République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 – Guelma

Faculté de Mathématiques et de l'Informatique et Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire de Fin d'Etude
Master Académique en Mathématiques
Option : Mecanique des fluides

THEME

Equations des effets de la radiation dans l'atmpsphère

Présenté par :
Meknassi Amira

Dirigé par : H. Fujita Yashima	**Prof**	**Univ. Guelma**
Jury :		
Président : M.Z.Aissaoui	**MCA**	**Univ-Guelma**
Examinateur : L.Zenkoufi	**MCA**	**Univ-Guelma**

Session Juin 2012

Equations des effets de la radiation dans l'atmosphère

MEKNASSI Amira
Mémoire de master en mathématiques
Université de Guelma

2 juin 2012

Table des matières

❄ *Remerciment* ❄

Au nom d'Allah, le tout miséricordieux,

le très miséricordieux

La reconnaissance est la mémoire du cœur

≺ LE GRAND MERCI POUR ALLAH ≻

En préambule à ce mémoire, je souhaite adresser mes remerciements les plus sincères aux personnes qui m'ont apporté leur aide et qui ont contribué à l'élaboration de ce mémoire ainsi qu'à la réussite de cette formidable année universitaire.

Je remercier du fond du cœur ❤ **mes parents** ❤ *pour leur contribution, leur soutien et leur patience durant toutes mes études et qui m'ont toujours aidé et encouragé aux moments opportuns .*

Je tiens à remercier sincèrement le prof. Hisao Fujita Yashima qui en tant que Directeur de mémoire, s'est toujours montré à l'écoute et très disponible tout au long de la réalisation de ce mémoire, ainsi pour l'inspiration, l'aide et le temps qu'il a bien voulu me consacrer et sans qui ce mémoire n'aurait jamais vu le jour.

Mes remerciements s'adressent également à Monsieur Dr. Aissaoui Med Zine : directeure du Laboratoire de Mathématiques appliquées et de modélisation, (LMAM), pour sa générosité et la grande patience dont il a su faire preuve malgré ses charges académiques et professionnelles.

J'adresse également mes remerciements, à tous mes enseignants, qui m'ont donnés les bases de la science. Ensuite, je souhaite remercier l'ensemble *du laboratoire (LMAM) ; leur accueil chaleureux et leur aide précieuse ont contribué fortement à l'aboutissement de ce travail.*

Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à mes sœurs et mon frère pour leur aide et leur encouragement et à tous mes proches, amis et collègues de qui m'ont toujours soutenue et encouragée au cours de la.

☺ ***Merci à tous et à toutes.***

Résumé. On considère le système d'équations intégro-différentielles décrivant l'intensité de la radiation et la température de l'air dans un domaine de $\mathbb{R}^3$. En supposant que les coefficients d'absorption et de diffusion du rayonnement sont petits même s'ils dépendent de la position, on démontre l'existence d'une solution stationnaire du système d'équations dans un domaine borné.

Abstract. We consider the integro-differential equation system which describes the intensity of the radiation and the temperature of the air in a domain of $\mathbb{R}^3$. Supposing that the coefficients of absorbation and emission of radiation are small even if they depend on the position, we prove the existence of a stationary solution of the equation system in a bounded domain.

Chapitre 1

Introduction

La question de la radiation et son effet thermique dans l'atmosphère, dont l'analyse devrait donner l'explication, entre autres, de l'effet serre, intéresse des rechercheurs de plus en plus nombreux dans le monde. Toutefois il nous semble que la théorie mathématique concernant ces phénomènes ne soit pas adéquatement développée. Nous désirons alors apporter notre contribution à l'étude mathématique des équation qui décrivent ces phénomènes.

On déstingue des sources naturelles de rayonnement (soleil, surface terrestre, atmosphère). Tous les objets émettent et absorbent du rayonnement en permanence. Au niveau de l'atmosphère une partie des radiations qui arrivent du soleil et du surface terrestre est absorbée par certaines composantes de l'air ou diffusée par déviation ou réflexion dans l'atmosphère. L'absorption du rayonnement par l'air provoque l'augmentation de la température et l'air réchaufé, à son tour, émet le rayonnement, en provoquant la diminution de la température. Ces processus dépendent sensiblement de la distribution de H_2O -en trois étas- dans l'air. Il est donc fort souhaitable que l'effet thermique de la radiation dans l'atmosphère soit intégré dans notre système d'équations avec ses fonctionnements spécifiques.

Pour contribuer à l'élaboration de la théorie mathématique de ces phénomènes, nous allons étudier un système d'équations intégro-différentilles pour l'intensité $I_\lambda(x, q)$ de la radiation de longueur d'onde λ dans la direction $q \in S^2$ au point $x \in \mathbb{R}^3$ et la température $T(x)$ au même point. Il s'agira d'une famille d'équations paramétrisée par $\lambda \in \mathbb{R}_+$ qui décrit la variation de $I_\lambda(x, q)$, variation due à l'absoption, à la diffusion et à l'émission du rayonnement, et d'une équation qui décrit la distribution de la température dans l'air en tant que milieu continu calorifère avec des sources, positives ou négatives, de la chaleur.

Dans cette orientation, Amosov (voir [4]) a étudié le problème avec le mouvement de l'air dans un domaine d'une dimension spatial et a obtenu la solution globale par rapport au temps. Dans le présent travail, nous allons considérer le système d'équation dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, mais sans prendre en cosidération le mouvement de l'air (c'est-à-dire dans le cas où la vitesse de l'air s'annule identiquement) et nous allons chercher la solution stastionnaire. Pour la température $T(x)$ nous considérons la condition de Neumann sur la frontière, ce qui signifie que la solution stationnaire correspond à l'état d'équilibre sans diffision de la chaleur à travers la frontière, état thermique déterminé seulement par l'absorption et l'émission du rayonnement par l'atmosphère.

La radiation du Soleil est fort concentrée dans une direction. Comme l'angle solide du soleil vu de la terre est trés petit, dans les études pratiques on utilise souvent une description qui considère le rayonnement du Soleil dans une seule direction $q_1 \in S^2$. Pour cette raisons nous allons considérés les deux modèle l'une avec une radiation non singulière et l'autre avec une radiation singulière.

Dans le chapitre 1 on donne une déscription générale sur le phénomène de radiation dans l'atmosphère

Le résultat principal du présent travail est la démonstration de l'existence d'une solution stationnaire $(\{I_\lambda(x,q)\}_{\lambda>0}, T(x))$ du système d'équation considéré dans un domaine borné sous l'hypothèse que les coefficients d'absorption et de diffusion du rayonnement sont petits. Du point de vue technique, l'équation pour $(I_\lambda(x,q))$ est linéaire en $I_\lambda(x,q)$, de sorte que, si on la transforme habilement, il n'est pas difficile de la résoudre avec $T(x)$ donnée, mais le terme représentant l'émission du rayonnement est fortement non-linéaire par rapport à $T(x)$, ce qui ne facilite pas la résolution du système d'équation. toutefois il posseède un certain comportement de monotonie(voir chapitr 6), ce qui nous permettra de trouver une solution.

Chapitre 2

Problème de la radiation dans l'atmosphère

Lorsque le rayonnement traverse la couche atmosphérique, il entre en collision avec les molécules et les particules présentes dans l'atmosphère. Il peut être dévié de sa trajectoire, c'est le phénoméne de diffusion atmosphérique. En outre il peut être absorbé en partie. Donc Le rayonnement électromagnétique est perturbé par deux processus : processus d'absorption et processus de diffusion.

2.1 Processus de diffusion

Dans le processus de diffusion les photons sont redistribués dans toutes les directions. On distingue différents types de diffusion, caractérisés par le comportement de diffusion dû à la taille relative des cibles par rapport à la longueur d'onde de la radiation incidente.

2.1.1 Diffusion de Rayleigh

Elle est due à l'interaction des photons avec les molécules gazeuses des couches supérieures de l'atmosphère dont la taille est très inférieure à la longueur d'onde. En 1899 Rayleigh a montré que l'intensité de la lumière diffusée dans une direction particulière était inversement proportionnelle à la puissance quatrième de la longueur d'onde. Par conséquent, le rayonnement de courtes longueurs d'ondes, comme le bleu à $400nm$, est plus diffusé que le rayonnement de grandes longueurs d'ondes, comme le rouge 670 nm. Comme le rapport de ces deux longueurs d'ondes est égal à 1.675, l'intensité de la lumière bleue diffusée par une molécule d'air est$1.675^4 = 7.97$ fois supérieure à celle de la lumière rouge diffusée. Ce phénomène explique pourquoi nous percevons le ciel bleu durant la journée. Au coucher et au lever du Soleil, le rayonnement doit parcourir une plus grande distance à travers l'atmosphère qu'en milieu de la journée. La diffusion des courtes longueurs d'ondes est donc plus importante.

2.1.2 Diffusion de Mie

Elle est due à l'interaction des photons avec des particules dont le rayon moyen r oscille entre 0.1 et 10 fois la longueur d'onde du rayonnement. En 1869 John Tyndall avait observé que la couleur bleutée s'évanouissait si la taille des particules dépassait le diamètre de $0.3\mu m$. Les gouttelettes d'eau, les cristaux de glace ou les aérosols présents dans l'atmosphère (poussières, fumées, pollens) sont les principaux vecteurs de la diffusion de Mie.

2.1.3 Diffusion non slective

Elle se produit lorsque les particules (hydrométéores et poussière) sont beaucoup plus grosses que la longueur d'onde du rayonnement. Dans ce cas les lois de l'optique géométrique s'appliquent. Prenons le cas d'une goutte d'eau : une fraction du rayonnement incident est réfléchie, l'autre réfractée. Dans la goutte, la lumière peut être absorbée ou subir des réflexions multiples avant d'émerger. Les gouttes d'eau de l'atmosphère dispersent toutes les longueurs d'ondes de manière presque égale, ce qui produit un rayonnement blanc. Ceci explique pourquoi le brouillard et les nuages nous paraissent blancs. Dans la réalité, les propriétés radiatives des nuages dépendent de la taille des particules et de leur nombre par unité de volume.

2.2 Processus d'absorption

Les différentes molécules de l'air absorbent différentes longueurs d'ondes de radiations. Dans ce cas il y a transfert d'energie entre le rayonnement et les molécules avec lesquelles il entre en collision. L'absorption du rayonnement qui cède tout ou partie de son énergie conduit par conséquent à une atténuation du signal dans la direction de propagation du rayonnement. La molécule change de conffiguration électronique. L'énergie absorbée modifie l'énergie interne de la molécule en la faisant passer d'un niveau d'énergie E_1 à un niveau d'énergie E_2 supérieur. Cette énergie est ensuite réémise sous forme de chaleur à une plus grande longueur d'onde (infrarouge thermique). Une molécule possède des niveaux d'énergie discrets ou quantités auxquels sont associés des états de mouvement moléculaire : état de vibration, de rotation ou de configuration électronique correspondant respectivement à des niveaux d'énergie croissants. Alors que selon l'énergie du rayonnement incident, on distingue plusieurs types d'absorption :

- ◆ ***dans l'ultraviolet***: L'énergie absorbée est suffisamment importante pour permettre des transitions énergétiques entre niveaux électroniques. Au-delà d'un certain seuil énergétique, l'absorption peut provoquer une dissociation des molécules par rupture de liaison.
- ◆ ***dans le visible*** : Le rayonnement n'est pratiquement pas absorbé par l'atmosphère, ou très légèrement par l'ozone. Les transitions énergétiques se font entre niveaux électroniques.
- ◆ ***dans l'infrarouge*** : L'absorption du rayonnement est beaucoup moins énergétique que dans le visible ou les ultraviolets et les transitions d'énergie se font entre le niveau fondamental et les niveaux vibrationnels des molécules
- ◆ ***dans les hyperfréquences*** : L'énergie transférée étant encore moins importante, l'absorption entraîne des transitions énergétiques depuis le niveau fondamental vers les niveaux rotationnels des molécules.

Chacun des gaz constituant de l'atmosphère absorbe le rayonnement dans des longueurs d'ondes sélectives délimitant ainsi de nombreuses bandes d'absorption. Les molécules les plus importantes dans le processus d'absorption sont :

►***l'oxygéne*** (O_2) ***et le dioxyde de carbone*** (CO_2) uniformément mélangés dans l'atmosphére et en quantité presque constante. La contribution de O_2 est très forte autour de $0.7\mu m$. Celle du CO_2 a lieu au-delà de

$1\mu m$ et surtout dans l'infrarouge thermique où ce gaz joue un rôle dans l'effet de serre.

▶***la vapeur d'eau*** (H_2O) principalement localisée dans la troposphère et dont la quantité varie grandement d'un endroit à l'autre et d'un moment à l'autre de l'année. Par exemple, une masse d'air au-dessus d'un désert contient très peu de vapeur d'eau, tandis qu'une masse d'air au-dessus des tropiques contient une forte concentration. Elle présente plusieurs bandes d'absorption importantes aux longueurs d'ondes supérieures à $0.7\mu m$. En particulier elle absorbe une bonne partie du rayonnement infrarouge de grandes longueurs d'onde émis par la Terre.

▶***l'ozone*** (O_3) présent dans la troposphère et dans la stratosphère. L'ozone stratosphérique (90%), situé autour de $18km$, présente une faible bande d'absorption entre $0.55\mu m$ et $0.65\mu m$ et une très forte absorption du rayonnement ultraviolet. Celui-ci est néfaste aux êtres vivants.

▶***le méthane*** (CH_4)***, le monoxyde de carbone (CO), le protoxyde d'azote*** (N_2O)***, les chloro-fluoro-carbures (CFC)*** qui possèdent des bandes d'absorption dans l'infrarouge thermique, moins abondants que la vapeur d'eau ou le dioxyde de carbone, ces constituants ont un pouvoir de piéger du rayonnement des centaines ou des milliers de fois supérieur dans la mesure où leurs bandes d'absorption sont situées à des longueurs d'ondes différentes de celles de H_2O et CO_2.

☞Quand les spectres d'absorption des gaz de l'atmosphère sont combinés, il reste des "fenêtres " de faible opacité, autorisant le passage de certaines bandes lumineuses. La fenêtre optique va d'environ $300nm$ (ultraviolet-C) jusqu'aux longueurs d'onde que les humains peuvent voir, la lumière visible (communément appelé lumière), à environ $400-700nm$ et continue jusqu'aux infrarouges vers environ $1100nm$. Il y a aussi des fenêtres atmosphèriques et radios qui transmettent certaines ondes infrarouges et radios sur des longueurs d'onde plus importantes. Par exemple, la fenêtre radio s'étend sur des longueurs d'onde allant de un centimètre à environ onze mètres.

2.3 Émission

Maintenant nous rappelons les caractéristiques essentielles de l'émission de radiation. L'émission est le processus opposé de l'absorption, il s'agit du processus par lequel un objet émet des radiations. Les objets ayant une certaine température tendent à émettre certaines quantités de radiation de longueurs d'ondes suivant les courbes d'émission du "corps noir " [1]. Selon cette loi des objets plus chauds tendent à émettre plus de radiations sur des longueurs d'ondes plus courtes. Les objets froids émettent moins de radiations sur des longueurs d'onde plus longues. Dans le milieu où nous vivons, on trouve 3 sources naturelles du rayonnement.

❶***Soleil*** :Le soleil est une formidable source d'énergie qui réchauffe notre planète. Sa température est approximativement $6000°K$.Selon la loi de Planck, les pics de la radiation solaire s'approchent de $500nm$. Son rayonnement parvient à la terree après un voyage de 150 millions de kilomètres : l'atmosphère réfléchit environ un tiers du rayonnement solaire visible, tandis que les rayons ultraviolets sont absorbés par l'ozone qui est un "filtre "présent dans la stra-

1. Un corps qui absorbe intégralement le rayonnement qu'il reçoit est un corps noir. Dans ce cas le flux réfléchi est nul et le flux partant est constitué seulement par le flux émis. L'émission des rayonnements d'un corps noir peut être décrite par le fonction de Planck comme fonction de température et de longueur d'onde

tosphère. Dans la troposphère environ 20% du rayonnement solaire est absorbé par la vapeur d'eau, l'oxyde du carbone et d'autres gaz de particules mineurs. Environs 50% du rayonnement solaire atteigne la surface terrestre ; environ 25% est absorbé par les oceans, 21% par les sols et seulement 0,2% par les plantes. le rayonnement solaire absorbé est utilisé pour réchauffer la terre (surface et atmosphère).

L'énergie n'est pas absorbé de la même façon sur l'équateur qu'aux pôles. la quantité de rayonnement solaire que la terre peut recevoir par unité de surface décroît à mesure que l'on se dirige vers les pôles en raison de la géométrie sphérique de la Terre.

❷***La surface terrestre*** : la Terre ayant sa surface à une température moyenne de $15°C$ émet des radiations, dont la longueure d'onde approche de $10000nm(10\mu m)$, ce qui est trop long pour que l'œil humain les perçoive. Ces radiations se situent en totalité dans l'infrarouge, qui a une énergie faible par rapport à celles émises par le soleil. Les radiations terrestres sont presque entièrement absorbées par l'atmosphère sauf celles de longueur d'onde se trouvons entre 8 et 14 μm dans la fenêtre atmosphérique ; ces dernières peuvent donc sortir de l'atmosphère lorsque le ciel est clair. La quantité d'énergie émise par la terre correspond à celle que la terre absorbe de la part du rayonnement solaire.

La zone tropicale qui est plus chaude, émet donc plus d'énergie que les zones pôlaires.

❸***L'atmosphèr*** : L'atmosphère, ayant une température entre $-70°C$ et $40°C$ environ, émet des rayons infrarouge dans toute les directions : une partie vers le bas et une partie vers le haut. Ces rayons chauffe l'atmosphère qui joue le rôle d'émpêcher cette chaleur d'échaper vers l'espace : c'est l'effet de serre. Par exemple, lors des nuits où le ciel est dégagé la surface de la Terre se rafraichit plus rapidement que les nuits où le ciel est couvert. Ceci est dû au fait que les nuages (H_2O) sont d'importants absorbeurs et émetteurs de radiations infrarouges. L'atmosphère n'absorbe pas toute la chaleur qui lui parvient, et elle ne émet pas intégralement toute la chaleur qu'elle absorbe.

Le bilan entre l'énergie du rayonnement solaire absorbé par la terre et celle du rayonnement émis par la terre est équilibré si on considère la moyenne planétaire.

La formulation de *la luminance énergétique* spectrale du corps noir $B[\lambda, \mathrm{T}]$ est donnée par la **loi de Planck**

$$B[\lambda, \mathrm{T}] = \frac{2\pi c^2 h}{\lambda^5}(e^{\frac{ch}{k\lambda T}} - 1)^{-1} \tag{2.1}$$

λ =Longueur d'onde(en m)

T=Température absolue(en k)

h=Constante de planck($6.625 \times 10^{-23} W s^2$)

c=Vitesse de la lumiére dans le vide ($2.998 \times 10^8 m s^{-1}$)

k=Constante de Boltzmann ($1.38 \times 10^{-23} J K^{-1}$),

de telle façon que $B[\lambda, \mathrm{T}]$ tend vers 0 quand $\lambda \to 0$ ou $\lambda \to \infty$.

Et d'apré la **loi de Stefan-Boltzmann** : "la luminance énergétique totale" [2] d'un corps noir, est calculée en integrant $B[\lambda, \mathrm{T}]$ sur toutes les longueurs

2. cette garndeur dépend seulement de la puissance quatriéme de la température et elle est rarement mesurable car elle correspond à l'ensemble du rayonnement émit par le corps noir dans toutes les longueure d'onde du specter

d'onde :

$$\int_{0}^{\infty} B[\lambda, \mathrm{T}]d\lambda = \sigma T^4 \tag{2.2}$$

avec σ la constante de Stefan-Boltzmann.

Chapitre 3

Systéme d'équtions de la radiation dans l'atmosphère

Désignons par $a_\lambda(x)$ et $r_\lambda(x)$ respectivement les coefficients d'absorption et celui de diffusion (par déviation ou par réflexion) du rayonnement dans l'atmosphère. Les coefficients d'absorption $(a_\lambda(x))$ changent très rapidement en fonction de la longueur d'onde (λ) et présentent une structure trés complexe. Leur calcul tient compte de la position x, de l'intensité $I_\lambda(.,.)$ et de la forme de chaque ligne dans une bande d'absorption, mais aussi de la répartition des gaz à différentes hauteurs, ainsi que des profils de température $T(x)$. On suppose que

$$a_\lambda(x) \geq 0, \quad r_\lambda(x) \geq 0, \quad a_\lambda(x) + r_\lambda(x) \leq C < \infty \tag{3.1}$$

avec une constante C.

La diffusion du rayonnement peut être décrite par la fonction$P_\lambda(q', q)$ qui représente le changement de direction du rayonnement de longeur d'onde λ de la direction q' à la direction q, changement exprimé par une densité par rapport à $q \in S^2(S^2$=sphère unité). Normalement dans la nature $P_\lambda(q', q)$ ne dépend essentiellement que de $q' \cdot q \in [-1, 1]$. Toutefois, comme on n'utilise pas cette propriété dans la suite, ici nous considérons $P_\lambda(q', q)$ comme une fonction de q' et de q, on pose donc les conditions

$$P_\lambda(q', q) \geq 0 \quad \forall q', q \in S^2, \quad \frac{1}{4\pi} \int\limits_{S^2} P_\lambda(q', q) dq = 1 \quad \forall q' \in S^2. \tag{3.2}$$

Quant à l'émission de la radiation de l'atmosphère, conformément à la loi de Kirchhoff, on suppose qu'elle est donnée par

$$a_\lambda(x) B[\lambda, T(x, t)].$$

Selon les considération des physiciens, l'intensité de la radiation $I_\lambda(x, q)$ doit satisfaire à l'équation

$$-\frac{1}{a_\lambda(x) + r_\lambda(x)} (q.\nabla) I_\lambda(x, q) = I_\lambda(x, q) - J_\lambda(x, q, I_\lambda, T) \tag{3.3}$$

où $J_\lambda(x, q, I_\lambda, T)$ est donné par

$$J_\lambda(x, q, I_\lambda, T) = \frac{1}{4\pi} \frac{r_\lambda(x)}{a_\lambda(x) + r_\lambda(x)} \int\limits_{S^2} I_\lambda(x, q') P_\lambda(q', q) dq' + \tag{3.4}$$

$$+ \frac{a_\lambda(x)}{a_\lambda(x) + r_\lambda(x)} B[\lambda, T(x)].$$

D'autre part, pour la température$T(x)$, on considère l'équation de la diffusion de la chaleur dans le gaz avec la source de la chaleur due à l'absorption et l'émission de la radiation. Plus précisément on considère l'équation

$$\kappa \Delta T = \nabla \cdot F, \tag{3.5}$$

où

$$F = (F_1, F_2, F_3), \quad F_j = \int_0^\infty \int_{S^2} I_\lambda(x,q) q_j dq d\lambda, \tag{3.6}$$

q_j étant la composante dans la direction de l'axe x_j du vecteur q. La formule (3.5) représente la relation entre la varriation de la température de l'air et de l'intensité de la radiation.

Les équations (3.3) avec $\lambda \in]0, \infty[$ et (3.5) constituent le système d'équations que nous devons envisager

$$\boxed{\begin{cases} -\dfrac{1}{a_\lambda(x) + r_\lambda(x)}(q.\nabla)I_\lambda(x,q) = I_\lambda(x,q) - J_\lambda(x,q,I_\lambda,T) \\ \kappa\Delta T = \nabla.F \end{cases}.}$$

Or, il nous sera commode de transformer l'équation (3.3) en une équation intégrale. En effet, en posant

$$b_\lambda(x) = a_\lambda(x) + r_\lambda(x), \tag{3.7}$$

on peut réécrire l'équation (3.3) dans la forme

$$\frac{d}{d\alpha} I_\lambda(x + \alpha q, q, t) = \tag{3.8}$$

$$= -b_\lambda(x + \alpha q) I_\lambda(x + \alpha q, q) + b_\lambda(x + \alpha q) J_\lambda(x + \alpha q, q, I_\lambda, T).$$

Pour envisager l'équation (3.3) (ou (3.8)) dans un ensemble ouvert Ω de $\mathbb{R}^3$, on pose

$$\alpha^0_{(x,q)} = \inf\{\alpha \in \mathbb{R} | x + \alpha' q \in \Omega \ \forall \alpha' \in]\alpha, 0[\}. \tag{3.9}$$

Si $\alpha^0_{(x,q)} > -\infty$, alors $x + \alpha^0_{(x,q)} q \in \partial\Omega$, mais si Ω n'est pas borné, $\alpha^0_{(x,q)}$ peut être $-\infty$.

Dans le cas où $\alpha^0_{(x,q)} > -\infty$, l'équation(3.8) avec la condition

$$I_\lambda(x+\alpha^0_{(x,q)}q,q) = I^0_\lambda(x+\alpha^0_{(x,q)}q,q) \tag{3.10}$$

peut être résolue formellement par la fonction

$$I_\lambda(x,q) = I^0_\lambda(x+\alpha^0_{(x,q)}q,q)\exp(-\int_{\alpha^0_{(x,q)}}^{0} b_\lambda(x+\alpha' q)d\alpha')+ \tag{3.11}$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_{\alpha^0_{(x,q)}}^{0}\int_{S^2} r_\lambda(x+\alpha' q)P_\lambda(q',q)I_\lambda(x+\alpha' q,q')\exp(-\int_{\alpha'}^{0} b_\lambda(x+\alpha'' q)d\alpha'')dq'd\alpha'+$$

$$+\int_{\alpha^0_{(x,q)}}^{0} a_\lambda(x+\alpha' q)B[\lambda,T(x+\alpha' q)]\exp(-\int_{\alpha'}^{0} b_\lambda(x+\alpha'' q)d\alpha'')d\alpha'.$$

Dans le cas où $\alpha^0_{(x,q)} = -\infty$, on considère la condition

$$\lim_{\alpha\to-\infty} I_\lambda(x+\alpha q,q) = I^\infty_\lambda(q) \tag{3.12}$$

Comme on peut le constater facilement, cette condition (3.12) nous permet de définir la solution formelle de l'équation (3.8) avec la condition (3.12)

$$I_\lambda(x,q) = I^\infty_\lambda(q)\exp(-\int_{\infty}^{0} b_\lambda(x+\alpha' q)d\alpha')+ \tag{3.13}$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_{\infty}^{0}\int_{S^2} r_\lambda(x+\alpha' q)P_\lambda(q',q)I_\lambda(x+\alpha' q,q')\exp(-\int_{\alpha'}^{0} b_\lambda(x+\alpha'' q)d\alpha'')dq'd\alpha'+$$

$$+\int_{\infty}^{0} a_\lambda(x+\alpha' q)B[\lambda,T(x+\alpha' q)]\exp(-\int_{\alpha'}^{0} b_\lambda(x+\alpha'' q)d\alpha'')d\alpha'.$$

Ça veut dire que l'équation (3.3) avec la condition (3.10) ou (3.12) est transformée dans les équations (3.11) et (3.13).

Chapitre 4

Equation de la radiation avec la température donnée

Dans ce paragraphe on considère la famille d'équations (3.11) ou (3.13), en supposant que la fonction $T(x)$ est fixé. Or, comme on le constate immédiatement, si $T(x)$ est donnée, on peut envisager la famille d'équations (3.11) ou (3.13) séparément pour chaque λ. Donc, dans le présente paragraphe, on fixe un $\lambda > 0$.

Soit Ω un ouvert borné ou non de $\mathbb{R}^3$, pour $x^0 \in \partial\Omega$ on pose

$$S^2{}_{-}(x^0) = \{q \in S^2 | \exists \varepsilon > 0, x^0 + \alpha q \in \Omega, \forall \alpha \in]0, \varepsilon[\} \tag{4.1}$$

et on définit l'ensemble

$$\Xi = \bigcup_{x^0 \in \partial\Omega} \{\{x^0\} \times S^2{}_{-}(x^0)\}. \tag{4.2}$$

On admet que $I^0_\lambda(x^0, q)$ est donnée pour tout $(x^0, q) \in \Xi$ et que $I^\infty_\lambda(q)$ est donnée pour tout $q \in S^2$. On suppose que

$$\sup_{(x^0,q)\in\Xi} I^0_\lambda(x^0, q) < \infty, \qquad \sup_{q\in S^2} I^\infty_\lambda(q) < \infty \tag{4.3}$$

PROPOSITION 4.1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^3$. Soient $a_\lambda(x)$, $r_\lambda(x)$ et $P_\lambda(q',q)$ des fonctions mesurables définies sur Ω et $S^2 \times S^2$ respectivement et satisfaisantes aux conditions (3.1) et (3.2). Soient en outre $I_\lambda^0(x^0,q)$ et $I_\lambda^\infty(q)$ des fonctions mesurables, non-négatives définies sur Ξ et S^2 respectivement et satisfaisantes à la condition (4.3), si une fonction $T(x) \in L^\infty(\Omega)$, $T(x) > 0$, est donnée et si en outre*

$$N(r_\lambda)||P||_{L^\infty(S^2\times S^2)} < 1, \tag{4.4}$$

où

$$N(r_\lambda) = \sup_{(x,q)\in\Omega\times S^2} \{ \int_{\alpha^0_{(x,q)}}^{0} r_\lambda(x+\alpha q)d\alpha \} \tag{4.5}$$

(ici $\alpha^0_{(x,q)}$ est le nombre réel négatif ou $-\infty$défini dans (3.9)), alors la famille d'équations (3.11) ou (3.13) admet une solution I_λ et une seule dans la classe $L^\infty(\Omega \times S^2)$).

Pour démontrer la proposition, il nous est commode de définir l'opérateur G par

$$G(I_\lambda)(x,q) = \frac{1}{4\pi} \int_{\alpha^0_{(x,q)}}^{0} r_\lambda(x+\alpha' q) \int_{S^2} P_\lambda(q',q) I_\lambda(x+\alpha' q, q') \times \tag{4.6}$$

$$\times \exp(-\int_{\alpha'}^{0} b_\lambda(x+\alpha'' q)d\alpha'')dq'd\alpha',$$

où $\alpha^0_{(x,q)}$ est le nombre réel négatif ou $-\infty$ défini dans (3.9). On a alors le lemme suivant.

LEMME 4.1 *L'opérateur G est une contraction dans l'espace $L^\infty(\Omega\times S^2)$, c'est-à- dire il existe une constante K telle que $0 < K < 1$ et que pour tout*

$I^{[1]}, I^{[2]} \in L^\infty(\Omega \times S^2)$ *on ait*

$$||G(I^{[1]}) - G(I^{[2]})||_{L^\infty(\Omega\times S^2)} \leq K||I^{[1]} - I^{[2]}||_{L^\infty(\Omega\times S^2)} \tag{4.7}$$

Démonstration. Comme $b_\lambda(x) \geq 0$, on a $\exp(-\int_{\alpha'}^{0} b_\lambda(x+\alpha'' q)d\alpha'') \leq 1$. On a donc

$$|G(I^{[1]})(x,q) - G(I^{[2]})(x,q)| \leq \tag{4.8}$$

$$\leq \frac{1}{4\pi}\int_{\alpha^0_{(x,q)}}^{0}\int_{S^2} r_\lambda(x+\alpha' q)P_\lambda(q',q)|I^{[1]}(x+\alpha' q, q') - I^{[2]}(x+\alpha' q, q')|dq'd\alpha' \leq$$

$$\leq N(r_\lambda)||P_\lambda||_{L^\infty(S^2\times S^2)}||I^{[1]} - I^{[2]}||_{L^\infty(\Omega\times S^2)}$$

presque partout dans $\Omega \times S^2$. Les relations (4.4) et (4.8) entraîne (4.7) avec $0 < K < 1$.□

Démonstration de la proposition 4.1. On constate que le premier et le troisième termes du second membre de (3.11) et de (3.13) sont déterminés directement par les fonctions données. Donc, Si on désigne par $\tilde{G}_I(I_\lambda)$ le seconde membre de (3.11) ou de (3.13) considéré comme une fonction de I_λ, quelques soient $I^{[1]}, I^{[2]} \in L^\infty(\Omega \times S^2)$, on a

$$\tilde{G}_I(I^{[1]}) - \tilde{G}_I(I^{[2]}) = G(I^{[1]}) - G(I^{[2]})$$

où $G(.)$ est l'opérateur défini dans (4.6). Par conséquent, du lemme 4.1 on déduit que même l'opérateur $\tilde{G}_I(.)$ est une contraction dans l'espace $L^\infty(\Omega \times S^2)$, ce qui nous permet de trouver une solution I_λ et une seule dans la classe $L^\infty(\Omega \times S^2)$.□

Dans la prochaine paragraphe on va utiliser la propriété suivante de la solution de l'équation (3.11).

PROPOSITION 4.2 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$. On suppose que $a_\lambda(x)$, $r_\lambda(x)$, $P_\lambda(q', q)$ et $I_\lambda^0(x^0, q)$ vérifient les conditions mentionnées dans la proposition 4.1. Soient $T^{[1]}$ et $T^{[2]}$ deux fonctions à valeurs dans $]0, \infty[$ appartenant à $L^\infty(\Omega)$. Soit $I_\lambda^{[1]}(resp. I^{[2]})$ la solution de l'équations (3.11) avec $B[\lambda, T] = B[\lambda, T^{[1]}]$ (resp.$B[\lambda, T] = B[\lambda, T^{[2]}]$).*

Alors on a

$$||I_\lambda^{[1]} - I_\lambda^{[2]}||_{L^\infty(\Omega \times S^2)} \leq \frac{N(a_\lambda)}{1 - N(r_\lambda)||P_\lambda||_{L^\infty(S^2 \times S^2)}} ||B[\lambda, T^{[1]}] - B[\lambda, T^{[2]}]||_{L^\infty(\Omega)}, \tag{4.9}$$

où $N(r_\lambda)$ est le nombre défini dans (4.5), tandis que

$$N(a_\lambda) = \sup_{(x,q) \in \Omega \times S^2} \{ \int_{\alpha^0_{(x,q)}}^{0} a_\lambda(x + \alpha q) d\alpha \} \tag{4.10}$$

DÉMONSTRATION On pose

$$U = I_\lambda^{[1]} - I_\lambda^{[2]}, \qquad V = B[\lambda, T^{[1]}] - B[\lambda, T^{[2]}]$$

Alors, en faisant la différence de l'équation (3.11) avec $B[\lambda, T] = B[\lambda, T^{[1]}]$ et celle avec $B[\lambda, T] = B[\lambda, T^{[2]}]$, on a

$$U(x, q) = \frac{1}{4\pi} \int_{\alpha^0_{(x,q)}}^{0} \int_{S^2} r_\lambda(x + \alpha' q) P_\lambda(q', q) U(x + \alpha' q, q') \exp(-\int_{\alpha'}^{0} b_\lambda(x + \alpha'' q) d\alpha'') dq' d\alpha' +$$

$$+ \int_{\alpha^0_{(x,q)}}^{0} a_\lambda(x + \alpha' q) V(x + \alpha' q) \exp(-\int_{\alpha'}^{0} (b_\lambda(x + \alpha'' q)) d\alpha'') d\alpha',$$

en utilisant l'opérateur $G(.)$ introduit dans (4.6),

$$U(x, q) = G(U)(x, q) +$$

$$+\int_{\alpha^0_{(x,q)}}^{0} a_\lambda(x+\alpha' q)V(x+\alpha' q)\exp(-\int_{\alpha'}^{0} b_\lambda(x+\alpha'' q)d\alpha'')d\alpha',$$

De la manière analogue à (4.8) on a

$$|G(U)(x,q)| \leq N(r_\lambda)||P_\lambda||_{L^\infty(S^2\times S^2)}||U||_{L^\infty(\Omega\times S^2)}.$$

D'autre part, on a

$$\left|\int_{\alpha^0_{(x,q)}}^{0} a_\lambda(x+\alpha' q)V(x+\alpha' q)\exp(-\int_{\alpha'}^{0} b_\lambda(x+\alpha'' q)d\alpha'')d\alpha'\right| \leq N(a_\lambda)||V||_{L^\infty(\Omega)}.$$

On en déduit que

$$||U||_{L^\infty(\Omega\times S^2)} \leq \frac{N(a_\lambda)}{1-N(r_\lambda)||P_\lambda||_{L^\infty(S^2\times S^2)}}||V||_{L^\infty(\Omega)}.$$

ce qui preuve (4.9). $\square$

Chapitre 5

Equation de la radiation avec la présence de la radiation solaire singulière

Maintenant nous considérons le probléme de la radiation dans l'air avec la présence de la radiation du soleil. Comme la radiation du soleil est beaucoup plus forte que les autres radiations et est concentrée presque dans une direction (plus précisément l'angle solide que le soleil occupe dans le ciel vu de la terre est trés petit), il est commode de la représenter comme radiation provenant de l'extérieur et concentrée sur une direction.

Désignons par $q_1 \in S^2$ la direction du rayonnement solaire(c'est-à-dire, on suppose que le soleil se trouve dans la direction $-q_1$). Désignons par I_λ^S l'intensité de la radiation du soleil de longueur d'onde λ. Si parmi les radiations nous tenons compte également de la radiation solaire, la condition (3.10) deviendra, formellement,

$$I_\lambda^{tot}(x + \alpha^0_{(x,q)}q, q) = I_\lambda^0(x + \alpha^0_{(x,q)}q, q) + \delta(q - q_1)I_\lambda^S \tag{5.1}$$

où $\delta(q-q_1)$ est la "fonction delta Dirac" sur S^2. Dans cette étude nous nous limitons au cas où $\alpha^0_{(x,q_1)} > -\infty$ pour tout $x \in \Omega$.

Comme nous l'observons quotidiennement, si la radiation solaire n'est pas presque complètement diffusée dans les autres directions ou absorbée par des particules particulières(comme les goutteletes de nuages) dans l'atmosphère. même après son entrée dans l'atmosphère elle reste trés forte par rapport aux autres radiations.

Donc nous désignons l'intensité de radiation totale de longueure d'onde λ au point x dans la direction q par

$$I_\lambda^{tot}(x,q) = I_\lambda(x,q) + \delta(q-q_1)I_\lambda(x,q_1)$$

Donc, dans le cas où $\alpha^0_{(x,q)} > -\infty$, on peut substituer $I_\lambda^{tot}(x,q)$ dans (3.11) au lieu de $I_\lambda(x,q)$, ce qui nous donne

$$I_\lambda^{tot}(x,q) = (I_\lambda^0(x+\alpha^0_{(x,q)}q,q)+\delta(q-q_1)I_\lambda^S)\exp(-\int_{\alpha^0_{(x,q)}}^{0} b_\lambda(x+\alpha' q)d\alpha')+ \quad (5.2)$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_{\alpha^0_{(x,q)}}^{0}\int_{S^2} r_\lambda(x+\alpha' q)P_\lambda(q',q)(I_\lambda(x+\alpha' q,q')+\delta(q'-q_1)I_\lambda(x+\alpha' q,q_1))\times$$

$$\times\exp(-\int_{\alpha'}^{0} b_\lambda(x+\alpha'' q)d\alpha'')dq'd\alpha'+$$

$$+\int_{\alpha^0_{(x,q)}}^{0} a_\lambda(x+\alpha' q)B[\lambda,T(x+\alpha' q)]\exp(-\int_{\alpha'}^{0} b_\lambda(x+\alpha'' q)d\alpha'')d\alpha'.$$

On remarque que d'après la définition de la "fonction delta Dirac" sur S^2 on a

$$\int_{S^2} r_\lambda(x+\alpha' q)P_\lambda(q',q)\delta(q'-q_1)I_\lambda(x+\alpha' q,q_1)\exp(-\int_{\alpha'}^{0} b_\lambda(x+\alpha'' q)d\alpha'')dq' =$$

$$= r_\lambda(x+\alpha' q)P_\lambda(q_1,q)I_\lambda(x+\alpha' q,q_1)\exp(-\int_{\alpha'}^{0} b_\lambda(x+\alpha'' q)d\alpha'').$$

En outre, vu l'expression de $I_\lambda^{tot}(x,q)$ il nous est commode de considérer le cas où $q \neq q_1$ et le cas où $q = q_1$.

En effet dans le cas où $q \neq q_1$, compte tenu de cette dernière relation, de (5.2) on déduit que

$$I_\lambda^{tot}(x,q) = I_\lambda^0(x+\alpha^0_{(x,q)}q,q)\exp(-\int_{\alpha^0_{(x,q)}}^{0} b_\lambda(x+\alpha' q)d\alpha')+ \tag{5.3}$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_{\alpha^0_{(x,q)}}^{0}\int_{S^2} r_\lambda(x+\alpha' q)P_\lambda(q',q)I_\lambda(x+\alpha' q,q')\exp(-\int_{\alpha'}^{0} b_\lambda(x+\alpha'' q)d\alpha'')dq'd\alpha'+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_{\alpha^0_{(x,q)}}^{0} r_\lambda(x+\alpha' q)P_\lambda(q_1,q)I_\lambda(x+\alpha' q,q_1)\times\exp(-\int_{\alpha'}^{0} b_\lambda(x+\alpha'' q)d\alpha'')d\alpha'+$$

$$+\int_{\alpha^0_{(x,q)}}^{0} a_\lambda(x+\alpha' q)B[\lambda,T(x+\alpha' q)]\exp(-\int_{\alpha'}^{0} b_\lambda(x+\alpha'' q)d\alpha'')d\alpha'.$$

D'autre part, pour $q = q_1$, compte tenu encore de la définition de la "fonction delta Dirac", de (5.2) on déduit que

$$I_\lambda(x,q_1) = I_\lambda^S\exp(-\int_{\alpha^0_{(x,q)}}^{0} b_\lambda(x+\alpha' q_1)d\alpha'). \tag{5.4}$$

En effet on a

$$I_\lambda^{tot}(x,q) = I_\lambda^0(x+\alpha^0_{(x,q)}q,q)\exp(-\int_{\alpha^0_{(x,q)}}^0 b_\lambda(x+\alpha' q)d\alpha')+ \tag{5.5}$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_{\alpha^0_{(x,q)}}^0\int_{S^2} r_\lambda(x+\alpha' q)P_\lambda(q',q)I_\lambda(x+\alpha' q,q')\exp(-\int_{\alpha'}^0 b_\lambda(x+\alpha'' q)d\alpha'')dq'd\alpha'+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_{\alpha^0_{(x,q)}}^0 r_\lambda(x+\alpha' q)P_\lambda(q_1,q)I_\lambda^S\exp(-\int_{\alpha^0_{(x+\alpha' q,q)}}^0 b_\lambda(x+\alpha'' q_1)d\alpha'')\exp(-\int_{\alpha'}^0 b_\lambda(x+\alpha'' q)d\alpha'')d\alpha'+$$

$$+\int_{\alpha^0_{(x,q)}}^0 a_\lambda(x+\alpha' q)B[\lambda,T(x+\alpha' q)]\exp(-\int_{\alpha'}^0 b_\lambda(x+\alpha'' q)d\alpha'')d\alpha'.$$

Dans la suite on considère l'équation (5.5), en supposant que la fonction $T(x)$ est donnée. Or, comme on le constate immédiatement, si $T(x)$ est donnée, on peut envisager l'équation (5.5) pour chaque λ. Donc, nous fixons un $\lambda > 0$ et nous définissons l'opérateur G par

$$G(I_\lambda)(x,q) = \frac{1}{4\pi}\int_{\alpha^0_{(x,q)}}^0 r_\lambda(x+\alpha' q)\int_{S^2} P_\lambda(q',q)I_\lambda(x+\alpha' q,q')\times \tag{5.6}$$

$$\times\exp(-\int_{\alpha'}^0 b_\lambda(x+\alpha'' q)d\alpha'')dq'd\alpha'$$

où $\alpha^0_{(x,q)}$ est le nombre réel négatif défini dans (3.9).

L'opérateur G défini dans (5.6) est identique à l'opérateur (4.6) du chapitre précédent donc on peut utiliser les même arguments.

PROPOSITION5.1. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$. Soient $a_\lambda(x), r_\lambda(x)$et $P_\lambda(q',q)$ des fonctions mesurables défnies sur Ω et $S^2\times S^2$ respectivement* *et satisfaisantes aux conditions* (3.1) *et* (3.2). *Soient* $I^0_\lambda(x^0, q)$ *une fonction mesurable, non-négative défini sur* Ξ *et satisfaisante à la condition* (4.3). *Si une fonction* $T(x) \in L^\infty(\Omega)$, $T(x) > 0$, *est donnée et, si en outre*

$$N(r_\lambda)||P||_{L^\infty(S^2\times S^2)} < 1, \tag{5.7}$$

où

$$N(r_\lambda) = \sup_{(x,q)\in\Omega\times S^2}\{\int\limits_{\alpha^0_{(x,q)}}^{0} r_\lambda(x+\alpha q)d\alpha\} \tag{5.8}$$

(ici $\alpha^0_{(x,q)}$ *est le nombre réel négatif défini dans* (3.9)*), alors l'équation (5.5) admet une solution* I_λ *et une seule dans la classe* $L^\infty(\Omega \times S^2)$.

Rappelons d'abord les propeiétés de l'opérateur G

Lemme 5.1. *L'opérateur* G *est une contraction dans l'espace* $L^\infty(\Omega\times S^2)$, *c'est-à-dire il existe une constante* K *telle que* $0 < K < 1$ *et que pour tout* $I^{[1]}, I^{[2]} \in L^\infty(\Omega \times S^2)$ *on ait*

$$||G(I^{[1]}) - G(I^{[2]})||_{L^\infty(\Omega\times S^2)} \leq K||I^{[1]} - I^{[2]}||_{L^\infty(\Omega\times S^2)} \tag{5.9}$$

C'est le même lemme que le lemme 4.1.

Démonstration de la proposition 5.1. On constate que le premier, le troisième et le quatrième termes du second membre de (5.5) sont déterminés directement par les fonctions données. Donc, Si on désigne par $\tilde{G}_I$ le second membre de (5.5) considéré comme une fonction de I_λ, quelques soient $I^{[1]}, I^{[2]} \in L^\infty(\Omega \times S^2)$, on a

$$\tilde{G}_I(I^{[1]}) - \tilde{G}_I(I^{[2]}) = G(I^{[1]}) - G(I^{[2]})$$

où G(.) est l'opérateur défini dans (5.6). Par conséquent, du lemme 5.1 on déduit que même l'opérateur $\tilde{G}_I(.)$ est une contraction dans l'espace $L^\infty(\Omega \times S^2)$, ce qui nous permet de trouver une solution I_λ et une seule dans la classe $L^\infty\ (\Omega \times S^2)$. □

PROPOSITION 5.2 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$. On suppose que $a_\lambda(x), r_\lambda(x)$, $P_\lambda(q', q)$ et $I^0_\lambda(x^0, q)$ vérifient les conditions mentionnées dans la proposition 5.1. Soient $T^{[1]}$ et $T^{[2]}$ deux fonctions à valeurs dans $]0, \infty[$ appartenant à $L^\infty(\Omega)$. Soit $I^{[1]}_\lambda (resp. I^{[2]}_\lambda)$ la solution de l'équations (5.5) avec $B[\lambda, T] = B[\lambda, T^{[1]}]$ $(resp. B[\lambda, T] = B[\lambda, T^{[2]}])$.*
Alors on a

$$||I^{[1]}_\lambda - I^{[2]}_\lambda||_{L^\infty(\Omega\times S^2)} \leq \frac{N(a_\lambda)}{1 - N(r_\lambda)||P_\lambda||_{L^\infty(S^2\times S^2)}} ||B[\lambda, T^{[1]}] - B[\lambda, T^{[2]}]||_{L^\infty(\Omega)}, \tag{5.10}$$

où $N(r_\lambda)$ est le nombre défini dans (5.8), tandis que

$$N(a_\lambda) = \sup_{(x,q)\in\Omega\times S^2} \{ \int_{\alpha^0_{(x,q)}}^{0} a_\lambda(x + \alpha q) d\alpha \}. \tag{5.11}$$

DÉMONSTRATION. On pose

$$U = I^{[1]}_\lambda - I^{[2]}_\lambda, \qquad V = B[\lambda, T^{[1]}] - B[\lambda, T^{[2]}]$$

Alors, en faisant la différence de l'équation (3.11) avec $B[\lambda, T] = B[\lambda, T^{[1]}]$ et celle avec $B[\lambda, T] = B[\lambda, T^{[2]}]$, on a

$$U(x, q) = \frac{1}{4\pi} \int_{\alpha^0_{(x,q)}}^{0} \int_{S^2} r_\lambda(x + \alpha' q) P_\lambda(q', q) U(x + \alpha' q, q') \exp(- \int_{\alpha'}^{0} d_\lambda(x + \alpha'' q) d\alpha'') dq' d\alpha' +$$

$$+\int_{\alpha^0_{(x,q)}}^{0} a_\lambda(x+\alpha' q)V(x+\alpha' q)\exp(-\int_{\alpha'}^{0}(b_\lambda(x+\alpha'' q))d\alpha'')d\alpha'$$

ou, en utilisant l'opérateur $G(.)$ introduit dans (5.6),

$$U(x,q) = G(U)(x,q)+$$
$$+\int_{\alpha^0_{(x,q)}}^{0} a_\lambda(x+\alpha' q)V(x+\alpha' q)\exp(-\int_{\alpha'}^{0} b_\lambda(x+\alpha'' q)d\alpha'')d\alpha',$$

en effet

$$|G(U)(x,q)| \leq N(r_\lambda)||P_\lambda||_{L^\infty(S^2\times S^2)}||U||_{L^\infty(\Omega\times S^2)}.$$

D'autre part, on a

$$\left|\int_{\alpha^0_{(x,q)}}^{0} a_\lambda(x+\alpha' q)V(x+\alpha' q)\exp(-\int_{\alpha'}^{0} b_\lambda(x+\alpha'' q)d\alpha'')d\alpha'\right| \leq N(a_\lambda)||V||_{L^\infty(\Omega)}.$$

On en déduit que

$$||U||_{L^\infty(\Omega\times S^2)} \leq \frac{N(a_\lambda)}{1-N(r_\lambda)||P_\lambda||_{L^\infty(S^2\times S^2)}}||V||_{L^\infty(\Omega)},$$

ce qui preuve (5.10). □

Chapitre 6

Lemmes sur l'effet thermique du rayonnement

Dans la suite(chapitre 6, 7), nous considérons un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ muni d'une frontière suffisament régulière et nous traittons le système d'équation (3.11),(3.5). Pour la température $T(x)$, on considère la condition de Neumann sur la frontière

$$\overrightarrow{n} \cdot \nabla T = 0 \qquad sur \qquad \partial\Omega \tag{6.1}$$

où $\overrightarrow{n}$ est le vecteur normal extérieur sur $\partial\Omega$. On remarque que, pour que l'équation (3.5) admette une solution, il faut que

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot F dx = 0 \tag{6.2}$$

En effet, si T et F satisfont à l'équation (3.5) et à la condition (6.1), alors en intégrant les deux membres de (3.5) sur Ω, on a l'égalité(6.2).

En outre, si a_λ s'annule identiquement ($a_\lambda = 0$), le problème se réduit à celui que nous avons considéré dans la proposition 4.1. Donc dans les chapitres 6 et 7 nous supposons que $a_\lambda(x)$ est mesurable dans $\Omega\times]0,\infty[$ et que

$$\exists\varepsilon > 0 \text{ tel que } \mathrm{mes}(\{(x,\lambda) \in \Omega\times]0,\infty[| a_\lambda(x) \geq \varepsilon\}) > 0 \tag{6.3}$$

Nous supposons en outre que $I^0_\lambda(x^0, q)$ est mesurable dans

$$\Xi^\Lambda = \{(x^0, q, \lambda) \in \partial\Omega \times S^2 \times]0, \infty[| (x^0, q) \in \Xi\}$$

(Ξ étant l'ensemble défini dans (4.2)) et que

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ tel que } \operatorname{mes}(\{(x^0, q, \lambda) \in \Xi^\Lambda | I^0_\lambda(x^0, q) \geq \varepsilon\}) > 0 \qquad (6.4)$$

En effet, si $I^0_\lambda(x^0, q)$ s'annule identiquement dans Ξ^Λ, alors on pourra démontrer sans difficulté que $I_\lambda(x, q) = 0,\ T(x) = 0$ sera la solution du problème(3.11) ,(3.5), (6.1).

En vertu de la proposition 4.1, pour tout $T \in L^\infty(\Omega), T > 0$, il exist une seule $I_\lambda \in L^\infty(\Omega \times S^2)$ pour tout $\lambda \in]0, \infty[$, ce qui permet de considérer I_λ comme fonction de T; donc la fonction F définie dans (3.6) elle peut être considérée comme fonction de T. Pour souligner cette dépendance, nous écrivons

$$F = F(T)$$

Lemme 6.1. *Soient* $T^{[i]} \in L^\infty(\Omega), T^{[i]} > 0, i = 1, 2.$ *Si*$T^{[1]} > T^{[2]}$, *alors on a*

$$\int_\Omega \nabla \cdot F(T^{[1]})dx > \int_\Omega \nabla \cdot F(T^{[2]})dx. \qquad (6.5)$$

Démonstration. On remarque d'abord que

$$\frac{\partial}{\partial T} B[\lambda, T] > 0 \qquad \forall\lambda > 0, \forall T > 0 \qquad (6.6)$$

ce qui résulte immédiatement du calcul explicite de la dérivée de la fonction de Plank(voir(2.1)). Donc on a

$$B[\lambda, T^{[1]}] > B[\lambda, T^{[2]}].$$

On rappelle que l'équation (3.11) est linéaire en I_λ, ce qui nous permet de décomposer la fonction $I_\lambda(x,q) = I_\lambda^{[2]}(x,q)$ définie avec la température $T^{[2]}$ en

$$I_\lambda(x,q) = I_\lambda^{ex}(x,q) + I_\lambda^{in}(x,q), \tag{6.7}$$

où $I_\lambda^{ex}(x,q)$ est la solution de l'équation (3.11) avec $B[\lambda,T]=0$, tandis que $I_\lambda^{in}(x,q)$ est la solution de l'équation (3.11) avec $I_\lambda^0(x+\alpha_(x,q)^0 q,q) = 0$ et $B[\lambda,T] = B[\lambda,T^{[2]}]$.

D'autre part, on décomposer la fonction $I_\lambda(x,q) = I_\lambda^{[1]}(x,q)$ en

$$I_\lambda(x,q) = I_\lambda^{ex}(x,q) + I_\lambda^{in}(x,q) + I_\lambda^{di}(x,q) \tag{6.8}$$

où $I_\lambda^{ex}(x,q)$ et $I_\lambda^{in}(x,q)$ sont comme dans (5.7), tandis que$I_\lambda^{di}(x,q)$ est la solution de l'équation (3.11) avec $I_\lambda^0(x+\alpha^0_{(x,q)}q,q) = 0$ et avec le remplacement de $B[\lambda,T]$ par $B[\lambda,T^{[1]}] - B[\lambda,T^{[2]}]$. Comme $B[\lambda,T^{[1]}] - B[\lambda,T^{[2]}] > 0$, en rappelant la définition de $I_\lambda^{di}(x,q)$ comme solution de l'équation (3.11) avec les conditions mentionnées ci-dessus, il n'est pas difficile de constater que, au moins pourλ appartenant à un ensemble de mesure non nulle(voir(5.3)), on a

$$I_\lambda^{di}(x,q) > 0 \text{ p.p dans } \Omega' \times S^2, \qquad \Omega' \subset \Omega, \quad \text{mes}(\Omega') > 0$$

Par ailleurs, de la définition (3.6) de F on déduit que

$$\int\limits_\Omega \nabla \cdot F(T^{[1]})dx - \int\limits_\Omega \nabla \cdot F(T^{[2]})dx = \int\limits_\Omega \int\limits_0^\infty \int\limits_{S^2} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} I_\lambda^{di}(x,q) q_j dq d\lambda dx = \tag{6.9}$$
$$= \int\limits_0^\infty \int_{S^2} \int\limits_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^3 q_j n_j I_\lambda^{di}(x,q) dS dq d\lambda,$$

où n_j est la j-ième composante du vecteur normal extérieur $\overrightarrow{n}$ sur $\partial\Omega$. Comme on a défini $I_\lambda^{di}(x,q)$ par (3.11) avec $I_\lambda^0(x+\alpha_{(x,q)}^0 q,q)=0$ et que $I_\lambda^0(x^0,q)$ est donnée sur l'ensemble de(x^0,q) caractérisé par la relation $\sum\limits_{j=1}^{3} q_j n_j <$ 0(voir(4.1),(4.2)), on a

$$\sum_{j=1}^{3} q_j n_j I_\lambda^{di}(x,q)=0 \qquad si \sum_{j=1}^{3} q_j n_j \leq 0$$

D'autre part, comme on l'a constaté ci-dessus, pourλ appartenant à un ensemble de mesure non nulle on a

$$I_\lambda^{di}(x,q)>0 \text{dans } \Omega' \times S^2,$$

ce qui peut être prolongé jusquà la frontière pourvu que $\sum\limits_{j=1}^{3} q_j n_j > 0$. En rappelant (6.9), on en déduit l'inégalité(6.5). Le lemme est démontré. □

Lemme 6.2. *Soit $T \in L^\infty(\Omega), T>0$. On pose $m_T = ess \inf\limits_{x\in\Omega} T(x)$. Alors la fonction*

$$f(c)=\int_\Omega \nabla \cdot F(T+c)dx \tag{6.10}$$

est continue et strictement croissante dans l'intervalle $]-m_T,\infty[$.

Démonstration. Comme la croissance stricte de $f(c)$ est démontrée dans le lemme 6.1, il reste à démontrer que $f(c)$ est continue. Or, comme on le voit aisément par la définition(6.10) de la fonction $f(c)$, pour démontrer la continuité de $f(c)$, il suffit de démontrer que $\lim\limits_{c\to 0} f(c)=f(0)$.

il n'est pas difficile de déduire de la définition de $I_\lambda^{di}(x,q)$ que

$$I_\lambda^{di}(x,q)\to 0 \ \ pour c \to 0$$

et donc

$$f(c)-f(0)=\int_0^\infty \int_{S^2} \int_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^{3} q_j n_j I_\lambda^{di}(x,q)dSdqd\lambda \to 0 \qquad c\to 0$$

Le Lemme est démontré. □

Lemme 6.3 *il existe une constante strictement positive* $\overline{T}_0$ *et une seule telle que*

$$\int_\Omega \nabla \cdot F(\overline{T}_0)dx = 0 \tag{6.11}$$

Démonstration. Soit $I_\lambda(x,q)$ la solution de l'équation (3.11) avec une constante $T > 0$. On décompose $I_\lambda(x,q)$ en

$$I_\lambda(x,q) = I_\lambda^{ex}(x,q) + I_\lambda^{in}(x,q)$$

de la même manière que dans(6.7). En outre on pose

$$F^{ex} = (F_1^{ex}, F_2^{ex}, F_3^{ex}), \qquad F_j^{ex} = \int_0^\infty \int_{S^2} I_\lambda^{ex}(x,q)q_j dq d\lambda,$$

$$F^{in} = (F_1^{in}, F_2^{in}, F_3^{in}), \qquad F_j^{in}(x) = \int_0^\infty \int_{S^2} I_\lambda^{in}(x,q)q_j dq d\lambda.$$

De (3.8)(voir aussi (3.7)) on déduit que

$$\frac{d}{d\alpha} I_\lambda^{ex} = -a_\lambda(x+\alpha q)I_\lambda^{ex}(x+\alpha q,q) - r_\lambda(x+\alpha q,q)I_\lambda^{ex}(x+\alpha q,q) + \tag{6.12}$$

$$+r_\lambda(x+\alpha q)\frac{1}{4\pi}\int_{S^2} I_\lambda^{ex}(x+\alpha q,q')P_\lambda(q',q)dq'.$$

On a donc

$$\nabla \cdot F^{ex} = \int_0^\infty \int_{S^2} q \cdot \nabla I_\lambda^{ex}(x+\alpha q,q)dq d\lambda = \int_0^\infty \int_{S^2} \frac{d}{d\alpha} I_\lambda^{ex}(x+\alpha q,q)|_{\alpha=0} dq d\lambda \tag{6.13}$$

$$= \int_0^\infty \int_{S^2} [-a_\lambda(x)I_\lambda^{ex}(x,q) - r_\lambda(x)I_\lambda^{ex}(x,q) + r_\lambda(x)\frac{1}{4\pi}\int_{S^2} I_\lambda^{ex}(x,q')P_\lambda(q',q)dq']dq d\lambda.$$

Or, en vertu de la deuxième condition de (3.2) on a

$$\int_{S^2} [-r_\lambda(x) I_\lambda^{ex}(x,q) + r_\lambda(x) \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} I_\lambda^{ex}(x,q') P_\lambda(q',q) dq'] dq = 0 \tag{6.14}$$

Il s'ensuit que

$$\int_\Omega \nabla \cdot F^{ex} dx = \int_\Omega \int_0^\infty \int_{S^2} [-a_\lambda(x) I_\lambda^{ex}(x,q)] dq d\lambda dx < 0. \tag{6.15}$$

D'autre part, de manière analogue à la déduction de (6.5) de (6.9), on parvient à

$$\int_\Omega \nabla \cdot F^{in} dx = \int_0^\infty \int_{S^2} \int_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^{3} q_j n_j I_\lambda^{in}(x,q) dS dq d\lambda > 0$$

Or, comme l'équation (3.11) est linéaire en I_λ, pour chaque $\lambda > 0$ fixé, la quantité

$$\int_0^\infty \int_{S^2} \int_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^{3} q_j n_j I_\lambda^{in}(x,q) dS dq d\lambda$$

est proportionnelle par rapport à $B[\lambda, T]$. Donc, en rappelant l'expression (2.1) de $B[\lambda, T]$, on voit aisément que

$$B[\lambda, T] \to 0 \qquad \text{pour } T \to 0^+,$$

ce qui, joint à (6.15), nous donne

$$\lim_{T\to 0^+} \int_\Omega \nabla \cdot F(T) dx = \lim_{T\to 0^+} \left[\int_\Omega \nabla \cdot F^{ex} dx + \lim_{T\to 0^+} \int_\Omega \nabla \cdot F^{in} dx \right] = \tag{6.16}$$

$$= \int_\Omega \nabla \cdot F^{ex} dx < 0$$

En outre, de l'expression (2.1) de $B[\lambda, T]$ on déduit également qui'il existe un T_1 suffisamment grand tel que

$$\int_\Omega \nabla \cdot F^{in} dx > \left| \int_\Omega \nabla \cdot F^{ex}(T_1) dx \right|$$

$(F^{ex}(T_1))$ étant F^{ex} déterminé par T_1 et donc

$$\int_\Omega \nabla \cdot F(T_1)dx = \int_\Omega \nabla \cdot F^{ex} dx + \int_\Omega \nabla \cdot F^{in}(T_1)dx > 0. \tag{6.17}$$

Le Lemme 6.3 résulte de (6.16) et (6.17) et du lemme (6.2). □

Lemme 6.4 *Soient $T^{[1]}$ et $T^{[2]}$ deux fonctions appartenant à $L^\infty(\Omega)$ et telle que*

$$\frac{1}{2}\overline{T}_0 \leq ess \inf_{x\in\Omega} T^{[i]}(x) \leq ess \sup_{x\in\Omega} T^{[i]}(x) \leq \frac{3}{2}\overline{T}_0, \qquad i = 1, 2. \tag{6.18}$$

Alors on a

$$||\nabla\cdot F(T^{[1]}) - \nabla\cdot F(T^{[2]})||_{L^\infty(\Omega)} \leq M(\{a_\lambda\}_\lambda, \{r_\lambda\}_\lambda, \{P_\lambda\}_\lambda, \overline{T}_0)||T^{[1]} - T^{[2]}||_{L^\infty(\Omega)}, \tag{6.19}$$

où

$$M(\{a_\lambda\}_\lambda, \{r_\lambda\}_\lambda, \{P_\lambda\}_\lambda, \overline{T}_0) = \sup_{x\in\Omega,\lambda>0} a_\lambda(x)\left(\frac{\overline{N}(a)}{1-\overline{N}(rP)} + 1\right) \times \int_0^\infty \gamma(\lambda)d\lambda, \tag{6.20}$$

$$\overline{N}(a) = \sup_{\lambda>0} N(a_\lambda), \qquad \overline{N}(rP) = \sup_{\lambda>0} N(rP)||P_\lambda||_{L^\infty(S^2\times S^2)},$$

$$\gamma(\lambda) = \sup_{\frac{1}{2}\overline{T}_0\leq T\leq\frac{3}{2}\overline{T}_0} \frac{\partial}{\partial T}B[\lambda, T],$$

$N(r_\lambda), N(a_\lambda)$ étant les nombres définis dans (4.5) et (4.10).

Remarque. On a

$$\int_0^\infty \gamma(\lambda)d\lambda < \infty. \tag{6.21}$$

En effet, en calculant explicitement la dérivée $\frac{\partial}{\partial T}B[\lambda, T]$, il n'est pas difficile de trouver une fonction$\tilde{\gamma}(\lambda)$ telle que

$$\gamma(\lambda) \leq \tilde{\gamma}(\lambda)\ \forall\lambda \in]0, \infty[, \qquad \int_0^\infty \tilde{\gamma}(\lambda) < \infty$$

DÉMONSTRATION. D'après la définition de $\gamma(\lambda)$, on a

$$|B[\lambda, T^{[1]}] - B[\lambda, T^{[2]}]| \leq \gamma(\lambda)|T^{[1]} - T^{[2]}| \tag{6.22}$$

et donc, à l'aide de la proposition 4.2, on a

$$||I_\lambda^{[1]} - I_\lambda^{[2]}||_{L^\infty(\Omega\times S^2)} \leq \frac{N(a_\lambda)}{1 - N(r_\lambda)||P_\lambda||_{L^\infty(S^2\times S^2)}}\gamma(\lambda)||T^{[1]} - T^{[2]}||_{L^\infty(\Omega)}, \tag{6.23}$$

où $I_\lambda^{[i]}$ est la solution de l'équation (3.11) avec $B[\lambda, T] = B[\lambda, T^{[i]}], i = 1, 2$.

Or, de la définition de F et de la relation (3.8) on déduit que

$$\nabla \cdot F(T^{[1]}) - \nabla \cdot F(T^{[2]}) = \int_0^\infty \int_{S^2} [-a_\lambda(x)U_\lambda(x, q) - r_\lambda(x)U_\lambda(x, q)+$$

$$+r_\lambda(x)\frac{1}{4\pi}\int_{S^2} U_\lambda(x, q')P_\lambda(q', q)dq' + a_\lambda(x)(B[\lambda, T^{[1]}] - B[\lambda, T^{[2]}])dqd\lambda,$$

où

$$U_\lambda(x, q) = I_\lambda^{[1]}(x, q) - I_\lambda^{[2]}(x, q).$$

Or, en vertu de la deuxième condition de (3.2) on a

$$\int_{S^2} [-r_\lambda(x)U_\lambda(x, q) + r_\lambda(x)\frac{1}{4\pi}\int_{S^2} U_\lambda(x, q')P_\lambda(q'.q)dq']dq = 0$$

Donc, on parvient à

$$||\nabla \cdot F(T^{[1]}) - \nabla \cdot F(T^{[2]})||_{L^\infty(\Omega)} \leq$$

$$\leq \sup_{x\in\Omega,\lambda>0} a_\lambda(x)\int_0^\infty [||U_\lambda||_{L^\infty(\Omega\times S^2)} + ||B[\lambda, T^{[1]}] - B[\lambda, T^{[2]}]||_{L^\infty(\Omega)}]d\lambda,$$

d'où, compte tenue de (6.22) et (6.23), on obtient (6.19). □

Chapitre 7

Solution stationnaire

Maintenant on va démontrer le résultat principal du présent travail.

THÉORÈME Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$ muni de la frontière $\partial\Omega$ de la classe C^2. Soient $a_\lambda(x), r_\lambda(x), P_\lambda(q', q)$, $I^0_\lambda(x^0, q)$ des fonctions mesurables, bornées et non-négatives définies sur $\Omega\times]0,\infty[$, $\Omega\times]0,\infty[$, $S^2 \times S^2\times]0,\infty[$, $\Xi\times]0,\infty[$ respectivement, où Ξ est l'ensemble définie dans (4.2). On suppose qu'elles vérifient la condition (3.2) ainsi que les conditions

$$\sup_{(x^0,q)\in\Xi} \int_0^\infty I_\lambda(x^0, q)d\lambda < \infty \tag{7.1}$$

$$\sup_{0<\lambda<\infty} N(r_\lambda)||P||_{L^\infty(S^2\times S^2)} < 1 \tag{7.2}$$

$$M(\{a_\lambda\}_\lambda, \{r_\lambda\}_\lambda, \{P_\lambda\}_\lambda, \overline{T}_0) \leq \frac{\kappa}{2C_\Omega} \tag{7.3}$$

$$||\nabla \cdot F(\overline{T}_0)||_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{\kappa\overline{T}_0}{4C_\Omega} \tag{7.4}$$

où $N(r_\lambda)$ et $M(\{a_\lambda\}_\lambda, \{r_\lambda\}_\lambda, \{P_\lambda\}_\lambda, \overline{T}_0)$ sont les constantes définies dans (4.5) et (6.20) respectivement et $\overline{T}_0$ la constante définie dans le lemme 6.3, tandis que C_Ω est une constante dépendante seulement de Ω(la contante C_Ω est précisée dans la démonstration du lemme 7.1). Alors le système d'équations (3.11), (3.5) avec la condition (6.1) admet une solution $(\{I_\lambda\}_{\lambda\in]0,\infty[}, T)$ dans la classe

$$I_\lambda \in L^\infty(\Omega\times S^2), \forall\lambda \in]0,\infty[, \quad T\in H^2(\Omega), \inf_{x\in\Omega} T(x) > 0 \tag{7.5}$$

La solution est unique dans un voisinage d'elle-même.

Avant tout on définit l'ensemble E_0 par

$$E_0 = \{T\in L^\infty(\Omega) | \int_\Omega \nabla\cdot F(T)dx = 0, \frac{1}{2}\overline{T}_0 \leq T \leq \frac{3}{2}\overline{T}_0 \text{p.p. dans}\Omega\} \tag{7.6}$$

On a alors le lemme suivante.

Lemme 7.1. *Si $\overline{T}_0 \in E_0$, il existe l'unique solution T de l'équation*

$$\kappa\Delta\cdot T = \nabla.F(\overline{T}) \text{ dans}\Omega, \tag{7.7}$$

avec la condition (6.1), solution satisfaisant à la condition

$$\int_\Omega \nabla\cdot F(T)dx = 0 \tag{7.8}$$

En outre on a $T\in E_0$.

Démonstration. Un raisonnement analogue à la démonstration du lemme 6.4 nous conduit à l'appartenance de $\nabla\cdot F(\overline{T})$ à $L^\infty(\Omega)$. On a donc également $\nabla\cdot F(\overline{T}) \in L^2(\Omega)$. Cela étant, le problème(7.7), (6.1) admet une solution généralisé T avec $\nabla T\in H^1(\Omega)$, qui est unique à une constante additive près (voir par exemple le théorème 1 du chapiter IV de [6]). En outre, il existe une constante C_1 telle que

$$||T - M(T)||_{H^2(\Omega)} \leq \frac{C_1}{\kappa}||\nabla\cdot F(\overline{T})||_{L^2(\Omega)} \tag{7.9}$$

où

$$M(T) = \frac{1}{mes(\Omega)} \int_\Omega T(x)dx$$

(voir par exemple le théorème 8 du chapiter IV de [6]). On a donc

$$||T - M(T)||_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{C_1 C_2}{\kappa} ||\nabla \cdot F(\overline{T})||_{L^2(\Omega)}$$

avec une constante C_2 telle que

$$||u||_{L^\infty(\Omega)} \leq C_2 ||u||_{H^2(\Omega)} \quad \forall u \in H^2(\Omega).$$

On en déduit que

$$ess \sup_{x\in\Omega} T(x) - ess \inf_{x\in\Omega} T(x) \leq \frac{C_\Omega}{\kappa} ||\nabla \cdot F(\overline{T}||_{L^\infty(\Omega)} \tag{7.10}$$

avec $C_\Omega = 2C_1C_2(mes(\Omega))^{1/2}$

D'ailleure on a

$$||\nabla \cdot F(\overline{T})||_{L^\infty(\Omega)} \leq ||\nabla \cdot F(\overline{T}_0)||_{L^\infty(\Omega)} + ||\nabla \cdot F(\overline{T}) - \nabla \cdot F(\overline{T}_0)||_{L^\infty(\Omega)}.$$

Or, d'après le lemme 6.4, on a compte tenu de la condition (7.3) et de l'appartenance de $\overline{T}$ à E_0

$$||\nabla\cdot F(\overline{T}) - \nabla\cdot F(\overline{T}_0)||_{L^\infty(\Omega)} \leq M(\{a_\lambda\}_\lambda, \{r_\lambda\}_\lambda, \{P_\lambda\}_\lambda, \overline{T}_0)||\overline{T} - \overline{T}_0||_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{\kappa \overline{T}_0}{4C_\Omega}.$$

Donc, en rappelant (7.4), on obtient

$$||\nabla \cdot F(\overline{T})||_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{\kappa \overline{T}_0}{2C_\Omega},$$

ce qui, joint à (7.10), nous donne

$$ess \sup_{x\in\Omega} T(x) - ess \inf_{x\in\Omega} T(x) \leq \frac{1}{2} \overline{T}_0. \tag{7.11}$$

On en déduit, compte tenu également des Lemmes 6.1 et 6.2 qu'il existe une unique $T \in E_0$ satisfaisant à (7.7), (6.1). Lemme est démontré. □

Lemme7.2 *Si* $\overline{T}^{[1]}, \overline{T}^{[2]} \in E_0$ *et si* $\overline{T}^{[1]}$ *et* $\overline{T}^{[2]}$ *sont la solution du problème* (7.7), (6.1) *appartenant à* E_0*, alors on a*

$$||T^{[1]} - T^{[2]}||_{l^\infty(\Omega)} \leq \frac{C_\Omega}{\kappa}||\nabla \cdot F(\overline{T}^{[1]}) - \nabla \cdot F(\overline{T}^{[2]})||_{l^\infty(\Omega)}. \tag{7.12}$$

Démonstration. On remarque que la différence $W = T^{[1]} - T^{[2]}$ vérifie l'équation

$$\kappa \nabla W = \nabla \cdot F(\overline{T}^{[1]}) - \nabla \cdot F(\overline{T}^{[2]})$$

et la condition

$$\overrightarrow{n} \cdot \nabla W = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

Or, en vertu du lemme 6.2, W ne peut pas être strictement positive presque partout, ni strictement négative presque partout. Donc le même raisonnement de la démonstration du lemme 7.1 nous ramène à (7.12). □

Démonstration du théorème 7.1. On définit l'opérateur Γ, qui à $\overline{T} \in E_0$ associe la solution $T \in E_0$ du problème (7.7), (6.1). En vertu du lemme 7.1 on a

$$\Gamma(E_0) \subset E_0. \tag{7.13}$$

D'autre part, en vertu de (6.19) et (7.12), on a

$$||T^{[1]} - T^{[2]}||_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{C_\Omega}{\kappa} M(\{a_\lambda\}_\lambda, \{r_\lambda\}_\lambda, \{P_\lambda\}_\lambda, \overline{T}_0)||\overline{T}^{[1]} - \overline{T}^{[2]}||_{L^\infty(\Omega)}, \tag{7.14}$$

où $M(\{a_\lambda\}_\lambda, \{r_\lambda\}_\lambda, \{P_\lambda\}_\lambda, \overline{T}_0)$ est la constante définie dans (6.20).

Définissons la suite $T^{[n]}, n = 0, 1, ...,$ en posant

$$T^{[0]} = \overline{T}_0, \quad T^{[n+1]} = \Gamma(T^{[n]}).$$

En vertu de (7.13), $T^{[n]}$ est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}$ et on a $\{T^{[n]}\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E_0$. Or, comme l'inégalité (7.14) jointe à (7.3) nous donne la contraction de l'opérateur Γ, la suite $T^{[n]}, n = 0, 1, ...,$ converge dans la topologie de $L^\infty(\Omega)$. Il n'est pas difficile de voir que la limite vérifie le système d'équation (3.11), (3.5) avec la condition (6.1). En outre, de l'inégalité (7.14) et de la condition (7.3) on déduit que la solution $(\{I_\lambda\}_{\lambda\in]0,\infty[}, T)$ avec $T \in E_0$ est unique. Le théorème est démontré.$\square$

REMARQUE : Pour le problème de la radiation dans l'air avec la présence de la radiation du soleil (concentrée dans un angle), en tenant compte des résultats de l'étude effectuée dans le chapitre 5, nous pouvons espérer que l'application de la méthode utilisée dans la démonstration de l'existence de la solution citée dans le chapitre 7 pourra nous donner l'existence d'une solution même dans le cas de la présence de la radiation du soleil .

Bibliographie

[1] Stphane Jacquemoud : *Physique de l'atmosphère, télédétection et géophysique spatiale L3 Géosciences fondamentales.* Institut de physique du globe de Paris 20-Feb-06.

[2] Luc Mussons : *Rayonnement Atmosphrique : Equation du Transfert Radiatif :modles simplifis.* Université de Prais-Est 10 novembre 2009

[3] *Le rayonnement solaire (1).* Université de marseille.

[4] Amosov, A. A. : *Correction globale du problème aux conditions initiales et aux limites pour le système d'équations de la dynamique d'un gaz visqueux avec la radiation (en russe).* Doklady Akad. Nauk SSSR. vol. 280 (1985), pp.1326-1329.

[5] Messaadia. N : *Solution stationnaire du système d'équations de la radiation et de la température dans l'air.* Quaderno Département de Mathématique.Torino , N. 3, 2012.

[6] V. P. Mikhaïlov : *Equations aux dérivées partielles (traduit du russe).* Mir, 1980