k-k'|^{\frac{3+\gamma}{2}}}\right)\times$$

$$\times\left(\sum_{k'\in\mathbb{Z}_*^3,k'\neq k}|k-k'|^2 A_{k-k'}\frac{1}{|k-k'|^{\frac{3+\gamma}{2}}}\right),$$

comme on a

$$\sum_{k'\in\mathbb{Z}_*^3,k'\neq k}|k-k'|^2 A_{k-k'}\frac{1}{|k-k'|^{\frac{3+\gamma}{2}}}\leq$$

$$\leq\left(\sum_{k'\in\mathbb{Z}_*^3,k'\neq k}|k-k'|^4 A_{k-k'}^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k'\in\mathbb{Z}_*^3,k\neq k'}\frac{1}{|k-k'|^{3+\gamma}}\right)^{\frac{1}{2}}\leq$$

$$\leq\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}_*^3}\frac{1}{|k|^{3+\gamma}}\right)^{\frac{1}{2}}\|\Delta v\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}.$$

D'autre part il vient

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}_*^3}\sum_{k'\in\mathbb{Z}_*^3,k'\neq k}A_{k'}^2|k-k'|^2A_{k-k'}\frac{1}{|k-k'|^{\frac{3+\gamma}{2}}}=\sum_{k'\in\mathbb{Z}_*^3}A_{k'}^2\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}_*^3}|k-k'|^2A_{k-k'}\frac{1}{|k-k'|^{\frac{3+\varepsilon}{2}}}\right)$$

$$\leq\sum_{k'\in\mathbb{Z}_*^3}A_{k'}^2\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}_*^3,k\neq k'}|k-k'|^4A_{k-k'}^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}_*^3,k\neq k'}\frac{1}{|k-k'|^{3+\gamma}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}_*^3}\frac{1}{|k|^{3+\varepsilon}}\right)^{\frac{1}{2}}\|v\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2\|\Delta v\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}.$$

donc on aura

$$Q_\gamma^{[1]}\leq\sum_{k\in\mathbb{Z}_*^3}\frac{1}{|k|^{2(1+\gamma)}}\|v\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2\|\Delta v\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 \tag{4.33}$$

d'après (4.32) et (4.33) on a

$$Q_\gamma \leq 2 \sum_{k\in\mathbb{Z}^3_*} \frac{1}{|k|^{3+\gamma}} \|v\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)} \|\Delta v\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)}. \tag{4.34}$$

Pour R_γ, on a

$$R_\gamma^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^3_*} \left(\frac{2\sum_{q=1}^{m} \varepsilon_q |k|^{2q} + (\sum_{q=1}^{m} \varepsilon_q |k|^{2q})^2}{(1+\sum_{q=1}^{m} \varepsilon_q |k|^{2q})^2} \right)^2 |k|^{\frac{1+\gamma}{2}} A_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \left(\sup_{k\in\mathbb{Z}^3_*} \frac{1}{|k|^{\frac{7-\gamma}{2}}} \left(\frac{2\sum_{q=1}^{m} \varepsilon_q |k|^{2q} + (\sum_{q=1}^{m} \varepsilon_q |k|^{2q})^2}{(1+\sum_{q=1}^{m} \varepsilon_q |k|^{2q})^2} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^3_*} |k|^4 A_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \left(\sup_{k\in\mathbb{Z}^3_*} \frac{1}{|k|^{\frac{7-\gamma}{2}}} \left(\frac{2\sum_{q=1}^{m} \varepsilon_q |k|^{2q} + (\sum_{q=1}^{m} \varepsilon_q |k|^{2q})^2}{(1+\sum_{q=1}^{m} \varepsilon_q |k|^{2q})^2} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|\Delta v\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}. \tag{4.37}$$

de (3.17), (3.11) et de (4.31), (4.34), (4.37) on déduit (4.25).

Bibliographie

[1] MOHAMMED EL AMRANI : *Analyse de Fourier dans les espases fonctionnels.* [Niveau M1,L/510.934]

[2] A. M. OBUKHOV : *Sulla distribuzione di energia nello spettro del usso turbolento (in russo).* Izvestia Akad. Nauk SSSR, Ser. geogr. i geofiz., vol. 5 (1941), pp. 435-466.

[3] O. A. LADYZHENSKAYA : *The mathematical theory of viscous incompressible ow (translated from russian)* Gordon et Breach, London, 1969. Cours á l'Univ. Guelma 2009/2010.

[4] E. CARRETTO, H. FUJITA YASHIMA :*Una stima dell'effetto del termine non lineare nel l'equazione di Navier-Stokes stocastica caratterizzante la "cascata" di energia nella turbolenza.* Quaderno Dip. Mat. Univ. Torino, N. 6 (2011).

[5] E. CARRETTO :*An etimate of the effect of nonlinear terme in the 3D Navier-Stokes equation characterizing the "energy cascade" in a turbuent flow.* Manuscrit (2012)