

MS10.029

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique

Université 8 Mai 1945 – Guelma

Faculté de Mathématiques et de l'Informatique et Sciences de
la Matière

Département de Mathématiques



Mémoire de Fin d'Etude
Master Académique en Mathématiques
Option : Analyse

THEME

Distribution asymptotique des valeurs
propres en laplacien

Présenté par :

Melouki madjda

Dirigé par:

Dr. CHihab Tarek

Jury :

PRESIDENT : A/ Chaoi

RAPPORTEUR : N/ Sellami

Session Juin 2012

Dédicace

**Je dédie ce modeste travail spécialement
A Mes très chers parents qui ont toujours été
l'origine de mes succès pendant Tout le cycle
de mes études.**

**Ma mère la lumière de mes yeux , et surtout
pour sa et sa patience.**

**Mon chers père pour son amour, son confiance
qu'il ma permis de surmonter les Difficultés qui
m'a donne le courage et l'espoir pour mes
projets d'avenir.**

A mes frères : fathi , Abed arahmene, said .

Mes ancles et mes familles.

Remerciements

Avant toute je remercie le bon dieu de m'avoir mis sur le
Bon chemin pour Pouvoir réaliser ce travail.

A Monsieur Chiheb tarek pour avoir accepté d'examiner
ce travail.

A Monsieur Boussetila .N pour avoir accepter de diriger et
Suivre de très près ce travail.

A tous ceux qui de près ou de loin ont participé à
l'élaboration directe ou indirecte de
ce modeste travail .

Merci à tous .

Table des matières

Introduction	2
1 Fonctions Harmoniques	3
1.1 Premiers résultats	3
1.2 Solution du problème de Dirichlet pour un disque	6
1.2.1 Résolution du problème	6
1.2.2 Une autre expression	9
1.2.3 Des hypothèses moins fortes	11
1.2.4 Propriétés des fonctions harmoniques	12
1.3 Existence d'une solution au problème de Dirichlet	17
2 Distribution des valeurs propres du laplacien	21
2.1 Motivation	21
2.2 Eléments théoriques	22
2.2.1 Formule de Gauss-Ostrogradski, formule de Green	22
2.2.2 Rappels sur les séries de fourier	23
2.3 Premiers résultats	24
2.4 Propriétés des valeurs propres	29
2.5 Etude asymptotique	33
2.5.1 Cas de rectangle	33
2.5.2 Estimation des valeurs propres pour le rectangle	36
2.5.3 Estimation du terme d'erreur	43

Introduction

De nombreux problèmes physiques se ramènent à la résolution d'une équation dans laquelle intervient le laplacien Δ . Citons quelques exemples :

1. En électromagnétisme, l'équation donnant le potentiel électrostatique V créé par une distribution volumique de charge ρ est $\Delta V = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$, où ε_0 est la permittivité du vide (Eq. de poisson).
2. En thermodynamique, l'équation donnant la distribution de la température T dans un solide, en régime stationnaire, est $\Delta T = 0$ (Eq. de la chaleur).
3. Toujours en thermodynamique, l'équation donnant la diffusion des molécules dans un fluide en régime stationnaire est $\Delta c = 0$, où c est la concentration des ces molécules (deuxième loi de Fick).

4. L'équation des ondes $\Delta u - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0$ apparaît en électromagnétisme, ou en acoustique. L'opérateur laplacien apparaît donc dans des domaines variés de la physique, et la résolution d'une équation comportant un laplacien est en général assez difficile.

Le but de ce mémoire est de présenter quelques propriétés du laplacien qui sont utiles pour résoudre certains problèmes physique. On étudiera en premier lieu l'équation $\Delta u = 0$ avec des conditions aux limites particulières, appelées conditions de Dirichlet. On verra que les fonctions solutions d'un tel type de problème ont des propriétés surprenantes. Ensuite, on se focalisera plus particulièrement sur la distribution asymptotique des valeurs propres du laplacien sur un domaine connexe borné ayant une frontière de classe C^1 . Ceci a un intérêt en physique des ondes, et plus particulièrement en acoustique. On étudiera à cet effet un cas simple, qui est celui d'un domaine rectangulaire de $\mathbb{R}^2$, pour ensuite étendre les résultats.

Chapitre 1

Fonctions Harmoniques

L'objectif de cette partie est d'étudier quelques propriétés des solutions de l'équation $\Delta u = 0$, d'introduire la notion de problème de Dirichlet, et démontrer l'existence et l'unicité de la solution à ce type de problème sous certaines hypothèses. On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$, et on note $d(x, y) = \|x - y\|_2$.

Pour plus d'informations, se reporter à [1].

1.1 Premiers résultats

Commençons par définir notre cadre de travail :

Définition 1.1.1.

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, et $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 .

Si $\Delta u = 0$ sur U , alors u est dite harmonique sur U .

Exemples :

1. La fonction u définie par $u(x, y) = x^2 - y^2$ est harmonique sur $U = \mathbb{R}^2$.
2. La fonction u définie par $u(x, y) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2})$ est harmonique sur $U = (\mathbb{R}^*)^2$.

Dans toute la suite de ce chapitre, on note O un ouvert connexe borné non vide de $\mathbb{R}^2$.

Il est clair que l'ensemble des fonctions harmoniques sur O est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. On définit ensuite ce qu'est un problème de Dirichlet :

Soit f une application continue sur $Fr(O)$. Le problème de Dirichlet consiste à trouver une fonction harmonique u continue sur $\bar{O}$ telle que :

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{sur } O \\ u = f & \text{sur } Fr(O). \end{cases}$$

Un exemple de problème de Dirichlet concret est la détermination de la température à l'intérieur d'un corps, connaissant la température à l'interface entre ce corps et l'air ambiant. Avec ces deux définitions, on peut déjà établir quelques résultats spectaculaires, dont le

Théorème 1.1.2. (Théorème du minimum et du maximum)

Soit u une application harmonique sur O et continue sur $\bar{O}$. Alors, on a :

$$\forall (x, y) \in O, \inf_{Fr(O)} u \leq u(x, y) \leq \sup_{Fr(O)} u.$$

Autrement dit, sur O , u ne peut prendre de valeurs plus grandes que son maximum sur $Fr(O)$ et plus petites que son minimum sur $Fr(O)$.

Démonstration :

Notons $m = \sup_{Fr(O)} u$, et supposons que u prenne en un point de O une valeur strictement plus grande que m . Alors $M = \sup_{\bar{O}} u > m$, et maximum est atteint en un certain point $P \in O$. On déplace l'origine du repère jusqu'en P , ce qui ne change rien quant à l'harmonicité de u . On considère alors l'application $v : O \rightarrow \mathbb{R}^2$ Définie par :

$$\forall (x, y) \in O, v(x, y) = u(x, y) + \frac{M - m}{2d^2} (x^2 + y^2),$$

où d est le diamètre de O pour la norme euclidienne. Alors

$v(0, 0) = u(0, 0) = M$, d'autre part, on a :

$$\forall (x, y) \in Fr(O), v(x, y) < m + \frac{M - m}{2} = \frac{M + m}{2} < M,$$

donc v atteint son maximum en un point de O . Pourtant, on a, sur O :

$$\Delta v(x, y) = \Delta u(x, y) + 2 \frac{M - m}{d^2} = 2 \frac{M - m}{d^2} > 0,$$

mais une fonction atteignant son maximum en un point ne peut avoir aucune de ses dérivées partielles strictement positive en ce point, d'où la contradiction recherchée.

Pour prouver l'assertion sur le minimum, on refait la démonstration avec la fonction $-u$.

Une application harmonique a donc un comportement très particulier sur O . On déduit de ce théorème l'unicité de la solution au problème de Dirichlet :

Corollaire 1.1.3.

Il y a unicité de la solution au problème de Dirichlet.

Démonstration :

Si u_1 et u_2 sont solutions d'un même problème de Dirichlet, alors on a $u_1 - u_2 \equiv 0$ sur $Fr(O)$.

Le théorème précédent implique

$$\forall (x, y) \in O, 0 \leq u_1(x, y) - u_2(x, y) \leq 0$$

Soit :

$$\forall (x, y) \in O, u_1(x, y) = u_2(x, y).$$

Pour finir ce paragraphe, démontrons un lemme qui sera très utile pour la suite :

Lemme 1.1.4.

Soit (u_n) une suite d'applications harmoniques sur O et continues sur $Fr(O)$. Si la suite (u_n) converge uniformément sur $Fr(O)$, alors elle converge uniformément sur $\bar{O}$.

Démonstration :

Soit $\varepsilon > 0$. Appliquons le critère de Cauchy uniforme à la suite (u_n) :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \in \mathbb{N}, p, q > N \Rightarrow \forall (x, y) \in Fr(O) \mid u_p(x, y) - u_q(x, y) \mid < \varepsilon$$

ce qui prouve que la suite (u_n) converge uniformément sur $\bar{O}$.

Ces quelques propriétés vont nous permettre de montrer l'existence d'une solution au problème de Dirichlet pour un disque, le but étant ensuite de généraliser ceci à un ouvert connexe borné possédant certaines propriétés topologiques.

1.2 Solution du problème de Dirichlet pour un disque

Soit $f = f(s)$ une fonction continue sur le bord d'un disque de centre A et de rayon 1, où s désigne l'abscisse curviligne d'un point du cercle mesurée à partir d'un certain point M du cercle. On suppose que $f(0) = f(2\pi)$. Le but est de construire une fonction u continue sur le disque fermé, harmonique sur l'intérieur du disque et égale à f sur le bord de disque. On fait alors un changement d'origine et d'axes, de sorte que la nouvelle origine soit le centre du cercle, et que l'axe des x passe par le point $s = 0$. On passe alors en coordonnées polaires (r, θ) , en prenant comme pôle notre nouvelle origine, et comme axe polaire le nouvel axe des x . L'équation du cercle est alors $r = 1$, et on peut écrire $f(s) = f(\theta)$. Après ces quelques simplifications nous pouvons commencer à résoudre le problème.

1.2.1 Résolution du problème

On procède par analyse-synthèse.

Analyse :

Supposons que f soit continue et de classe C^1 par morceaux (nous montrerons plus tard que cette hypothèse est inutile).

En coordonnées polaires, l'équation $\Delta u = 0$ devient :

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0 \quad (1, 1)$$

Cherchons une solution de cette équation sous la forme $u(r, \theta) = v(r)w(\theta)$.

En remplaçant dans (1. 1), on obtient :

$$v''(r)w(\theta) + \frac{v'(r)w(\theta)}{r} + \frac{v(r)w''(\theta)}{r^2} = 0$$

soit :

$$\underbrace{\left[v''(r) + \frac{v'(r)}{r} \right] \frac{r^2}{v(r)}}_{\text{indépendant de } \theta} = \underbrace{\frac{-w''(\theta)}{w(\theta)}}_{\text{indépendant de } r} = \lambda \in \mathbb{R}$$

Il s'agit de discuter les valeurs possibles de λ .

En écrivant que $w'' + \lambda w = 0$, et que $w(0) = w(2\pi)$, on constate que w est 2π -périodique, et donc que $\lambda = n^2$, $n \in \mathbb{N}$. On a alors $w(\theta) = a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)$, $a_n, b_n \in \mathbb{R}$.

On a ainsi $r^2 v''(r) + r v'(r) - n^2 v(r) = 0$.

Cette équation est linéaire homogène du second ordre, donc l'ensemble de ses solutions est un espace vectoriel de dimension 2. On constate qu'elle admet les deux solutions linéairement indépendantes $r \mapsto r^n$ et $r \mapsto r^{-n}$. Mais puisque $r \mapsto r^{-n}$ est discontinue en $r = 0$, on en déduit que les solutions de (1.1) continues sur $D(A, 1)$ sont de la forme :

$$u_n(r, \theta) = r^n [a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)]$$

Dans le cas $n = 0$, on obtient la solution $u_0(r, \theta) = \text{constante}$ qu'on choisit de noter $\frac{a_0}{2}$.

Considérons maintenant la fonction

$$u(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} r^n [a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)]$$

Si les suites (a_n) et (b_n) sont bornées par un certain réel M , alors on a :

$$|u(r, \theta)| \leq \frac{M}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} 2Mr^n \quad \forall r, \theta \in [0, 1] \times [0, 2\pi]$$

ce qui montre que $u(r, \theta)$ est bien définie sur $D(A, 1)$. Si on se donne de plus $r < 1$, et un réel r_1 tel que $r < r_1 < 1$, alors on a

$$\begin{aligned}
\left| u(r, \theta) - \sum_{k=0}^n u_k(r, \theta) \right| &= \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(r, \theta) \right| \\
&\leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |u_k(r, \theta)| \\
&\leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} 2M r_1^k
\end{aligned}$$

Donc la série $\sum_{k=0}^n u_k(r, \theta)$ converge uniformément vers $u(r, \theta)$ sur $D(A, r_1)$.

Les u_n étant des fonctions continues sur ce disque, u est continue sur $D(A, r_1)$, donc sur $D(A, r)$ pour tout $r < 1$. En faisant tendre r vers 1, on obtient que u est continue sur $D(A, 1)$.

On montre de même que u est de classe C^∞ sur $D(A, 1)$, sachant que $r^n = o(1/n^k)$ pour tout entier $k > 0$ et tout $r < 1$.

On peut donc dériver terme à terme la fonction u , et on remarque alors que u est harmonique sur $D(A, 1)$.

De plus, on a

$$u(1, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} r^n [a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)]$$

Synthèse :

Si on prend alors

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) d\psi, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \cos(n\psi) d\psi, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \sin(n\psi) d\psi,$$

C'est-à-dire les coefficients de Fourier de f , on a

$$u(1, \theta) = f(\theta)$$

et les suites (a_n) et (b_n) sont clairement bornées.

Il ne reste qu'à vérifier que u , définie de cette manière, est continue sur $\overline{D}(A, 1)$. On a :

$$|u(1, \theta)| \leq \frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| + |b_n|$$

et cette somme converge car f est continue et de classe C^1 par morceaux.

La série

$$u(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} r^n [a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)]$$

avec a_n et b_n les coefficients de Fourier de f est donc harmonique sur $D(A, 1)$, continue sur $\overline{D}(A, 1)$ et égale à f sur $C(A, 1)$: u est la solution du problème de Dirichlet considéré.

1.2.2 Une autre expression

Apartir de l'expression de u obtenue au paragraphe précédent, il est possible d'exprimer u sous forme d'une intégrale.

Soit $r < 1$, on a :

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} r^n [a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) d\psi + \sum_{n=1}^{+\infty} r^n \left[\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \cos(n\psi) \cos(n\theta) d\psi \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \sin(n\psi) \sin(n\theta) d\psi \right] \end{aligned}$$

soit, avec $\cos(n\psi) \cos(n\theta) + \sin(n\psi) \sin(n\theta) = \cos(n(\psi - \theta))$,

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) d\psi + \sum_{n=1}^{+\infty} r^n \left[\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \cos(n(\psi - \theta)) d\psi \right]$$

Or on a :

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} r^n \left[\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \cos(n(\psi - \theta)) d\psi \right] \right| \leq 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \sup_{\psi \in [0, 2\pi]} |f(\psi)| r^n$$

par inégalité de la moyenne, donc on peut appliquer le théorème de Beppo-Levi : On a

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} r^n \cos(n(\psi - \theta)) \right] d\psi.$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned} 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} r^n \cos(n(\psi - \theta)) &= 1 + 2 \operatorname{Re} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} r^n \exp^{in(\psi - \theta)} \right) \\ &= 1 + 2 \operatorname{Re} \left(\frac{r \exp^{i(\psi - \theta)}}{1 - r \exp^{i(\psi - \theta)}} \right) \end{aligned}$$

Et, en multipliant numérateur et dénominateur de la fraction par le conjugué du dénominateur :

$$\frac{r \exp^{i(\psi - \theta)}}{1 - r \exp^{i(\psi - \theta)}} = \frac{r \exp^{i(\psi - \theta)} - r^2}{1 - 2r \cos(\psi - \theta) + r^2}$$

d'où :

$$\begin{aligned} 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} r^n \cos(n(\psi - \theta)) &= 1 + 2 \frac{r \cos(\psi - \theta) - r^2}{1 - 2r \cos(\psi - \theta) + r^2} \\ &= \frac{1 - 2r \cos(\psi - \theta) + r^2 + 2r \cos(\psi - \theta) - 2r^2}{1 - 2r \cos(\psi - \theta) + r^2} \end{aligned}$$

soit

$$1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} r^n \cos(n(\psi - \theta)) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\psi - \theta) + r^2}.$$

Finalement, on a

$$\forall r < 1 \quad u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\psi - \theta) + r^2} d\psi,$$

intégrale qui est aussi appelée intégrale de Poisson.

Si le cercle n'est pas de rayon 1, mais de rayon R , l'intégrale devient :

$$\forall r < R \quad u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} f(s) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR \cos\left(\frac{s}{R} - \theta\right) + r^2} ds$$

(on remplace r par $\frac{r}{R}$ et la variable d'intégration devient $s = R\psi$).

1.2.3 Des hypothèses moins fortes

Pour finir la discussion sur la résolution du problème de Dirichlet pour un cercle, on va montrer que l'hypothèse " f de classe C^1 par morceaux" est inutile.

Supposons que f est continue, sans autre hypothèse de régularité. Remarquons que l'application

$$h : (s, r, \theta) \mapsto \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos\left(\frac{s}{R} - \theta\right)}$$

est de classe C^∞ en chacune des trois variables, $\forall (s, r, \theta) \in [0, 2\pi R] \times [0, R] \times [0, 2\pi]$.

Donc, en notant comme précédemment

$$\forall r < R \quad u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} f(s) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR \cos\left(\frac{s}{R} - \theta\right) + r^2} ds$$

u est de classe C^∞ , car l'intégration se fait sur un compact.

On a par ailleurs $\Delta h = 0$ (par un calcul fastidieux qui ne sera pas détaillé ici), ce qui implique $\Delta u = 0$. Donc u est harmonique sur $D(A, R)$. Montrons maintenant que la fonction $\tilde{u}$ définie par :

$$\tilde{u}(r, \theta) = \begin{cases} u(r, \theta) & \text{si } r < R \\ f(R\theta) & \text{si } r = R \end{cases}$$

est continue sur le disque fermé $\overline{D}(A, 1)$.

Par un théorème de Stone-Weierstrass, puisque f est continue, soit (f_n) une suite de polynômes convergente vers f sur $C(A, 1)$. Alors la suite de fonctions

$$u_n(r, \theta) = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} f_n(s) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR \cos\left(\frac{s}{R} - \theta\right) + r^2} ds,$$

vérifie toutes les propriétés établies en 1.2.1, puisque les (f_n) sont de classe C^∞ . En particulier, on a $u_n(R, \theta) = f_n(R\theta)$, donc la suite (u_n) converge uniformément sur le bord du disque. Puisque les (u_n) sont harmonique sur $D(A, 1)$, par le lemme 1.1.4, la suite (u_n) converge uniformément sur le disque fermé, ce qui implique que $\tilde{u} = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ est continue sur le disque fermé, en tant que limite uniforme de fonctions continues.

1.2.4 Propriétés des fonctions harmoniques

dans cette section, nous allons montrer quelques résultats utiles sur les fonctions harmoniques. Les preuves de toutes ces propriétés sont basées sur le fait que toute application harmonique est représentable sous la forme d'une intégrale de Poisson.

Théorème 1.2.1. ("Moyenne arithmétique")

Soit D un disque ouvert de $\mathbb{R}^2$. Supposons u harmonique sur D et continue sur $\bar{D}$.

Alors la valeur de u au centre de D est égale à la moyenne des valeurs de u sur $Fr(D)$.

Démonstration :

On déplace l'origine du repère au centre du disque, et on écrit u sous la forme d'une intégrale de Poisson :

$$\forall r < R \quad u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} f(s) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR \cos\left(\frac{s}{R} - \theta\right) + r^2} ds,$$

avec : $\forall s \in [0, 2\pi R]$, $f(s) = u(R, \frac{s}{R})$, et on a donc :

$$u(0, \theta) = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} f(s) ds, \text{ soit } u(0, \theta) = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} u(R, \frac{s}{R}) ds$$

En d'autres termes, la valeur de u au centre du disque est la moyenne arithmétique des valeurs de u sur le bord du disque, ce qu'on voulait montrer.

Montrons maintenant un résultat puissant concernant l'analyticité d'une fonction harmonique :

Théorème 1.2.2.

Soit u une fonction harmonique sur un ouvert connexe borné non vide O .

Alors, en tout point (x_0, y_0) de O , u est analytique en x et y .

Démonstration :

Soit $(x_0, y_0) \in O$, et soit $R > 0$ telque $D((x_0, y_0), R) \subset O$. On déplace l'origine du repère en (x_0, y_0) , pour pouvoir écrire la formule habituelle : Si un point $(x, y) \in D((x_0, y_0), R)$ a pour coordonnées polaires (r, θ) ,

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} f(s) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR \cos\left(\frac{s}{R} - \theta\right) + r^2} ds$$

Nous allons maintenant démontrer un lemme de calcul :

Lemme 1.2.3.

$$\forall r < R, \forall \psi, \theta, \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2rR \cos(\psi - \theta)} = -1 + \operatorname{Re} \left[\frac{2R}{R - re^{i(\theta - \psi)}} \right].$$

Démonstration du lemme :

On a

$$\begin{aligned} -1 + \frac{2R}{R - ie^{i(\theta - \psi)}} &= \frac{R + re^{i(\theta - \psi)}}{R - re^{i(\theta - \psi)}} \\ &= \frac{(R + re^{i(\theta - \psi)})(R - re^{i(\psi - \theta)})}{(R - re^{i(\theta - \psi)})(R - re^{i(\psi - \theta)})} \\ &= \frac{R^2 - Rre^{i(\psi - \theta)} + Rre^{i(\theta - \psi)} - r^2}{R^2 + r^2 - 2rR \cos(\psi - \theta)} \\ &= \frac{R^2 - r^2 + 2irR \sin(\theta - \psi)}{R^2 + r^2 - 2rR \cos(\psi - \theta)} \end{aligned}$$

et on prend la partie réelle des deux membres, ce qui montre le résultat annoncé

Par ailleurs, on a :

$$2 \frac{R}{R - re^{i(\theta - \psi)}} = 2 \frac{iR \exp^{i\psi}}{i[R \exp^{i\psi} - r \exp^{i\theta}]},$$

ce qui permet d'écrire :

$$u(x, y) = -\frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} f(s) ds + 2 \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} f(s) \frac{iR \exp(i\frac{s}{R})}{i[R \exp(i\frac{s}{R}) - r \exp(i\theta)]} ds \right].$$

Notons à présent $z = x + iy = r \exp(i\theta)$ et $\alpha = R \exp(i\frac{s}{R})$, on a, puisque f donne les valeurs de u sur le bord du disque :

$$u(x, y) = -\frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} f(s) ds + \operatorname{Re} \left[\frac{1}{i\pi} \oint \frac{f(\alpha) d\alpha}{\alpha - z} \right],$$

où $\oint$ représente l'intégration sur le bord du disque.

Par le théorème de la moyenne arithmétique, la première intégrale vaut $-u(0, \theta)$. La deuxième intégrale, en écrivant $\frac{1}{\alpha - z} = \frac{1}{\alpha [1 - \frac{z}{\alpha}]}$, est une application analytique en z (on peut intégrer terme à terme car une série entière est normalement convergente sur toute compact inclus dans son disque de convergence). Donc u , partie réelle d'une application analytique en z , est analytique en x et y .

Le théorème de la moyenne arithmétique permet aussi d'améliorer le théorème du minimum et du maximum :

Théorème 1.2.4. (Théorème du min et du max, forme forte)

Soit O une partie ouverte connexe bornée non vide de $\mathbb{R}^2$. Soit u une application harmonique sur O .

S'il existe $A \in O$ telque $u(A) = \sup_{\overline{O}} u$, alors u est constante.

Démonstration :

Soient un tel point A , et $\rho > 0$ telque $\overline{D}(A, \rho) \subset O$. Alors, par le théorème de la moyenne arithmétique, $u(A)$ est la moyenne des valeurs prises par u sur la frontière de $D(A, \rho)$. Mais u atteint son maximum en A , donc les valeurs prises par u sur la frontière du disque sont inférieures ou égales à $u(A)$.

Ainsi, u est nécessairement constante sur la frontière du disque. En répétant cette démonstration pour tout $r < \rho$, on obtient que u est constante sur $D(A, \rho)$ et sur sa frontière.

Donc : u est constante sur $\overline{D}(A, \rho)$. Soit maintenant $B \in \overline{D}(A, \rho)$. Il existe $\rho' > 0$ tel que $\overline{D}(B, \rho') \subset O$. Par ce qui précède, $u(B) = u(A)$, et la même idée montre que u est constante sur $\overline{D}(B, \rho')$. Soit alors $C \in O$. O étant connexe, il existe un chemin $\gamma \subset O$ continu joignant A à C (car dans $\mathbb{R}^N$, connexe $\iff$ connexe par arcs).

Le lemme de topologie suivant va permettre de conclure :

Lemme 1.2.5.

Pour tout ouvert borné $O \subset \mathbb{R}^N$ et tout chemin $\gamma \subset O$ continu, on a

$$d(\gamma, Fr(O)) = \inf_{x \in \gamma, y \in Fr(O)} d(x, y) > 0$$

Démonstration du lemme :

Par propriété de la borne inférieure, soient deux suites (x_n) et (y_n) de points de γ et $Fr(O)$ respectivement, telles que

$$d(x_n, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} d(\gamma, Fr(O))$$

γ est fermé (c'est un chemin) et borné, donc est un compact de $\mathbb{R}^N$, donc on peut extraire une suite (x_{n_k}) de (x_n) qui converge vers $x \in \gamma$.

De même, $Fr(O)$ étant un fermé borné, c'est un compact de $\mathbb{R}^N$, donc on peut extraire une suite (y_{n_k}) de (y_n) qui converge vers $y \in Fr(O)$. Alors on a $d(\gamma, Fr(O)) = d(x, y)$.

Or par définition $x \in \gamma \subset O$, donc il existe $\rho_0 > 0$ tel que $D(x, \rho_0) \subset O$.

Et ainsi $d(\gamma, Fr(O)) = d(x, y) > \rho_0 > 0$. On revient à la démonstration du théorème : On construit alors une suite finie de disques $D_1, \dots, D_n$ tels que le centre de D_1 soit A , le centre de D_n soit C , le centre de D_k pour $2 \leq k \leq n-1$ soit l'intersection de γ avec D_{k-1} , et tels que $\gamma \subset \bigcup_{k=1}^n D_k$; ceci est possible précisément car la distance de γ à la frontière de O strictement positive disons ρ_0 , et ainsi chaque disque peut être pris de rayon ρ_0 , et "couvre" une longueur de chemin au moins égale à ρ_0 . Puisque γ a une longueur L finie, cette construction nécessite au maximum $E(L/\rho_0) + 1$ disques.

Un raisonnement identique à celui fait précédemment montre que u est constante sur chaque D_k , et en particulier $u(C) = u(A)$. Donc u est constante sur O .

Nous allons maintenant citer deux théorèmes sur la convergence de fonctions harmoniques, dus à Harnack.

Théorème 1.2.6. (Premier théorème de Harnack)

Soit (u_n) une suite de fonctions harmoniques sur O et continues sur $\overline{O}$.

Si la suite (u_n) converge uniformément sur $Fr(O)$, alors elle converge uniformément sur $\overline{O}$ vers une fonction u harmonique sur O .

Démonstration :

Par le lemme 1.1.3, on sait que (u_n) converge uniformément sur $\overline{O}$. Notons donc $u = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$, et montrons que u est harmonique sur O . Soit $A \in O$, et $R > 0$ tel que $\overline{D}(A, R) \subset O$. Comme on l'a déjà fait plusieurs fois, on déplace l'origine du repère en A , et on représente les (u_n) sous la forme d'une intégrale de poisson :

$$\forall r < R \quad u_n(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_n(\psi) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR \cos(\theta - \psi) + r^2} d\psi$$

où les (f_n) sont les fonctions donnant les valeurs des (u_n) sur la frontière du disque. Puisque la suite (f_n) converge uniformément sur $[0, 2\pi]$ (c'est la traduction du fait que la suite (u_n) converge uniformément sur $Fr(O)$), et que la suite (u_n) converge en tout point de $\overline{D}(A, R)$ vers u , on peut passer à la limite dans l'égalité précédente et intervertir limite et intégrale :

$$\forall r < R \quad u(r, \theta) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\psi) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR \cos(\theta - \psi) + r^2} d\psi$$

ce qui donne enfin :

$$\forall r < R \quad u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR \cos(\theta - \psi) + r^2} d\psi$$

où f désigne la limite uniforme des f_n , qui est continue. l'application u est donc harmonique en tout point de O .

Théorème 1.2.7. (Deuxième théorème de Harnack)

Soit (u_n) une suite de fonctions positives, harmoniques sur O .

S'il existe $A \in O$ tel que (u_n) converge en A , alors (u_n) converge uniformément sur tout compact de O vers une fonction harmonique sur O .

1.3 Existence d'une solution au problème de Dirichlet

L'aide de la preuve ci-dessous a été donnée par Poincaré. Nous avons d'abord besoin de quelques définitions :

Soit v une application continue sur un ouvert connexe borné non vide $O \subset \mathbb{R}^2$. On notera D un disque ouvert inclus dans O , et $(v)_D$ une application continue égale à v sur $O \setminus D$ et harmonique sur D .

On a clairement :

$$v \text{ harmonique sur } O \Leftrightarrow (v)_D \equiv v \quad \forall D \subset O.$$

Remarquons enfin que $(v)_D$ existe est unique, puisqu'on a montré l'existence d'une solution au problème de Dirichlet pour un disque, et l'unicité de la solution au problème de Dirichlet dans le cas général (nous utiliserons cette unicité plusieurs fois).

Cette nouvelle notion nous permet de définir quelques concepts utiles :

Définition 1.3.1. (Applications sub et superharmoniques)

1. v est dite superharmonique sur O si pour tout disque ouvert $D \subset O$, $(v)_D \leq v$;
2. v est dite subharmonique sur O si pour tout disque ouvert $D \subset O$, $(v)_D \geq v$;
3. Si f est une fonction continue sur $Fr(O)$, et si $v \geq f$ (respectivement $v \leq f$) sur $Fr(O)$, alors v est dite fonction supérieure (respectivement inférieure) pour f .

Montrons quelques propriétés de ce type de fonctions, qui seront nécessaires pour la démonstration. Dans toute la suite O désignera un ouvert connexe borné non vide.

Proposition 1.3.2. (Sur les fonctions sub et superharmoniques)

1. Toute application harmonique est superharmonique et subharmonique.
2. Si v est superharmonique et u est harmonique, alors $v + u$ et $v - u$ sont superharmoniques.
3. La somme d'un nombre fini d'applications superharmoniques est superharmonique.
4. Si v est superharmonique et w est subharmonique, alors $v - w$ est superharmonique.

Démonstration :

1. Ce point est clair puisque : v harmonique sur $O \Leftrightarrow (v)_D \equiv v \quad \forall D$.

2. Soit D un disque ouvert. Si v_1 et v_2 sont deux applications continues sur O , on a par unicité de la solution au problème de Dirichlet $(v_1 + v_2)_D = (v_1)_D + (v_2)_D$ et de même $(-v_1)_D = -(v_1)_D$.

Donc, si v est superharmonique et u est harmonique, on a $(v + u)_D = (v)_D + (u)_D \leq v + u$ et $(v - u)_D = (v)_D - (u)_D \leq v - u$. Ce qui montre que $v + u$ et $v - u$ sont superharmoniques.

3. C'est une conséquence du fait que :

$$(v_1 + v_2 + \dots + v_N)_D = (v_1)_D + (v_2)_D + \dots + (v_N)_D$$

(toujours par unicité de la solution au problème de Dirichlet) : Si, $v_1 \dots v_N$ sont N applications superharmoniques, on peut écrire :

$$(v_1 + v_2 + \dots + v_N)_D = (v_1)_D + (v_2)_D + \dots + (v_N)_D \leq v_1 + v_2 \dots + v_N.$$

Ce qui montre la superharmonicité de $(v_1 + v_2 + \dots + v_N)_D$.

4. Si w est subharmonique, alors $(w)_D \geq w \Rightarrow (-w)_D \leq -w$: $-w$ est superharmonique. Et on sait que la somme de deux applications superharmoniques est superharmonique, ce qui montre le résultat annoncé.

Proposition 1.3.3.

Toute application v , superharmonique sur O , atteint son minimum (sur $\overline{O}$) en un point de $Fr(O)$.

Démonstration :

Soit v une application superharmonique. Remarquons que v atteint son minimum m sur $\overline{O}$ car c'est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$, donc un compact de $\mathbb{R}^2$.

Soit $P \in \overline{O}$ tel que $v(P)$ soit minimal.

1. Si $P \in Fr(O)$, il n'y a rien à montrer.
2. Si $P \in O$, montrons que, pour tout disque ouvert $D \subset O$ de centre P , on a :

$$v(M) = m \quad \forall M \in Fr(D).$$

Supposons que centre affirmation soit fausse, donc qu'il existe un disque ouvert $D \subset O$ de centre P et un point $N \in Fr(D)$ tel que $v(N) = \alpha > m$. Alors, puisque v est superharmonique, on a : $(v)_D(P) \leq v(P) = m$ et $\forall M \in Fr(D) (v)_D(M) = v(M) \geq m$. Donc $(v)_D$, qui est harmonique, atteint son minimum (sur $\overline{D}$) en un point de D : $(v)_D$ est donc constante sur $\overline{D}$. Pourtant $(v)_D(N) = v(N) = \alpha > m$. On a une contradiction : l'hypothèse de départ était donc absurde.

Notons à présent

$$r = d(P, Fr(D)) = \inf_{M \in Fr(D)} d(P, M)$$

et D_0 le disque ouvert de centre P et de rayon r . Alors $Fr(D_0) \cap Fr(O) \neq \emptyset$, donc il existe $Q \in Fr(D_0) \cap Fr(O)$. et on a $v(Q) = m$, donc v atteint son minimum en $Q \in Fr(O)$.

D'où le théorème dans tous les cas.

Proposition 1.3.4.

Si f est une fonction continue sur $Fr(O)$, et $v_1, v_2, \dots, v_N$ sont N fonctions supérieures pour f , alors $v = \min \{v_1, v_2, \dots, v_N\}$ est aussi une fonction supérieure pour f .

Démonstration :

v est continue sur $\overline{O}$ et on a $v \geq f$ car $v_i \geq f$ pour $i = 1, \dots, N$. Il reste à montrer que v est superharmonique.

Soit donc $D \subset O$ un disque ouvert. Soit $P \in D$, il existe i , $1 \leq i \leq N$ tel que $v(P) = v_i(P)$, et on a $v(P) = v_i(P) \geq (v_i)_D(P)$ car les v_i sont, en particulier, superharmoniques. Le lemme suivant va permettre de conclure :

Lemme 1.3.5.

Soient deux applications f et g continues sur O telles que $f \leq g$. Alors tout disque ouvert $D \subset O$, on a $(f)_D \leq (g)_D$.

Démonstration du lemme :

Par hypothèse $f - g$ est négative sur O , donc la fonction harmonique $(f - g)_D$, qui est égale à $f - g$ sur $O \setminus D$ et donc en particulier sur $Fr(D)$, a, par le principe du maximum, un

maximum négatif sur D . Donc sur D , $(f - g)_D \leq 0$. Par unicité de la solution au problème de Dirichlet, on a $(f)_D - (g)_D \leq 0$ sur D : $(f)_D \leq (g)_D$ sur D .

Puisque sur $O \setminus D$, $(f - g)_D = f - g \leq 0$, on a $(f)_D \leq (g)_D$. On revient à la démonstration du théorème : Puisque $v_i \geq v$, on a $v(P) = v_i(P) \geq (v_i)_D(P) \geq (v)_D(P)$. Donc $(v)_D \leq v$ pour tout disque ouvert $D \subset O$.

Finalement v est superharmonique sur O : C'est une fonction supérieure pour f .

Proposition 1.3.6.

Si f est une fonction continue sur $Fr(O)$, et si v est une fonction supérieure pour f , alors pour tout disque ouvert $D \subset O$, $(v)_D$ est aussi une fonction supérieure pour f .

Démonstration :

Soit $D \subset O$ un disque ouvert. Puisque $(v)_D$ coïncide avec v sur $O \setminus D$, il est clair que $(v)_D = v \geq f$ sur $Fr(O)$. Il reste à prouver que pour tout disque ouvert $D_1 \subset O$, $((v)_D)_{D_1} \leq (v)_D$, et il suffit de prouver cette inégalité (I) sur D_1 .

1. Si $D_1 \subset D$, c'est clair car $(v)_D$, harmonique sur D , est superharmonique sur $D_1 \subset D$.
2. Si $D_1 \subset O \setminus D$, on a, pour $P \in D_1$, $((v)_D)_{D_1}(P) = (v)_{D_1}(P)$ (car $(v)_D = v$ sur $O \setminus D$), et par superharmonicité, on a $(v)_{D_1}(P) \leq v(P) = (v)_D(P)$, d'où $((v)_D)_{D_1}(P) \leq (v)_D(P)$.
3. Sinon, sur $Fr(D_1)$, on a $(v)_D \leq v$ car v est superharmonique. Donc sur D_1 , on a $((v)_D)_{D_1}(p) \leq (v)_{D_1} \leq v$, la dernière inégalité résultant du fait que v est superharmonique. Puisque $(v)_D$ et v coïncident sur $O \setminus D$, on a l'inégalité (I) sur $O \setminus D$. (I) est ainsi vraie sur $Fr(D)$ et $Fr(D_1)$: (I) est vraie sur $Fr(D) \cap Fr(D_1)$. on a le résultat suivant :

Lemme 1.3.7.

Soit (X, τ) un espace topologique, et A, B deux parties de X . Alors on a :

$$Fr(A \cap B) \subset Fr(A) \cap Fr(B).$$

Chapitre 2

Distribution des valeurs propres du laplacien

Dans cette partie, nous allons nous intéresser à l'équation

$$\Delta u + \lambda u = 0$$

sur un ouvert connexe borné O ayant une frontière de classe C^1 (on dira, pour abréger, que O est un ouvert C^1) pour certains types de conditions aux limites. On montrera en particulier que cette équation n'admet de solution non triviale que pour un ensemble dénombrable de valeurs de λ ; en notant (λ_n) la suite de ces valeurs ordonnées dans l'ordre croissant, on calculera un équivalent de λ_n . Pour des informations supplémentaires, se référer à [2] et [3].

2.1 Motivation :

On étudie dans ce paragraphe des fonctions dépendant des deux coordonnées spatiales x, y et du temps t . Dans ce contexte, le laplacien d'une fonction u est toujours

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy}.$$

Considérons l'équation

$$\Delta u = u_{tt} \tag{E}$$

à résoudre sur un ouvert connexe borné O , avec, par exemple, la condition aux limites $u = 0$ sur $Fr(O)$.

On cherche une solution sous la forme $u(x, y, t) = v(x, y)g(t)$.

On obtient immédiatement, en remplaçant dans (E), l'équation :

$$g\Delta v = g''v \Leftrightarrow \underbrace{\frac{\Delta v}{v}}_{\text{indépendant de } t} = \underbrace{\frac{g''}{g}}_{\text{indépendant de } x,y} = -\lambda \in \mathbb{R}$$

d'où on déduit l'équation

$$\Delta v + \lambda v = 0 \quad (E_\lambda)$$

Il s'agit donc de déterminer le paramètre λ de sorte qu'il existe une fonction v de classe C^2 sur O qui ne soit pas identiquement nulle, qui vérifie l'équation (E_λ) et qui soit nulle sur $Fr(O)$. Si λ_0 est une telle valeur, et si u_0 est une solution de l'équation (E_{λ_0}) , alors on dit que λ_0 est une valeur propre et u_0 est une fonction propre pour l'équation (E_λ) . C'est pourquoi ce problème est appelé problème aux valeurs propres.

Dans notre étude, nous nous placerons, pour simplifier, dans le cas d'un rectangle $[0, a] \times [0, b]$ pour l'étude asymptotique, le cas d'un rectangle quelconque s'en déduisant par translation. Rappelons d'abord quelques éléments d'analyse dont nous nous servirons pour résoudre ce problème.

2.2 Eléments théoriques :

2.2.1 Formule de Gauss-Ostrogradski, formule de Green

On rappelle ici la formule de Gauss-Ortogradski :

Théorème 2.2.1. (Formule de Gauss-Ostrogradski)

Soit $\vec{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un champ de vecteurs de classe C^1 sur un ouvert U . Si la frontière Γ est une courbe continue de classe C^1 par morceaux, on a :

$$\iint \operatorname{div}(\vec{f}) dx dy = \int_{\Gamma} \vec{f} \cdot \vec{n} ds$$

Soit un domaine G ayant une frontière Γ représentable par une fonction continue et de classe C^1 par morceaux. Soit v une fonction continue et de classe C^1 par morceaux sur $\overline{G}$, et u une fonction de classe C^1 et de classe C^2 par morceaux sur $\overline{G}$. On a :

$$\iint_G p(u_x v_x + u_y v_y) + quv + v[(pu_x)_x + (pu_y)_y - qu] dx dy = \iint_G (pvu_x)_x + (pvu_y)_y dx dy$$

Et donc, par la formule de Gauss-Ostrogradski, en notant

$$Q[u, v] = p(u_x v_x + u_y v_y) + quv \text{ et } L[u] = (pu_x)_x + (pu_y)_y - qu :$$

$$\iint_G Q[u, v] + vL[u] dx dy = \int_{\Gamma} pv[u_x n_1 + u_y n_2] ds$$

si $\vec{n}$ a pour composantes (n_1, n_2) . Et, pour vecteur $\vec{m} = (m_1, m_2)$, on a

$$\frac{\partial u}{\partial m} = u_x m_1 + u_y m_2,$$

d'où la formule de Green :

$$\iint_G Q[u, v] dx dy = \iint_G -vL[u] dx dy + \int_{\Gamma} pv \frac{\partial u}{\partial n} ds$$

Dans le cas $p = 1, q = 0$, ceci donne :

$$\iint_G (u_x v_x + u_y v_y) dx dy = - \iint_G v \Delta u dx dy + \int_{\Gamma} v \frac{\partial u}{\partial n} ds$$

2.2.2 Rappels sur les séries de fourier

On rappelle ici quelques résultats sur les séries de Fourier :

Théorème 2.2.2. (Théorème de Dirichlet)

Soit $T > 0$ et f une application continue par morceaux T -périodique. Si f est de classe C^1 par morceaux, alors f est somme de sa série de Fourier en tout point.

Corollaire 2.2.3.

Soit $a > 0$ et $f : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^1 par morceaux. Si f vérifie une des deux conditions

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \int_0^a f(t) \sin\left(\frac{n\pi t}{a}\right) dt = 0$$

ou

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_0^a f(t) \cos\left(\frac{n\pi t}{a}\right) dt = 0$$

alors f est identiquement nulle sur $[0, a]$.

Idée de la démonstration. Si f vérifie la première condition, on construit l'unique application g qui soit $2a$ -périodique, impaire, et qui coïncide avec f sur $[0, a]$. Alors g vérifie les hypothèses du théorème de Dirichlet, donc est somme de sa série de Fourier, qui est nulle, car tous ses coefficients sont nuls, puisque f vérifie la première condition. Si f vérifie la deuxième condition, on construit l'unique application h qui soit $2a$ -périodique, paire, et qui coïncide avec f sur $[0, a]$, et on fait le même raisonnement.

2.3 Premiers résultats

Dans les sections 1.3 et 1.4, O désignera un ouvert connexe borné C^1 de frontière Γ . Considérons le problème aux valeurs propres de l'équation

$$\Delta v + \lambda v = 0 \tag{2, 1}$$

sur O , avec la condition aux limites $u = 0$ ou la condition $\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = 0$ où σ est une fonction continue sur Γ , toujours positive sauf mention contraire. Dans toute la suite, on notera

$$D[\varphi] = D[\varphi] + \int_{\Gamma} \sigma \varphi^2 ds,$$

où

$$D[\varphi] = \iint_O (\varphi_x^2 + \varphi_y^2) dx dy.$$

et

$$H[\varphi] = \iint_O \varphi^2 dx dy.$$

Ces trois expressions sont des fonctionnelles quadratiques, de fonctionnelles polaires associées

$$D[\varphi, \psi] = D[\varphi] + \int_{\Gamma} \sigma \varphi \psi ds,$$

où

$$D[\varphi, \psi] = \iint_O (\varphi_x \psi_x + \varphi_y \psi_y) dx dy.$$

et

$$H[\varphi, \psi] = \iint_O \varphi \psi dx dy$$

Si on a $H[\varphi, \psi] = 0$, on dira que φ et ψ sont orthogonales.

Les fonctions φ et ψ sont supposées continues sur $\overline{O}$ et de classe C^1 par morceaux sur O au sens suivant :

Définition 2.3.1.

Une fonction f est dite continue par morceaux sur un ouvert O , si O peut être partitionné en un nombre fini d'ouverts $O_1, \dots, O_K$ tels que les O_i aient des frontières continues de classe C^1 par morceaux, et si f est continue sur tout fermé inclus dans un des O_i .

Nous allons trouver les valeurs propres en considérant le problème comme un problème de minimisation. Si la condition aux limites est $u = 0$, on impose que φ et ψ soient nulles sur Γ . Les conditions pré-citées sont appelées conditions d'admissibilité.

On a le théorème suivant :

Théorème 2.3.2.

La fonction admissible φ qui minimise $D[\varphi]$ sous la condition $H[\varphi] = 1$ est une fonction propre u_1 de l'équation (2. 1) et satisfait la condition aux limites $\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = 0$.

La valeur propre correspondante est $\lambda_1 = D[u_1]$.

Si la condition $H[\varphi, u_1] = 0$ est rajoutée à la condition $H[\varphi] = 1$, la solution du problème est également une fonction propre u_2 de l'équation (2. 1) qui satisfait la même condition aux limites. La valeur propre associée est $\lambda_2 = D[u_2]$. Les problèmes de minimisation successifs $D[\varphi] = \inf D[\psi]$ sous les conditions $H[\varphi] = 1$ et $H[\varphi, u_i] = 0, i = 1, \dots, k-1$ définissent les fonctions propres u_k de l'équation (2. 1) qui satisfont à la condition $\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = 0$. Les valeurs propres associées sont les $\lambda_k = D[u_k]$.

Remarques :

1. Si la condition aux limites est $u = 0$, il ne faut pas oublier de rajouter dans les conditions des problèmes de minimisation la condition $\varphi = 0$ sur Γ .

2. On omet généralement la condition de normalisation $H[\varphi] = 1$, et on cherche à minimiser le quotient $D[\varphi]/H[\varphi]$. La fonction propre obtenue est alors, à un facteur constant près, la fonction recherchée dans le théorème.

Démonstration du théorème :

Le fait que notre problème de minimisation possède des solutions est un résultat d'analyse fonctionnelle, que nous admettons ici. Il nous faut montrer que les solutions de ce problème sont des fonctions propres de notre équation, et que les valeurs propres obtenues sont toutes les valeurs propres. Ce dernier point sera montré plus tard, une fois que nous aurons établi d'autres résultats.

Commençons donc par la solution du premier problème : Cette fonction u_1 minimise $D[\varphi]$ sous l'hypothèse $H[\varphi] = 1$. Notons $\lambda_1 = D[u_1]$. Si ψ est une fonction admissible pour le problème et si α est une constante réelle, on a par définition de u_1 et λ_1 :

$$\begin{aligned} \frac{[u_1 + \alpha\psi]}{H[u_1 + \alpha\psi]} &\geq \lambda_1 \Leftrightarrow [u_1 + \alpha\psi] \geq \lambda_1 H[u_1 + \alpha\psi] \\ &\Leftrightarrow 2\alpha([u_1, \psi] - \lambda_1 H[u_1, \psi]) + \alpha^2([\psi] - \lambda_1 H[\psi]) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 2\alpha([u_1, \psi] - \lambda_1 H[u_1, \psi] + \frac{\alpha}{2}([\psi] - \lambda_1 H[\psi])) \geq 0 \end{aligned}$$

On s'est servi ici du fait que $\frac{[u_1]}{H[u_1]} = \lambda_1$.

On obtient :

$$\forall \alpha > 0, [u_1, \psi] - \lambda_1 H[u_1, \psi] + \frac{\alpha}{2}([\psi] - \lambda_1 H[\psi]) \geq 0$$

et

$$\forall \alpha < 0, [u_1, \psi] - \lambda_1 H[u_1, \psi] + \frac{\alpha}{2}([\psi] - \lambda_1 H[\psi]) \leq 0$$

donc, en faisant tendre α vers, on a

$$D[u_1, \psi] - \lambda_1 H[u_1, \psi] \geq 0 \text{ et } [u_1, \psi] - \lambda_1 H[u_1, \psi] \leq 0.$$

Finalement, on a $D[u_1, \psi] = \lambda_1 H[u_1, \psi] \quad \forall \psi$.

On utilise la formule de Green pour transformer l'expression de $D[u_1, \psi]$:

$$\begin{aligned}
D[u_1, \psi] &= \int_O \int ((u_1)_x \psi_x + (u_1)_y \psi_y) dx dy + \int_{\Gamma} \sigma u_1 \psi ds \\
&= \int_O \int -\psi \Delta u_1 dx dy + \int_{\Gamma} \psi \frac{\partial u_1}{\partial n} ds + \int_{\Gamma} \sigma u_1 \psi ds
\end{aligned}$$

et, puisque $D[u_1, \psi] = \lambda_1 H[u_1, \psi] = \lambda_1 \int_O u_1 \psi dx dy$, on a

$$\forall \psi, \int_O \int \psi [\lambda_1 u_1 + \Delta u_1] dx dy - \int_{\Gamma} \psi \left[\frac{\partial u_1}{\partial n} + \sigma u_1 \right] ds = 0 \quad (2, 2)$$

On en déduit facilement, en prenant alternativement des fonction ψ continues à support compact nulles soit sur O soit sur $Fr(O)$, qu'on a

$$\begin{cases} \Delta u_1 + \lambda_1 u_1 = 0 & \text{sur } O \\ \frac{\partial u_1}{\partial n} + \sigma u_1 = 0 & \text{sur } Fr(O) \end{cases}$$

Considérons à présent la solution du deuxième problème de minimisation :

Cette fonction u_2 minimise $D[\varphi]$ sous les hypothèses $H[\varphi] = 1$ et $H[\varphi, u_1] = 0$. Notons $\lambda_2 = D[u_2]$. Si on refait la démonstration précédente, on obtient l'équation suivante

$$D[u_2, \psi] = \lambda_2 H[u_2, \psi] \quad (2, 3)$$

mais seulement sous la condition $H[\psi, u_1] = 0$ (en effet la somme $u_2 + \alpha\psi$ est aussi orthogonale à u_1 sous cette hypothèse). Il nous faut donc adapter la démonstration : Si g est une fonction continue de classe C^2 par morceaux sur O , alors la fonction $w = g - H[u_1, g] u_1$ est orthogonale à u_1 . De plus, puisqu'on a $D[u_1, \psi] = \lambda_1 H[u_1, \psi] \forall \psi$, en substituant u_2 à ψ et en tenant compte de l'orthogonalité de u_1 et u_2 , on a $D[u_1, u_2] = 0$.

En substituant finalement w , qui est orthogonale à u_1 , à ψ dans l'équation (2. 3), on a :

$$\forall g \quad D[u_2, g] - \lambda_2 H[u_2, g] + H[u_1, g] [H[u_1, u_2] - \lambda_2 H[u_1, u_2]] = 0,$$

et donc

$$\forall g \quad D[u_2, g] = \lambda_2 H[u_2, g] \quad (2, 4)$$

On termine la démonstration comme avant, ce qui donne :

$$\begin{cases} \Delta u_2 + \lambda_2 u_2 = 0 & \text{sur } O \\ \frac{\partial u_2}{\partial n} + \sigma u_2 = 0 & \text{sur } Fr(O) \end{cases}$$

On montre par récurrence que les fonctions u_i vérifient le système

$$\begin{cases} \Delta u_i + \lambda_i u_i = 0 & \text{sur } O \\ \frac{\partial u_i}{\partial n} + \sigma u_i = 0 & \text{sur } Fr(O) \end{cases}$$

(on adapte la démonstration précédente en retranchant à une fonction quelconque g sa projection sur le sous-espace $Vect(u_1, \dots, u_{i-1})$, et la nouvelle fonction obtenue vérifie les conditions d'orthogonalité voulues...)

On a de plus les relations $D[u_i, u_k] = \lambda_i \delta_{ik}$, $H[u_i, u_k] = \delta_{ik}$, et les inégalités successives $\lambda_{i-1} \leq \lambda_i$, puisqu'à chaque étape la classe de fonctions admissibles dans le problème de minimisation est un sous-ensemble de la précédente.

Ce théorème comporte pourtant un défaut : Pour définir la n -ième valeur propre, on doit faire référence aux précédentes. On va donc y apporter une amélioration : Dans un des problème de minimisation, on conserve la condition $H[\varphi] = 1$ et on remplace les conditions d'orthogonalité par les conditions

$$H[\varphi, v_i] = 0 \quad i = 1, \dots, n-1$$

où $v_1, \dots, v_{n-1}$ sont $n-1$ fonction continues par morceaux sur O . Sous ces conditions, les fonctionnelles $D[\varphi]$ admettent une borne inférieure, qui dépend des v_k , et qui sera notée $d(v_1, \dots, v_{n-1})$.

théorème 2.3.3.

Soit $CM(O)$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur O . La n -ième valeur propre λ_n pour la condition aux limites $\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = 0$ est telle que :

$$\lambda_n = \sup_{CM(O)} d(v_1, \dots, v_{n-1})$$

et cette borne supérieure est atteinte pour $v_i = u_i$, $i = 1, \dots, n-1$. Si la condition aux limites est $u = 0$, cette condition est rajoutée aux conditions d'admissibilité des fonctions φ .

Démonstration :

On sait déjà que $\lambda_n = d(u_1, \dots, u_{n-1})$ par le théorème précédent.

Soient maintenant $v_1, \dots, v_{n-1} \in CM(O)$, montrons que $d(v_1, \dots, v_{n-1}) \leq \lambda_n$. Pour cela, il suffit de trouver une fonction φ , orthogonale aux v_i , telle que $D[\varphi] \leq \lambda_n$.

2.4 Propriétés des valeurs propres

La propriété du maximum-minimum des valeurs propres est très importante en physique. En effet, toute contrainte supplémentaire sur un système vibrant peut être exprimée mathématiquement, et se traduit ainsi comme un renforcement des conditions d'admissibilité des fonctions φ : la valeur du maximum-minimum et donc des fréquences propres, augmente. Inversement, si on retire une contrainte, on enlève une condition d'admissibilité, ce qui diminue la valeur des fréquences possibles. D'où la proposition suivante :

Proposition 2.4.1.

Si un système vibrant est soumis à des contraintes supplémentaires, la fréquence du mode fondamental et des harmoniques augmente. Inversement, si des contraintes sont retirées, la fréquence du mode fondamental et des harmoniques diminue.

Théorème 2.4.2.

Supposons que $O_1, \dots, O_k$ soient k ouverts connexes bornés C^1 deux à deux disjoints et inclus dans O . Soit $k \in \mathbb{R}$, notons $A_i(k)$ (respectivement $A(k)$) le nombre de valeurs propres inférieures à k de l'équation $\Delta u + \lambda u = 0$, avec la condition aux limites $u = 0$ sur $Fr(O_i)$ (respectivement $Fr(O)$). Alors on a l'inégalité

$$\sum_{i=1}^k A_i(k) \leq A(k).$$

Corollaire 2.4.3.

Pour la condition aux limites $u = 0$, la n -ième valeur propre de O est toujours inférieure à la n -ième valeur propre de toute partie ouverte de O .

Théorème 2.4.4.

Supposons que $O = \cup_{i=1}^k O_i$, où les $O_1, \dots, O_k$ sont des ouverts connexes bornés C^1 qui sont disjoints. Soit $k \in \mathbb{R}$, notons $B_i(k)$ (respectivement $B(k)$) le nombre de valeurs propres inférieures à k de l'équation $\Delta u + \lambda u = 0$, avec la condition aux limites $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ sur $Fr(O_i)$ (respectivement $Fr(O)$). Alors on a l'inégalité

$$B(k) \leq \sum_{i=1}^k B_i(k).$$

Théorème 2.4.5.

Soit λ_n la n -ième valeur propre de l'équation $\Delta u + \lambda u = 0$ pour O avec la condition aux limites $u = 0$, et soit μ_n la n -ième valeur propre pour la condition aux limites $\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = 0$ sur une partie $\Gamma_1 \subset \Gamma$ de la frontière, et $u = 0$ sur $\Gamma \setminus \Gamma_1$. Alors $\mu_n \leq \lambda_n$.

Théorème 2.4.6.

Si, dans la condition aux limites $\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = 0$, on remplace la fonction σ par une fonction $\sigma_1 \geq \sigma$ (respectivement $\sigma_1 \leq \sigma$), alors la n -ième valeur propre augmente (respectivement diminue).

Démonstration :

On a $D[\varphi] = D[\varphi] + \int_{\Gamma} \sigma \varphi^2 ds$. Donc, à φ fixée, si σ est remplacée par $\sigma_1 \geq \sigma$ (respectivement $\sigma_1 \leq \sigma$), alors $D[\varphi]$ augmente (respectivement diminue). Donc $d(v_1, \dots, v_{n-1})$ augmente (respectivement diminue) aussi, pour toutes $v_1, \dots, v_{n-1} \in CM(O)$, puis, en prenant le sup, $\sup_{CM(O)} d(v_1, \dots, v_{n-1})$ augmente (respectivement diminue). Autrement dit, les valeurs propres augmentent (respectivement diminuent). Ainsi, si on augmente σ progressivement de $\sigma \equiv 0$ jusqu'à $\sigma \equiv \infty$, chaque valeur propre μ_n augmente jusqu'à atteindre la valeur propre λ_n , car lorsque $\sigma \equiv 0$, on a la condition aux limites $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$, et lorsque $\sigma \equiv \infty$, on a la condition aux limites $u = 0$.

Autrement dit, la condition aux limites $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ est la moins restrictive, tandis que la condition aux limites $u = 0$ est la plus restrictive.

Théorème 2.4.7.

Pour toute condition aux limites, si (λ_n) est la suite des valeurs propres du problème, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = +\infty$.

Démonstration :

Ce résultat est une conséquence de l'étude asymptotique 2.5.

Ceci nous permet de montrer que l'ensemble des fonctions propres obtenues en résolvant les problèmes de minimisation successifs constitue l'ensemble de toutes les fonctions propres. Auparavant, montrons un théorème plus général :

Théorème 2.4.8.

Le système de fonctions propres associé aux minimisations successives du quotient $D[\varphi]/H[\varphi]$ est complet, au sens où, pour toute fonction f admissible au problème, et tout $\varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ n réels tels que, si $w_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i$ (où $u_1, \dots, u_n$ sont les n premières fonctions propres), on ait $H[f - w_n] < \varepsilon$. La meilleure approximation est obtenue pour $\alpha_i = H[f, u_i]$, et on a $H[f] = \sum_{i=1}^{+\infty} (H[f, u_i])^2$.

Corollaire 2.4.9.

Toutes les valeurs propres de l'équation sont obtenues au cours de la résolution des problèmes de minimisation successifs du théorème 2.3.2, et le système de fonctions propres obtenu lors de ce processus engendre l'ensemble des fonctions propres.

Démonstration :

Remarquons d'abord que, si u_i et u_k sont deux fonctions propres associées respectivement à deux valeurs propres distinctes μ_i et μ_k on a

$$\begin{aligned}
(\mu_i - \mu_k) \int_O u_i u_k dx dy &= \int_O \mu_i u_i u_k dx dy - \int_O \mu_k u_k u_i dx dy \\
&= \int_O (u_i \Delta u_k - u_k \Delta u_i) dx dy \\
&= \int_\Gamma \left[u_i \frac{\partial u_k}{\partial n} - u_k \frac{\partial u_i}{\partial n} \right] ds \\
&\quad - \int_O \left[(u_i)_x (u_k)_x + (u_i)_y (u_k)_y \right] dx dy \\
&\quad + \int_O \left[(u_i)_x (u_k)_x + (u_i)_y (u_k)_y \right] dx dy \\
&= \int_\Gamma \left[u_i \frac{\partial u_k}{\partial n} - u_k \frac{\partial u_i}{\partial n} \right] ds
\end{aligned}$$

On a utilisé la formule de Green pour l'avant-dernière égalité. La dernière intégrale est clairement nulle si la condition aux limites $u = 0$; si celle-ci est $\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = 0$, on a

$$\int_\Gamma \left[u_i \frac{\partial u_k}{\partial n} - u_k \frac{\partial u_i}{\partial n} \right] ds = \int_\Gamma [-\sigma u_i u_k + \sigma u_i u_k] ds = 0.$$

D'où, puisque $(\lambda_i - \lambda_k) \neq 0$, $H[u_i, u_k] = \int_O u_i u_k dx dy = 0$.

Supposons alors qu'il existe une valeur propre μ qui ne soit pas obtenue lors du processus de minimisation : $\mu \neq \lambda_n \forall n \in \mathbb{N}^*$. Notons v la fonction propre associée; par hypothèse v n'est pas identiquement nulle. On a, par le théorème précédent, et en se servant de la remarque ci-dessus :

$$H[v] = \sum_{i=1}^{+\infty} (H[v, u_i])^2 = \sum_{i=1}^{+\infty} 0 = 0.$$

Puisque $H[v] = \int_O v^2 dx dy = 0$ et que v est continue, on a $v \equiv 0$, d'où la contradiction recherchée.

S'il existe une fonction propre w dont la valeur propre associée est un élément de la suite des λ_n , disons λ_i , notons $v_1, \dots, v_k$ les fonctions propres associées à λ_i , obtenues au cours des

minimisations successives, et notons $g = w - \sum_{j=1}^k H[w, v_j] v_j$. g est également une fonction propre associée à λ_i , donc elle est orthogonale à toutes les fonctions propres associées à des valeurs propres différentes de λ_i . De plus,

$$\forall j, 1 \leq j \leq k, \quad H[g, v_j] = H[w, v_j] - H[w, v_j] = 0$$

donc g est orthogonale à toutes les fonctions propres (u_n) . Comme précédemment,

$$H[g] = \sum_{i=1}^{+\infty} (H[g, u_i])^2 = \sum_{i=1}^{+\infty} 0 = 0.$$

Donc, g , qui est continue, est nulle : $g \in Vect(v_1, \dots, v_k)$. Ainsi, le système de fonctions propres obtenu au cours des minimisations engendre l'ensemble des fonctions propres.

Ce corollaire achève la démonstration du théorème 2.3.2.

2.5 Etude asymptotique

Le but de cette section est de trouver un équivalent simple de la n -ième valeur propre de l'équation $\Delta u + \lambda u = 0$, pour toute condition aux limites.

2.5.1 Cas de rectangle :

Soit un rectangle $R = [0, a] \times [0, b]$, avec a, b deux réels.

On va résoudre l'équation $\Delta u + \lambda u = 0$ avec, dans un premier temps, la condition aux limites $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ sur $Fr(R)$, et ensuite avec la condition aux limites $u = 0$ sur $Fr(R)$.

Premier cas :

Montrons que les fonctions

$$u_{m,n}(x, y) = \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \quad m, n = 0, 1, 2, \dots$$

sont les fonctions propres de notre équation.

Clairement

$$(u_{m,n})_{xx} = -\frac{\pi^2 n^2}{a^2} u_{m,n} \text{ et } (u_{m,n})_{yy} = -\frac{\pi^2 m^2}{b^2} u_{m,n},$$

donc :

$$\Delta u_{m,n} + \pi^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right) u_{m,n} = 0.$$

On remarque ensuite que la dérivée normale de $u_{m,n}$ est nulle sur la frontière, c'est à dire sur $\{M = (x, y) \in \mathbb{R}^2, M \in R \text{ et } (x = 0 \text{ ou } x = a) \text{ ou } (y = 0 \text{ ou } y = b)\}$. En effet, sur les côtés verticaux du rectangle, la dérivée normale est égale (au signe près) à la dérivée par rapport à x , ce qui fait apparaître un sinus qui est nul sur les côtés verticaux. Sur les côtés horizontaux du rectangle, la dérivée normale est égale (toujours au signe près) à la dérivée par rapport à y , ce qui fait aussi apparaître un sinus, nul sur les côtés horizontaux. Donc les $u_{m,n}$ sont des fonctions propres de notre équation, pour les valeurs propres

$$\lambda_{m,n} = \pi^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right), \quad m, n = 0, 1, 2, \dots$$

Il reste à montrer que ce sont toutes les fonctions propres. Auparavant, montrons un lemme :

Lemme 2.5.1.

Soit f une application de classe C^1 sur le rectangle $R = [0, a] \times [0, b]$. Si f vérifie une des deux conditions

$$\Delta m, n \in \mathbb{N}^* \quad \iint_R f(x, y) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) dx dy = 0$$

ou

$$\Delta m, n \in \mathbb{N} \quad \iint_R f(x, y) \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) dx dy = 0$$

alors f est nulle sur R .

Démonstration du lemme :

La démonstration étant identique dans les deux cas, supposons que f vérifie la première condition. On a alors

$$\Delta m, n \in \mathbb{N}^* \quad \int_0^b \left(\int_0^a f(x, y) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx \right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) dy = 0,$$

soit, en notant $f_n(y) = \int_0^a f(x, y) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx$,

$$\Delta m, n \in \mathbb{N}^* \quad \int_0^b f_n(y) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) dy = 0.$$

Cette égalité implique que pour tout n , la fonction f_n est nulle sur $[0, b]$, soit

$$\Delta m, n \in \mathbb{N}^* \quad \forall y \in [0, b], \quad \int_0^a f(x, y) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx = 0$$

et ainsi, $f(x, y) = 0$ sur R .

Nous pouvons maintenant montrer que les $u_{m, n}$ sont toutes les fonctions propres de notre problème. Soit f une fonction propre de l'équation avec les mêmes conditions aux limites que précédemment, notons μ la valeur propre associée.

- Si μ est distincte de toutes les $\lambda_{m, n}$, on sait que f est orthogonale à toutes les $u_{m, n}$. Par le lemme 2.4.1, f est nulle, d'où une contradiction.

- S'il existe un couple d'entiers (i, j) tel que $\mu = \lambda_{i, j}$, notons $w_1, \dots, w_k$ les éléments de la famille des $u_{m, n}$, de valeur propre associée $\lambda_{i, j}$. Dans l'esprit de la preuve du 2.4.9, on définit

$$w = f - \sum_{l=1}^k H[f, w_l] \frac{w_l}{H[w_l, w_l]}.$$

w est orthogonale à toutes les $u_{m, n}$, donc est nulle, par le lemme 2.5.1. Ainsi, $f \in \text{Vect}(w_1, \dots, w_k)$.

On a ainsi montré que les $u_{m, n}$ sont les seules fonctions propres de l'équation considérée pour la condition aux limites $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$.

Deuxième cas :

Montrons que les fonctions

$$v_{m, n}(x, y) = \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \quad m, n = 0, 1, 2, \dots$$

sont les fonctions propres de notre équation. On a immédiatement

$$(v_{m, n})_{xx} = -\frac{\pi^2 n^2}{a^2} v_{m, n} \text{ et } (v_{m, n})_{yy} = -\frac{\pi^2 m^2}{b^2} v_{m, n}$$

d'où :

$$\Delta v_{m, n} + \pi^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right) v_{m, n} = 0$$

On constate aussi que $v_{m, n} = 0$ sur la frontière de R .

Donc les $v_{m, n}$ sont des fonctions propres de notre équation, pour les valeurs propres

$$\lambda_{m,n} = \pi^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right), \quad m, n = 0, 1, 2, \dots$$

La même idée que dans le premier cas montre que les $v_{m,n}$ sont les seules fonctions propres de notre équation.

Maintenant que nous avons trouvé toutes les valeurs propres dans ces deux cas, nous allons chercher une estimation de la n -ième valeur propre pour toute condition aux limites. Pour cela, on va trouver ces estimations dans les deux cas précédents, et on appliquera ensuite les théorèmes 2.4.3 et 2.4.4.

2.5.2 Estimation des valeurs propres pour le rectangle

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Notons $A(\lambda)$ (respectivement $B(\lambda)$) le nombre de valeurs propres inférieures à λ dans le problème avec condition aux limites $u = 0$ (respectivement $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$). Avec ces notations, on a

$$A(\lambda) = \text{card}\{m, n \in \mathbb{N}^*, \frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \leq \frac{\lambda}{\pi^2}\}$$

et

$$B(\lambda) = \text{card}\{m, n \in \mathbb{N}, \frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \leq \frac{\lambda}{\pi^2}\}.$$

On remarque que $B(\lambda)$ est exactement le nombre de points à coordonnées entières contenus dans le secteur

$$D\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, y \geq 0, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq \frac{\lambda}{\pi^2}\}$$

c'est-à-dire, le secteur délimité par le quart d'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{\lambda}{\pi^2}$ situé dans le quadrant supérieur droit. Dans la suite de ce calcul, on note ε ce quart d'ellipse. (Fig.2.1)

On associe à chaque point M de $\mathbb{N}^2$ le carré d'aire 1 dont il est le sommet inférieur gauche, que nous appellerons carré entier associé à M : (Fig.2.2)

On constate alors que les carrés entiers associés aux points à coordonnées entières de D forment un recouvrement de D . Notons S la réunion de ces carrés. L'aire de S est égale au nombre de points à coordonnées entières de D , soit $B(\lambda)$, multiplié par l'aire d'un tel carré, soit 1.

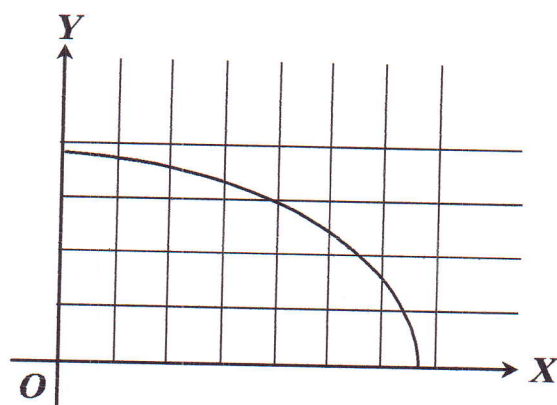
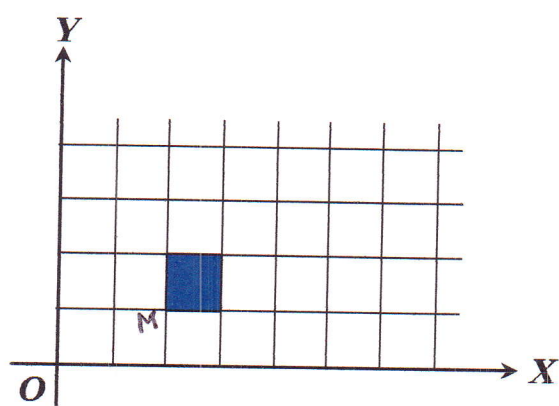
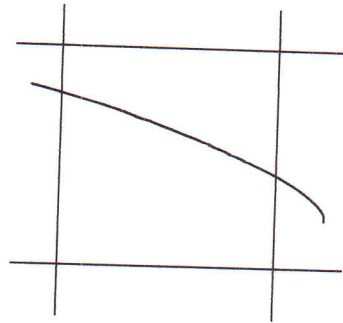


Fig. 2.1 – Les points et l'ellipse

Fig. 2.2 – Carré entier associé à $(2,1)$

Fig. 2.3 – Un élément de T

Ainsi l'aire de S est égale à $B(\lambda)$, et puisque $D \subset S$, on a une inégalité sur les aires, soit, en notant A_D l'aire de D :

$$A_D \leq B\lambda$$

On peut réécrire l'équation de l'ellipse comme $\frac{x^2}{\left(\frac{a\sqrt{\lambda}}{\pi}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{b\sqrt{\lambda}}{\pi}\right)^2} = 1$:

Le quart d'ellipse a donc pour aire $A_D = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{a\sqrt{\lambda}}{\pi} \cdot \frac{b\sqrt{\lambda}}{\pi} = \lambda \frac{ab}{4\pi}$.

Ainsi

$$\lambda \frac{ab}{4\pi} \leq B(\lambda)$$

Notons maintenant T l'ensemble des carrés entiers qui sont traversés par l'ellipse, c'est-à-dire qui ne soient pas entièrement contenus dans D , et $R(\lambda) = \text{card}(T)$. (Fig.2.3)

Alors $S \setminus T$ est inclus dans D , ce qui donne une autre inégalité sur les aires :

$$B(\lambda) - R(\lambda) \leq \lambda \frac{ab}{4\pi}$$

puisque l'aire de $S \setminus T$ est égale à $B(\lambda) - R(\lambda)$ multiplié par l'aire d'un carré entier, qui est

1. Finalement :

$$B(\lambda) - R(\lambda) \leq \lambda \frac{ab}{4\pi} \leq B(\lambda) \quad (2, 5)$$

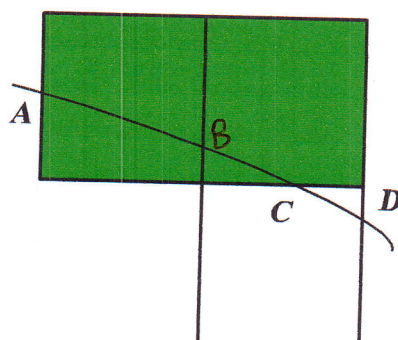
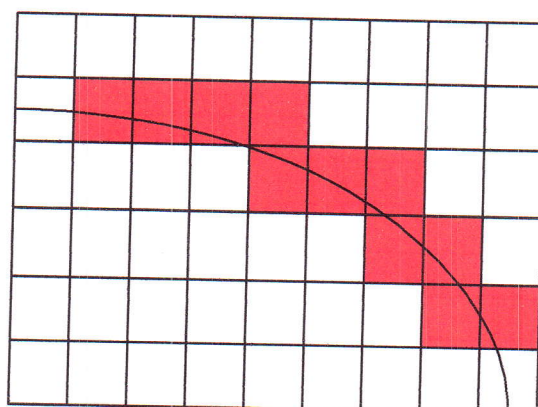


Fig. 2.4 – Méthode de majoration

Fig. 2.5 – Représentation de T'

Il reste à trouver un ordre de grandeur de $R(\lambda)$. Pour cela, remarquons que, pour λ assez grand, la longueur de l'arc d'ellipse contenu dans deux carrés adjacents qu'elle traverse est supérieure à 1. On se place dans ce cas. (Fig.2.4)

Sur cet exemple, l'aire du carré vert sera inférieure soit à la longueur $\widehat{AC}$, soit à la longueur $\widehat{BD}$.

l'aire de T est $R(\lambda)$, et l'idée précédente va permettre de majorer cette aire : écrivons que $R(\lambda) - 2$ est l'aire totale de T' , où T' est obtenu en retirant à T les deux carrés ayant un côté commun soit avec l'axe (Ox) , soit avec l'axe (Oy) . (Fig.2.5)

Sur ce dessin, l'aire de T' est égale à la somme des aires de tous les carrés colorés. $C_1, \dots, C_k$ ces carrés, C_0 le carré ayant un côté contenu dans l'axe (Oy) et C_{k+1} celui ayant un côté contenu dans l'axe (Ox) . Enfin, définissons les points $A_0, \dots, A_{k+2}$ par

$$\begin{aligned}
 A_0 &= \varepsilon \cap (Oy) \\
 A_{k+2} &= \varepsilon \cap (Ox) \\
 A_j &= \varepsilon \cap C_{j-1} \cap C_j, \quad j = 1, \dots, k+1.
 \end{aligned}$$

Remarque :

dans la suite le symbole $\widehat{}$ signifie l'arc.

Pour tout entier j compris entre 1 et k , on majore alors l'aire de C_j par la longueur $\widehat{A_{j-1}A_{j+1}}$.

D'où

$$R(\lambda) - 2 \leq \sum_{j=1}^k \widehat{A_{j-1}A_{j+1}}$$

Or

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^k \widehat{A_{j-1}A_{j+1}} &= \sum_{j=1}^k [\widehat{A_{j-1}A_j} + \widehat{A_jA_{j+1}}] \\
 &= \sum_{j=0}^{k-1} \widehat{A_jA_{j+1}} + \sum_{j=1}^k \widehat{A_jA_{j+1}} \\
 &\leq 2 \sum_{j=0}^{k+1} \widehat{A_jA_{j+1}}
 \end{aligned}$$

Notons $L = \sum_{j=0}^{k+1} \widehat{A_jA_{j+1}}$ la longueur du quart d'ellipse. En le paramétrant par

$$x(t) = \frac{a\sqrt{\lambda}}{\pi} \cos(t), \quad y(t) = \frac{b\sqrt{\lambda}}{\pi} \sin(t), \quad \text{pour } t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

on a :

$$\begin{aligned}
 L &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{a^2\lambda}{\pi^2} \sin^2(t) + \frac{b^2\lambda}{\pi^2} \cos^2(t)} dt \\
 &= \sqrt{\lambda} \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{a^2}{\pi^2} \sin^2(t) + \frac{b^2}{\pi^2} \cos^2(t)} dt}_{\text{indépendant de } \lambda, \text{ noté } I} \\
 &= I\sqrt{\lambda}.
 \end{aligned}$$

Finalement, on a

$$R(\lambda) - 2 \leq 2I\sqrt{\lambda}.$$

Signalons au passage qu'on peut obtenir l'inégalité plus fine $R(\lambda) - 2 \leq 2I\sqrt{\lambda}$ (en comptant d'une manière légèrement différente), dont nous n'avons pas besoin ici. En effet, notre inégalité montre que

$$\frac{R(\lambda)}{\lambda} \leq \frac{2I}{\sqrt{\lambda}} + \frac{2}{\lambda} \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0$$

donc, en se rapelant de la double inégalité (3.5), on a

$$\frac{B(\lambda)}{\lambda} - \frac{R(\lambda)}{\lambda} \leq \frac{ab}{4\pi} \leq \frac{B(\lambda)}{\lambda}$$

ce qu'on peut réécrire comme

$$\frac{ab}{4\pi} \leq \frac{B(\lambda)}{\lambda} \leq \frac{ab}{4\pi} + \frac{B(\lambda)}{\lambda}$$

et finalement

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{B(\lambda)}{\lambda} = \frac{ab}{4\pi}$$

On a, plus précisément, une relation du type

$$B(\lambda) = \lambda \frac{ab}{4\pi} + O(\sqrt{\lambda})$$

Une telle relation est aussi valable pour $A(\lambda)$. En effet, $A(\lambda)$ ne diffère de $B(\lambda)$ que par le nombre de points éléments de D à coordonnées entières et situés sur les axes, ce qu'on peut également interpréter comme la somme des parties entières des longueurs respectives du demi-grand axe et du demi-petit axe de l'ellipse. On a donc

$$B(\lambda) - A(\lambda) \leq \frac{a\sqrt{\lambda}}{\pi} + \frac{b\sqrt{\lambda}}{\pi} = \alpha\sqrt{\lambda}$$

où α est indépendante de λ . Ainsi :

$$B(\lambda) = A(\lambda) + K\sqrt{\lambda} \Rightarrow A(\lambda) = \lambda \frac{ab}{4\pi} + O(\sqrt{\lambda})$$

Pour obtenir un équivalent de la n -ième valeur propre λ_n (quand les valeurs propres sont ordonnées par ordre croissant), par exemple dans le problème avec la condition aux limites $u = 0$, on écrit $A(\lambda_n) = n$, ce qui donne

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lambda_n}{n} = \frac{4\pi}{ab}$$

Cette relation est aussi valable pour l'autre problème considéré.

On peut maintenant étendre ce résultat à un autre type de domaine.

Définition 2.5.2.

On dit qu'un ouvert connexe $O \subset \mathbb{R}^2$ est un ouvert-carré si O peut s'écrire comme la réunion d'un nombre fini de carrés de même aire. Soient O un ouvert-carré, et $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Notons $A(\lambda)$ le nombre de valeurs propres inférieures à λ pour la condition aux limites $u = 0$ sur $Fr(O)$ et $B(\lambda)$ le nombre correspondant pour la condition aux limites $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ sur $Fr(O)$.

Puisque O est un ouvert-carré, notons $C_1, \dots, C_k$ k carrés de côté a dont la réunion est égale à O , et $A_{R_1}(\lambda), \dots, A_{R_k}(\lambda), B_{R_1}(\lambda), \dots, B_{R_k}(\lambda)$ les nombres correspondants à $A(\lambda)$ et $B(\lambda)$ pour les conditions aux limites $u = 0$ sur $Fr(R_j)$ et $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ sur $Fr(R_j)$. Par ce qui précède, on a

$$\forall j = 1, \dots, k, \quad \begin{cases} A_{R_j}(\lambda) = \lambda \frac{a^2}{\pi^2} + O(\sqrt{\lambda}) \\ B_{R_j}(\lambda) = \lambda \frac{a^2}{\pi^2} + O(\sqrt{\lambda}) \end{cases}$$

Par les théorèmes 2.4.2, 2.4.4 et 2.4.5, on a les inégalités suivantes :

$$\sum_{j=0}^k A_{R_j}(\lambda) \leq A(\lambda) \leq B(\lambda) \leq \sum_{j=0}^k B_{R_j}(\lambda)$$

Or on a

$$\sum_{j=1}^k A_{R_j}(\lambda) = \lambda \frac{ka^2}{4\pi} + O(\sqrt{\lambda})$$

et

$$\sum_{j=1}^k B_{R_j}(\lambda) = \lambda \frac{ka^2}{4\pi} + O(\sqrt{\lambda})$$

Et donc, on peut écrire

$$\lambda \frac{ka^2}{4\pi} + \theta(\lambda) \sqrt{\lambda} \leq A(\lambda) \leq B(\lambda) \leq \lambda \frac{ka^2}{4\pi} + \eta(\lambda) \sqrt{\lambda}$$

où θ et η sont des fonctions bornées.

En remarquant finalement que ka^2 est l'aire A de O , on a des relations du type

$$A(\lambda) = \lambda \frac{\mathcal{A}}{4\pi} + O(\sqrt{\lambda})$$

et

$$B(\lambda) = \lambda \frac{\mathcal{A}}{4\pi} + O(\sqrt{\lambda})$$

On peut estimer la n -ième valeur propre λ_n en écrivant $A(\lambda_n) = n$, et on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lambda_n}{n} = \frac{4\pi}{\mathcal{A}}$$

les théorèmes 2.4.5 et 2.4.6 montrent par double encadrement que ce type d'estimation est valable pour toute condition aux limites considérée. On le théorème suivant :

Théorème 2.5.3. (Estimation des valeurs propres pour un domaine-carré)

Soit O un ouvert-carré d'aire A . Pour la condition aux limites $u = 0$ ou $\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = 0$, où σ est une fonction continue positive sur $Fr(O)$, le nombre $A(\mu)$ de valeurs propres de l'équation $\Delta u + \lambda u = 0$ inférieures à une certaine borne positive μ est équivalent à $\mu \frac{\mathcal{A}}{4\pi}$. Plus précisément :

$$\exists \mu_0 \in \mathbb{R}_+, \exists C \in \mathbb{R}_+, \mu \geq \mu_0 \Rightarrow \left| \frac{4\pi A(\mu)}{\mathcal{A}\mu} - 1 \right| < \frac{C}{\sqrt{\mu}}$$

2.5.3 Estimation du terme d'erreur

Pour obtenir cette estimation, il faut affiner l'approximation de l'ouvert O par les carrés. On commence par partitionner le plan avec des carrés de côté 1 : On note k_0 (éventuellement nul) le nombre de tels carrés contenus dans O , et $C_1^0, \dots, C_{k_0}^0$ ces carrés. On divise maintenant chaque carré de la partition en 4 carrés de côté $1/2$, et on note k_1 le nombre de tels carrés contenus dans O qui ne sont pas contenus dans un des C_i^0 ; on désigne par $C_1^1, \dots, C_{k_1}^1$ ces carrés. Par récurrence, après m itérations de ce procédé, on a k_m carrés $C_1^m, \dots, C_{k_m}^m$, de côté $1/2^m$, qui sont contenus dans O mais dans aucun autre des carrés précédents.

On construit $E_1, \dots, E_r$ les r domaines adjacents à la frontière; le nombre a est égale à $1/2^m$. On a les inégalités

$$\frac{k_i}{2^i} \leq P, \quad i = 0, \dots, m-1, \quad \frac{r}{2^m} \leq P \quad (2, 6)$$

où, comme avant, P désigne le périmètre de O .

On note $A_i^j(\lambda)$ (respectivement $A_{E_i}(\lambda)$) le nombre de valeurs propres inférieures à λ pour le domaine Q_i^j (respectivement E_i) avec la condition aux limites $u = 0$, et $B_i^j(\lambda)$ (respectivement $B_{E_i}(\lambda)$) le nombre de valeurs propres inférieures à λ pour le domaine Q_i^j (respectivement E_i) avec la condition aux limites $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$. On a :

$$\sum_{j=0}^m \sum_{i=1}^{k_j} A_i^j(\lambda) \leq A(\lambda) \leq \sum_{j=0}^m \sum_{i=1}^{k_j} B_i^j(\lambda) + \sum_{i=1}^r B_{E_i}(\lambda)$$

On sait

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^m \sum_{i=1}^{k_j} B_i^j(\lambda) + \sum_{i=1}^r B_{E_i}(\lambda) &\leq \sum_{j=0}^m \left[\lambda \frac{k_j}{4\pi 2^{2j}} + k \frac{k_j}{2^j} \sqrt{\lambda} \right] \\ &\quad + \frac{c_1}{2^{2m}} r \lambda + \frac{c_2}{2^m} r \sqrt{\lambda} \\ &= \lambda \left[\left(\sum_{j=0}^m \frac{k_j}{4\pi 2^{2j}} \right) + \frac{c_1}{2^{2m}} r \right] \\ &\quad + \sqrt{\lambda} \left[\left(\sum_{j=0}^m K \frac{k_j}{2^j} \right) + \frac{c_2}{2^m} r \right] \\ &\leq \lambda \left[\left(\sum_{j=0}^m \frac{k_j}{4\pi 2^{2j}} \right) + \frac{c_1}{2^{2m}} r \right] \\ &\quad + K_1 \sqrt{\lambda} \left[\left(\sum_{j=0}^m \frac{k_j}{2^j} \right) + \frac{r}{2^m} \right] \end{aligned}$$

où K , c_1 , c_2 sont des constantes indépendantes de m et λ , et $K_1 = \max(K, c_2)$. Or, par les inégalités(2.6), on a

$$\left(\sum_{j=0}^m \frac{k_j}{2^j} \right) + \frac{r}{2^m} \leq P(m+2).$$

Et la différence $A - \left(\sum_{j=0}^m \frac{k_j}{4\pi 2^{2j}} \right)$ est d'ordre $1/2^{2m}$ (c'est l'aire de la réunion $\cup_{i=1}^r E_i$, majorée par $36/2^{2m}$), donc on peut écrire

$$\left[\left(\sum_{j=0}^m \frac{k_j}{4\pi 2^{2j}} \right) + \frac{c_1}{2^{2m}} r \right] \leq A + c_3 \frac{r}{2^{2m}} \leq A + \frac{Pc_3}{2^m}.$$

où c_3 est une constante indépendante de m et λ .

Le membre de droite de l'inégalité est donc majoré par

$$\frac{1}{4\pi} \left(A + \frac{Pc_3}{2^m} \right) \lambda + P(m+2) \sqrt{\lambda} = \lambda \frac{A}{4\pi} + P \left(\lambda \frac{c_3}{2^m} + K_1(m+2) \sqrt{\lambda} \right)$$

Pour $m \geq 2$, on a $2m \geq m+2$; en notant $C = P \max(c_3, 2K_1)$,
on a finalement

$$A(\lambda) \leq \lambda \frac{A}{4\pi} + C \left(\frac{\lambda}{2^m} + m \sqrt{\lambda} \right)$$

où C est une constante, indépendante de λ et de m (car C est construite en prenant successivement des maximums de constantes ne dépendant ni de λ ni de m).

Une étude de la fonction

$$x \mapsto \frac{\lambda}{2^x} + x \sqrt{\lambda}$$

montre qu'elle admet un minimum en $x_0 = \frac{\ln(\lambda)}{\ln(4)} + \frac{\ln(\ln(2))}{\ln(4)}$. Puisque $\ln(2) < 1$, $\ln(\ln(2))$ est négatif, donc $x_0 \leq \frac{\ln(\lambda)}{\ln(4)} = x_1$. On choisit maintenant $m = E(x_1)$, et on obtient

$$\begin{aligned} C \left(\frac{\lambda}{2^m} + m \sqrt{\lambda} \right) &\leq C \left(\frac{\lambda}{2^{\frac{\ln(\lambda)}{\ln(4)}}} + \frac{\ln(\lambda)}{\ln(4)} \sqrt{\lambda} \right) \\ &= C \left[\exp \left(\ln(\lambda) - \frac{\ln(2) \cdot \ln(\lambda)}{\ln(4)} \right) + \frac{\ln(\lambda)}{\ln(4)} \sqrt{\lambda} \right] \\ &= C \left[\exp \left(\ln(\lambda) - \frac{\ln(2)}{2} \right) + \frac{\ln(\lambda)}{\ln(4)} \sqrt{\lambda} \right] \\ &= C \left[\sqrt{\lambda} + \frac{\ln(\lambda)}{\ln(4)} \sqrt{\lambda} \right] \\ &\leq 2C \sqrt{\lambda} \ln(\lambda) \end{aligned}$$

pour λ suffisamment grand.

Finalement

$$A(\lambda) \leq \lambda \frac{\mathcal{A}}{4\pi} + 2C\sqrt{\lambda} \ln(\lambda) \quad (2, 7)$$

Puisque le membre de gauche de l'inégalité ne diffère du membre de droite que par le terme $\frac{c_1}{2^{2m}} r \lambda + \frac{c_2}{2^m} r \sqrt{\lambda}$, le membre de gauche a également la forme (2. 7)

Bibliographie

- [1] I. G. Petrovsky. Lectures on partial differential equations. Interscience Publishers, Londres, 1954
- [2] R. Courant and D. Hilbert. Methods of mathematical physics, Vol. 1. Interscience Publishers, Londres, 1953.
- [3] G. M. Fichtenholz. Differential and Integralrechnung, Vol. 3. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1987.