République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 – Guelma

Faculté de Mathématiques, d'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire de Fin d'Etude

Master Académique en Mathématiques

Option : Analyse

Thème

Pseudo-Convexité, Inégalités de Carleman & Unique Continuation

Présenté par :

Mr. Fouad LAKHAL

Jury :

Dr : Nadjib BOUSSETILA Président

Dr : Khadir BENARIOUA Rapporteur

Dr : A. BERREHAIL Examinateur

Session Juin 2012

REMERCIMENTS

Je remercie ALLAH de m'avoir éclairé le chemin du savoir et de m'avoir armé de foi, de patience et de force afin d'élaborer ce travail.

Je tiens à exprimer ma gratitude, ma reconnaissance et mes profonds remerciements à mon directeur de recherche Dr.Khadir BENARIOUA. Je le remercie chaleureusement pour sa confiance, ses conseils précieux et pour le temps qu'il m'a accordé malgré ses obligations, ses devoirs et ses responsabilités. Je le remercie également pour sa rigueur, sa bonne humeur, sa sympathie et sa modestie.

Mes remerciements les plus respectueux vont au Dr :Nadjib BOUSSETILA d'avoir accepté d'être Président du Jury, et au Dr :A. BERREHAIL qui m'a fait l'honneur d'être examinateur de ce travail.

Un grand merci aussi à tous les membres de ma famille que m'ont soutenu et encouragé pour poursuivre mes études et réaliser le rêve de la famille.

J'espère n'avoir oublié personne, si c'est le cas je m'en excuse par avance.

Pseudo-Convexité, Inégalités de Carleman & Unique Continuation *

Fouad LAKHAL
Université de Guelma

Résumé

Dans ce mémoire, nous introduisons la notion de forte pseudo-convexité des fonctions et des surfaces par rapport à un opérateur différentiel linéaire. Nous utilisons ces notions pour formuler des hypothèses qui entrainent certaines inégalités dites de Carleman. Nous montrons, enfin, que ce type d'inégalités implique la propriété dite de l'unique continuation.

MOTS CLÉ : Opérateur différentiel linéaire, réel de type principal, de type normal principal, Pseudo-convexité, inégalités de Carleman, unique continuation.

Table des matières

1 Introduction **2**

2 Rappels, notations et conventions **3**
2.1 généralités 3
2.2 Opérateurs aux dérivées partielles 4

3 Pseudo-convexité des fonctions et des surfaces **6**
3.1 Conditions de forte pseudo-convexité 6
3.2 Opérateurs réels d'ordre deux et de type principal 15
3.3 Interprétation géométrique de la pseudo-convexité 17

4 Estimations de type Carleman et unique continuation **17**
4.1 τ-dépendance et inégalités de type Garding 17
4.2 Inégalités de type Carleman 19
4.3 Unique continuation 25

*Document composé à l'aide du logiciel de traitement de texte TEX, au format LATEX 2_ε.

1 Introduction

Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, $\Sigma = \varphi^{-1}(0)$ une hypersurface[1] orientée et suffisamment régulière de Ω, et $p(x,D)$ un opérateur différentiel sur Ω. Une formulation typique du problème de l'unique continuation (ou problème du prolongement unique) est la suivante :

> *Trouver des conditions sur $p(x,D)$ et Σ telles que, toute solution u_0 de l'équation aux dérivées partielles $p(x,D)u = 0$ sur Ω, qui est nulle sur $\Sigma^+ = \{x \in \Omega \mid \varphi(x) > 0\}$, soit encore nulle sur $\Sigma^- = \{x \in \Omega \mid \varphi(x) \leq 0\}$, dans un voisinage de Σ.*

Ce problème est intimement lié au problème de Cauchy à données initiales sur Σ, pour l'opérateur $p(x,D)$:

> *Etant données m fonctions : $f_0, f_1, \ldots, f_{m-1} : \Sigma \to \mathbb{R}$, peut-on trouver une fonction $u_0 : \Sigma^- \to \mathbb{R}$ telle que $p(x,D)u_0 = 0$ dans Σ^- et, $\forall j = 0, \ldots, m-1$, $D_\nu^j u_0 = f_j$ sur Σ.*

Plus précisément, la propriété de l'unique continuation est équivalente à l'unicité dans le problème de Cauchy. En particulier, si le problème de Cauchy est bien posé (c'est-à-dire s'il admet une unique solution) alors la propriété de l'unique continuation est satisfaite, et il conviendrait donc d'étudier cette propriété uniquement dans le cas où le problème de Cauchy est mal posé.

Dans le cas particulier où $p(x,D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha$ est linéaire à cœfficients analytiques[2] de symbole principal $\widetilde{p}(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\xi^\alpha$, nous avons le théorème d'unicité d'Holmgren (*cf.* [2]) :

> *On suppose que $p(x,D)$ est à cœfficients analytiques et que Σ est non caractéristique pour $p(x,D)$, c'est-à-dire que $\widetilde{p}(x, \nabla_x \varphi) \neq 0$ sur Σ. Dans ce cas, si $p(x,D)u_0 = 0$ sur Ω et $u_0 = 0$ sur Σ^+, alors $u_0 = 0$ sur Σ^-, dans un voisinage de Σ.*

En particulier,

> *Si l'on suppose que $p(x,D)$ est elliptique[3] à cœfficients analytiques et que Ω est connexe, et si $p(x,D)u_0 = 0$ sur Ω et $u_0 = 0$ sur tout ouvert non vide $U \subset \Omega$, alors $u_0 \equiv 0$ sur Ω.*

1. $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ est suffisamment régulière et $\nabla\varphi \neq 0$ sur $\Sigma = \varphi^{-1}(0)$.
2. *i.e.* les fonctions a_α sont analytiques en x.
3. *i.e.* $\widetilde{p}(x,\xi) \neq 0$ *pour* $\xi \neq 0$.

Pour les opérateurs à cœfficientes $\mathscr{C}^\infty$ les résultats ne sont pas aussi nets, et il existe même des opérateurs elliptiques d'ordre quatre qui annulent des fonctions non triviales, à supports compacts (*cf.* [5]).

Dans [1], Carleman a déduit la propriété de l'unique continuation dans le cas de deux variables, à partir d'estimations de la forme :

$$\boxed{\sum_{|\alpha|+k<m} h(\tau)^{2(m-|\alpha|-k)}\tau^{2k}\int e^{2\tau\psi(x)}|D^\alpha v|^2 dx \leq c\int e^{2\tau\psi(x)}|p(x,D)v|^2 dx} \tag{1}$$

où $v \in \mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$, $h(\tau) = (1+\tau)^\delta$, $0 < \delta \leq 1$, $\tau \geq \tau_0 > 0$.

L'unicité dans le problème de Cauchy n'est toujours pas très bien comprise, et il n'est pas non plus évident que les estimations de Carleman soient le bon outil pour ce type de résultats. Même le théorème d'unicité d'Holmgren ne raconte pas toute l'histoire.

2 Rappels, notations et conventions

2.1 généralités

Les notations sont celles des équations aux dérivées partielles. Si n est un nombre entier strictement positif, si $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^n$, et si $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ est un n-multi-indice (*i.e.* un n-uple de nombres entiers ≥ 0), on pose :

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$$
$$\|x\| = (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}$$
$$\alpha! = \alpha_1!\alpha_2!\ldots\alpha_n!$$
$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}$$
$$\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (\text{pour } j = 1, 2, \ldots, n)$$
$$\partial = (\partial_1, \partial_2, \ldots, \partial_n)$$
$$\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\alpha_2}\ldots\partial_n^{\alpha_n}$$
$$D_j = \frac{1}{i}\partial_j \quad (\text{pour } j = 1, 2, \ldots, n, \text{ et } i^2 = -1)$$
$$D = \frac{1}{i}\partial$$
$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1}D_2^{\alpha_2}\ldots D_n^{\alpha_n}$$

de telle sorte que, pour une fonction f suffisamment différentiable, la formule de Taylor s'écrit :

$$f(x+h) = \sum_{|\alpha|<N} \partial^\alpha f(x)\frac{h^\alpha}{\alpha!} + O(\|h\|^N).$$

2.2 Opérateurs aux dérivées partielles

Soit m un entier naturel, et Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$. On appelle opérateur différentiel linéaire d'ordre m sur Ω, toute application $p(x,D)$ sur l'ensemble des fonctions (ou celui des distributions) sur Ω telle que :

$$\boxed{p(x,D)f = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)D^\alpha f} \tag{2}$$

que l'on note tout simplement :

$$\boxed{p(x,D) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)D^\alpha} \tag{3}$$

où les a_α sont des fonctions assez lisses sur Ω, appelées cœfficients de $p(x,D)$.

Si P $(=p(x,D))$ est un opérateur différentiel linéaire d'ordre m sur Ω, son symbole total est la fonction (polynomiale en ξ) définie sur $\Omega\times\mathbb{R}^n$ (*i.e.* sur le fibré cotangent $T^*\Omega$) par :

$$\boxed{p(x,\xi) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\xi^\alpha} \tag{4}$$

son symbole principal, que l'on note ici $\widetilde{p}(x,\xi)$, est la partie positivement homogène de degré m dans $p(x,\xi)$:

$$\boxed{\widetilde{p}(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\xi^\alpha} \tag{5}$$

son ensemble caractéristique noté $\mathrm{Car}(P)$ est défini par :

$$\boxed{\mathrm{Car}(P) = \left\{(x,\xi)\in\Omega\times(\mathbb{R}^n\setminus 0)\,\middle|\,\widetilde{p}(x,\xi)=0\right\}} \tag{6}$$

et le Hamiltonien associé à son symbole principal $\widetilde{p}$ est le champ de vecteurs :

$$\boxed{H_{\widetilde{p}} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\widetilde{p}}{\partial\xi_j}\cdot\frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial\widetilde{p}}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial}{\partial\xi_j}} \tag{7}$$

Si les cœfficients a_α de P sont de classe $\mathscr{C}^2$, les courbes intégrales de $\widetilde{p}$ sont déterminées de façon unique et s'appellent les bicaractéristiques de P. Celles parmi elles qui sont incluses dans $\mathrm{Car}(P)$ s'appellent les bicaractéristiques nulles de P, et jouent un rôle fondamental dans l'étude des opérateurs aux dérivées partielles. Si p et q sont deux fonctions sur $T^*\Omega$ ($\simeq \Omega \times \mathbb{R}^n$), leur crochet de Poisson noté $\{p,q\}$ est défini par :

$$\boxed{\{p,q\} = H_p q = -H_q p = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial p}{\partial \xi_j} \cdot \frac{\partial q}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial q}{\partial \xi_j}} \qquad (8)$$

il représente la dérivée de q le long des bicaractéristiques de P, dans le cas où p est réel, égal au symbole principal de P.

Définition 2.2.1. *Soit P $(= p(x,D))$ un opérateur différentiel linéaire de symbole principal $\widetilde{p}$. On dit que P est* **réel de type principal** *si*

$$\boxed{\widetilde{p} \text{ est réel, et } \nabla_{x,\xi}\widetilde{p} \neq 0 \text{ sur } \mathrm{Car}(P)} \qquad (9)$$

Si P est réel de type principal, alors $\mathrm{Car}(P)$ est une hypersurface de $\Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus 0)$.

Définition 2.2.2. *Soit P $(= p(x,D))$ un opérateur différentiel linéaire sur Ω, de symbole principal $\widetilde{p}$. On dit que P est* **normal principal** *sur Ω si, pour tout compact $K \Subset \Omega$, il existe un réel strictement positif C_K, tel que :*

$$\boxed{\forall x \in K,\ \forall \xi \in \mathbb{R}^n,\ |\{\overline{\widetilde{p}}, \widetilde{p}\}(x,\xi)| \leq C_K |\widetilde{p}(x,\xi)| \cdot \|\xi\|^{m-1}} \qquad (10)$$

Remarque 2.2.1. *En particulier : Tout opérateur différentiel linéaire de symbole principal réel est normal principal, et il en est de même de tout opérateur différentiel linéaire elliptique.*

Preuve. Si P a un symbole principal $\widetilde{p}$ réel, on a :

$$\forall x \in K,\ \forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus 0,\ |\{\overline{\widetilde{p}}, \widetilde{p}\}(x,\xi)| = |\{\widetilde{p}, \widetilde{p}\}(x,\xi)| = 0 \leq |\widetilde{p}(x,\xi)| \cdot \|\xi\|^{m-1}$$

et si P est elliptique de symbole principal $\widetilde{p}$, alors : $\forall x \in K$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus 0$,

$$|\widetilde{p}(x,\xi)| = |\widetilde{p}(x, \xi/\|\xi\|)| \cdot \|\xi\|^m \geq C'_K \|\xi\|^m \text{ où } C'_K = \inf_{x \in K, \|\zeta\|=1} |\widetilde{p}(x,\zeta)|$$

donc, $\forall x \in K$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus 0$,

$$|\widetilde{p}(x,\xi)| \cdot \|\xi\|^{m-1} \geq C'_K \|\xi\|^{2m-1}$$

mais, la fonction $\{\overline{\widetilde{p}}, \widetilde{p}\}$ est positivement homogène de degré $2m-1$ par rapport à ξ, et cela implique que, $\forall x \in K$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus 0$,

$$|\{\overline{\widetilde{p}}, \widetilde{p}\}(x,\xi)| = |\{\overline{\widetilde{p}}, \widetilde{p}\}(x, \xi/\|\xi\|)| \cdot \|\xi\|^{2m-1} \leq C''_K \|\xi\|^{2m-1}$$

où $C''_K = \sup_{x \in K, \|\zeta\|=1} |\{\overline{\widetilde{p}}, \widetilde{p}\}(x,\zeta)|$.

Par conséquent,

$$\forall x \in K,\ \forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus 0,\ |\{\overline{\widetilde{p}}, \widetilde{p}\}(x,\xi)| \leq C_K |\widetilde{p}(x,\xi)| \cdot \|\xi\|^{m-1} \text{ où } C_K = C''_K / C'_K.$$

Pour $\xi = 0$, c'est évident. ■

3 Pseudo-convexité des fonctions et des surfaces

Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ et Σ une hypersurface de Ω, orientée et de classe $\mathscr{C}^2$. Alors Σ se laisse représenter sous forme d'ensembles de niveau de fonctions φ de classe $\mathscr{C}^2$ sur Ω :

$$\boxed{\Sigma = \{x \mid x \in \Omega \text{ et } \varphi(x) = 0\}} \tag{11}$$

telles que

$$\boxed{\nabla\varphi \neq 0 \text{ sur } \Sigma, \text{ et } \varphi > 0 \text{ sur } \Sigma_+} \tag{12}$$

et ces représentations sont uniques, modulo les multiplications par des fonctions positives de classe $\mathscr{C}^2$.

3.1 Conditions de forte pseudo-convexité

Une condition de forte pseudo-convexité sur Σ est la suivante :

Définition 3.1.1. *Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, P $(= p(x,D))$ un opérateur différentiel linéaire de symbole principal $\widetilde{p}$, et $\Sigma = \{x \mid x \in \Omega$ et $\varphi(x) = 0\}$ une hypersurface orientée de Ω. On dit que* Σ **est fortement pseudo-convexe**[3] **par**

3. Lorsque Σ vérifie seulement les conditions (13)−(14), on dit qu'elle est pseudo-convexe.

et il s'en suit alors que

$$\begin{aligned}
\{\widetilde{p},\varphi\}(x_0,\xi)=0 \quad &\Rightarrow \quad \{\overline{\widetilde{p}},\varphi\}(x_0,\xi)=0\\
&\Rightarrow \quad \{\overline{\widetilde{p}},\{\widetilde{p},\psi\}\}(x_0,\xi)=g(x_0)\{\overline{\widetilde{p}},\{\widetilde{p},\varphi\}\}(x_0,\xi)\\
&\qquad \text{(parce que } \varphi(x_0)=0)\\
&\Rightarrow \quad \mathrm{Re}\,\{\overline{\widetilde{p}},\{\widetilde{p},\psi\}\}(x_0,\xi)=g(x_0)\,\mathrm{Re}\,\{\overline{\widetilde{p}},\{\widetilde{p},\varphi\}\}(x_0,\xi)
\end{aligned}$$

comme g est strictement positive, on a bien

$$\left.\begin{array}{r}\{\widetilde{p},\varphi\}(x_0,\xi)=0,\\ \mathrm{Re}\,\{\overline{\widetilde{p}},\{\widetilde{p},\varphi\}\}(x_0,\xi)>0\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\{\widetilde{p},\psi\}(x_0,\xi)=0,\\ \mathrm{Re}\,\{\overline{\widetilde{p}},\{\widetilde{p},\psi\}\}(x_0,\xi)>0\end{array}\right.$$

ce qui veut dire que si les conditions $(13)-(14)$ sont vraies avec une fonction φ, elles restent encore vraies avec toute autre fonction ψ de la forme $\psi=g\varphi$, où g est strictement positive, de classe $\mathscr{C}^2$.

D'un autre côté, on a :

$$\begin{aligned}
\widetilde{p}(x_0,\xi+i\tau\nabla\psi(x_0)) &= \widetilde{p}(x_0,\xi+i\tau\nabla(g\varphi)(x_0))\\
&= \widetilde{p}(x_0,\xi+i\tau g(x_0)\nabla\varphi(x_0)+i\tau\varphi(x_0)\nabla g(x_0))\\
&= \widetilde{p}(x_0,\xi+i\tau g(x_0)\nabla\varphi(x_0)) \ \text{(parce que } \varphi(x_0)=0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{\widetilde{p}(x_0,\xi+i\tau\nabla\psi),\psi\}(x_0,\xi) &= \{\widetilde{p}(x_0,\xi+i\tau\nabla(g\varphi)),g\varphi\}(x_0,\xi)\\
&= g(x_0)\{\widetilde{p}(x_0,\xi+i\tau\nabla(g\varphi)),\varphi\}(x_0,\xi)\\
&\qquad +\varphi(x_0)\{\widetilde{p}(x_0,\xi+i\tau\nabla(g\varphi)),g\}(x_0,\xi)\\
&= g(x_0)\{\widetilde{p}(x_0,\xi+i\tau\nabla(g\varphi)),\varphi\}(x_0,\xi)\\
&\qquad \text{(parce que } \varphi(x_0)=0)\\
&= g(x_0)\{\widetilde{p}(x_0,\xi+i\tau g\nabla\varphi+i\tau\varphi\nabla g),\varphi\}(x_0,\xi)\\
&= g(x_0)\big[\nabla_\xi\widetilde{p}(x_0,\xi+i\tau g(x_0)\nabla\varphi(x_0)\\
&\qquad +i\tau\varphi(x_0)\nabla g(x_0))\cdot\nabla\varphi(x_0)\big]\\
&= g(x_0)\big[\nabla_\xi\widetilde{p}(x_0,\xi+i\tau g(x_0)\nabla\varphi(x_0))\cdot\nabla\varphi(x_0)\big]\\
&\qquad \text{(toujours parce que } \varphi(x_0)=0)\\
&= g(x_0)\{\widetilde{p}(x_0,\xi+i\tau g(x)\nabla\varphi),\varphi\}(x_0,\xi)
\end{aligned}$$

et en posant $\zeta=\xi+i\tau\nabla\psi(x)$ et $\zeta'=\xi+i\tau g(x)\nabla\varphi(x)$, de sorte que

$\zeta = \zeta' + \varphi(x)\nabla g(x)$, on obtient :

$$\begin{aligned}\{\overline{\widetilde{p}}(x_0,\overline{\zeta}),\widetilde{p}(x_0,\zeta)\} &= \sum_{j=1}^{n}\Big[\frac{\partial}{\partial \xi_j}[\overline{\widetilde{p}}(x_0,\overline{\zeta})]\cdot\frac{\partial}{\partial x_j}[\widetilde{p}(x_0,\zeta)] \\ &\qquad -\frac{\partial}{\partial x_j}[\overline{\widetilde{p}}(x_0,\overline{\zeta})]\cdot\frac{\partial}{\partial \xi_j}[\widetilde{p}(x_0,\zeta)]\Big] \\ &= \sum_{j=1}^{n}\Big[\frac{\partial\overline{\widetilde{p}}}{\partial \xi_j}(x_0,\overline{\zeta})\Big(\sum_{k=1}^{n} i\tau\frac{\partial^2\psi}{\partial x_j x_k}(x)\cdot\frac{\partial\widetilde{p}}{\partial \xi_k}(x_0,\zeta)\Big) \\ &\qquad +\Big(\sum_{k=1}^{n} i\tau\frac{\partial^2\psi}{\partial x_j x_k}(x)\cdot\frac{\partial\overline{\widetilde{p}}}{\partial \xi_k}(x_0,\overline{\zeta})\Big)\frac{\partial\widetilde{p}}{\partial \xi_j}(x_0,\zeta)\Big]\end{aligned}$$

d'où :

$$\{\overline{\widetilde{p}}(x_0,\overline{\zeta}),\widetilde{p}(x_0,\zeta)\} = 2i\tau\sum_{j,k=1}^{n}\overline{\frac{\partial\widetilde{p}}{\partial \xi_j}(x_0,\zeta)}\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial x_j x_k}(x)\cdot\frac{\partial\widetilde{p}}{\partial \xi_k}(x_0,\zeta)$$

ce qui implique que

$$\frac{1}{i\tau}\{\overline{\widetilde{p}}(x_0,\overline{\zeta}),\widetilde{p}(x_0,\zeta)\}(x_0,\xi) = 2\sum_{j,k=1}^{n}\overline{\frac{\partial\widetilde{p}}{\partial \xi_j}(x_0,\zeta')}\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial x_j x_k}(x_0)\cdot\frac{\partial\widetilde{p}}{\partial \xi_k}(x_0,\zeta')$$

Mais,

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x_j x_k}(x_0) = g(x_0)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j x_k}(x_0)+\frac{\partial g}{\partial x_k}(x_0)\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(x_0)+\frac{\partial g}{\partial x_j}(x_0)\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}(x_0)$$

donc :

$$\begin{aligned}\frac{1}{i\tau}\{\overline{\widetilde{p}}(x_0,\overline{\zeta}),\widetilde{p}(x_0,\zeta)\}(x_0,\xi) &= 2g(x_0)\sum_{j,k=1}^{n}\overline{\frac{\partial\widetilde{p}}{\partial \xi_j}(x_0,\zeta')}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j x_k}(x_0)\frac{\partial\widetilde{p}}{\partial \xi_k}(x_0,\zeta') \\ &+2\sum_{j,k=1}^{n}\overline{\frac{\partial\widetilde{p}}{\partial \xi_j}(x_0,\zeta')}\cdot\frac{\partial g}{\partial x_k}(x_0)\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(x_0)\cdot\frac{\partial\widetilde{p}}{\partial \xi_k}(x_0,\zeta') \\ &+2\sum_{j,k=1}^{n}\overline{\frac{\partial\widetilde{p}}{\partial \xi_j}(x_0,\zeta')}\cdot\frac{\partial g}{\partial x_j}(x_0)\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}(x_0)\cdot\frac{\partial\widetilde{p}}{\partial \xi_k}(x_0,\zeta')\end{aligned}$$

et il s'en suit alors que :

$$\begin{aligned}\frac{1}{i\tau}\{\overline{\widetilde{p}}(x_0,\overline{\zeta}),\widetilde{p}(x_0,\zeta)\}(x_0,\xi) &= 2g(x_0)\sum_{j,k=1}^{n}\overline{\frac{\partial\widetilde{p}}{\partial \xi_j}(x_0,\zeta')}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j x_k}(x_0)\frac{\partial\widetilde{p}}{\partial \xi_k}(x_0,\zeta') \\ &+2\{\overline{\widetilde{p}}(x_0,\overline{\zeta'}),\varphi\}(x_0,\xi)\cdot\{\widetilde{p}(x_0,\zeta'),g\}(x_0,\xi) \\ &+2\{\overline{\widetilde{p}}(x_0,\overline{\zeta'}),g\}(x_0,\xi)\cdot\{\widetilde{p}(x_0,\zeta'),\varphi\}(x_0,\xi)\end{aligned}$$

c'est-à-dire que

$$\frac{1}{i\tau}\{\overline{\widetilde{p}}(x_0,\xi-i\tau\nabla\psi),\widetilde{p}(x_0,\xi+i\tau\nabla\psi)\}(x_0,\xi)$$
$$=\frac{g(x_0)}{i\tau}\{\overline{\widetilde{p}}(x_0,\xi-i\tau g(x)\nabla\varphi),\widetilde{p}(x_0,\xi+i\tau g(x)\nabla\varphi)\}(x_0,\xi)$$
$$+4\,\mathrm{Re}\left(\overline{\{\widetilde{p}(x_0,\xi+i\tau g(x)\nabla\varphi),\varphi\}}(x_0,\xi)\cdot\{\widetilde{p}(x_0,\xi+i\tau g(x)\nabla\varphi),g\}(x_0,\xi)\right)$$

par conséquent

$$\{\text{Les conditions } (15)-(16) \text{ sont vraies avec la fonction } \varphi\}$$
$$\Downarrow$$
$$\left\{\begin{array}{c}\frac{1}{i\tau}\{\overline{\widetilde{p}}(x_0,\xi-i\tau\nabla\varphi),\widetilde{p}(x_0,\xi+i\tau\nabla\varphi)\}(x_0,\xi)>0 \text{ lorsque}\\ \widetilde{p}(x_0,\xi+i\tau\nabla\varphi(x_0))=\{\widetilde{p}(x_0,\xi+i\tau\nabla\varphi),\varphi\}(x_0,\xi)=0,\tau>0\end{array}\right\}$$
$$\Downarrow$$
$$\left\{\begin{array}{c}\frac{g(x_0)}{i\tau}\{\overline{\widetilde{p}}(x_0,\xi-i\tau g(x)\nabla\varphi),\widetilde{p}(x_0,\xi+i\tau g(x)\nabla\varphi)\}(x_0,\xi)>0 \text{ lorsque}\\ \widetilde{p}(x_0,\xi+i\tau g(x_0)\nabla\varphi(x_0))=g(x_0)\{\widetilde{p}(x_0,\xi+i\tau g(x)\nabla\varphi),\varphi\}(x_0,\xi)=0,\\ \text{avec } \tau>0.\end{array}\right\}$$
$$\Downarrow$$
$$\left\{\begin{array}{c}\frac{1}{i\tau}\{\overline{\widetilde{p}}(x_0,\xi-i\tau\nabla\psi),\widetilde{p}(x_0,\xi+i\tau\nabla\psi)\}(x_0,\xi)>0 \text{ lorsque}\\ \widetilde{p}(x_0,\xi+i\tau\nabla\psi(x_0))=\{\widetilde{p}(x_0,\xi+i\tau\nabla\psi),\psi\}(x_0,\xi)=0,\tau>0\end{array}\right\}$$
$$\Downarrow$$
$$\{\text{Les conditions } (15)-(16) \text{ sont vraies avec la fonction } \psi=g\varphi\}$$

Donc, si les conditions $(15)-(16)$ sont vraies avec une fonction φ, elles sont encore vraies avec toute autre fonction ψ de la forme $\psi=g\varphi$, où g est strictement positive, de classe $\mathscr{C}^2$.

Conclusion : La définition (3.0.3) ne dépend pas du choix de φ. ∎

Remarque 3.1.1. *Si P est normal principal, les conditions (13)-(14) représentent (en quelque sorte) le cas limite des conditions (15)-(16), quand $\tau\to 0$.*

Démonstration. Le développement de Taylor de $\widetilde{p}_\tau(x,\xi)$ par rapport à τ, à l'ordre 1 et au voisinage de $\tau=0$, est :

$$\begin{aligned}
\widetilde{p}_\tau(x,\xi) &= \widetilde{p}_0(x,\xi)+\tau\left[\frac{\partial\widetilde{p}_\tau}{\partial\tau}(x,\xi)\Big|_{\tau=0}\right]+\tau^2\varepsilon_\tau(x,\xi)\\
&= \widetilde{p}(x,\xi)+\tau\left[\frac{\partial}{\partial\tau}\Big(\widetilde{p}(x,\xi+i\tau\nabla\varphi)\Big)\Big|_{\tau=0}\right]+\tau^2\varepsilon_\tau(x,\xi)\\
&= \widetilde{p}(x,\xi)+i\tau\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\widetilde{p}}{\partial\xi_j}(x,\xi+i\tau\nabla\varphi)\Big|_{\tau=0}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(x)+\tau^2\varepsilon_\tau(x,\xi)\\
&= \widetilde{p}(x,\xi)+i\tau\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\widetilde{p}}{\partial\xi_j}(x,\xi)\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(x)+\tau^2\varepsilon_\tau(x,\xi)\\
&= \widetilde{p}(x,\xi)+i\tau\{\widetilde{p},\varphi\}(x,\xi)+\tau^2\varepsilon_\tau(x,\xi)
\end{aligned}$$

En posant

$$L(x_0,\xi)=\lim_{\tau\to0}\frac{1}{i\tau}\Big\{\overline{\widetilde{p}}(x_0,\xi-i\tau\nabla\varphi),\widetilde{p}(x_0,\xi+i\tau\nabla\varphi)\Big\},$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
L(x_0,\xi) &= \lim_{\tau\to0}\frac{1}{i\tau}\Big\{\overline{\widetilde{p}(x_0,\xi+i\tau\nabla\varphi)},\widetilde{p}(x_0,\xi+i\tau\nabla\varphi)\Big\}\\
&= \lim_{\tau\to0}\frac{1}{i\tau}\Big\{\overline{\widetilde{p}_\tau(x_0,\xi)},\widetilde{p}_\tau(x_0,\xi)\Big\}\\
&= \lim_{\tau\to0}\frac{1}{i\tau}\Big\{\overline{\widetilde{p}(x_0,\xi)+i\tau\{\widetilde{p},\varphi\}(x_0,\xi)+\tau^2\varepsilon_\tau(x_0,\xi)},\\
&\qquad\qquad \widetilde{p}(x_0,\xi)+i\tau\{\widetilde{p},\varphi\}(x_0,\xi)+\tau^2\varepsilon_\tau(x_0,\xi)\Big\}\\
&= \lim_{\tau\to0}\frac{1}{i\tau}\Big\{\overline{\widetilde{p}(x_0,\xi)}-i\tau\{\overline{\widetilde{p}},\varphi\}(x_0,\xi)+\tau^2\overline{\varepsilon_\tau(x_0,\xi)},\\
&\qquad\qquad \widetilde{p}(x_0,\xi)+i\tau\{\widetilde{p},\varphi\}(x_0,\xi)+\tau^2\varepsilon_\tau(x_0,\xi)\Big\}
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
L(x_0,\xi) &= \lim_{\tau\to0}\frac{1}{i\tau}\{\overline{\widetilde{p}},\widetilde{p}\}(x_0,\xi)+\lim_{\tau\to0}\Big\{\overline{\widetilde{p}},\{\widetilde{p},\varphi\}\Big\}(x_0,\xi)+\lim_{\tau\to0}\frac{\tau}{i}\{\overline{\widetilde{p}},\varepsilon_\tau\}(x_0,\xi)\\
&-\lim_{\tau\to0}\Big\{\{\overline{\widetilde{p}},\varphi\},\widetilde{p}\Big\}(x_0,\xi)+\lim_{\tau\to0}\frac{\tau}{i}\Big\{\{\overline{\widetilde{p}},\varphi\},\{\widetilde{p},\varphi\}\Big\}(x_0,\xi)\\
&-\lim_{\tau\to0}\tau^2\Big\{\{\overline{\widetilde{p}},\varphi\},\varepsilon_\tau\Big\}(x_0,\xi)+\lim_{\tau\to0}\frac{\tau}{i}\{\overline{\varepsilon_\tau},\widetilde{p}\}(x_0,\xi)\\
&+\lim_{\tau\to0}\tau^2\Big\{\overline{\varepsilon_\tau},\{\widetilde{p},\varphi\}\Big\}+\lim_{\tau\to0}\frac{\tau^3}{i}\{\overline{\varepsilon_\tau},\varepsilon_\tau\}(x_0,\xi)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L(x_0,\xi) &= \lim_{\tau\to 0}\frac{1}{i\tau}\{\overline{\widetilde{p}},\widetilde{p}\}(x_0,\xi)+\lim_{\tau\to 0}\left\{\overline{\widetilde{p}},\{\widetilde{p},\varphi\}\right\}(x_0,\xi)\\
&\quad -\lim_{\tau\to 0}\left\{\{\overline{\widetilde{p}},\varphi\},\widetilde{p}\right\}(x_0,\xi)\\
&= \lim_{\tau\to 0}\frac{1}{i\tau}\{\overline{\widetilde{p}},\widetilde{p}\}(x_0,\xi)+\lim_{\tau\to 0}\left(\left\{\overline{\widetilde{p}},\{\widetilde{p},\varphi\}\right\}-\left\{\{\overline{\widetilde{p}},\varphi\},\widetilde{p}\right\}\right)(x_0,\xi)\\
&= \lim_{\tau\to 0}\frac{1}{i\tau}\{\overline{\widetilde{p}},\widetilde{p}\}(x_0,\xi)+\lim_{\tau\to 0}\left(\left\{\overline{\widetilde{p}},\{\widetilde{p},\varphi\}\right\}+\left\{\widetilde{p},\{\overline{\widetilde{p}},\varphi\}\right\}\right)(x_0,\xi)\\
&= \lim_{\tau\to 0}\frac{1}{i\tau}\{\overline{\widetilde{p}},\widetilde{p}\}(x_0,\xi)+\lim_{\tau\to 0}\left(\left\{\overline{\widetilde{p}},\{\widetilde{p},\varphi\}\right\}+\left\{\overline{\overline{\widetilde{p}}},\overline{\{\widetilde{p},\varphi\}}\right\}\right)(x_0,\xi)\\
&= \lim_{\tau\to 0}\frac{1}{i\tau}\{\overline{\widetilde{p}},\widetilde{p}\}(x_0,\xi)+\lim_{\tau\to 0}\left(\left\{\overline{\widetilde{p}},\{\widetilde{p},\varphi\}\right\}+\overline{\left\{\overline{\widetilde{p}},\{\widetilde{p},\varphi\}\right\}}\right)(x_0,\xi)\\
&= \lim_{\tau\to 0}\frac{1}{i\tau}\{\overline{\widetilde{p}},\widetilde{p}\}(x_0,\xi)+2\lim_{\tau\to 0}\mathrm{Re}\left\{\overline{\widetilde{p}},\{\widetilde{p},\varphi\}\right\}(x_0,\xi)
\end{aligned}$$

et le fait que P soit normal principal, implique que :

$$|\{\overline{\widetilde{p}},\widetilde{p}\}(x_0,\xi)|\leq c\,|\,\widetilde{p}(x_0,\xi)\,|\;\|\xi\|^{m-1}$$

Donc, si :

$$\widetilde{p}(x_0,\xi)=0$$

Alors :

$$\{\overline{\widetilde{p}},\widetilde{p}\}(x_0,\xi)=0$$

et par suite :

$$L(x_0,\xi)=2\lim_{\tau\to 0}\mathrm{Re}\left\{\overline{\widetilde{p}},\{\widetilde{p},\varphi\}\right\}(x_0,\xi)=2\mathrm{Re}\left\{\overline{\widetilde{p}},\{\widetilde{p},\varphi\}\right\}(x_0,\xi)$$

ce qui veut dire que :

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{i\tau}\{\overline{\widetilde{p}}(x_0,\xi-i\tau\nabla\varphi),\widetilde{p}(x_0,\xi+i\tau\nabla\varphi)\}(x_0,\xi)=2Re\{\overline{\widetilde{p}},\{\widetilde{p},\varphi\}\}(x_0,\xi).$$

par conséquent,

$$\begin{aligned}
(13)\quad &\Longrightarrow \lim_{\tau\to 0}\frac{1}{i\tau}\{\overline{\widetilde{p}}(x_0,\xi-i\tau\nabla\varphi),\widetilde{p}(x_0,\xi+i\tau\nabla\varphi)\}(x_0,\xi)\geq 0\\
&\Longrightarrow 2Re\{\overline{\widetilde{p}},\{\widetilde{p},\varphi\}\}(x_0,\xi)\geq 0
\end{aligned}$$

Ainsi, l'inégalité (13) (lorsqu'elle est prise au sens large) est bel et bien la limite de (15) quand $\tau\to 0$ et, de façon bien évidente cette fois-ci, la condition (14) est la limite de (16) quand $\tau\to 0$. ■

On introduit à présent la notion de forte pseudo-convexité pour les fonctions :

Définition 3.1.2. *Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, P $(= p(x,D))$ un opérateur différentiel linéaire de symbole principal $\widetilde{p}$, et φ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur Ω. On dit que φ* **est fortement pseudo-convexe par rapport à P, au point x_0** *si*

$$\boxed{Re\{\overline{\widetilde{p}}, \{\widetilde{p}, \varphi\}\}(x_0, \xi) > 0} \tag{17}$$

pour

$$\boxed{(x_0, \xi) \in Car(P)} \tag{18}$$

et

$$\boxed{\frac{1}{i\tau}\{\overline{\widetilde{p}}(x_0, \xi - i\tau\nabla\varphi), \widetilde{p}(x_0, \xi + i\tau\nabla\varphi)\}(x_0, \xi) > 0} \tag{19}$$

pour x, ξ et τ tels que $(\xi, \tau) \neq 0$, et tels que :

$$\boxed{\widetilde{p}(x, \xi + i\tau\nabla\varphi) = 0} \tag{20}$$

La relation entre les fonctions fortement pseudo-convexes et les surfaces fortement pseudo-convexes est décrite ci-dessous :

Théorème 3.1.1. *Soit P un opérateur différentiel linéaire que l'on suppose normal principal. Alors :*

(i) tout ensemble de niveau non degénéré d'une fonction fortement pseudo-convexe par rapport à P est une surface fortement pseudo-convexe par rapport à P.

(ii) toute surface fortement pseudo-convexe par rapport à P est une surface de niveau pour une certaine fonction fortement pseudo-convexe par rapport à P.

(iii) Pour les fonctions et les surfaces, la condition de forte pseudo-convexité est stable sous l'effet de petites perturbations de classe $\mathscr{C}^2$.

Démonstration.

(i) Soit $\Sigma = \varphi^{-1}(0)$, avec φ de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, et telle que $\nabla\varphi \neq 0$ sur Σ. Si l'on suppose que φ est fortement pseudo-convexe par rapport à P, alors :

$$\begin{cases} \text{La condition (17) est vraie sur l'ensemble défini par (18)} \\ \text{La condition (19) est vraie sur l'ensemble défini par (20)} \end{cases}$$

et comme

$$\begin{cases} \text{L'ensemble défini par (14) est inclus dans celui défini par (18)} \\ \text{L'ensemble défini par (16) est inclus dans celui défini par (20)} \end{cases}$$

on conclut que

$$\begin{cases} \text{La condition (17) est vraie sur l'ensemble défini par (14)} \\ \text{La condition (19) est vraie sur l'ensemble défini par (16)} \end{cases}$$

Mais,

$$\begin{cases} \text{La condition (17) est identique à la condition (13)} \\ \text{La condition (19) est identique à la condition (15)} \end{cases}$$

et l'on arrive donc à

$$\begin{cases} \text{La condition (13) est vraie sur l'ensemble défini par (14)} \\ \text{La condition (15) est vraie sur l'ensemble défini par (16)} \end{cases}$$

ce qui veut dire que Σ est fortement pseudo-convexe par rapport à P.

(ii) Soit φ comme dans la définition. Donc, si c est assez grand, alors :

$$\frac{1}{\tau i}\{\overline{\widetilde{p}_\tau}, \widetilde{p}_\tau\}(x_0,\xi) + c(\mid \{\widetilde{p}_\tau, \varphi\} \mid^2 + \tau^{-2} \mid \widetilde{p}_\tau \mid^2) \geq d(\xi^2+\tau^2)^{m-1} \tag{21}$$

et cela nous permet d'affirmer que la fonction $\psi = e^{\lambda\varphi}$ vérifie (17)-(18) et (19)-(20), pourvu que λ soit sufisamment large. En effet :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\tau i}\{\overline{\widetilde{p}(x,\xi+i\tau\nabla\psi)}, \widetilde{p}(x,\xi+i\tau\nabla\varphi)\} \\ &\qquad = \frac{1}{i\tau}\{\overline{\widetilde{p}(x,\xi+i\tau\lambda\psi\nabla\psi)}, \widetilde{p}(x,\xi+i\tau\lambda\psi\nabla\varphi)\} \\ &\qquad = \frac{1}{i\tau}\{\overline{\widetilde{p}_{\lambda\tau}}, \widetilde{p}_{\lambda\tau}\} + 2\lambda \mid \widetilde{p}_{\lambda\tau} \mid^2 \end{aligned}$$

En combinant ce qui vient de précéder avec (21), on obtient, pour $\lambda > c$:

$$\frac{1}{\tau i}\{\overline{\widetilde{p}(x,\xi+i\tau\nabla\psi)}, \widetilde{p}(x,\xi+i\tau\nabla\varphi)\}\tau^{-2} \mid \widetilde{p}_\tau \mid^2 \geq d(\xi^2+\tau^2)^{m-1} \tag{22}$$

et cela implique (17)-(18) et (19)-(20).

(iii) Voir L. Hörmander [2], th.8.6.1. ∎

3.2 Opérateurs réels d'ordre deux et de type principal

La classe la plus fréquente, et qui provient d'applications, est celle des opérateurs d'ordre deux. Dans ce paragraphe, nous examinons en détail la notion de pseudo-convexité pour ceux de ses éléments qui sont réels de type principal.

Théorème 3.2.1. *Soit $P = p(x, D)$ un opérateur différentiel linéaire d'ordre deux que l'on suppose réel de type principal, soit $\widetilde{p}$ son symbole principal, et soit $\Sigma = \varphi^{-1}(0)$ une hypersurface de classe $\mathscr{C}^2$ non caractéristique pour P. Alors Σ est fortement pseudo-convexe par rapport à P au point x_0 si, et seulement si :*

$$\boxed{\{\widetilde{p},\{\widetilde{p},\varphi\}\}(x_0,\xi)>0} \tag{23}$$

lorsque

$$\boxed{\widetilde{p}(x_0,\xi)=\{\widetilde{p},\varphi\}(x_0,\xi)=0, \xi\neq 0} \tag{24}$$

Démonstration. On suppose que P et Σ vérifient les hypothèses du théorème, et on doit démontrer que

$$\Big((33)-(34)\Big) \Leftrightarrow \begin{cases} (13)-(14) \\ \quad\ \& \\ (15)-(16) \end{cases}.$$

Il est bien évident que, dans notre cas, les conditions (33)–(34) équivalent aux conditions $(13)-(14)$, et on aura donc besoin de montrer que les conditions $(15)-(16)$ sont toujours satisfaites, lorsque $(13)-(14)$ le sont. Si l'on pose :

$$q_x(z) = \widetilde{p}(x, \xi + z\nabla\varphi(x)),$$

on obtient bien

$$\begin{aligned}
\frac{dq_x}{dz}(i\tau) &= \frac{d}{dz}[\widetilde{p}(x,\xi+z\nabla\varphi(x))]\Big|_{z=i\tau} \\
&= \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\widetilde{p}}{\partial\xi_j}(x,\xi+i\tau\nabla\varphi(x))\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(x) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\xi_j}[\widetilde{p}(x,\xi+i\tau\nabla\varphi(x))]\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(x) \\
&\qquad\qquad -\frac{\partial}{\partial x_j}[\widetilde{p}(x,\xi+i\tau\nabla\varphi(x))]\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_j}(x) \\
&= \{\widetilde{p}(x,\xi+i\tau\nabla\varphi),\varphi\}(x,\xi)
\end{aligned}$$

donc

$$(16) \Leftrightarrow \left[q_{x_0}(i\tau) = \frac{dq_{x_0}}{dz}(i\tau) = 0 \text{ pour } \tau > 0\right]$$

ce qui veut dire que :

$$(16) \Leftrightarrow \left[\text{Pour } \tau > 0,\ i\tau \text{ est un zéro double du polynôme } q_{x_0}(z)\right]$$

mais,

$$q_{x_0}(z) = \widetilde{p}(x_0, \nabla\varphi(x_0)) \cdot z^2 + \{\widetilde{p}, \varphi\}(x_0, \xi) \cdot z + \widetilde{p}(x_0, \xi)$$

et cela montre que $q_{x_0}(z)$ est un polynôme en z, à cœfficients réels.

Si Σ est non-caractéristique pour P, *ie* si $\widetilde{p}(x, \nabla\varphi) \neq 0$, alors q_x est un polynôme de degré deux, et donc s'il admet une racine double celle-ci est obligatoirement réelle, ce qui imlique que $\tau = 0$.

Si Σ est caractéristique pour P, alors q_x est au plus de degré 1. Donc, pour pour qu'il ait une racine double il faut et il suffit que :

$$\widetilde{p}(x, \xi) = \{\widetilde{p}, \varphi\}(x, \xi) = 0 \tag{25}$$

D'un autre côté,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{i\tau}\{\overline{\widetilde{p}(x, \xi + i\tau\nabla\psi)}, \widetilde{p}(x, \xi + i\tau\nabla\varphi)\} &= \{\widetilde{p}(x, \xi) - \tau^2\widetilde{p}(x, \nabla\varphi), \nabla_\xi\widetilde{p}(x, \xi)\nabla\varphi\} \\
&= \nabla_\xi\widetilde{p}(x, \xi) \cdot \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{\substack{1\leq i\leq n \\ j\leq i\leq n}} \cdot \nabla_\xi\widetilde{p}(x, \xi) \\
&\quad + \tau^2\nabla_\xi\widetilde{p}(x, \nabla\varphi) \cdot \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{\substack{1\leq i\leq n \\ j\leq i\leq n}} \cdot \nabla_\xi\widetilde{p}(x, \nabla\varphi) \\
&= \{\widetilde{p}, \{\widetilde{p}, \varphi\}\}(x_0, \xi) \\
&\quad + \tau^2\{\widetilde{p}, \{\widetilde{p}, \varphi\}\}(x_0, \nabla\varphi)
\end{aligned}$$

et cette quantité est strictement positive si, et seulement si, pour tout $\tau \geq 0$,

$$\{\widetilde{p}, \{\widetilde{p}, \varphi\}\}(x_0, \xi) > 0, \{\widetilde{p}, \{\widetilde{p}, \varphi\}\}(x_0, \nabla\varphi) > 0.$$

Maintenant, la première inégalité est exactement la condition de pseudo-convexité en $\tau = 0$ (avec ξ vérifiant (25)) et la deuxième est la condition de pseudo-convexité en $\tau = 0$ (pour $\xi = \nabla\varphi$, vérifiant (25)). ■

3.3 Interprétation géométrique de la pseudo-convexité

L'autre objectif de cette section est de donner une interprétation géométrique simple de la condition de pseudo-convexité. Cette condition s'écrit sous la forme :

$$H_{\tilde{p}}^2\varphi > 0$$

pour

$$\varphi = H_{\tilde{p}}\varphi = 0.$$

Comme $H_{\tilde{p}}\varphi$ et $H_{\tilde{p}}^2\varphi$ représenteent respectivement la première et la deuxième dérivée de φ sur les bicaractéristiques de P, les relations précédentes signifient que les bicaractéristiques nulles de P sont, soit transversales à Σ, soit incurvées du côté de $\Sigma^+ = \{\varphi > 0\}$, quand elles sont tangentes à Σ.

Théorème 3.3.1. *(cf. Hörmander [2]) Soit $P = p(x,D)$ un opérateur aux dérivées partielles d'ordre m et à cœfficients de classe $\mathscr{C}^1$, et soit $u \in H^{m-1}$ telle que $p(x,D)u \in L^2$. Alors, il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H^m$ telle que :*

$$u_n \xrightarrow[n\to\infty]{H^{m-1}} u$$

et

$$p(x,D)u_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} p(x,D)u.$$

4 Estimations de type Carleman et unique continuation

4.1 τ-dépendance et inégalités de type Garding

L'assimilation de la variable τ à une dérivation (ou plus exactement à la transformée de Fourier d'une dérivation par rapport au temps t) exige que l'on transforme la chaîne d'espaces de sobolev H^s en la chaîne H^s_τ définie par

$$H^s_\tau = \{u \,\big|\, u \in L^2, \text{ et } (\|\xi\|^2 + \tau^2)^{s/2}\hat{u} \in L^2\},$$

que l'on équipe de la norme naturelle

$$\|u\|_{s,\tau} = \|(1 + \|\xi\|^2 + \tau^2)^{s/2}\hat{u}\|_{L^2},$$

où $\hat{u}$ est la transformée de Fourier de u.

Dans ce nouveau cadre, un opérateur différentiel d'ordre $m \in \mathbb{N}$ est un opérateur de la forme :

$$P = p(x,D,\tau) = \sum_{|\alpha|+\beta\leq m} c_{\alpha\beta}(x)D^\alpha\tau^\beta$$

auquel on adjoint les fonctions p et $\widetilde{p}$ définies par

$$p(x,\xi,\tau)=\sum_{|\alpha|+\beta\leq m} c_{\alpha\beta}(x)\xi^{\alpha}\tau^{\beta}$$

et

$$\widetilde{p}(x,\xi,\tau)=\sum_{|\alpha|+\beta=m} c_{\alpha\beta}(x)\xi^{\alpha}\tau^{\beta}$$

qu'on appelle respectivement symbole total et symbole principal de P.

On démontre, et on l'admet ici, que s'il existe $k\in\mathbb{N}$ tel que

$$\forall K \Subset \mathbb{R}^n, \forall \alpha,\beta\in\mathbb{N}^n \text{ tels que } |\beta|\leq k, \exists C_{K,\alpha,\beta}>0 \,/$$
$$\forall (x,\xi,\tau)\in K\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}, |D_x^{\alpha}D_{\xi}^{\beta}p(x,\xi,\tau)|\leq C_{K,\alpha,\beta}(1+|(\xi,\tau)|)^{m-|\beta|}$$

alors

$$P=p(x,D,\tau): H_{\tau}^{s+m}\longrightarrow H_{\tau}^{s},$$

avec des actions analogues pour l'adjoint, le commutateur, *etc...*

Théorème 4.1.1. *(cf. Hörmander [2] ou Tataru [4])*

(a) Soit $P=p(x,D)$ et $Q=q(x,D)$ deux opérateurs linéaires aux dérivées partielles à cœfficients réels de classe $\mathscr{C}^1$, respectivement d'ordre $m+1$ et m et de symboles principaux $\widetilde{p}$ et $\widetilde{q}$, et soit R_1, R_2,...,R_j des opérateurs linéaires aux dérivées partielles d'ordre m, à cœfficients de classe $\mathscr{C}^0$. On suppose que :

$$\{\widetilde{p},\widetilde{q}\}>c\|(\xi,\tau)\|^{2m} \textit{ sur } \cup\mathrm{Car}(R_i)$$

tandis que

$$\widetilde{p}=\widetilde{q}=0 \textit{ sur } \cup\mathrm{Car}(R_i).$$

Alors il existe $d>0$ tel que :

$$\forall u\in H^m: \|u\|_{m,\tau}\leq 2\mathrm{Im}\langle Pu,Qu\rangle + d\sum_{i=1}^{j}\|R_iu\|_{0,\tau}^2 \tag{26}$$

pour τ assez grand.

(b) Soit $P=p(x,D)$ et $Q=q(x,D)$ deux opérateurs linéaires aux dérivées partielles à cœfficients réels de classe $\mathscr{C}^1$, respectivement d'ordre m et $m-1$ et de symboles principaux $\widetilde{p}$ et $\widetilde{q}$, et soit R_1, R_2,...,R_j des opérateurs linéaires aux dérivées partielles d'ordre m, à cœfficients de classe $\mathscr{C}^1$. On suppose que :

$$\{\widetilde{p},\widetilde{q}\}>c\|(\xi,\tau)\|^{2m-2} \textit{ sur } \cup\mathrm{Car}(R_i)$$

tandis que

$$\widetilde{p} = \widetilde{q} = 0 \text{ sur } \cup \operatorname{Car}(R_i)$$

Alors il existe $d > 0$ tel que :

$$\forall u \in H^m : c\|u\|_{m-1,\tau} \leq 2Im\langle Pu, Qu\rangle + d\sum_{i=1}^{j}\|R_i u\|_{-1,\tau}^2 \tag{27}$$

pour τ assez grand.

4.2 Inégalités de type Carleman

Théorème 4.2.1. *Soit $P = p(x,D)$ un opérateur différentiel linéaire d'ordre m et à cœfficients de classe $\mathscr{C}^1$. Si P est réel de type principal, si $K \Subset \mathbb{R}^n$ est compact, et si φ est une fonction sur K, fortement pseudo-convexe par rapport à P, alors, pour tout $u \in H^{m-1}$ à support dans K, on a :*

$$\boxed{\tau\|e^{\tau\varphi}u\|_{m-1,\tau}^2 \leq c\|e^{\tau\varphi}p(x,D)u\|_{0,\tau}^2, \quad \tau > \tau_0} \tag{28}$$

Une version plus forte de ce résultat est la suivante :

Théorème 4.2.2. *Soit $P = p(x,D)$ un opérateur différentiel linéaire d'ordre m et à cœfficients de classe $\mathscr{C}^1$. Si P est elliptique, si $K \Subset \mathbb{R}^n$ est compact, et si φ est une fonction sur K, fortement pseudo-convexe par rapport à P, alors, pour tout $u \in H^{m-1}$ à support dans K, on a :*

$$\boxed{\tau^{-1}\|e^{\tau\varphi}u\|_{m,\tau}^2 \leq c\|e^{\tau\varphi}p(x,D)u\|_{0,\tau}^2, \quad \tau > \tau_0} \tag{29}$$

Démonstration du théorème 4.2.1.

Soit A l'opérateur tel que : $Af = e^{\tau\phi}f$ (donc $A^{-1}g = e^{-\tau\phi}g$) et posons :

$$P_\tau = p_\tau(x,D) = A \circ p(x,D) \circ A^{-1} \tag{30}$$

de sorte que

$$P_\tau w = e^{\tau\varphi}p(x,D)[e^{-\tau\varphi}w]. \tag{31}$$

Comme on a : $\forall j = 1,\dots,n$, et $\forall v \in \mathscr{D}'(\Omega)$,

$$\begin{aligned}
(D_j)_\tau v &= e^{\tau\varphi} D_j[e^{-\tau\varphi} v] \\
&= e^{\tau\varphi}\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}\left[e^{-\tau\varphi} v\right] \\
&= e^{\tau\varphi}\frac{1}{i}\left[\frac{\partial v}{\partial x_j}e^{-\tau\varphi} + \frac{\partial e^{-\tau\varphi}}{\partial x_j} v\right] \\
&= \frac{1}{i}\frac{\partial v}{\partial x_j} + e^{\tau\varphi}\frac{1}{i}\frac{\partial e^{-\tau\varphi}}{\partial x_j} v \\
&= \frac{1}{i}\frac{\partial v}{\partial x_j} + \frac{1}{i}\frac{\partial(-\tau\varphi)}{\partial x_j} v \\
&= \frac{1}{i}\frac{\partial v}{\partial x_j} + \frac{-\tau}{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j} v \\
&= D_j v + i\tau\frac{\partial\varphi}{\partial x_j} v \\
&= \left[D_j + i\tau\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right] v,
\end{aligned}$$

On obtient

$$[(D_j)_\tau]^{\alpha_j} = \left(D_j + i\tau\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)^{\alpha_j}.$$

En posant

$$D_\tau = ((D_1)_\tau,\dots,(D_n)_\tau),$$

On arrive à :

$$\begin{aligned}
(D_\tau)^\alpha &= ((D_1)_\tau,\dots,(D_n)_\tau)^\alpha \\
&= \left(D_1 + i\tau\frac{\partial\varphi}{\partial x_1},\dots,D_n + i\tau\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\right)^\alpha \\
&= \left((D_1,\dots,D_n) + i\tau\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1},\frac{\partial\varphi}{\partial x_2},\dots,\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\right)\right)^\alpha \\
&= \left(D + i\tau\nabla\varphi\right)^\alpha
\end{aligned}$$

Par récurrence sur $\alpha_j \in \mathbb{N}^*$, on montre que

$$[(D_j)_\tau]^{\alpha_j} = (D_j^{\alpha_j})_\tau$$

En effet, pour $\alpha_j = 1$ on a :

$$[(D_j)_\tau]^{\alpha_j} = [(D_j)_\tau]^1 = (D_j)_\tau = (D_j^1)_\tau = (D_j^{\alpha_j})_\tau,$$

et si $[(D_j)_\tau]^k = (D_j^k)_\tau$ avec $k \in \mathbb{N}^*$, alors :

$$\begin{aligned}
[(D_j)_\tau]^{k+1}u &= (D_j)_\tau([(D_j)_\tau]^k)u \\
&= (D_j)_\tau[(D_j^k)_\tau u] \\
&= e^{-\tau\varphi}D_j e^{\tau\varphi}(e^{-\tau\varphi}D_j^k e^{\tau\varphi}u) \\
&= e^{-\tau\varphi}D_j D_j^k e^{\tau\varphi}u \\
&= e^{-\tau\varphi}D_j^{k+1}e^{\tau\varphi}u \\
&= (D_j^{k+1})_\tau u.
\end{aligned}$$

Cela implique donc que

$$\begin{aligned}
p_\tau(x,D) &= e^{\tau\varphi}p(x,D)e^{-\tau\varphi} \\
&= e^{\tau\varphi}\Big[\sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)D^\alpha\Big]e^{-\tau\varphi} \\
&= \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)e^{\tau\varphi}D^\alpha e^{-\tau\varphi} \\
&= \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)(D^\alpha)_\tau \\
&= \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)(D_\tau)^\alpha \\
&= \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)(D+i\tau\nabla\varphi)^\alpha \\
&= p(x,D+i\tau\nabla\varphi)
\end{aligned}$$

On décompose maintenant $P_\tau(=p_\tau(x,D))$ de la manière suivante :

$$P_\tau = P_\tau^r + i\tau P_\tau^i$$

ou P_τ^r et P_τ^i ont tous les deux des symboles réels.

Si $\widetilde{p}_\tau$, $\widetilde{p}_\tau^r$ et $\widetilde{p}_\tau^i$ désignent respectivement les symboles principaux de P_τ, P_τ^r et P_τ^i, non pas dans le sens usuel du terme, mais en supposant que τ provient d'une dérivation (notée $\frac{\partial}{\partial t}$), c'est-à-dire que $\widetilde{p}_\tau$, $\widetilde{p}_\tau^r$ et $\widetilde{p}_\tau^i$ sont les symboles principaux au sens usuel des opérateurs $p(x,\mathbb{D})$, $p^r(x,\mathbb{D})$ et $p^i(x,\mathbb{D})$ (respectivement) où $\mathbb{D}=(\mathbb{D}_1,\ldots,\mathbb{D}_n)$ avec $\mathbb{D}_j = D_j + i\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial t}$, alors :

$$\widetilde{p}_\tau = \widetilde{p}_\tau^r + i\tau\widetilde{p}_\tau^i$$

On a aussi :

$$\begin{aligned}
\overline{\widetilde{p}}(x_0,\xi-i\tau\nabla\varphi) &= \overline{\widetilde{p}(x_0,\xi+i\tau\nabla\varphi)}\\
&= \overline{\widetilde{p}_\tau(x_0,\xi)}\\
&= \overline{\widetilde{p}}_\tau(x_0,\xi)\\
&= \overline{(\widetilde{p}^r_\tau+i\tau\widetilde{p}^i_\tau)}(x_0,\xi)\\
&= (\widetilde{p}^r_\tau-i\tau\widetilde{p}^i_\tau)(x_0,\xi)
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{i\tau}\{\overline{\widetilde{p}}_\tau,\widetilde{p}_\tau\} &= \frac{1}{i\tau}\{\widetilde{p}^r_\tau-i\tau\widetilde{p}^i_\tau,\widetilde{p}^r_\tau+i\tau\widetilde{p}^i_\tau\}\\
&= \frac{1}{i\tau}\{\widetilde{p}^r_\tau,\widetilde{p}^r_\tau\}+\{\widetilde{p}^r_\tau,\widetilde{p}^i_\tau\}-\{\widetilde{p}^i_\tau,\widetilde{p}^r_\tau\}+\frac{1}{i\tau}\{\widetilde{p}^i_\tau,\widetilde{p}^i_\tau\}\\
&= \{\widetilde{p}^r_\tau,\widetilde{p}^i_\tau\}-\{\widetilde{p}^i_\tau,\widetilde{p}^r_\tau\}\\
&= 2\{\widetilde{p}^r_\tau,\widetilde{p}^i_\tau\}
\end{aligned}$$

et la condition de pseudo-convexité

$$\frac{1}{i\tau}\{\overline{\widetilde{p}}(x_0,\xi-i\tau\nabla\varphi),\widetilde{p}(x_0,\xi+i\tau\nabla\varphi)\}(x_0,\xi)>0$$

lorsque

$$\widetilde{p}(x_0,\xi+i\tau\nabla\varphi)=\{\widetilde{p}(x_0,\xi+i\tau\nabla\varphi),\varphi\}(x_0,\xi)=0$$

peut alors s'écrire :

$$\{\widetilde{p}^r_\tau,\widetilde{p}^i_\tau\}>0 \ \ sur \ \ \mathrm{Car}(P_\tau)$$

Maintenant, le théorème (3.0.2)(a) implique que, $\forall v\in H^m$, on a :

$$||w||^2_{m-1,\tau}\leq c\mathrm{Im}\langle P^r_\tau w,P^i_\tau w\rangle+d||P_\tau w||^2_{-1,\tau},\quad \tau>\tau_0 \tag{32}$$

avec

$$w=e^{\tau\varphi}v. \tag{33}$$

et comme

$$\overline{P}_\tau=P^r_\tau-i\tau P^i_\tau,\quad P^r_\tau=\frac{1}{2}(P_\tau+\overline{P}_\tau)et\quad P^i_\tau=\frac{1}{2i\tau}(P_\tau-\overline{P}_\tau)$$

On a :

$$
\begin{aligned}
\langle P_\tau^r w, P_\tau^i w\rangle &= \langle \frac{1}{2}(P_\tau + \overline{P}_\tau)w, \frac{1}{2i\tau}(P_\tau - \overline{P}_\tau)w\rangle \\
&= \langle \frac{1}{2}P_\tau w + \frac{1}{2}\overline{P}_\tau w, \frac{1}{2i\tau}P_\tau w - \frac{1}{2i\tau}\overline{P}_\tau w\rangle \\
&= \langle \frac{1}{2}P_\tau w, \frac{1}{2i\tau}P_\tau w - \frac{1}{2i\tau}\overline{P}_\tau w\rangle + \langle \frac{1}{2}\overline{P}_\tau w, \frac{1}{2i\tau}P_\tau w - \frac{1}{2i\tau}\overline{P}_\tau w\rangle \\
&= \langle \frac{1}{2}P_\tau w, \frac{1}{2i\tau}P_\tau w\rangle + \langle \frac{1}{2}P_\tau w, -\frac{1}{2i\tau}\overline{P}_\tau w\rangle \\
&\qquad + \langle \frac{1}{2}\overline{P}_\tau w, \frac{1}{2i\tau}P_\tau w\rangle + \langle \frac{1}{2}\overline{P}_\tau w, -\frac{1}{2i\tau}\overline{P}_\tau w\rangle \\
&= -\frac{1}{4i\tau}\langle P_\tau w, P_\tau w\rangle + \frac{1}{4i\tau}\langle P_\tau w, \overline{P}_\tau w\rangle \\
&\qquad - \frac{1}{4i\tau}\langle \overline{P}_\tau w, P_\tau w\rangle + \frac{1}{4i\tau}\langle \overline{P}_\tau w, \overline{P}_\tau w\rangle \\
&= -\frac{1}{4i\tau}\|P_\tau w\|_{0,\tau}^2 + \frac{1}{4i\tau}\|\overline{P}_\tau w\|_{0,\tau}^2 \\
&\qquad + \frac{1}{4i\tau}\langle P_\tau w, \overline{P}_\tau w\rangle - \frac{1}{4i\tau}\langle \overline{P}_\tau w, P_\tau w\rangle \\
&= -\frac{1}{4i\tau}\|P_\tau w\|_{0,\tau}^2 + \frac{1}{4i\tau}\|\overline{P}_\tau w\|_{0,\tau}^2 \\
&\qquad + \frac{1}{4i\tau}\left[\langle P_\tau w, \overline{P}_\tau w\rangle - \overline{\langle P_\tau w, \overline{P}_\tau w\rangle}\right] \\
&= -\frac{1}{4i\tau}\|P_\tau w\|_{0,\tau}^2 + \frac{1}{4i\tau}\|\overline{P}_\tau w\|_{0,\tau}^2 + \frac{1}{2\tau}\mathrm{Im}\langle P_\tau w, \overline{P}_\tau w\rangle \\
&= -\frac{1}{i}\left[\frac{1}{4\tau}\|P_\tau w\|_{0,\tau}^2 - \frac{1}{4\tau}\|\overline{P}_\tau w\|_{0,\tau}^2\right] + \frac{1}{2\tau}\mathrm{Im}\langle P_\tau w, \overline{P}_\tau w\rangle \\
&= i\left[\frac{1}{4\tau}\|P_\tau w\|_{0,\tau}^2 - \frac{1}{4\tau}\|\overline{P}_\tau w\|_{0,\tau}^2\right] + \frac{1}{2\tau}\mathrm{Im}\langle P_\tau w, \overline{P}_\tau w\rangle
\end{aligned}
$$

Donc :

$$\mathrm{Im}\langle P_\tau^r w, P_\tau^i w\rangle = \frac{1}{4\tau}\|P_\tau w\|_{0,\tau}^2 - \frac{1}{4\tau}\|\overline{P}_\tau w\|_{0,\tau}^2$$

et pour $\tau > 0$ on a :

$$\mathrm{Im}\langle P_\tau^r w, P_\tau^i w\rangle \le \frac{1}{4\tau}\|P_\tau w\|_{0,\tau}^2$$

alors :

$$c\mathrm{Im}\langle P_\tau^r w, P_\tau^i w\rangle \le \frac{c}{4\tau}\|e^{\tau\varphi}p(x,D)v\|_{0,\tau}^2$$

Donc :

$$c\,\mathrm{Im}\langle P_\tau^r w, P_\tau^i w\rangle + d\|P_\tau w\|^2_{-1,\tau} \leq \frac{c}{4\tau}\|e^{\tau\varphi}p(x,D)v\|^2_{0,\tau} + d\|P_\tau w\|^2_{-1,\tau}$$

et comme :

$$\|P_\tau w\|^2_{-1,\tau} \leq \frac{1}{\tau^2}\|P_\tau w\|^2_{0,\tau}$$

On trouve :

$$c\,\mathrm{Im}\langle P_\tau^r w, P_\tau^i w\rangle + d\|P_\tau w\|^2_{-1,\tau} \leq \frac{c}{4\tau}\|e^{\tau\varphi}p(x,D)v\|^2_{0,\tau} + \frac{d}{\tau^2}\|P_\tau w\|^2_{0,\tau}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\tau\|e^{\tau\varphi}v\|_{m-1,\tau} &\leq \frac{c}{4}\|e^{\tau\varphi}p(x,D)v\|^2_{0,\tau} + \frac{d}{\tau}\|e^{\tau\varphi}p(x,D)v\|^2_{0,\tau}\\ &\leq \left(\frac{c}{4}+\frac{d}{\tau}\right)\|e^{\tau\varphi}p(x,D)v\|^2_{0,\tau}\end{aligned}$$

et pour : $\tau > \tau_0 > 0$, on a

$$\frac{d}{\tau} \leq \frac{d}{\tau_0}, \quad \text{et} \quad \frac{c}{4}+\frac{d}{\tau} \leq \frac{c}{4}+\frac{d}{\tau_0},$$

ce qui implique que :

$$\forall v \in H^m : \tau\|e^{\tau\varphi}v\|_{m-1,\tau} \leq \left(\frac{c}{4}+\frac{d}{\tau_0}\right)\|e^{\tau\varphi}p(x,D)v\|^2_{0,\tau}, \quad \tau > \tau_0$$

posons :

$$\frac{c}{4}+\frac{d}{\tau_0} = C$$

on obtient :

$$\forall v \in H^m, \quad \tau\|e^{\tau\varphi}v\|^2_{m-1,\tau} \leq C\|e^{\tau\varphi}p(x,D)v\|^2_{0,\tau}, \quad \tau > \tau_0 \tag{34}$$

et d'après le théorème (2.6.1), pour tout $u \in H^{m-1}$, il existe une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans H^m telle que :

$$v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} u \text{ dans } H^{m-1}$$

et

$$P(x,D)v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} P(x,D)u \text{ dans } L^2.$$

Par conséquent,

$$e^{\tau\varphi}v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{\tau\varphi}u \text{ dans } H^{m-1}$$

et

$$e^{\tau\varphi}P(x,D)v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{\tau\varphi}P(x,D)u \text{ dans } L^2.$$

Par suite :

$$\|e^{\tau\varphi}v_n\|_{m-1,\tau} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \|e^{\tau\varphi}u\|_{m-1,\tau}$$

et

$$\|e^{\tau\varphi}P(x,D)v_n\|_{0,\tau} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \|e^{\tau\varphi}P(x,D)u\|_{0,\tau}$$

Mais, pour la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, nous avons l'inégalité :

$$\tau\|e^{\tau\varphi}v_n\|^2_{m-1,\tau} \leq C\|e^{\tau\varphi}P(x,D)v_n\|^2_{0,\tau}, \tau > \tau_0,$$

et en faisant tendre n vers l'infini dans l'inégalité précédente, on arrive à :

$$\forall u \in H^{m-1}, \quad \tau\|e^{\tau\varphi}u\|^2_{m-1,\tau} \leq C\|e^{\tau\varphi}p(x,D)u\|^2_{0,\tau}, \quad \tau > \tau_0$$

■

Démonstration du théorème 4.2.2.

Le schéma de la démonstration est le même que celui de la preuve du théorème (4.2.1).

Du moment que $\mathrm{Im}(P_\tau)$ ne s'annule pas lorsque $\tau = 0$, on pose :

$$P_\tau = P_\tau^r + iP_\tau^i$$

La condition de pseudo-convexité donne encore :

$$\{p_\tau^r, p_\tau^i\} > 0 \ sur \ \mathrm{Car}(P_\tau)$$

et le théorème (4.1.1) conduit à :

$$\|v\|^2_{m,\tau} \leq c\tau\mathrm{Im}\langle P_\tau^r v, P_\tau^i v\rangle + d\|P_\tau v\|^2_{0,\tau}, \tau > \tau_0$$

Qui donne la conclusion désirée. ■

4.3 Unique continuation

Les estimations de Carleman de la section précédente conduisent au résultat suivant sur l'unique continuation :

Théorème 4.3.1. *(Hörmander [2]) Si $P = p(x,D)$ est un opérateur différentiel linéaire elliptique, ou à symbole principal réel, et si Σ est une hypersurface orientée et fortement pseudo-convexe par rapport à P en $x_0 \in \Sigma$, alors P possède la propriété de l'unique continuation en ce sens : Il existe un voisinage W de x_0 tel que, pour toute fonction $u \in H^{m-1}_{\mathrm{loc}}$ à support dans $\{\varphi < \varphi(x_0)\}$ et vérifiant $p(x,D)u = 0$ dans W, on a : $u = 0$ dans W.*

Démonstration du théorème 4.1.1.

D'après le théorème (3.1.1) on peut représenter Σ sous forme d'un ensemble de niveau d'une fonction φ, fortement pseudo-convexe par rapport à P en x_0. En posant :

$$\psi(x) = \varphi(x) + \delta \mid x - x_0 \mid^2 - \varphi(x_0) - \varepsilon,$$

où $\varepsilon, \delta > 0$, δ suffisament petit, on déduit du théorème (3.1.1) que ψ est à son tour fortement pseudo-convexe par rapport à P au point x_0. Sans restreindre la généralité, nous pouvons supposer que ψ, aussi, est fortement pseudo-convexe par rapport à P dans W. Nous choisissons alors $\varepsilon > 0$ suffisament petit de sorte que :

$$\{\varphi < \varphi(x_0)\} \cap \{\psi > -\varepsilon\} \subset W. \tag{35}$$

Ainsi, si $V = \{\psi > 0\}$ et si z est une fonction de troncature régulière, égale à 1 dans $[0, \infty[$ et à 0 dans $]-\infty, -\varepsilon]$, alors on considère la fonction $w = z(\psi)u$. Par la relation (35), w est à support dans W. D'un autre côté : $p(x,D)w$ ($= z(\psi)p(x,D)u + [p(x,D), z(\psi)]u = [p(x,D), z(\psi)]u \in L^2$) a son support dans $\{\psi > 0\}$. Comme $w = u$ dans V, on aura bien réduit le problème à celui qui va suivre :

Supposons que ψ est une fonction régulière et fortement pseudo-convexe par rapport à P, dans une partie compacte W de $\mathbb{R}^n$, et soit $w \in H^{m-1}$, à support compact inclus dans W, telle que $p(x,D)w \in L^2$. Si $p(x,D)w = 0$ dans $\{\psi > 0\}$ alors $w = 0$ dans $\{\psi > 0\}$.

A présent, nous sommes en mesure d'utiliser les estimations de Carleman. De la relation (28), on tire :

$$\tau \| e^{\tau\varphi} w \|^2_{m-1,\tau} \leq c \| e^{\tau\varphi} p(x,D) w \|^2_{0,\tau}, \quad \tau > \tau_0 \tag{36}$$

Comme $p(x,D)w$ est à support inclus dans $\{\psi \leq 0\}$, il en résulte que le membre de droite de (36) tend vers 0 lorsque $\tau \longrightarrow \infty$. Par conséquent le membre de gauche converge lui aussi vers 0, et cela implique que $w = 0$ dans $\{\psi > 0\}$. ■

Références

[1] Carleman, T. « *Sur un problème d'unicité pour les systèmes d'équations aux dérivées partielles à deux variables indépendantes* » Ark. Mat. Astr. fys. 26B, no.17 (1939), 1-9.

[2] Lars Hörmander. « *Linear Partial Differential operators* » Springer-Verlag, 1976.

[3] FRITZ JOHN « *Partial Differential Equations* » Springer-Verlag, 1986.

[4] DANIEL TATARU « *Carleman estimates, unique continuation and applications.* » Preprint, Departement of mathematics, Northwestern university, 1999.

[5] PLIŚ, A. « *Non-uniqueness in the Cauchy problem for differential equation of elliptic type* » J. Math. Mech. 9(1960),557-562.