

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique

Université 8 Mai 1945 – Guelma

Faculté de Mathématiques et de l'Informatique et Sciences de
la Matière

Département de Mathématiques



Mémoire de Fin d'Etude
Master Académique en Mathématiques
Option : EDP

THEME

Solution globale des équations du
mouvement de l'air

Présenté par :

Nebti Abdelghani

Jury :

Dr : AISSAOUI M.Zine président

Dr : HISAO F.Yashima rapporteur

Dr : K. FERNANE examinateur

Session Juin 2012

❄ Remerciment ❄

*Au nom d'Allah, le tout miséricordieux,
le très miséricordieux*

La reconnaissance est la mémoire du cœur

≡ LE GRAND MERCI POUR ALLAH ≡

En préambule à ce mémoire, je souhaite adresser mes remerciements les plus sincères aux personnes qui m'ont apporté leur aide et qui ont contribué à l'élaboration de ce mémoire ainsi qu'à la réussite de cette formidable année universitaire.

Je remercie du fond du cœur ♥ mes parents ♥ pour leur contribution, leur soutien et leur patience durant toutes mes études et qui m'ont toujours aidé et encouragé aux moments opportuns .

Je tiens à remercier sincèrement le prof. Hisao Fujita Yashima qui en tant que Directeur de mémoire, s'est toujours montré à l'écoute et très disponible tout au long de la réalisation de ce mémoire, ainsi pour l'inspiration, l'aide et le temps qu'il a bien voulu me consacrer et sans qui ce mémoire n'aurait jamais vu le jour.

Mes remerciements s'adressent également à Monsieur Dr. Aissaoui Med Zine : directeur du Laboratoire de Mathématiques appliquées et de modélisation, (LMAM), pour sa générosité et la grande patience dont il a su faire preuve malgré ses charges académiques et professionnelles.

J'adresse également mes remerciements, à tous mes enseignants, qui m'ont donnés les bases de la science. Ensuite, je souhaite remercier l'ensemble

du laboratoire (LMAM); leur accueil chaleureux et leur aide précieuse ont contribué fortement à l'aboutissement de ce travail.

Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à tous mes proches, amis et collègues de qui m'ont toujours soutenue et encouragée.

😊 Merci à tous et à toutes.

Table des matières

1	Introduction	2
1.0.1	La couche autour de la terre	3
2	Equations du mouvement de l'atmosphère	6
2.1	Système d'équations	9
3	Etude de la solution locale	11
3.1	Théorème d'existence et d'unicité de la solution locale	11
4	Etude de la solution globale	28
4.1	Estimation préliminaire	29
4.2	Estimations a priori de la vitesse.	32
4.3	Estimations a priori de la densité.	36
4.4	Démonstration du théorème 2.	40
5	Question de la stabilité - Conclusion	47

Chapitre 1

Introduction

L'atmosphère est un mélange de gaz N_2 , O_2 , H_2O (en état gazeux), Ar , CO_2 , etc..., qui, attiré par la force gravitationnelle que la Terre exerce sur lui, se trouve autour de la Terre. Son mouvement doit être décrit par les équations aux dérivées partielles de la dynamique des gaz, pour étudier le mouvement de l'atmosphère dans une couche autour de la terre, nous considérons l'atmosphère comme un fluide compressible visqueux. Nous partons du système d'équations d'un fluide visqueux général. caractérisé par la loi constructive $p = h\rho^\gamma$, son mouvement peut être décrit par les équations de Navier-Stokes

L'objectif principal de notre étude est prouver l'existence, l'unicité et la stabilité asymptotique à l'état d'équilibre de la solution globale du système d'équations dans un domaine analogue pour un gaz visqueux barotrope pour le cas $1 < \gamma < 2$, pour ce la on a besoin d'étudier l'existence et l'unicité de la solution locale dans un intervalle de temps suffisamment petit, et avec les données initiales suffisamment petites.

1.0.1 La couche autour de la terre

Comme notre objectif est de modéliser le mouvement de l'atmosphère dans une couche autour de la terre, nous considérons un potentiel Φ défini dans $\mathbb{R}^3$ de telle sorte que $-\varrho \nabla \Phi$ nous donne la somme de la force gravitationnelle F_g et la force centrifuge F_c due à la rotation de la terre, et un domaine Ω délimité par deux surfaces équipotentielles.

Pour décrire le mouvement de l'atmosphère en tenant compte de la rotation de la Terre, il est convenable de considérer un système de référence attaché à la Terre, qui tourne sur l'axe passant par le pôle Sud et le pôle Nord. Dans ce cas, le système de référence n'est pas inertial et donc il nous faut considérer les forces apparentes comme la force centrifuge et la force de Coriolis, de sorte que la force ϱf dans le système de référence attaché à la Terre est la somme

$$\varrho f = F_g + F_c + F_{co},$$

de la force gravitationnelle F_g , la force centrifuge F_c et la force de Coriolis F_{co} .

La force centrifuge est créée par la rotation de la Terre dans le système des coordonnées qui tourne avec la Terre. Plus précisément, dans le système des coordonnées cartésiennes (x, y, z) , qui tourne avec la Terre autour de l'axe z . Soit ω la vitesse angulaire avec laquelle la Terre tourne autour de l'axe passant par le pôle Sud et le pôle Nord. La force centrifuge est donnée par

$$F_c = \varrho |\omega|^2 x_h = -\varrho \nabla \Phi_c,$$

où

$$x_h = (x, y, 0), \quad \Phi_c = -\frac{1}{2} |\omega|^2 (x^2 + y^2),$$

et la force de Coriolis donnée par

$$F_{co} = -2\rho\omega \times u, \quad (1.1)$$

où u est la vitesse du fluide. D'autre part, la force gravitationnelle F_g dérive du potentiel Φ_g déterminé par la masse distribuée dans l'intérieur de la Terre. Comme sa distribution ne diffère que peu de celle sphérique, à l'extérieur de la Terre on a

$$F_g = -\rho\nabla\Phi_g, \quad \Phi_g = -\frac{gM}{|x|} + \varepsilon(x), \quad |\varepsilon(x)| \ll \frac{gM}{|x|},$$

où M étant la masse totale de la Terre et g la constante de la gravitation.

Donc on peut définir le géopotentiel

$$\Phi = \Phi_g + \Phi_c = -\frac{1}{2}|\omega|(x^2 + y^2) - \frac{gM}{|x|} + \varepsilon(x), \quad |\varepsilon(x)| \ll \frac{gM}{|x|},$$

et on peut considérer

$$F_g + F_c = -\rho\nabla\Phi. \quad (1.2)$$

Donc

$$\rho f = -\rho\nabla\Phi - 2\rho\omega \times u. \quad (1.3)$$

Si sur la surface de la terre s'exerce seulement cette force, la surface terrestre doit coïncider avec une surface équipotentielle de Φ

$$\Gamma_0 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| < r_1, \Phi(x) = \Phi_0\}, \quad (1.4)$$

avec une valeur Φ_0 , où r_1 est un nombre tel que, si $|x| < r_1$, alors $x \cdot \nabla\Phi > 0$ pour Φ donné dans (1.2). L'atmosphère occuperait la région extérieure au géoïde Γ_0 . Mais la considération avec le système de référence attaché à la Terre en rotation n'est utile que dans un voisinage de la Terre. Pour mieux

modéliser l'atmosphère terrestre de manière compatible avec les exigences mathématiques, dans le présent travail nous considérons un domaine se trouvant entre la surfaces Γ_0 et la surface

$$\Gamma_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| < r_1, \Phi(x) = \Phi_1\}, \quad (1.5)$$

($\Phi_0 < \Phi_1, |x| < r_1$ pour tout $x \in \Gamma_1$), de sorte que la région se trouvant entre Γ_0 et Γ_1 correspond à une couche substantielle de l'atmosphère. Nous considérons donc le mouvement d'un gaz visqueux dans le domaine

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| < r_1, \Phi_0 < \Phi(x) < \Phi_1\}. \quad (1.6)$$

Chapitre 2

Equations du mouvement de l'atmosphère

Comme l'atmosphère est un gaz, son mouvement doit être décrit par les équations aux dérivées partielles de la dynamique des gaz, pour étudier le mouvement de l'atmosphère dans Ω , nous considérons l'atmosphère comme un fluide compressible et visqueux. Nous partons du système d'équations d'un fluide visqueux général. Les quantités physiques que nous allons considérer sont les suivantes :

$\varrho = \varrho(x, t)$: la densité,

$u = u(x, t) = (u_1(x, t), u_2(x, t), u_3(x, t))$: la vitesse du fluide,

$T = T(t, x)$: la température,

$p = p(x, t)$: la pression.

On suppose que la pression est déterminée par l'équation

$$p(x, t) = \frac{R}{\eta} \varrho(x, t) T(x, t),$$

où R est la constante universelle des gaz ($R \approx 8,31.10^7 \text{ erg/mole.K}$) et η est la masse molaire moyenne de l'air ($\eta \approx 28.96$).

Equation de la continuité

Il s'agit de l'équation qui exprime la loi de la conservation de la masse pour un gaz, qui a la forme suivante :

$$\partial_t \varrho + \nabla \cdot (\varrho u) = 0. \quad (2.1)$$

Equation de la quantité du mouvement

Désignons par μ et λ les coefficients de viscosité.

L'équation qui exprime la conservation de la quantité du mouvement aura la forme

$$\varrho \partial_t u + \varrho u \cdot \nabla u - \mu \Delta u - \lambda \nabla (\nabla \cdot u) = -\nabla p + \varrho f. \quad (2.2)$$

Equation du bilan de l'énergie

En ce qui concerne l'équation du bilan de l'énergie, on a

$$\begin{aligned} & \varrho c_v (\partial_t T + u \cdot \nabla T) + p \nabla \cdot u = \\ & = \nabla \cdot \kappa \nabla T + \mu \sum_{j,k=1}^3 \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \delta_{jk} \nabla \cdot u \right) \frac{\partial}{\partial x_k} u_j + \lambda (\nabla \cdot u)^2 + E, \end{aligned} \quad (2.3)$$

où c_v est la chaleur spécifique de l'air, κ le coefficient de thermoconductibilité de l'air et E représente la source de la chaleur.

où

$$p(x, t) = \frac{R}{\eta} \varrho T. \quad (2.4)$$

Dans l'atmosphère réelle la diffusion de la chaleur et l'effet thermique de la friction interne sont relativement petits, de sorte que le déplacement vertical de l'air, s'il n'y a pas de transition de phase de l'eau, engendre la

variation de la pression et de la température de manière assez proche du processus adiabatique.

A cause de ce comportement de l'air, dans la troposphère nous trouvons une distribution de la pression, de la densité et de la température assez proche de la distribution de l'état hydrostatique.

En effet, si on néglige la diffusion de la chaleur et l'augmentation de la température due à la friction interne, l'équation (2.3) se réduit à

$$\varrho c_v(\partial_t T + u \cdot \nabla T) + \frac{R}{\eta} \varrho T \nabla \cdot u = 0. \quad (2.5)$$

$$\partial_t \varrho = -\nabla \cdot (\varrho u) = -u \cdot \nabla \varrho - \varrho \cdot \nabla u \quad \Rightarrow \quad \varrho \cdot \nabla u = -\partial_t \varrho - u \cdot \nabla \varrho$$

on substituant cette expression dans (2.5), on a

$$\varrho c_v(\partial_t T + u \cdot \nabla T) - \frac{R}{\eta} T(\partial_t \varrho + u \cdot \nabla \varrho) = 0$$

dans chaque trajectoire définie par la relation

$$\{x \in \mathbf{R}^3 | x = x(t, x_0), t_0 \leq t \leq t_1\}, \quad x(t, x_0) = x_0 + \int_{t_0}^t u(t', x(t', x_0)) dt'.$$

on a

$$c_v[\partial_t \log T + u \cdot \nabla \log T] - R_1[\partial_t \log \varrho + u \cdot \nabla \log \varrho] = 0,$$

où $R_1 = \frac{R}{\eta}$.

Comme $\frac{c_v}{R_1} = \frac{1}{\gamma-1}$, avec $\gamma = \frac{c_v + \frac{R}{\eta}}{c_v}$, il s'ensuit que

$$\partial_t \log \frac{T^{\frac{1}{\gamma-1}}}{\varrho} + u \cdot \nabla \log \frac{T^{\frac{1}{\gamma-1}}}{\varrho} = 0,$$

et les conditions aux limites

les conditions de la surface

$$u|_{\Gamma_0} = 0, \quad (2.10)$$

les conditions de la surface libre

$$u \cdot \vec{n}|_{\Gamma_1} = \sum_{i,j=1}^3 n_i \tau_j \partial_{x_i} u_j|_{\Gamma_1} = 0, \quad \forall \vec{\tau} \perp \vec{n}, \quad \text{où} \quad u|_{\Gamma_1} = 0. \quad (2.11)$$

On suppose que la fonction Φ et la frontière $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ sont suffisamment régulières. On rappelle que le domaine Ω est borné (voir (1.4)-(1.6)).

Chapitre 3

Etude de la solution locale

Ici nous nous intéressons à résoudre le système (2.7)-(2.11). La première question est celle de l'existence et de l'unicité de la solution locale, ça veut dire une solution dans un intervalle de temps suffisamment petit.

Il s'agit donc de trouver le couple (u, ϱ) qui satisfait, dans un intervalle de temps $[0, \bar{T}]$ avec $\bar{T} > 0$, aux équations (2.7)-(2.9) et aux conditions initiales

Soit

$$V_0 = \bar{V}_0^{L^2(\Omega)}, \quad (3.1)$$

où

$$V_0 = \{u \in C^\infty \mid u \text{ vérifie les conditions (2.10)-(2.11)}.\}$$

3.1 Théorème d'existence et d'unicité de la solution locale

Le théorème suivant prouve l'existence et l'unicité de la solution locale de notre système.

Théorème 1 *On suppose que $u_0 \in V_0, \varrho_0 \in H^2(\Omega), 0 < \alpha_0 \leq \varrho_0(x) \leq \beta_0 < \infty$ (α_0 et β_0 étant deux constantes positives) et que $1 \leq \gamma < 2$. Alors il*

existe un nombre positif $\bar{T}$ et deux constantes positives α et β tels que dans l'intervalle de temps $[0; \bar{T}]$ le problème (2.7)-(2.11) admet une solution et une seule dans la classe

$$u \in L^2(0, \bar{T}; H^3(\Omega) \cap V_0) \cap L^\infty(0, \bar{T}; H^2(\Omega))$$

$$\partial_t u \in L^2(0, \bar{T}; H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, \bar{T}; L^2(\Omega))$$

$$\varrho \in L^\infty(0, \bar{T}; H^2(\Omega)), \quad 0 < \alpha \leq \varrho(x, t) \leq \beta < \infty, \quad (x, t \in \Omega \times [0; \bar{T}]).$$

La condition $1 \leq \gamma < 2$ n'est pas essentielle pour la démonstration du théorème. Mais, comme la valeur de γ est, du point de vue physique, comprise entre 1 et 2, pour ne pas alourdir inutilement l'exposition, on va considérer seulement le cas $1 \leq \gamma < 2$.

Pour démontrer le théorème 1, on prouve d'abord le lemme suivant.

Lemme 3.1.1 *On considère l'équation*

$$\partial_t \varrho + \nabla \cdot (\varrho \bar{u}) = 0, \quad (3.2)$$

avec la donnée initiale

$$\varrho|_{t=0} = \varrho_0 \quad 0 < \alpha_0 \leq \varrho_0(x) \leq \beta_0 < \infty \quad \forall x \in \Omega. \quad (3.3)$$

Si

$$\bar{u} \in L^2(0, \bar{T}; H^3(\Omega) \cap V_0) \quad \varrho_0 \in H^2(\Omega),$$

avec

$$\max(\|\bar{u}\|_{L^\infty(0, \bar{T}; H^2)}, \|\bar{u}\|_{L^2(0, \bar{T}; H^3)}, \|\partial \bar{u}\|_{L^\infty(0, \bar{T}; L^2)}, \|\partial \bar{u}\|_{L^2(0, \bar{T}; H^1)}) \leq r_0, \quad (3.4)$$

alors le problème (3.2)-(3.3) admet une solution et une seule dans la classe

$$\varrho \in L^\infty(0, \bar{T}; H^2(\Omega))$$

et on a

$$\begin{aligned} 0 < \alpha(t) \leq \varrho \leq \beta(t) < \infty \quad p.p. \text{ dans } \Omega \times [0, t], \\ \alpha(t) = \alpha_0 e^{-c\sqrt{t}r_0}, \quad \beta(t) = \beta_0 e^{c\sqrt{t}r_0}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\|\varrho(\cdot, t)\|_{H^2}^2 \leq q(x)^2, \quad q(x)^2 = \|\varrho_0\|_{H^2}^2 e^{cr_0\sqrt{t}}, \quad (3.6)$$

Démonstration 3.1.1 Si $\bar{u} \in C^0(0, T; C^\infty(\Omega))$ et $\varrho_0 \in C^\infty(\Omega)$, par la méthode des caractéristiques bien connue on a

$$\varrho(x, t) = \varrho_0(x_0) \exp - \int_0^t \nabla \cdot \bar{u}(y(r), r) dr, \quad y(r) = x_0 + \int_0^r \bar{u}(y(r'), r') dr',$$

et donc on a

$$0 < \alpha_0 \exp(- \int_0^t \|\nabla \cdot \bar{u}\|_{L^\infty} dr) \leq \varrho(x, t) \leq \beta_0 \exp(\int_0^t \|\nabla \cdot \bar{u}\|_{L^\infty} dr),$$

où, compte tenu de la relation

$$\int_0^t \|\nabla \cdot \bar{u}\|_{L^\infty(\Omega)} dr \leq c\sqrt{t} \|\bar{u}\|_{L^2(0, t; H^3(\Omega))} \leq c\sqrt{t} r_0,$$

on a

$$0 < \alpha(t) = \alpha_0 e^{-c\sqrt{t}r_0} \leq \varrho(x, t) \leq \beta(t) = \beta_0 e^{c\sqrt{t}r_0},$$

Moyennant une approximation convenable de $\bar{u}$ et de ϱ_0 , on obtient (3.5) pour la solution ϱ du problème (3.2)-(3.3) avec la condition (3.4). Maintenant, en faisant le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$ de (3.2) avec ϱ et en tenant compte de la relation $\int_\Omega (\nabla \varrho \cdot u) \varrho dx = -\frac{1}{2} \int_\Omega (\nabla u) \varrho^2 dx$, on obtient

$$\frac{d}{dt} \|\varrho\|_{L^2}^2 \leq c \|\bar{u}\|_{H^3} \|\varrho\|_{L^2}^2.$$

D'autre part, en appliquant l'opérateur ∇ à (3.2) et en en faisant le produit scalaire avec $\nabla \varrho$, par des calculs analogues on obtient

$$\frac{d}{dt} \|\nabla \varrho\|_{L^2}^2 \leq c \|\bar{u}\|_{H^3} \|\nabla \varrho\|_{L^2}^2 + c \|\bar{u}\|_{H^3} \|\varrho\|_{L^2}^2.$$

En outre on applique l'opérateur $\partial_{x_i} \partial_{x_j}$ à (3.2), la multiplie par $\partial_{x_i} \partial_{x_j} \varrho$ et la intègre sur Ω , de sorte qu'on obtient par des calculs analogues

$$\frac{d}{dt} \|\partial_{x_i} \partial_{x_j} \varrho\|_{L^2}^2 \leq c \|\bar{u}\|_{H^3} \sum_{k,l=1}^3 \|\partial_{x_i} \partial_{x_j} \varrho\|_{L^2}^2 + c \|\bar{u}\|_{H^3} \|\nabla \varrho\|_{L^2}^2 + c \|\bar{u}\|_{H^3} \|\varrho\|_{L^\infty}^2.$$

Donc, en adjoignant ces inégalités (la dernière par rapport aussi à $i, j = 1, 2, 3$, à l'aide de l'injection de Sobolev pour ϱ , on obtient

$$\frac{d}{dt} \|\varrho\|_{H^2}^2 \leq c \|\bar{u}\|_{H^3} \|\varrho\|_{H^2}^2,$$

d'où, en rappelant la relation (3.4), on déduit (3.6). $\square$

Maintenant on va démontrer le lemme suivant, d'abord on désignera par $\tilde{H}^1(\Omega)$ l'espace de Hilbert consistant dans les éléments de V_0 (voir (3.1)) et muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\tilde{H}^1}$ définit par

$$\langle u, v \rangle_{\tilde{H}^1} = \int_{\Omega} [\mu \sum_{j,k=1}^3 \partial_{x_j} u_k \partial_{x_j} v_k + \lambda (\nabla \cdot u)(\nabla \cdot v)] dx,$$

et de la norme $\|\cdot\|_{\tilde{H}^1}$ telle que

$$\|u\|_{\tilde{H}^1} = \langle u, u \rangle_{\tilde{H}^1}^{\frac{1}{2}} \quad (3.7)$$

Lemme 3.1.2 *Soit u comme dans le lemme 3.1.1 et soit ϱ la solution obtenue dans le lemme 3.1.1. Si $u_0 \in V_0$, alors l'équation*

$$\varrho \partial_t u - \mu \Delta u - \lambda \nabla (\nabla \cdot u) + 2\varrho \omega \times u = -\varrho (\bar{u} \cdot \nabla) u - h \nabla \varrho^\gamma - \varrho \nabla \Phi \quad (3.8)$$

avec la condition aux limites (2.10)-(2.11) et la condition initiale

$$u|_{t=0} = u_0 \quad (3.9)$$

admet une solution et une seule dans la classe

$$u \in L^2(0, T; H^3 \cap V_0) \cap L^\infty(0, T; H^2(\Omega))$$

et il existe deux fonctions $R_1(t)$ et $R_2(t; t_0)$ déterminées par les quantités $r_0, \alpha_0, \beta_0, q(0)$, mentionnées dans le lemme 3.1.1 et par $\|u_0\|_{H^2}$ et telles que $R_1(t)$ et $\sup_{0 \leq t' \leq t} R_2(t; t_0)$ soient croissants et que

$$\begin{aligned} & \|u(t)\|_{\tilde{H}^1}^2 + \|\sqrt{\varrho} \partial_t u\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\sqrt{\varrho} \partial_t u\|_{L^2}^2 dt' + \int_0^t \|\partial_t u\|_{\tilde{H}^1}^2 dt' \leq \\ & \leq \|u_0\|_{\tilde{H}^1}^2 + \|\sqrt{\varrho_0} [\partial_t u]_0\|_{L^2}^2 + \int_0^t R_1(t') (1 + \|\partial_t \bar{u}\|_{H^1}) dt' + \int_0^t R_2(t; t') dt', \end{aligned} \quad (3.10)$$

où

$$[\partial u]_0 = \frac{1}{\varrho_0} (\mu \Delta u_0 + \lambda \nabla (\nabla \cdot u_0)) - 2\omega \times u_0 - (\bar{u}(0) \cdot \nabla) u_0 - h\gamma \varrho_0^{\gamma-2} \nabla \varrho_0 - \nabla \Phi.$$

Démonstration 3.1.2 Soit V'_0 l'adhérence de V_0 (ou de $\mathcal{V}_0$) dans la topologie de $H^1(\Omega)$. Il est évident que pour $\varphi \in V'_0$ la norme $\|\varphi\|_{\tilde{H}^1}$ introduite dans (3.7) est équivalente à la norme usuelle $\|\varphi\|_{H^1}$.

Cela étant, on définit une forme bilinéaire

$$a(t; u, \varphi) = \langle u, \varphi \rangle_{\tilde{H}^1} + \langle 2\varrho \omega \times u + \varrho (\bar{u} \cdot \nabla) u + \frac{1}{2} (\nabla \cdot (\varrho \bar{u})) u, \varphi \rangle_{L^2} \quad (3.11)$$

pour $u, \varphi \in \tilde{H}^1(\Omega)$ et on considère l'équation

$$\int_0^T [a(t; u, \varphi) - \langle \sqrt{\varrho} u, \partial_t (\sqrt{\varrho} \varphi) \rangle_{L^2}] dt =$$

$$= \int_0^T \left\langle -\frac{h}{\sqrt{\varrho}} \nabla \varrho^\gamma - \sqrt{\varrho} \nabla \Phi, \sqrt{\varrho} \varphi \right\rangle_{L^2} dt + \langle \sqrt{\varrho_0} u_0, \sqrt{\varrho_0} \varphi(0) \rangle_{L^2}. \quad (3.12)$$

il existe une constante $M > 0$ tel que

$$|a(t; u, \varphi)| \leq M \|u\|_{\tilde{H}^1} \|\varphi\|_{\tilde{H}^1}$$

ce qui implique que $a(t; u, \varphi)$ est continue. On a aussi

$$a(t; u, u) = \langle u, u \rangle_{\tilde{H}^1} + \langle 2\varrho\omega \times u + \varrho(\bar{u} \cdot \nabla)u + \frac{1}{2}(\nabla \cdot (\varrho\bar{u}))u, u \rangle_{L^2} \geq \|u\|_{\tilde{H}^1}^2,$$

donc $a(t; u, \varphi)$ est continue et coercive donc d'après la théorème de Lax-Milgram il existe un élément u de $L^2(0; T; \tilde{H}^1(\Omega))$ et un seul qui satisfait à (3.12) pour tout $\varphi \in L^2(0; T; \tilde{H}^1(\Omega))$ tel que $\varphi(\cdot, T) = 0$ et que $\partial_t(\sqrt{\varrho}\varphi) \in L^2(0; T; \tilde{H}^1(\Omega))$. Maintenant on considère une fonction régulière et non-négative $\vartheta_\epsilon(t)$ telle que $\vartheta_\epsilon(t) = 0$ pour $t' \in \{0\} \cup [t; T]$ et que $\vartheta_\epsilon(t) = 1$ pour $t' \in [\epsilon; t - \epsilon]$ ($\epsilon > 0$). En supposant que $\partial_t u$ existe, on substitue $\varphi = \vartheta_\epsilon \partial_t u$ dans (3.12) et en faisant tendre $\epsilon \rightarrow 0$, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|u(t)\|_{\tilde{H}^1}^2 + \int_0^t \|\sqrt{\varrho} \partial_t u\|_{L^2}^2 dt' &= \frac{1}{2} \|u_0\|_{\tilde{H}^1}^2 - \int_0^t \int_\Omega 2\varrho\omega \times u \cdot \partial_t u dx dt' - \\ &- \int_0^t \int_\Omega \varrho(\bar{u} \cdot \nabla)u \cdot \partial_t u dx dt' - h \int_0^t \int_\Omega \nabla \varrho^\gamma \cdot \partial_t u dx dt' - \int_0^t \int_\Omega \varrho \Phi \cdot \partial_t u dx dt', \end{aligned} \quad (3.13)$$

où on a utilisé la relation

$$- \int_0^T \langle \sqrt{\varrho} u, \partial_t(\sqrt{\varrho} \vartheta_\epsilon \partial_t u) \rangle_{L^2} dt = \int_0^T \vartheta_\epsilon \|\sqrt{\varrho} \partial_t u\|_{L^2}^2 dt - \frac{1}{2} \int_0^T \langle \nabla \cdot (\varrho\bar{u}), \vartheta_\epsilon \partial_t u \rangle_{L^2} dt.$$

Or, compte tenu de (3.5)-(3.6) on a

$$\left| \int_0^t \int_\Omega 2\varrho\omega \times u \cdot \partial_t u dx dt' \right| \leq \frac{1}{8} \int_0^t \|\sqrt{\varrho} \partial_t u\|_{L^2}^2 dt' + c \int_0^t \beta(t') \|u\|_{\tilde{H}^1}^2 dt'.$$

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^t \int_{\Omega} \varrho(\bar{u} \cdot \nabla) u \cdot \partial_t u dx dt' \right| &\leq \frac{1}{8} \int_0^t \|\sqrt{\varrho} \partial_t u\|_{L^2}^2 dt' + cr_0^2 \int_0^t \beta(t') \|u\|_{\tilde{H}^1}^2 dt'. \\
\left| h \int_0^t \int_{\Omega} \nabla \varrho^\gamma \cdot \partial_t u dx dt' \right| &\leq \frac{1}{8} \int_0^t \|\sqrt{\varrho} \partial_t u\|_{L^2}^2 dt' + c \int_0^t \left(\beta(t')^{2\gamma-3} + \frac{1}{\alpha(t')^{3-2\gamma}} \right) q(t')^2 dt'. \\
\left| \int_0^t \int_{\Omega} \varrho \Phi \cdot \partial_t u dx dt' \right| &\leq \frac{1}{8} \int_0^t \|\sqrt{\varrho} \partial_t u\|_{L^2}^2 dt' + c \int_0^t \beta(t') dt'.
\end{aligned}$$

Donc, en substituant ces inégalités dans le second membre de (3.13) et en appliquant le lemme de Gronwall (et en simplifiant quelques expressions par la relation $\beta(t') \leq \beta(t)$ pour $0 \leq t_0 \leq t$), on obtient

$$\|u(t)\|_{\tilde{H}^1}^2 + \int_0^t \|\sqrt{\varrho} \partial_t u\|_{L^2}^2 dt' \leq \|u_0\|_{\tilde{H}^1}^2 + \int_0^t r_1(t') dt' + \int_0^t r_2(t; t') dt'. \quad (3.14)$$

où

$$\begin{aligned}
r_1(t') &= c\beta(t') + c \left(\beta(t')^{2\gamma-3} + \frac{1}{\alpha(t')^{3-2\gamma}} \right) q(t')^2. \\
r_2(t; t') &= c(1 + r_0^2)\beta(t) e^{c(1+r_0^2)\beta(t)(t-t')} \left(\|u_0\|_{\tilde{H}^1}^2 + c \int_0^{t'} r_1(t'') dt'' \right).
\end{aligned}$$

Une fois établie comme estimation de solutions d'une équation parabolique, l'inégalité (3.14) est valable pour toute solution u .

D'autre part, si, en utilisant encore $\vartheta_\epsilon(t')$ introduite ci-dessus, on substitue $\varphi = -\partial_t(\vartheta_\epsilon \partial_t u)$ dans (3.12) et fait tendre $\epsilon \rightarrow 0$, alors, compte tenu de (3.2) et des relations

$$\begin{aligned}
\omega \times \partial_t u \cdot \partial_t u &= 0, \\
\int_0^T \langle \sqrt{\varrho} u, \partial_t(\sqrt{\varrho} \partial_t(\vartheta_\epsilon \partial_t u)) \rangle_{L^2} dt &= -\frac{1}{2} \int_0^T \langle (\nabla \cdot (\varrho \bar{u})) u, -\partial_t(\vartheta_\epsilon \partial_t u) \rangle_{L^2} dt + \\
&\quad -\frac{1}{2} \int_0^T \vartheta_\epsilon \int_{\Omega} (\nabla \cdot (\varrho \bar{u})) |\partial_t u|^2 dx dt - \frac{1}{2} \int_0^T \frac{d\vartheta_\epsilon}{dt} \|\sqrt{\varrho} \partial_t u\|_{L^2}^2 dt
\end{aligned}$$

on a

$$\frac{1}{2} \|\sqrt{\varrho} \partial_t u\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\partial_t u\|_{\tilde{H}^1}^2 dt' = \frac{1}{2} \|\sqrt{\varrho}_0 [\partial_t u]_0\|_{L^2}^2 + \sum_{j=1}^8 \int_0^t \int_{\Omega} f_j dx dt, \quad (3.15)$$

où

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{2}(\nabla \cdot (\varrho \bar{u})) |\partial_t u|^2, & f_2 &= 2(\nabla \cdot (\varrho \bar{u})) \omega \times u \cdot \partial_t u, & f_3 &= (\nabla \cdot (\varrho \bar{u})) (\bar{u} \cdot \nabla) u \cdot \partial_t u, \\ f_4 &= -\varrho (\partial_t \bar{u} \cdot \nabla) u \cdot \partial_t u, & f_5 &= -\varrho (\bar{u} \cdot \nabla) \partial_t u \cdot \partial_t u, & f_6 &= h\gamma \varrho^{\gamma-1} \nabla (\nabla \cdot (\varrho \bar{u})) \cdot \partial_t u, \\ f_7 &= h\gamma(\gamma-1) \varrho^{\gamma-2} (\nabla \cdot (\varrho \bar{u})) \nabla \varrho \cdot \partial_t u, & f_8 &= (\nabla \cdot (\varrho \bar{u})) \nabla \Phi \cdot \partial_t u, \end{aligned}$$

Il n'est pas difficile de constater que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f_1 dx &\leq \frac{1}{16} \|\partial_t u\|_{\tilde{H}^1}^2 + cr_0^2 q(t) \|\sqrt{\varrho} \partial_t u\|_{L^2}^2, \\ \int_{\Omega} f_2 dx &\leq \frac{1}{16} \|\partial_t u\|_{\tilde{H}^1}^2 + cr_0^2 q(t)^2 \|u\|_{\tilde{H}^1}^2, \\ \int_{\Omega} f_3 dx &\leq \frac{1}{16} \|\partial_t u\|_{\tilde{H}^1}^2 + cr_0^4 q(t)^2 \|u\|_{\tilde{H}^1}^2, \\ \int_{\Omega} f_4 dx &\leq \frac{1}{16} \|\partial_t u\|_{\tilde{H}^1}^2 + cr_0 q(t)^2 \|\partial \bar{u}\|_{H^1} \|u\|_{\tilde{H}^1}^2, \\ \int_{\Omega} f_5 dx &\leq \frac{1}{16} \|\partial_t u\|_{\tilde{H}^1}^2 + cr_0^2 q(t) \|\sqrt{\varrho} \partial_t u\|_{L^2}^2, \\ \int_{\Omega} f_6 dx &\leq \frac{1}{16} \|\partial_t u\|_{\tilde{H}^1}^2 + cr_0^2 q(t)^{2\gamma}, \\ \int_{\Omega} f_7 dx &\leq \frac{1}{16} \|\partial_t u\|_{\tilde{H}^1}^2 + c \frac{r_0^2}{\alpha(t)^{4-2\gamma}} q(t)^4, \\ \int_{\Omega} f_8 dx &\leq \frac{1}{16} \|\partial_t u\|_{\tilde{H}^1}^2 + cr_0^2 q(t)^4, \end{aligned}$$

(ici on a utilisé la relation $\|\varrho(\cdot, t)\|_{L^\infty} \leq \|\varrho(\cdot, t)\|_{H^2} \leq c'q(t)$). En majorant le second membre de (3.15) par ces inégalités, on obtient

$$\begin{aligned} \|\sqrt{\varrho} \partial_t u\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\partial_t u\|_{\tilde{H}^1}^2 dt' &\leq \|\sqrt{\varrho_0} [\partial_t u]_0\|_{L^2}^2 + cr_0^2 \int_0^t r_3(t') dt' + \\ &+ c \int_0^q (t')^2 (r_0^2 + r_0^4 + r_0 \|\partial_t\|_{h^1}) \|u\|_{\tilde{H}^1} dt' + \int_0^t r_3(t') dt', \end{aligned}$$

où

$$r_3(t) = cr_0^2 q(t)^2 \left(1 + q(t)^{2\gamma-2} + \frac{q(t)^2}{\alpha(t)^{4-2\gamma}} \right);$$

donc, à l'aide du lemme de Gronwall on en déduit que

$$\begin{aligned} \|\sqrt{\varrho} \partial_t u\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\partial_t u\|_{\tilde{H}^1}^2 dt' &\leq \|\sqrt{\varrho_0} [\partial_t u]_0\|_{L^2}^2 + \int_0^t r_3(t') dt' + \\ + c \int_0^t q(t')^2 (r_0^2 + r_0^4 + r_0 \|\partial_t\|_{H^1}) \|u\|_{\tilde{H}^1} dt' &+ \int_0^t r_4(t; t') dt', \end{aligned} \quad (3.16)$$

où

$$\begin{aligned} r_4(t; t') &= cr_0^2 q(t) e^{cr_0^2 q(t)(t-t')} \|\sqrt{\varrho_0} [\partial_t u]_0\|_{L^2}^2 + \int_0^t r_3(t') dt' + \\ &+ c \int_0^{t''} q(t'')^2 (r_0^2 + r_0^4 + r_0 \|\partial_t\|_{H^1}) \|u\|_{\tilde{H}^1} dt'' \end{aligned}$$

En adjoignant (3.14) et (3.16), on obtient (3.10).

On pose maintenant

$$v = -\varrho \partial_t u - \varrho(\bar{u} \cdot \nabla)u - 2\varrho \omega \times u - h \nabla \varrho \gamma - \varrho \nabla \Phi. \quad (3.17)$$

Grâce au lemme 3.1.1, à (3.10) et aux hypothèses sur $\bar{u}$, il est facile de constater que $v \in L^\infty(0, T; H^2(\Omega))$. Cela étant, comme on a

$$\mu \Delta u - \lambda \nabla(\nabla \cdot u) = v$$

et que u éerifie les conditions (2.10)-(2.11), grâce à la théorie bien connue des équations elliptiques, on a $u \in L^\infty(0, T; H^2(\Omega))$.

Une fois établie l'appartenance de u à $L^\infty(0, T; H^2(\Omega))$, encore grâce au lemme 3.1.1, à (3.10) et aux hypothèses sur $\bar{u}$, on a $v \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$.

Donc de manière analogue on obtient $u \in L^2(0, T; H^3(\Omega))$.

Le lemme est démontré. $\square$

Les lemmes 3.1.1 et 3.1.2 étant établis, on va démontrer le théorème 1.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1. Grâce aux lemmes 3.1.1 et 3.1.2 on peut définir l'application G de $L^2(0, T; H^3(\Omega) \cap V_0) \cap L^\infty(0, T; H^2(\Omega))$ (pour un $T > 0$ fixé) dans soi-même, qui, à $\bar{u}$, associe en premier lieu $\varrho = \varrho(\bar{u})$ donné par le lemme 3.1.1 et en second lieu $u = G(\bar{u})$ donné par le lemme 3.1.2 avec $\bar{u}$ et $\varrho = \varrho(\bar{u})$.

Comme on a vu à la fin de la démonstration du lemme 3.1.2, la régularité de u peut être déterminée par celle de $\mu\Delta u - \lambda\nabla(\nabla \cdot u) = v$; plus précisément, il existe deux constantes C_1 et C_2 telles que

$$\|u\|_{H^2} \leq C_1 \|\mu\Delta u - \lambda\nabla(\nabla \cdot u)\|_L^2 = C_1 \|v\|_{L^2} \quad (3.18)$$

$$\|u\|_{H^3} \leq C_2 \|\mu\Delta u - \lambda\nabla(\nabla \cdot u)\|_{H^2} = C_2 \|v\|_{H^1}$$

on pose

$$R_0 = \frac{2}{\sqrt{\alpha_0}} (\|u_0\|_{\tilde{H}}^2 + \|\sqrt{\varrho_0}[\partial_t u]_0\|_{L^2}^2)^{1/2}, \quad (3.19)$$

où

$$[\partial_t u]_0 = \frac{1}{\varrho_0} (\mu\Delta u_0 - \lambda\nabla(\nabla \cdot u_0)) - 2\omega \times u_0 - (u_0 \cdot \nabla)u_0 - h\gamma\varrho_0^{\gamma-2}\nabla\varrho_0 - \nabla\Omega. \quad (3.20)$$

On considère une fonction v ayant la forme

$$v = -\varrho\psi - \varrho(\bar{u} \cdot \nabla)\varphi - 2\varrho\omega \times \varphi - h\nabla\varrho^\gamma\varrho\nabla\Phi, \quad (3.21)$$

où $\varrho, \bar{u}, \varphi$ et ψ sont des fonctions vérifiant les relations

$$\|\varrho\|_{L^\infty} \leq 2\beta_0, \quad \|\varrho\|_{H^2} \leq 2q(0), \quad \|\bar{u}\|_{\tilde{H}^1 \leq R_0}, \quad \|\bar{u}\|_{H^2} \leq r_0, \quad \|\psi\|_{L^2}^2 + \|\varphi\|_{\tilde{H}^1}^2 \leq R_0^2 \quad (3.22)$$

On voit aisément qu'il existe une constante $\mathcal{C}_0$ telle que l'inégalité

$$\|v\|_{L^2} \leq \mathcal{C}_0(\beta_0(1 + R_0) + q(0)\beta_0^{\gamma-1} + \beta_0 R_0^{5/4} r_0^{3/4})$$

soit valable pour v donnée par (3.21) avec les conditions (3.22). Si en outre u est une fonction vérifiant la relation $\mu\Delta u - \lambda\nabla(\nabla \cdot u) = v$ et les conditions (2.10)-(2.11), alors en vertu de (3.18) on a

$$\|v\|_{H^2} \leq \mathcal{C}_1 \mathcal{C}_0(\beta_0(1 + R_0) + q(0)\beta_0^{\gamma-1} + \beta_0 R_0^{5/4} r_0^{3/4}) \quad (3.23)$$

Soit $\tilde{C}$ une constante telle que $\|\varphi\|_{H^1} \leq \tilde{C}\|\varphi\|_{\tilde{H}^1}$ pour tout $\varphi \in \tilde{H}^2(\Omega)$ et soit C_3 une constante telle que $\|\varrho\varphi\|_{H^1} \leq C_3\|\varphi\|_{H^1}$ pour tout $\varphi \in \tilde{H}^1(\Omega)$ et tout $\varrho \in H^2(\Omega)$ avec $\|\varrho\|_{L^\infty} \leq 2\beta_0$, $\|\varrho\|_{H^2} \leq 2q(0)$. On pose alors

$$\bar{r}_0 = \max(\bar{y}, R_0, \tilde{C}R_0, 2C_2C_3\tilde{C}R_0), \quad (3.24)$$

où C_2 est la constante définie dans (3.18), tandis que y est la solution de l'équation algébrique (en y)

$$y = \mathcal{C}_1 \mathcal{C}_0(\beta_0(1 + R_0) + q(0)\beta_0^{\gamma-1} + \beta_0 R_0^{5/4} r_0^{3/4}). \quad (3.25)$$

on pose

$$B_T = \{\varphi | M(\varphi; T) \leq \bar{r}_0, N(\varphi; T) \leq R_0\} \quad (3.26)$$

avec

$$M(\varphi; T) = \max(\|\varphi\|_{L^2(0,T;H^3)}, \|\varphi\|_{L^\infty(0,T;H^2)}, \|\partial_t \varphi\|_{L^2(0,T;H^1)}, \|\partial_t \varphi\|_{L^\infty(0,T;L^2)})$$

$$N(\varphi; T) = \left(\|\varphi\|_{L^\infty(0,T;\tilde{H}^1)}^2 + \|\partial_t \varphi\|_{L^\infty(0,T;L^2)}^2 + \|\partial_t \varphi\|_{L^2(0,T;L^2)}^2 + \|\partial_t \varphi\|_{L^2(0,T;\tilde{H}^1)}^2 \right)^{1/2}.$$

Il est évident qu'il existe un $T_1 > 0$ tel que, si on pose $r_0 = \bar{r}_0$ dans (3.5)-(3.6), la condition

$$\beta(t) \leq 2\beta_0, \quad \alpha(t) \geq \frac{\alpha_0}{2}, \quad q(t) \leq 2q(0) \quad \text{pour } 0 \leq t \leq T_1 \quad (3.27)$$

soit vérifié.

On remarque que

$$\int_0^t \|\partial_t \bar{u}\|_{H^1} dt' \leq \sqrt{t} \|\partial_t \bar{u}\|_{L^2(0,t;H^1)}$$

Cela étant, on déduit de (3.10) qu'il existe un $T_2 \in]0; T_1]$ tel que si $\bar{u} \in B_{T_2}$ alors pour $u = G(\bar{u})$ on ait

$$N(u; T_2) \leq R_0$$

Les relations (3.23)-(3.25) impliquent que, si $\bar{u} \in B_{T_2}$, alors pour $u = G(\bar{u})$ on a

$$\|u\|_{L^\infty(0,T_2;H^2)} \leq \bar{r}_0$$

En outre comme on a $N(u; T_2) \leq R_0$, la définition (3.24) de $\bar{r}_0$ entraîne banalement

$$\|\partial_t u\|_{L^2(0,T_2;H^1)} \leq \bar{r}_0, \quad \|\partial_t u\|_{L^\infty(0,T_2;L^2)} \leq \bar{r}_0.$$

Finalement il est facile de déduire de (3.17) que

$$\|v + \varrho \partial_t u\|_{H^2}^2 \leq cq(t)^2(1 + \|u\|_{H^1}^2 + \bar{r}_0^2 \|u\|_{H^2}^2) + q(t)^{2\gamma} + \frac{q(t)^4}{\alpha(t)^{4-2\gamma}}.$$

Donc, en rappelant que $u \in L^\infty(0; T_2; H^2(\Omega))$ et que $\|\varrho \partial_t u\|_{H^1}^2 \leq C_3^2 \tilde{C}^2 \|\partial_t u\|_{H^1}^2$, compte tenu de (3.18) et de (3.27), on voit aisément qu'il existe un $\bar{T} \in]0; T_2]$ tel que

$$\|u\|_{L^2(0,T_2;H^3)} \leq \bar{r}_0,$$

$$G(B_{\bar{T}}) \subseteq B_{\bar{T}} \tag{3.28}$$

On va démontrer la continuité de G dans $L^2(0, \bar{T}; H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, \bar{T}; L^2(\Omega))$. Soit $\{\bar{u}_n\}$ une suite d'éléments de $B_{\bar{T}}$ convergente vers un élément u dans

la topologie $L^2(0, \bar{T}; H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, \bar{T}; L^2(\Omega))$. Grâce à la définition de $B_{\bar{T}}$ (voir (3.26)) et de l'unicité de la limite, $\{\bar{u}_n\}$ converge faiblement ou faiblement* dans les espaces avec la norme desquels on a défini l'ensemble $B_{\bar{T}}$, plus précisément

$$\bar{u}_n \rightharpoonup \bar{u} \quad \text{dans } L^2(0, \bar{T}; H^1(\Omega))$$

$$\bar{u}_n \rightharpoonup^* \bar{u} \quad \text{dans } L^\infty(0, \bar{T}; L^2(\Omega))$$

$$\partial_t \bar{u}_n \rightharpoonup \partial_t \bar{u} \quad \text{dans } L^2(0, \bar{T}; H^1(\Omega))$$

$$\partial_t \bar{u}_n \rightharpoonup^* \partial_t \bar{u} \quad \text{dans } L^\infty(0, \bar{T}; L^2(\Omega))$$

Ces relations impliquent que $u \in B_{\bar{T}}$.

Cela étant, on considère la solution ϱ_n et la solution ϱ respectivement de l'équation

$$\partial_t \varrho_n + \nabla \cdot (\varrho_n \bar{u}_n) = 0$$

et de l'équation

$$\partial_t \varrho + \nabla \cdot (\varrho \bar{u}) = 0$$

avec

$$\varrho_n|_{t=0} = \varrho|_{t=0} = \varrho_0$$

En posant $P_n = \varrho_n - \varrho$ et $\bar{U}_n = \bar{u}_n - \bar{u}$ on a

$$\partial_t P_n + \bar{u}_n \cdot \nabla P_n + \bar{U}_n \cdot \nabla \varrho + P_n \nabla \cdot \bar{u}_n + \varrho \nabla \cdot \bar{U}_n = 0$$

et

$$P_n|_{t=0} = 0$$

En faisant le produit scalaire de cette équation avec U_n et en tenant compte de la relation

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\partial_t \varrho_n) |U_n|^2 dx &= \int_{\Omega} \varrho_n (\bar{u}_n \cdot \nabla) U_n \cdot U_n dx \leq \\ &\leq \|\varrho_n\|_{L^\infty}^{3/4} \|\bar{u}_n\|_{L^6} \|\sqrt{\varrho_n} U_n\|_{L^2}^{1/2} \|U_n\|_{L^6}^{1/2} \|\nabla U_n\|_{L^2} \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\sqrt{\varrho_n} U_n\|_{L^2}^2 + \|U_n\|_{H^1}^2 &\leq \frac{1}{2} \|U_n\|_{H^1}^2 + c \|\varrho_n\|_{L^\infty}^3 \|\bar{u}_n\|_{H^1}^4 \|\sqrt{\varrho_n} U_n\|_{L^2}^2 + c \|u\|_{H^2}^2 \|\tilde{U}_n\|_{L^2}^2 + \\ &+ c [1 + \|\varrho_n\|_{L^\infty}^{\varrho-1} + \|\varrho\|_{L^\infty}^{\varrho-1} + \|u\|_{H^1}^2 + \|\bar{u}\|_{H^1}^2 \|u\|_{H^2}^2 + \|\partial_t u\|_{L^2} \|\partial_t u\|_{H^1}] \|P_n\|_{L^2}^2 \end{aligned} \quad (3.31)$$

Comme $\bar{U}_n$ dans $L^2(0, \bar{T}; H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, \bar{T}; L^2(\Omega))$, compte tenu de (3.30), on en déduit que

$$U_n = u_n - u \rightarrow 0 \quad \text{dans} \quad L^2(0, \bar{T}; H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, \bar{T}; L^2(\Omega)) \quad (3.32)$$

ce qui prouve que l'application G est continue dans $B_{\bar{T}}$ par rapport à la topologie $L^2(0, \bar{T}; H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, \bar{T}; L^2(\Omega))$. Comme G est une application continue de $B_{\bar{T}}$ dans lui-même (voir (3.28)) et que $B_{\bar{T}}$ est un ensemble convexe et compact dans $L^2(0, \bar{T}; H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, \bar{T}; L^2(\Omega))$, d'après le principe du point fixe de Schauder il existe un élément $u \in B_{\bar{T}}$ tel que

$$u = G(u) \quad (3.33)$$

qui est évidemment une solution du problème (2.7)-(2.11) dans l'intervalle $[0; \bar{T}]$. Pour démontrer l'unicité de la solution, on considère deux éléments $u_1, u_2 \in B_{\bar{T}}$ vérifiant (3.33). On désigne par ϱ_1 et ϱ_2 la solution du problème (3.2)-(3.3) avec u_1 et u_2 respectivement et on pose

$$P = \varrho_1 - \varrho_2, \quad U = u_1 - u_2$$

Il est évident que P satisfait à l'équation

$$\partial_t P + u_1 \cdot \nabla P + U \cdot \nabla \varrho_2 + P \nabla \cdot u_1 + \varrho_2 \nabla \cdot U = 0$$

et à la condition initiale

$$P|_{t=0} = 0$$

Donc de manière analogue à l'obtention de (3.29), on obtient

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|P\|_{L^2}^2 \leq (1 + \frac{1}{2} \|\nabla \cdot u_1\|_{L^\infty}) \|P\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \|U_n \cdot \nabla \varrho_2\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \|\varrho_2 \nabla \cdot U_n\|_{L^2}^2,$$

d'où à l'aide du lemme de Gronwall on obtient

$$\|P(\cdot, t)\|_{L^2}^2 \leq \pi_1(t) \int_0^t \|U\|_{H^1}^2 dt', \quad \pi_1(t) = c q(t)^2 e^{2t} e^{c \bar{r}_0 \sqrt{t}} \quad (3.34)$$

D'autre part, U satisfait

$$\begin{aligned} & \varrho_1 \partial_t U - \mu \Delta U - \lambda \nabla (\nabla \cdot U) + 2 \varrho \omega \times U + \varrho_1 (u_1 \cdot \nabla) U + P \partial_t u_2 + \\ & + 2 P \omega \times u + P (u_1 \cdot \nabla) u_2 + \varrho_2 (U \cdot \nabla) u_2 + h \nabla (\varrho_1^\gamma - \varrho_2^\gamma) + P \nabla \Phi = 0 \end{aligned}$$

et

$$U|_{t=0} = 0$$

Donc de manière analogue à (3.31), on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\sqrt{\varrho_1} U\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \|U\|_{\tilde{H}^1}^2 \leq c (\|u_2\|_{\tilde{H}^1}^2 + \|\varrho_1\|_{L^\infty}^4 \|u_1\|_{H^1}^4) \|U\|_{L^2}^2 + \\ & + c [1 + \|\varrho_1\|_{L^\infty}^{\gamma-1} + \|\varrho_2\|_{L^\infty}^{\gamma-1} + \|u_2\|_{H^1}^2 + \|u_2\|_{H^1}^2 \|u_2\|_{H^2}^2 + \|\partial_t u_2\|_{L^2} \|\partial_t u_2\|_{H^1}] \|P\|_{L^2}^2 \end{aligned} \quad (3.35)$$

En adjoignant (3.35) à (3.34), on obtient

$$\frac{1}{\alpha(t)} \sup_{0 \leq t' \leq t} \|U(\cdot, t')\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|U\|_{\tilde{H}^1}^2 dt' \leq c (\bar{r}_0^2 + \bar{r}_0^4 q(t)^4) t \sup_{0 \leq t' \leq t} \|U(\cdot, t')\|_{L^2}^2 +$$

$$+c(t(1 + \bar{r}_0^2 + \bar{r}_0^4 + q(t)^{\gamma-1}) + \bar{r}_0^2\sqrt{t})\pi_1(t) \int_0^t \|U\|_{\tilde{H}^1}^2 dt'$$

Il est évident que pour un $t > 0$ assez petit on a

$$\|U\|_{L^\infty(0,t,L^2)}^2 + \|U\|_{L^\infty(0,t,\tilde{H}^1)}^2 \leq K(\|U\|_{L^\infty(0,t,L^2)}^2 + \|U\|_{L^\infty(0,t,\tilde{H}^1)}^2)$$

avec $K < 1$, ce qui prouve l'unicité de la solution. $\square$

Chapitre 4

Etude de la solution globale

Nous allons démontrer l'existence, l'unicité et la stabilité asymptotique de la solution globale pour $1 < \gamma < 2$ avec les données initiales suffisamment petites. Pour énoncer ce résultat, on introduit la densité en équilibre

$$\varrho_{eq}(x) = (C - \Phi)^{\frac{1}{\gamma-1}} \left(\frac{\gamma-1}{h\gamma} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}, \quad (4.1)$$

où C est une constante telle que

$$\inf_{x \in \Omega} \varrho_{eq}(x) \equiv r_{eq} > 0. \quad (4.2)$$

On remarque que ϱ_{eq} vérifie

$$h \nabla \varrho_{eq} = -\varrho_{eq} \nabla \Phi. \quad (4.3)$$

Le théorème suivant prouve l'existence et l'unicité de la solution globale de notre système.

Théorème 2 *On suppose que $1 < \gamma < 2$. Alors il existe un nombre $\delta > 0$ tel que, si $u_0 \in H^2(\Omega)$ et si u_0 vérifie les conditions (2.10)-(2.11) et*

$$\|u_0\|_{H^2}^2 + \|(\varrho - \varrho_{eq})\|_{H^2}^2 \leq \delta,$$

alors le problème (2.7)-(2.11) admet, dans tout intervalle de temps $[0; \infty[$, une solution et une seule dans la classe

$$u \in L^2(0, \infty; H^3(\Omega)) \cap L^\infty(0, \infty; H^2(\Omega)),$$

$$\partial_t u \in L^2(0, \infty; H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, \infty; L^2(\Omega)),$$

$$\varrho \in L^\infty(0, \infty; H^2(\Omega)),$$

et la solution (u, ϱ) tend vers $(0, \varrho_{eq})$ pour $t \rightarrow \infty$ avec

$$\|u(\cdot, t)\|_{H^1}^2 + \|\sqrt{\varrho_{eq}} \partial_t u(\cdot, t)\|_{H^1}^2 + \|\varrho(\cdot, t) - \varrho_{eq}\|_{H^2}^2 \leq ce^{-\epsilon_0 t}, \quad \epsilon_0 > 0.$$

4.1 Estimation préliminaire

Pour démontrer la stabilité asymptotique de l'état d'équilibre, nous avons besoin d'estimer l'écart de la densité ϱ de la densité en équilibre ϱ_{eq} . Nous posons donc

$$q(x, t) = \varrho(x, t) - \varrho_{eq}(x, t). \quad (4.4)$$

Or, pour les raisonnements qui nous conduiront à la démonstration du théorème 1, il nous convient de considérer la fonction $Q(x, t)$ définie par

$$Q(x, t) = \varrho(x, t)^{\gamma-1} - \varrho_{eq}(x, t)^{\gamma-1}. \quad (4.5)$$

Il est évident que, si $\varrho - \varrho_{eq}$ est petit, q peut être estimée par Q et vice-versa. Pour préciser ces relations, on considère par exemple la condition

$$\sup_{x \in \Omega} |q(x, t)| = \sup_{x \in \Omega} |\varrho(x, t) - \varrho_{eq}(x, t)| \leq \frac{1}{2} \inf_{x \in \Omega} \varrho_{eq}, \quad (4.6)$$

(voir (4.2)). On voit aisément que, si la condition (4.6) est vérifiée et si $\|q\|_{W_p^m} \leq \eta$ avec une constante η , alors il existe une constante $C_1 = C_1(m, p, \eta)$ telle que

$\|Q\|_{W_p^m} \leq C_1 \|q\|_{W_p^m}$, où $W_p^m = W_p^m(\Omega)$ est l'espace de Sobolev de fonction à puissance p sommables avec ses dérivée d'ordre $\leq m$. De manière analogue, si la condition (4.6) est vérifiée et si $\|Q\|_{W_p^m} \leq \eta$, alors il existe une constante $C_2 = C_2(m; p; \eta)$ telle que $\|q\|_{W_p^m}$. En particulier, à l'aide aussi de l'immersion de Sobolev et de la théorie des équations elliptiques, on voit que, si (4.6) est vérifiée, il existe une constante R_1 telle que

$$\|q\|_{L^\infty} \leq c \|Q\|_{L^\infty} \leq R_1 (\|\nabla Q\|_{L^2} + \|\Delta Q\|_{L^2}). \quad (4.7)$$

De manière analogue, on voit sans difficulté que, si (4.6) est vérifiée, il existe une constante R_2 telle que

$$\|\nabla q\|_{L^4} \leq c (\|Q\|_{L^\infty} + \|\nabla Q\|_{L^4}) \leq R_2 (\|\nabla Q\|_{L^2} + \|\Delta Q\|_{L^2}). \quad (4.8)$$

En outre, par des considérations analogues on constate que, si (4.6) est vérifiée, alors il existe une constante R_3 telle que

$$\|\varrho^\gamma - \varrho_{eq}^\gamma\|_{L^\infty} \leq c \|Q\|_{L^\infty} \leq R_3 (\|\nabla Q\|_{L^2} + \|\Delta Q\|_{L^2}). \quad (4.9)$$

La définition (4.5) de la fonction $Q(x, t)$ nous permet de déduire de (4.1) (où de (4.3)) la relation

$$h \nabla \varrho^\gamma + \varrho \nabla \Phi = \frac{h\gamma}{\gamma-1} \varrho \nabla (\varrho^{\gamma-1} - \varrho_{eq}^{\gamma-1}) = \frac{h\gamma}{\gamma-1} \varrho \nabla \Phi. \quad (4.10)$$

D'autre part, en tenant compte des relations

$$\partial_t Q = \partial_t (\varrho^{\gamma-1} - \varrho_{eq}^{\gamma-1}) = \frac{\gamma-1}{\varrho^{2-\gamma}} \partial_t \varrho, \quad \nabla Q = \frac{\gamma-1}{\varrho^{2-\gamma}} \nabla \varrho - \nabla \varrho_{eq}^{\gamma-1},$$

en multipliant l'équation (2.1) par $\frac{\gamma-1}{\varrho^{2-\gamma}}$, on obtient

$$\partial_t Q + \nabla Q \cdot u + \nabla \varrho_{eq}^{\gamma-1} \cdot u = -(\gamma-1) \varrho^{\gamma-1} \nabla \cdot u.$$

Donc, en appliquant les opérateurs ∇ et Δ à cette équation, on obtient

$$-(\gamma - 1)\varrho^{\gamma-1}\nabla(\nabla \cdot u) = \partial_t \nabla Q + \nabla(\nabla Q \cdot u) + \nabla(\nabla \varrho_{eq}^{\gamma-1} \cdot u) +$$

$$+ (\gamma - 1)\nabla Q(\nabla \cdot u) + (\gamma - 1)\nabla \varrho_{eq}^{\gamma-1}(\nabla \cdot u), \quad (4.11)$$

$$-\varrho^{\gamma-1}\nabla \cdot (\Delta u) = \frac{1}{\gamma - 1}\partial_t \Delta Q + \frac{1}{\gamma - 1}\Delta(\nabla Q \cdot u) + \frac{1}{\gamma - 1}\Delta(\nabla \varrho_{eq}^{\gamma-1} \cdot u) +$$

$$+ \Delta Q(\nabla \cdot u) + 2\nabla Q \cdot \nabla(\nabla \cdot u) + \Delta \varrho_{eq}^{\gamma-1}(\nabla \cdot u) + 2\nabla \varrho_{eq}^{\gamma-1} \cdot \nabla(\nabla \cdot u) \quad (4.12)$$

Les équations (4.10)-(4.11) seront utilisées dans démonstration de **théorème 2**.

Pour ce qui concerne les estimations de la vitesse u , on a la norme $\tilde{H}^1(\Omega)$

$$\|u\|_{\tilde{H}^1} = \langle u, u \rangle_{\tilde{H}^1}^{\frac{1}{2}}, \quad \langle u, v \rangle_{\tilde{H}^1} = \mu \int_{\Omega} \sum_{j,k=1}^3 \partial_{x_j} u_k \partial_{x_j} v_k dx + \lambda \int_{\Omega} (\nabla \cdot u)(\nabla \cdot v) dx. \quad (4.13)$$

On rappelle que, si $u, v \in H^2(\Omega)$ satisfont aux conditions (2.10) et (2.11), alors on a

$$\int_{\Omega} (-\mu \Delta u - \lambda \nabla(\nabla \cdot u)) \cdot v dx = \langle u, v \rangle_{\tilde{H}^1}, \quad (4.14)$$

(voir (3.7)).

En outre, pour les fonctions satisfaisant aux conditions (2.10) et (2.11) la norme $\|\cdot\|_{\tilde{H}^1}$ est équivalente à la norme usuelle de $H^1(\Omega)$, c'est-à-dire, il y a une constante positive k telle que

$$\frac{1}{k}\|u\|_{H^1} \leq \|u\|_{\tilde{H}^1} \leq k\|u\|_{H^1}. \quad (4.15)$$

Pourvu que u et v satisfassent aux conditions (2.10) et (2.11) (naturellement la condition (2.11) pour les dérivées perd le sens dans H^1 , ce qui ne gêne évidemment pas l'affirmation (4.15)).

4.2 Estimations a priori de la vitesse.

Dans cette section, on va établir des estimations a priori de la vitesse u .

Lemme 4.2.1 *Si (u, ϱ) est la solution du problème (2.7)-(2.11) , on a*

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \|\sqrt{\varrho}u\|_{L^2}^2 + \int_{\Omega} (\Pi(\varrho) + \varrho\Phi) dx \right) + \|u\|_{\tilde{H}^1}^2 = 0, \quad (4.16)$$

où

$$\Pi(\varrho) = h \left(\frac{1}{\gamma - 1} (\varrho^\gamma - \varrho) - \varrho + 1 \right). \quad (4.17)$$

Démonstration 4.2.1 Si on multiplie l'équation (2.2) par u et l'intègre sur Ω , alors, en utilisant (4.14) et la relation

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \varrho \partial_t u \cdot u dx &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \varrho |u|^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \partial_t \varrho |u|^2 dx = \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \varrho |u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u|^2 \nabla \cdot (\varrho u) dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \varrho |u|^2 dx - \int_{\Omega} \varrho u [(u \cdot \nabla) u] dx \end{aligned}$$

on obtient l'égalité (4.16). Les détails de la démonstration seront exposés dans le chapitre 5 $\square$

Lemme 4.2.2 *Si (u, ϱ) est la solution du problème (2.7)-(2.11) , on a*

$$\frac{d}{dt} \|u\|_{\tilde{H}^1}^2 + \|\sqrt{\varrho} \partial_t u\|_{L^2}^2 \leq c \|\varrho\|_{L^\infty} (\|\nabla Q\|_{L^2}^2 + \|\nabla u\|_{L^2}^2 (1 + \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\Delta u\|_{L^2}^2)). \quad (4.18)$$

Démonstration 4.2.2 En multipliant (2.2) par $\partial_t u$ et en l'intégrant sur Ω , on a, compte tenu de (4.10),

$$\begin{aligned} &\|\sqrt{\varrho} \partial_t u\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_{\tilde{H}^1}^2 = \\ &= - \int_{\Omega} \varrho (u \cdot \nabla) u \cdot \partial_t u dx - 2 \int_{\Omega} \varrho \omega \times u \cdot \partial_t u dx - \frac{h\gamma}{\gamma - 1} \int_{\Omega} \varrho \nabla Q \cdot \partial_t u dx. \end{aligned}$$

On remarque que pour les termes du second membre de cette égalité on a

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \varrho(u \cdot \nabla)u \cdot \partial_t u dx &\leq \frac{1}{6} \|\sqrt{\varrho} \partial_t u\|_{L^2}^2 + c \|\varrho\|_{L^\infty} \|\nabla u\|_{L^2}^2 (\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\Delta u\|_{L^2}^2), \\ -2 \int_{\Omega} \varrho \omega \times u \cdot \partial_t u dx &\leq \frac{1}{6} \|\sqrt{\varrho} \partial_t u\|_{L^2}^2 + c \|\varrho\|_{L^\infty} \|\nabla u\|_{L^2}^2, \\ -\frac{h\gamma}{\gamma-1} \int_{\Omega} \varrho \nabla Q \cdot \partial_t u dx &\leq \frac{1}{6} \|\sqrt{\varrho} \partial_t u\|_{L^2}^2 + c \|\varrho\|_{L^\infty} \|\nabla Q\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

En adjoignant ces inégalités, on obtient (4.18). $\square$

Lemme 4.2.3 Si (u, ϱ) est la solution du problème (2.7)-(2.11), on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\sqrt{\varrho} \partial_t u\|_{L^2}^2 + \|\partial_t u\|_{\tilde{H}^1}^2 &\leq c(\|\varrho\|_{L^\infty}^2 + \|\varrho\|_{L^\infty}^{2\gamma} + \|\varrho\|_{L^4}^{2\gamma}) \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \\ + c \|\varrho\|_{L^\infty}^2 \|\nabla u\|_{L^2}^4 (1 + \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\Delta u\|_{L^2}^2) &+ c \|\varrho\|_{L^\infty} (\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\Delta u\|_{L^2}^2) \|\sqrt{\varrho} \partial_t u\|_{L^2}^2. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Démonstration 4.2.3 Comme on a

$$\partial_t(\varrho \partial_t u) = \sqrt{\varrho} \partial_t(\sqrt{\varrho} \partial_t u) - \frac{1}{2}(\nabla \cdot (\varrho u)) \partial_t u,$$

si on différencie les deux membres de (2.2) par rapport à t , on obtient

$$\begin{aligned} \sqrt{\varrho} \partial_t(\varrho \partial_t u) - \frac{1}{2}(\nabla \cdot (\varrho u)) \partial_t u + \partial_t \varrho(u \cdot \nabla)u + \varrho(\partial_t u \cdot \nabla)u + \varrho(u \cdot \nabla) \partial_t u + \\ -\mu \Delta \partial_t u - \lambda \nabla(\nabla \cdot \partial_t u) + 2\partial_t \varrho \omega \times u + 2\varrho \omega \times \partial_t u = \partial_t \varrho \nabla \Phi - h \nabla \partial_t \varrho^\gamma. \end{aligned}$$

En multipliant les deux membres de cette égalité par $\partial_t u$ et en l'intégrant sur Ω on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\sqrt{\varrho} \partial_t u\|_{L^2}^2 + \|\partial_t u\|_{\tilde{H}^1}^2 &= -2 \int_{\Omega} \partial_t \varrho \omega \times u \cdot \partial_t u dx + \\ - \int_{\Omega} \partial_t \varrho(u \cdot \nabla)u \cdot \partial_t u dx - \int_{\Omega} \varrho(\partial_t u \cdot \nabla)u \cdot \partial_t u dx &- \int_{\Omega} \varrho(u \cdot \nabla) \partial_t u \cdot \partial_t u dx \end{aligned}$$

$$- \int_{\Omega} \partial_t \varrho \nabla \Phi \cdot \partial_t u dx - h \int_{\Omega} \nabla \partial_t \varrho^\gamma \cdot \partial_t u dx \quad (4.20)$$

Pour déduire de (4.20) l'inégalité (4.19), on remarque que

$$\begin{aligned} 2 \left| \int_{\Omega} \partial_t \varrho \omega \times u \cdot \partial_t u dx \right| &= 2 \left| \int_{\Omega} \varrho u \cdot \nabla (\partial_t \varrho \omega \times u \cdot \partial_t u) dx \right| \leq \frac{1}{12} \|\partial_t u\|_{\tilde{H}^1}^2 + c \|\varrho\|_{L^\infty}^2 \|\nabla u\|_{L^2}^4, \\ \left| \int_{\Omega} \partial_t \varrho (u \cdot \nabla) u \cdot \partial_t u dx \right| &= \left| \int_{\Omega} \varrho u \cdot \nabla ((u \cdot \nabla) u \cdot \partial_t u) dx \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{12} \|\partial_t u\|_{\tilde{H}^1}^2 + c \|\varrho\|_{L^\infty}^2 \|\nabla u\|_{L^2}^4 (\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\nabla u\|_{L^2}^2), \\ \left| \int_{\Omega} \varrho (\partial_t u \cdot \nabla) u \cdot \partial_t u dx \right| &\leq \frac{1}{12} \|\partial_t u\|_{\tilde{H}^1}^2 + c \|\varrho\|_{L^\infty}^2 (\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\nabla u\|_{L^2}^2) \|\sqrt{\varrho} \partial_t u\|_{L^2}^2, \\ 2 \left| \int_{\Omega} \varrho (u \cdot \nabla) \partial_t u \cdot \partial_t u dx \right| &\leq \frac{1}{12} \|\partial_t u\|_{\tilde{H}^1}^2 + c \|\varrho\|_{L^\infty}^2 (\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\nabla u\|_{L^2}^2) \|\sqrt{\varrho} \partial_t u\|_{L^2}^2, \\ \left| \int_{\Omega} \partial_t \varrho \nabla \Phi \cdot \partial_t u dx \right| &= \left| \int_{\Omega} \varrho u \cdot \nabla (\nabla \Phi \cdot \partial_t u) dx \right| \leq \frac{1}{12} \|\partial_t u\|_{\tilde{H}^1}^2 + c \|\varrho\|_{L^\infty}^2 \|\nabla u\|_{L^2}^2, \\ h \left| \int_{\Omega} \nabla \partial_t \varrho^\gamma \cdot \partial_t u dx \right| &= h \gamma \left| \int_{\Omega} \varrho^{\gamma-1} (\nabla \cdot (\varrho u)) (\nabla \cdot \partial_t u) dx \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{12} \|\partial_t u\|_{\tilde{H}^1}^2 + c (\|\varrho\|_{L^\infty}^{2\gamma} \|\nabla u\|_{L^2}^{2\gamma}) \|\nabla u\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

En adjoignant ces inégalités à (4.20), on obtient (4.19). $\square$

Lemme 4.2.4 *Si (u, ϱ) est la solution du problème (2.7)-(2.11), on a*

$$\begin{aligned} \|\Delta u\|_{L^2} &\leq c \|\varrho\|_{L^\infty}^{\frac{1}{2}} \|\sqrt{\varrho} \partial_t u\|_{L^2} + \\ &+ c \|\varrho\|_{L^\infty} (\|\nabla u\|_{L^2} + \|\nabla Q\|_{L^2} + \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\varrho\|_{L^\infty} \|\nabla u\|_{L^2}^3) \leq \\ &\leq c' \|\varrho\|_{L^\infty} (\|\nabla u\|_{L^2} + \|\partial_t u\|_{\tilde{H}^1} + \|\nabla Q\|_{L^2} + \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\varrho\|_{L^\infty} \|\nabla u\|_{L^2}^3). \quad (4.21) \end{aligned}$$

Démonstration 4.2.4 Comme on le sait par la théorie des équations elliptiques, il existe une constante c_1 telle que

$$\|\Delta u\|_{L^2} \leq c_1 \|\mu \Delta u + \lambda \nabla(\nabla \cdot u)\|_{L^2}.$$

D'autre part, il résulte immédiatement de (2.2) et de (4.10) que

$$\|\mu \Delta u + \lambda \nabla(\nabla \cdot u)\|_{L^2} \leq \|\varrho \partial_t u\|_{L^2} + \|\varrho(u \cdot \nabla)u\|_{L^2} + \|2\varrho \omega \times u\|_{L^2} + h\|\varrho \nabla Q\|_{L^2}.$$

Puisqu'on a

$$\|\varrho(u \cdot \nabla)u\|_{L^2} \leq \|\varrho\|_{L^\infty} (\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\nabla u\|_{L^2}^{\frac{3}{2}} \|\Delta u\|_{L^2}^{\frac{1}{2}})$$

on en déduit (4.21). $\square$

Lemme 4.2.5 Si (u, ϱ) est la solution du problème (2.7)-(2.11), on a

$$\begin{aligned} \|\Delta u\|_{L^4} &\leq c \|\varrho\|_{L^\infty} (\|\nabla u\|_{L^2} + \|\partial_t u\|_{\tilde{H}} + \|\nabla Q\|_{L^2} + \|\Delta Q\|_{L^2} + \\ &\quad + \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\nabla u\|_{L^2}^{3/4} \|\varrho\|_{L^\infty}^{5/8} \|\sqrt{\varrho} \partial_t u\|_{L^2}^{5/4} + \\ &\quad + \|\nabla u\|_{L^2}^{3/4} \|\varrho\|_{L^\infty}^{5/4} (\|\nabla u\|_{L^2}^{5/4} + \|\nabla Q\|_{L^2}^{5/4} + \|\nabla u\|_{L^2}^{5/2} + \|\varrho\|_{L^\infty}^{5/4} \|\nabla u\|_{L^2}^{15/4})). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Démonstration 4.2.5 D'une manière analogue au Lemme 4.2.4, grâce à la théorie des équations elliptiques on a

$$\|\Delta u\|_{L^4} \leq c (\|\varrho \partial_t u\|_{L^4} + \|\varrho(u \cdot \nabla)u\|_{L^4} + \|2\varrho \omega \times u\|_{L^4} + h\|\varrho \nabla Q\|_{L^4}).$$

Or, on a

$$\|\varrho(u \cdot \nabla)u\|_{L^4} \leq \|\varrho\|_{L^\infty} (\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\nabla u\|_{L^2}^{3/4} \|\Delta u\|_{L^2}^{5/4})$$

Donc, en y substituant la première expression qui majore $\|\Delta u\|_{L^2}$ dans (4.21), on obtient (4.22).

4.3 Estimations a priori de la densité.

Dans cette section on va établir des estimations a priori de l'écart de la densité ϱ de la densité en équilibre ϱ_{eq} , écart exprimé par $Q = \varrho^{\gamma-1} - \varrho_{eq}^{\gamma-1}$. Dans les inégalités qu'on obtient dans la suite, r_{eq} désigne $\inf_{x \in \Omega} \varrho_{eq}(x)$ comme dans (4.2).

Lemme 4.3.1 *Si (u, ϱ) est la solution du problème (2.7)-(2.11) et si la condition (4.6) est vérifiée, alors, pour tout $\varepsilon_1 > 0$, il existe un nombre fini $\tilde{C}_{\varepsilon_1}$ déterminé par ε_1 et tel que*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\nabla Q\|_{L^2}^2 + \frac{h\gamma r_{eq}^\gamma}{\lambda} \|\nabla Q\|_{L^2}^2 &\leq \varepsilon_1 \|\Delta u\|_{L^2}^2 + \varepsilon_1 \|\Delta Q\|_{L^2}^2 + \\ &+ (c(1 + \|\varrho\|_{L^\infty}^{2\gamma}) + \tilde{C}_{\varepsilon_1}) \|\nabla u\|_{L^2}^2 + c\|\varrho\|_{L^\infty}^{2\gamma} \|\partial_t u\|_H^2 + \\ &+ c\|\varrho\|_{L^\infty}^{2\gamma} \|\nabla u\|_{L^2}^3 (\|\nabla u\|_{L^2} + \|\Delta u\|_{L^2}) + c(\|\nabla u\|_{L^2} + \|\Delta u\|_{L^4} + \|\varrho^\gamma - \varrho_{eq}^\gamma\|_{L^\infty}) \|\nabla Q\|_{L^2}^2. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Démonstration 4.3.1 Si on multiplie les deux membres de l'équation (2.2) par $\frac{\gamma-1}{\lambda} \varrho^{\gamma-1}$ (voir aussi (4.10)) et y substitue (4.11), alors on a

$$\begin{aligned} \partial_t \nabla Q + \frac{h\gamma}{\lambda} \varrho^\gamma \nabla Q &= -\frac{\gamma-1}{\lambda} \varrho^\gamma \partial_t u - \frac{\gamma-1}{\lambda} \varrho^\gamma (u \cdot \nabla) u + \frac{\mu(\gamma-1)}{\lambda} \varrho^{\gamma-1} \Delta u - 2\frac{\gamma-1}{\lambda} \varrho^\gamma \omega \times u + \\ &- \nabla(\nabla Q \cdot u) - \nabla(\nabla \varrho_{eq}^{\gamma-1} \cdot u) - (\gamma-1) \nabla Q (\nabla \cdot u) - (\gamma-1) \nabla \varrho_{eq}^{\gamma-1} (\nabla \cdot u). \end{aligned}$$

En multipliant les deux membres de cette égalité par ∇Q et en les intégrant sur Ω , on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\nabla Q\|_{L^2}^2 + \frac{2h\gamma}{\lambda} \int_{\Omega} \varrho_{eq}^\gamma |\nabla Q|^2 dx &= -\frac{2h\gamma}{\lambda} \int_{\Omega} (\varrho^\gamma - \varrho_{eq}^\gamma) |\nabla Q|^2 dx + \\ &- \frac{2(\gamma-1)}{\lambda} \int_{\Omega} \varrho^\gamma \partial_t u \cdot \nabla Q dx - \frac{2(\gamma-1)}{\lambda} \int_{\Omega} \varrho^\gamma (u \cdot \nabla) u \cdot \nabla Q dx + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2\mu(\gamma-1)}{\lambda} \int_{\Omega} Q \Delta u \cdot \nabla Q dx + \frac{2\mu(\gamma-1)}{\lambda} \int_{\Omega} \varrho_{eq}^{\gamma-1} \Delta u \cdot \nabla Q dx + \\
& - \frac{4(\gamma-1)}{\lambda} \int_{\Omega} \varrho^{\gamma} \omega \times u \cdot \nabla Q dx - 2 \int_{\Omega} \nabla(\nabla Q \cdot u) \cdot \nabla Q dx - 2 \int_{\Omega} \nabla(\nabla \varrho_{eq}^{\gamma-1} \cdot u) \cdot \nabla Q dx + \\
& - 2(\gamma-1) \int_{\Omega} (\nabla \cdot u) |\nabla Q|^2 dx - 2(\gamma-1) \int_{\Omega} (\nabla \cdot u) \nabla \varrho_{eq}^{\gamma-1} \cdot \nabla Q dx. \quad (4.24)
\end{aligned}$$

Par l'intégration par parties on a

$$\int_{\Omega} \sum_{j,k=1}^3 u_k \partial_{x_k} \partial_{x_j} Q \partial_{x_j} Q dx = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \cdot u) |\nabla Q|^2 dx,$$

ce qui entraîne

$$-2 \int_{\Omega} \nabla(u \cdot \nabla Q) \cdot \nabla Q dx \leq c(\|\nabla u\|_{L^2} + \|\Delta u\|_{L^4}) \|\nabla Q\|_{L^2}^2.$$

D'autre part, il est facile de constater que

$$\begin{aligned}
& -\frac{2h\gamma}{\lambda} \int_{\Omega} (\varrho^{\gamma} - \varrho_{eq}^{\gamma}) |\nabla Q|^2 dx \leq c\|\varrho^{\gamma} - \varrho_{eq}^{\gamma}\|_{L^{\infty}} \|\nabla Q\|_{L^2}^2, \\
& -\frac{2(\gamma-1)}{\lambda} \int_{\Omega} \varrho^{\gamma} (u \cdot \nabla) u \cdot \nabla Q dx \leq \frac{hr_{eq}^{\gamma}}{6\lambda} \|\nabla Q\|_{L^2}^2 + c\|\varrho\|_{L^{\infty}}^{2\gamma} \|\nabla u\|_{L^2}^2 (\|\nabla u\|_{L^2} + \|\Delta u\|_{L^2}), \\
& -\frac{2(\gamma-1)}{\lambda} \int_{\Omega} \varrho^{\gamma} \partial_t u \cdot \nabla Q dx \leq \frac{hr_{eq}^{\gamma}}{6\lambda} \|\nabla Q\|_{L^2}^2 + c\|\varrho\|_{L^{\infty}}^{2\gamma} \|\partial_t u\|_{H^1}^2, \\
& -\frac{4(\gamma-1)}{\lambda} \int_{\Omega} \varrho^{\gamma} \omega \times u \cdot \nabla Q dx \leq \frac{hr_{eq}^{\gamma}}{6\lambda} \|\nabla Q\|_{L^2}^2 + c\|\varrho\|_{L^{\infty}}^{2\gamma} \|\nabla u\|_{L^2}^2, \\
& -2 \int_{\Omega} \nabla(\nabla \varrho_{eq}^{\gamma-1} \cdot u) \cdot \nabla Q dx \leq \frac{hr_{eq}^{\gamma}}{6\lambda} \|\nabla Q\|_{L^2}^2 + c\|\nabla u\|_{L^2}^2, \\
& -2(\gamma-1) \int_{\Omega} (\nabla \cdot u) |\nabla Q|^2 dx \leq c(\|\nabla u\|_{L^2} + \|\Delta u\|_{L^4}) \|\nabla Q\|_{L^2}^2, \\
& -2(\gamma-1) \int_{\Omega} (\nabla \cdot u) \nabla \varrho_{eq}^{\gamma-1} \cdot \nabla Q dx \leq \frac{hr_{eq}^{\gamma}}{6\lambda} \|\nabla Q\|_{L^2}^2 + c\|\nabla u\|_{L^2}^2, \\
& \frac{2\mu(\gamma-1)}{\lambda} \int_{\Omega} Q \Delta u \cdot \nabla Q dx \leq c\|\Delta u\|_{L^4} \|\nabla Q\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

Quant à l'intégrale $\int_{\Omega} \varrho_{eq}^{\gamma-1} \Delta u \cdot \nabla Q dx$, en l'intégrant par parties, on a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \varrho_{eq}^{\gamma-1} \Delta u \cdot \nabla Q dx &= \int_{\partial\Omega} \sum_{j,k=1}^3 \varrho_{eq}^{\gamma-1} (\partial_{x_j} u_k) n_j \partial_{x_k} Q ds + \\ &- \int_{\Omega} \sum_{j,k=1}^3 (\partial_{x_j} u_k) (\partial_{x_j} \varrho_{eq}^{\gamma-1}) \partial_{x_k} Q dx - \int_{\Omega} \sum_{j,k=1}^3 \varrho_{eq}^{\gamma-1} (\partial_{x_j} u_k) \partial_{x_j} \partial_{x_k} Q dx, \end{aligned}$$

où n_j est la j -ième composante de la normale extérieure sur Ω , tandis que ds est l'élément d'intégration sur la surface $\partial\Omega$. Cette égalité, jointe au théorème de traces, nous permet d'obtenir l'inégalité

$$\frac{2\mu(\gamma-1)}{\lambda} \int_{\Omega} \varrho_{eq}^{\gamma-1} \Delta u \cdot \nabla Q dx \leq \frac{hr_{eq}^{\gamma}}{6\lambda} \|\nabla Q\|_{L^2}^2 + \varepsilon_1 \|\Delta u\|_{L^2}^2 + \varepsilon_1 \|\Delta Q\|_{L^2}^2 + \tilde{C}_{\varepsilon_1} \|\nabla u\|_{L^2}^2,$$

avec un nombre arbitraire $\varepsilon_1 > 0$ et un nombre $\tilde{C}_{\varepsilon_1}$ déterminé par ε_1 . En adjoignant ces inégalités à (4.24), on obtient (4.23). $\square$

Lemme 4.3.2 *Si (u, ϱ) est la solution du problème (2.7)-(2.11) et si la condition (4.6) est vérifiée, alors on a*

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \|\Delta Q\|_{L^2}^2 + \frac{h\gamma r_{eq}^{\gamma}}{\mu + \lambda} \|\Delta Q\|_{L^2}^2 \leq \\ &\leq c(1 + \|\nabla \varrho\|_{L^4}^{8\gamma}) (\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\Delta u\|_{L^2}^2 + \|\partial_t u\|_{\tilde{H}^1}^2 + \|\nabla Q\|_{L^2}^2) + \\ &+ c(1 + \|\nabla \varrho\|_{L^4}^{\gamma}) (\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\Delta u\|_{L^2}^2) \|\Delta Q\|_{L^2} + \\ &+ c(\|\nabla u\|_{L^2} + \|\Delta u\|_{L^4}) (\|\nabla Q\|_{L^2}^2 + \|\Delta Q\|_{L^2}^2) + c\|\varrho^{\gamma} - \varrho_{eq}^{\gamma}\|_{L^{\infty}} \|\Delta Q\|_{L^2}^2. \quad (4.25) \end{aligned}$$

Démonstration 4.3.2 En appliquant l'opérateur $(\nabla \cdot)$ aux deux membres de (2.2) et en les multipliant par $\varrho^{\gamma-1}$, on obtient

$$\varrho^{\gamma-1} \nabla \varrho \cdot \partial_t u + \varrho^{\gamma} \nabla \cdot \partial_t u + \varrho^{\gamma-1} \nabla \cdot (\varrho(u \cdot \nabla)u) - (\mu + \lambda) \varrho^{\gamma-1} \nabla \cdot \Delta u +$$

$$+ 2\varrho^{\gamma-1} \nabla \cdot (\varrho \omega \times u) + \frac{h\gamma}{\gamma-1} \varrho^{\gamma-1} \nabla \varrho \cdot \nabla Q + \frac{h\gamma}{\gamma-1} \varrho^\gamma \Delta Q = 0. \quad (4.26)$$

En substituant l'expression de (4.12) dans (4.26), en le multipliant par ΔQ et en l'intégrant sur Ω , on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \|\Delta Q\|_{L^2}^2 + \frac{2h\gamma}{\mu+\lambda} \int_{\Omega} \varrho_{eq}^\gamma |\Delta Q|^2 dx = \\ & = -\frac{2h\gamma}{\mu+\lambda} \int_{\Omega} (\varrho^\gamma - \varrho_{eq}^\gamma) |\Delta Q|^2 dx - \frac{2(\gamma-1)}{\mu+\lambda} \int_{\Omega} \varrho^{\gamma-1} (\nabla \varrho \cdot \partial_t u) \Delta Q dx + \\ & - \frac{2(\gamma-1)}{\mu+\lambda} \int_{\Omega} \varrho^\gamma (\nabla \cdot \partial_t u) \Delta Q dx - \frac{2(\gamma-1)}{\mu+\lambda} \int_{\Omega} \varrho^{\gamma-1} (\nabla \cdot ((\varrho u \cdot \nabla) u)) \Delta Q dx + \\ & - 2 \int_{\Omega} (\Delta(u \cdot \nabla Q)) \Delta Q dx - 2 \int_{\Omega} \Delta(u \cdot \nabla \varrho_{eq}^{\gamma-1}) \Delta Q dx + \\ & - \frac{4(\gamma-1)}{\mu+\lambda} \int_{\Omega} \varrho^{\gamma-1} \nabla \cdot (\varrho \omega \times u) \Delta Q dx - \frac{2h\gamma}{\mu+\lambda} \int_{\Omega} \varrho^{\gamma-1} (\nabla \varrho \cdot \nabla Q) \Delta Q dx + \\ & - 2(\gamma-1) \int_{\Omega} (\nabla \cdot u) |\Delta Q|^2 dx - 4(\gamma-1) \int_{\Omega} \nabla Q \cdot \nabla (\nabla \cdot u) \Delta Q dx + \\ & - 2(\gamma-1) \int_{\Omega} \Delta \varrho_{eq}^{\gamma-1} (\nabla \cdot u) \Delta Q dx - 4(\gamma-1) \int_{\Omega} \nabla \varrho_{eq}^{\gamma-1} \cdot \nabla (\nabla \cdot u) \Delta Q dx. \quad (4.27) \end{aligned}$$

De manière analogue à la démonstration du lemme 4.3.1, on a

$$\int_{\Omega} (u \cdot \Delta \nabla Q) \Delta Q dx = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \cdot u) |\Delta Q|^2 dx,$$

et donc à l'aide de la théorie des équations elliptiques on obtient

$$-2 \int_{\Omega} (\Delta(u \cdot \nabla Q)) \Delta Q dx \leq c(\|\nabla u\|_{L^2} + \|\Delta u\|_{L^4})(\|\nabla Q\|_{L^2}^2 + \|\Delta Q\|_{L^2}^2).$$

D'autre part on parvient sans difficulté aux inégalités

$$\begin{aligned} & -\frac{2h\gamma}{\mu+\lambda} \int_{\Omega} (\varrho^\gamma - \varrho_{eq}^\gamma) |\Delta Q|^2 dx \leq c \|\varrho^\gamma - \varrho_{eq}^\gamma\|_{L^\infty} \|\Delta Q\|_{L^2}^2, \\ & -\frac{2(\gamma-1)}{\mu+\lambda} \int_{\Omega} \varrho^{\gamma-1} (\nabla \varrho \cdot \partial_t u) \Delta Q dx \leq \frac{hr_{eq}^\gamma}{7(\mu+\lambda)} \|\Delta Q\|_{L^2}^2 + c \|\varrho\|_{L^\infty}^{2\gamma-2} \|\nabla \varrho\|_{L^4}^2 \|\partial_t u\|_{\dot{H}^1}^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{2(\gamma-1)}{\mu+\lambda} \int_{\Omega} \varrho^{\gamma} (\nabla \cdot \partial_t u) \Delta Q dx \leq \frac{hr_{eq}^{\gamma}}{7(\mu+\lambda)} \|\Delta Q\|_{L^2}^2 + c \|\varrho\|_{L^{\infty}}^{2\gamma} \|\partial_t u\|_{\tilde{H}^1}^2, \\
& -\frac{2(\gamma-1)}{\mu+\lambda} \int_{\Omega} \varrho^{\gamma-1} (\nabla \cdot ((\varrho u \cdot \nabla) u)) \Delta Q dx \leq \\
& \leq c \|\varrho\|_{L^{\infty}}^{\gamma-1} (\|\varrho\|_{L^{\infty}} + \|\nabla \varrho\|_{L^4}) (\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\Delta u\|_{L^2}^2) \|\Delta Q\|_{L^2}, \\
& -2 \int_{\Omega} \Delta(u \cdot \nabla \varrho_{eq}^{\gamma-1}) \Delta Q dx \leq \frac{hr_{eq}^{\gamma}}{7(\mu+\lambda)} \|\Delta Q\|_{L^2}^2 + c(\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\Delta u\|_{L^2}^2), \\
& -\frac{4(\gamma-1)}{\mu+\lambda} \int_{\Omega} \varrho^{\gamma-1} \nabla \cdot (\varrho \omega \times u) \Delta Q dx \leq \\
& \leq \frac{hr_{eq}^{\gamma}}{7(\mu+\lambda)} \|\Delta Q\|_{L^2}^2 + c \|\varrho\|_{L^{\infty}}^{2\gamma-2} (\|\varrho\|_{L^{\infty}}^2 + \|\nabla \varrho\|_{L^4}^2) \|\nabla u\|_{L^2}^2, \\
& -\frac{2h\gamma}{\mu+\lambda} \int_{\Omega} \varrho^{\gamma-1} (\nabla \varrho \cdot \nabla Q) \Delta Q dx \leq \frac{hr_{eq}^{\gamma}}{7(\mu+\lambda)} \|\Delta Q\|_{L^2}^2 + c(1 + \|\varrho\|_{L^{\infty}}^{8\gamma-8} \|\nabla \varrho\|_{L^4}^8) \|\nabla Q\|_{L^2}^2, \\
& -2(\gamma-1) \int_{\Omega} (\nabla \cdot u) |\Delta Q|^2 dx \leq c(\|\nabla u\|_{L^2} + \|\Delta u\|_{L^2}) \|\Delta Q\|_{L^2}^2, \\
& -4(\gamma-1) \int_{\Omega} \nabla Q \cdot \nabla (\nabla \cdot u) \Delta Q dx \leq c \|\Delta u\|_{L^4} (\|\nabla Q\|_{L^2}^2 + \|\Delta Q\|_{L^2}^2), \\
& -2(\gamma-1) \int_{\Omega} \Delta \varrho_{eq}^{\gamma-1} (\nabla \cdot u) \Delta Q dx \leq \frac{hr_{eq}^{\gamma}}{7(\mu+\lambda)} \|\Delta Q\|_{L^2}^2 + c \|\nabla u\|_{L^2}^2, \\
& -4(\gamma-1) \int_{\Omega} \nabla \varrho_{eq}^{\gamma-1} \cdot \nabla (\nabla \cdot u) \Delta Q dx \leq \frac{hr_{eq}^{\gamma}}{7(\mu+\lambda)} \|\Delta Q\|_{L^2}^2 + c \|\Delta u\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

En adjoignant ces inégalités à (4.27) et en tenant compte de la relation $\|\varrho\|_{L^{\infty}} \leq c(1 + \|\nabla \varrho\|_{L^4})$, on obtient (4.25). $\square$

4.4 Démonstration du théorème 2.

On considère l'expression introduite dans (4.17)

$$\Pi(\varrho) = h \left(\frac{1}{\gamma-1} (\varrho^{\gamma} - \varrho) - \varrho + 1 \right).$$

comme fonction de $q = \varrho - \varrho_{eq}$, de sorte qu'elle peut être écrite dans la forme

$$\Pi(\varrho) = \Pi(\varrho_{eq}) + \frac{h\gamma}{\gamma-1}(\varrho_{eq}^{\gamma-1} - 1)q + \frac{h\gamma}{2} \frac{q^2}{\bar{\varrho}^{\gamma-2}}$$

où $\bar{\varrho}$ est une valeur comprise entre ϱ_{eq} et ϱ . D'autre part, on déduit de (4.1) que

$$\Phi(x) = C - \frac{h\gamma}{\gamma-1} \varrho_{eq}(x)^{\gamma-1}.$$

Donc on a

$$\Pi(\varrho) + \varrho\Phi = \Pi(\varrho_{eq}) + \varrho_{eq}\Phi + (C - \frac{h\gamma}{\gamma-1})q + \frac{h\gamma}{2} \frac{q^2}{\bar{\varrho}^{2-\gamma}}.$$

comme $\int_{\Omega} q dx = \int_{\Omega} (\varrho - \varrho_{eq}) dx = 0$, il s'ensuit que

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} (\Pi(\varrho) + \varrho\Phi) dx = \frac{h\gamma}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{q^2}{\bar{\varrho}^{2-\gamma}} dx,$$

ce qui nous permet de présenter (4.16) dans la forme

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \|\sqrt{\varrho}u\|_{L^2}^2 + \frac{h\gamma}{2} \int_{\Omega} \frac{q^2}{\bar{\varrho}^{2-\gamma}} dx \right) + \|u\|_{\tilde{H}^1}^2 = 0 \quad (4.28)$$

Maintenant, on suppose que la condition (4.6) est vérifiée. Alors, en remplaçant $\|\varrho - \varrho_{eq}\|_{L^\infty}$, $\|\nabla(\varrho - \varrho_{eq})\|_{L^4}$ et $\|\varrho^\gamma - \varrho_{eq}^\gamma\|_{L^\infty}$ par les expressions de (4.7)-(4.9) dans des inégalités (4.18), (4.19), (4.21), (4.22), (4.23) et (4.25) et en tenant compte de la relation $\|\nabla u\|_{L^2} \leq c\|u\|_{\tilde{H}^1}$ (voir (4.15)), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|u\|_{\tilde{H}^1}^2 + \|\sqrt{\varrho}\partial_t u\|_{L^2}^2 &\leq C_2(\|u\|_{\tilde{H}^1}^2 + \|\nabla Q\|_{L^2}^2) + \\ &+ C_2'(\|\nabla Q\|_{L^2} + \|\Delta Q\|_{L^2})(\|u\|_{\tilde{H}^1}^2 + \|\nabla Q\|_{L^2}^2) + \\ &+ C_2'(1 + \|\nabla Q\|_{L^2} + \|\Delta Q\|_{L^2})(\|u\|_{\tilde{H}^1}^4 + \|u\|_{\tilde{H}^1}^2 \|\Delta u\|_{L^2}^2), \end{aligned} \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{dt} \|\sqrt{\varrho} \partial_t u\|_{L^2}^2 + \|\partial_t u\|_{\tilde{H}^1}^2 \leq \\
 & \leq C_3 \|u\|_{\tilde{H}^1}^2 + C'_3 (\|\nabla Q\|_{L^2}^2 + \|\Delta Q\|_{L^2}^2 + \|\nabla Q\|_{L^2}^{2\gamma} + \|\Delta Q\|_{L^2}^{2\gamma}) \|u\|_{\tilde{H}^1}^2 + \\
 & + C'_3 (1 + \|\nabla Q\|_{L^2}^2 + \|\Delta Q\|_{L^2}^2) (\|u\|_{\tilde{H}^1}^4 (1 + \|u\|_{\tilde{H}^1}^2 + \|\Delta u\|_{L^2}^2)) + \\
 & + \|\sqrt{\varrho} \partial_t u\|_{L^2}^2 (\|u\|_{\tilde{H}^1}^2 + \|\Delta u\|_{L^2}^2), \tag{4.30}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \|\Delta u\|_{L^2}^2 \leq C_4 (\|u\|_{\tilde{H}^1}^2 + \|\partial_t u\|_{\tilde{H}^1}^2 + \|\nabla Q\|_{L^2}^2) + \\
 & + C'_4 (\|\nabla Q\|_{L^2}^2 + \|\Delta Q\|_{L^2}^2) (\|u\|_{\tilde{H}^1}^2 + \|\partial_t u\|_{\tilde{H}^1}^2 + \|\nabla Q\|_{L^2}^2) + \\
 & + C'_4 (1 + \|\nabla Q\|_{L^2}^4 + \|\Delta Q\|_{L^2}^4) (\|u\|_{\tilde{H}^1}^4 + \|u\|_{\tilde{H}^1}^6) \tag{4.31}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \|\Delta u\|_{L^2}^2 \leq C_5 (\|u\|_{\tilde{H}^1}^2 + \|\partial_t u\|_{\tilde{H}^1}^2 + \|\nabla Q\|_{L^2}^2 + \|\Delta Q\|_{L^2}^2) + \\
 & + C'_5 (\|\nabla Q\|_{L^2}^2 + \|\Delta Q\|_{L^2}^2) (\|u\|_{\tilde{H}^1}^2 + \|\partial_t u\|_{\tilde{H}^1}^2 + \|\nabla Q\|_{L^2}^2 + \|\Delta Q\|_{L^2}^2) + \\
 & + C'_5 (1 + \|\nabla Q\|_{L^2}^7 + \|\Delta Q\|_{L^2}^7) (\|u\|_{\tilde{H}^1}^{3/2} (\|\sqrt{\varrho} \partial_t u\|_{L^2}^{5/2} + \|\nabla Q\|_{L^2}^{5/2}) + \|u\|_{\tilde{H}^1}^4 + \|u\|_{\tilde{H}^1}^9). \tag{4.32}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{dt} \|\nabla Q\|_{L^2}^2 + \frac{h\gamma r_{eq}^\gamma}{\lambda} \|\nabla Q\|_{L^2}^2 \leq \varepsilon_1 \|\Delta u\|_{L^2}^2 + \varepsilon_1 \|\Delta Q\|_{L^2}^2 + C_{\varepsilon_1} \|u\|_{\tilde{H}^1}^2 + C_6 \|\partial_t u\|_{\tilde{H}^1}^2 + \\
 & + C'_6 (\|u\|_{\tilde{H}^1} + \|\Delta u\|_{L^2} + \|\nabla Q\|_{L^2} + \|\Delta Q\|_{L^2}) \|\nabla Q\|_{L^2} + \\
 & + C'_6 (\|\nabla Q\|_{L^2}^{2\gamma} + \|\Delta Q\|_{L^2}^{2\gamma}) (\|u\|_{\tilde{H}^1}^2 + \|\partial_t u\|_{\tilde{H}^1}^2) +
 \end{aligned}$$

$$+ C'_6(1 + \|\nabla Q\|_{L^2}^{2\gamma} + \|\Delta Q\|_{L^2}^{2\gamma})\|u\|_{\tilde{H}^1}^3(\|u\|_{\tilde{H}^1} + \|\Delta u\|_{L^4}), \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\|\Delta Q\|_{L^2}^2 + \frac{h\gamma r_{eq}^\gamma}{\lambda}\|\Delta Q\|_{L^2}^2 &\leq C_7(\|u\|_{\tilde{H}^1}^2 + \|\Delta u\|_{L^2}^2 + \|\partial_t u\|_{\tilde{H}^1}^2 + \|\nabla Q\|_{L^2}^2) + \\ &+ C'_7(\|\nabla Q\|_{L^2}^{8\gamma} + \|\Delta Q\|_{L^2}^{8\gamma})(\|u\|_{\tilde{H}^1}^2 + \|\Delta u\|_{L^2}^2 + \|\partial_t u\|_{\tilde{H}^1}^2 + \|\nabla Q\|_{L^2}^2) + \\ &+ C'_7(1 + \|\nabla Q\|_{L^2} + \|\Delta Q\|_{L^2})(\|u\|_{\tilde{H}^1}^2 + \|\Delta u\|_{L^2}^2)\|\Delta Q\|_{L^2} + \\ &+ C'_7(\|u\|_{\tilde{H}^1} + \|\Delta u\|_{L^4})(\|\nabla Q\|_{L^2}^2 + \|\Delta Q\|_{L^2}^2) + C'_7(\|\nabla Q\|_{L^2} + \|\Delta Q\|_{L^2})\|\Delta Q\|_{L^2}^2 \end{aligned} \quad (4.34)$$

Dans (4.33) ε_1 est une constante suffisamment petite qu'on va choisir convenablement, tandis que C_{ε_1} est une constante qui sera déterminée par ε_1 .

Maintenant en choisissant les constantes Λ_i , $i = 1, \dots, 7$ de la manière suivante :

$$\Lambda_5 = \Lambda_2 = 1,$$

$$\Lambda_7 = (2 + C_5)\frac{\mu + \lambda}{h\gamma r_{eq}^\gamma},$$

$$\Lambda_4 = 2 + \Lambda_7 C_7$$

$$\Lambda_6 = (1 + \Lambda_7 C_7 + C_5 + \Lambda_4 C_4 + C_2)\frac{\lambda}{h\gamma r_{eq}^\gamma},$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{\Lambda_6},$$

$$\Lambda_3 = 1 + \Lambda_7 C_7 + \Lambda_6 C_6 + C_5 + \Lambda_4 C_4,$$

$$\Lambda_1 = 1 + \Lambda_7 C_7 + \Lambda_6 C_{\varepsilon_1} + C_5 + \Lambda_4 C_4 + \Lambda_3 C_3 + C_2$$

on multiplie les deux membres des inégalités (4.28)-(4.34) par les constantes $\Lambda_1, \dots, \Lambda_7$ et les adjoint. Alors on obtient l'inégalité

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) + \mathcal{D}(t) \leq \mathcal{D}(t) \sum_{j=1}^m c_j (\mathcal{L}(t))^{v_j}, \quad (4.35)$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t) = & \Lambda_1 \left(\frac{1}{2} \|\sqrt{\varrho}u\|_{L^2}^2 + \frac{h\gamma}{2} \int_{\Omega} \frac{q^2}{\varrho^{2-\gamma}} dx \right) + \Lambda_2 \|u\|_{\tilde{H}}^2 + \\ & + \Lambda_3 \|\sqrt{\varrho}\partial_t u\|_{L^2}^2 + \Lambda_6 \|\nabla Q\|_{L^2}^2 + \Lambda_7 \|\Delta Q\|_{L^2}^2, \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$\mathcal{D}(t) = \|u\|_{\tilde{H}^1}^2 + \|\sqrt{\varrho}\partial_t u\|_{L^2}^2 + \|\partial_t u\|_{\tilde{H}^1}^2 + \|\Delta u\|_{L^2}^2 + \|\Delta u\|_{L^4}^2 + \|\nabla Q\|_{L^2}^2 + \|\Delta Q\|_{L^2}^2, \quad (4.37)$$

tandis que c_j et v_j sont des constantes positives.

Puisque $v_j > 0$ pour $j = 1, \dots, m$, il est évident que

$$\sum_{j=1}^m c_j \mathcal{L}^{v_j} = 0,$$

donc il existe une constante suffisamment petite $\delta > 0$ telle que

$$\mathcal{L}(t) \leq \delta \Rightarrow \sum_{j=1}^m c_j (\mathcal{L}(t))^{v_j} \leq \frac{1}{2}.$$

Cette relation, jointe à (4.35), implique que, si $\mathcal{L}(t) \leq \delta$, alors on a

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) + \mathcal{D}(t) \leq 0. \quad (4.38)$$

On rappelle que, en vertu du **théorème 1**, si $\mathcal{L}(t_1) \leq c < \infty$, alors il existe un nombre $T_1 = T(c) > 0$ déterminé par c et tel que le système d'équations (2.2)-(2.1) avec la condition initiale $(u(\cdot, t_1); \varrho(\cdot, t_1))$ pour $t = t_1$ et avec les conditions aux limites (2.10) et (2.11) admette, dans l'intervalle de temps $[t_1, t_1 + T_1]$, une solution (u, ϱ) et une seule telle que

$$\mathcal{L}(\cdot) \in L^\infty(t_1, t_1 + T_1), \quad \mathcal{D} \in L^2(t_1, t_1 + T_1).$$

Donc on déduit de (4.38) que, si

$$\mathcal{L}(0) \leq \delta, \quad (4.39)$$

alors on a

$$\mathcal{L}(t) \leq \delta, \quad \forall t \geq 0.$$

et donc il existe une solution (u, ϱ) et une seule du problème (2.7)-(2.10), (2.11) pour tout $t > 0$. Le terme $\|\sqrt{\varrho}\partial_t u\|_{L^2}$ pour $t = 0$ dans l'expression $\mathcal{L}(0)$ de (4.39) est à considérer comme $\|\sqrt{\varrho_0}[\partial_t u]_0\|_{L^2}$ avec

$$[\partial_t u]_0 = \frac{1}{\varrho_0}(\mu\Delta u_0 + \lambda\nabla(\nabla u_0)) - 2\omega \times u_0 - (u_0 \cdot \nabla)u_0 - h\gamma\varrho_0^{\gamma-2}\nabla\varrho_0 - \nabla\Phi.$$

D'autre part, on voit aisément que, si $\mathcal{L}(t) \leq \delta$, il existe une constante C telle que

$$\|\sqrt{\varrho}u\|_{L^2}^2 \leq C\|u\|_{H^1}^2.$$

En outre, comme $q = \varrho - \varrho_{eq}$ et que $\bar{\varrho}$ est une valeur comprise entre ϱ et ϱ_{eq} , si $\mathcal{L}(t) \leq \delta$, on a

$$\frac{h\gamma}{2} \int_{\Omega} \frac{q^2}{\bar{\varrho}^{2-\gamma}} dx \leq C' \|Q\|_{L^2}^2 \leq \|\nabla Q\|_{L^2}^2,$$

avec une constante C .

Cela étant, il est aisé de déduire de (4.36)-(4.37) qu'il y a une constante κ telle que

$$\mathcal{L}(t) \leq \kappa \mathcal{D}(t),$$

pourvu que $\mathcal{L}(t) \leq \delta$. Par conséquent, si les données initiales vérifient (4.39), alors on a

$$\mathcal{L}(t) + \varepsilon_0 \mathcal{L}(t) \leq 0, \quad \varepsilon_0 = \frac{1}{2\kappa} > 0$$

d'où il résulte que

$$\mathcal{L}(t) \leq \mathcal{L}(0)e^{-\varepsilon_0 t}.$$

Le théorème est démontré. $\square$

Chapitre 5

Question de la stabilité - Conclusion

Comme nous l'avons vu dans la démonstration de la théorème 2, en particulier dans le raisonnement qui conduit à (4.38) à partir du choix de $\Lambda_1, \dots, \Lambda_7$ et de l'inégalité (4.35), l'égalité (4.16) joue le rôle central dans la convergence de la solution vers l'état de l'équilibre. Pour cette raison nous examinons en détails ce que l'égalité (4.16) signifie. Pour comprendre l'égalité (4.16) il est utile de rappeler ce que signifie chaque terme de cette égalité. Plus précisément

- $\|\sqrt{\varrho}u\|_{L^2}^2$ représente l'énergie cinétique de mouvement de gaz,
- $\Pi(\varrho)$ l'énergie potentielle due à la pression,
- $\varrho\Phi$ l'énergie potentielle due à la force gravitationnelle,
- $\|u\|_{\tilde{H}^1}^2$ la perte de l'énergie due à la viscosité.

Dans la suite nous présentons les détails de la démonstration du lemme 4.2.1

Lemme 4.2.1 *Si (u, ϱ) est la solution du problème (2.7)-(2.11), on a*

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \|\sqrt{\varrho}u\|_{L^2}^2 + \int_{\Omega} (\Pi(\varrho) + \varrho\Phi) dx \right) + \|u\|_{\tilde{H}^1}^2 = 0, \quad (5.1)$$

où

$$\Pi(\varrho) = h\left(\frac{1}{\gamma-1}(\varrho^\gamma - \varrho) - \varrho + 1\right). \quad (5.2)$$

Démonstration On remarque d'abord que

$$\omega \times u \cdot u = 0.$$

D'autre part, comme on a

$$\Pi''(\varrho) = h\gamma\varrho^{\gamma-2} \Rightarrow \varrho\Pi''(\varrho) = h\gamma\varrho^{\gamma-1},$$

d'après l'équation de conservation de la masse on a

$$\partial_t \varrho + \nabla \cdot (\varrho u) = 0,$$

on multiplie cette équation par $\Pi'(\varrho)$ et l'intègre sur Ω

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} \Pi'(\varrho)(\partial_t \varrho + \nabla \cdot (\varrho u)) dx \\ &= \int_{\Omega} \Pi'(\varrho) \partial_t \varrho dx + \int_{\Omega} \Pi'(\varrho) \nabla \cdot (\varrho u) dx \\ &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \Pi(\varrho) dx - h \int_{\Omega} \nabla \varrho^\gamma \cdot u dx. \end{aligned}$$

On a en outre

$$- \int_{\Omega} \varrho \nabla \Phi \cdot u dx = \int_{\Omega} \Phi \nabla \cdot (\varrho u) dx = - \int_{\Omega} \Phi \partial_t \varrho dx = - \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \varrho \Phi dx.$$

On a aussi la relation

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \varrho \partial_t u \cdot u dx \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \varrho |u|^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \partial_t \varrho |u|^2 dx = \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \varrho |u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u|^2 \nabla \cdot (\varrho u) dx = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \varrho |u|^2 dx - \int_{\Omega} \varrho u [(u \cdot \nabla) u] dx$$

On multiplie l'équation (2.7) par u et l'intègre sur Ω , alors, en utilisant (4.14)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \varrho \partial_t u \cdot u dx + \int_{\Omega} \varrho u \cdot \nabla u \cdot u dx - \int_{\Omega} \mu \Delta u \cdot u dx - \int_{\Omega} \lambda \nabla (\nabla \cdot u) \cdot u dx + \int_{\Omega} 2 \varrho \omega \times u \cdot u dx \\ = \int_{\Omega} -h \nabla \varrho^\gamma \cdot u dx - \int_{\Omega} \varrho \nabla \Phi \cdot u dx \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \varrho |u|^2 dx - \int_{\Omega} \varrho u [(u \cdot \nabla) u] dx + \int_{\Omega} \varrho u \cdot \nabla u \cdot u + \int_{\Omega} (-\mu \Delta u - \lambda \nabla (\nabla \cdot u)) \cdot u dx \\ = \frac{d}{dx} \int_{\Omega} \Pi(\varrho) dx + \frac{d}{dx} \int_{\Omega} \varrho \Phi dx = \frac{d}{dx} \int_{\Omega} (\Pi(\varrho) + \varrho \Phi) dx, \end{aligned}$$

donc

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \|\sqrt{\varrho} u\|_{L^2}^2 + \int_{\Omega} (\Pi(\varrho) + \varrho \Phi) dx \right) + \|u\|_{\tilde{H}^1}^2 = 0.$$

De plus si on intègre (4.28) sur $[0, t]$ on obtient :

$$\int_0^t \frac{d}{dt'} \left(\frac{1}{2} \|\sqrt{\varrho} u\|_{L^2}^2 + \int_{\Omega} (\Pi(\varrho) + \varrho \Phi) dx \right) dt' + \int_0^t \|u\|_{\tilde{H}^1}^2 dt' = 0,$$

donc

$$\begin{aligned} - \left(\frac{1}{2} \|\sqrt{\varrho}(t, x) u\|_{L^2}^2 + \int_{\Omega} (\Pi(\varrho(t, x)) + \varrho(t, x) \Phi) dx \right) = \\ = \left(\frac{1}{2} \|\sqrt{\varrho_0} u\|_{L^2}^2 + \int_{\Omega} (\Pi(\varrho_0) + \varrho_0 \Phi) dx \right) - \int_0^t \|u\|_{\tilde{H}^1}^2 dt', \end{aligned}$$

ça signifie que l'énergie cinétique totale est égale à l'énergie cinétique initial moins la perte de l'énergie.

Bibliographie

- [1] S. BUCCELLATTO, H. FUJITA YASHIMA : *Système d'équations d'un gaz visqueux modélisant l'atmosphère avec la force de Coriolis et la stabilité de l'état d'équilibre..* Ann. Univ. Ferrara - Sez. VII - Sc. Mat., vol. 49 (2003), pp. 127-159.
- [2] H.FUJITA YASHIMA : *Modélisation de la physique des fluides*, cours de l'université de Guelma, 2010-2011
- [3] S. BUCCELLATTO, H. FUJITA YASHIMA : *stabilité de l'état de l'équilibre du d'un gaz visqueux barotropique dans le modèle de l'atmosphère.* Ann. Univ. Ferrara - Sez. VII - Sc. Mat., vol. 52 (2006), pp. 1-17.
- [4] H.FUJITA YASHIMA : *Fluide newtoniens*, cours de l'université de Guelma, 2009-2010