République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 – Guelma

Faculté de Mathématiques et de l'Informatique et Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire de Fin d'Etude
Master Académique en Mathématiques
Option : EDP

THEME

Equations du mouvement d'un fluide non-newtonien et applications

Présenté par :

Kaour Rima

Jury :

Dr : M.Z. Aissaou	président
Prof : H. Fujita Yashima	rapporteur
Mme : R. Mellal	examinateur

Session Juin 2012

Equations du mouvement d'un fluide non-newtonien et applications

Kaour Rima
Mémoire de master en mathématiques
Université de Guelma

4 juin 2012

❄ *Remerciment* ❄

Au nom d'Allah, le tout miséricordieux,

le très miséricordieux

La reconnaissance est la mémoire du cœur

≼ LE GRAND MERCI POUR ALLAH ≽

Je tiens à remercier sincèrement le prof. Hisao Fujita Yashima qui en tant que Directeur de mémoire, s'est toujours montré à l'écoute et très disponible tout au long de la réalisation de ce mémoire, ainsi pour l'inspiration, l'aide et le temps qu'il a bien voulu me consacrer et sans qui ce mémoire n'aurait jamais vu le jour.

Mes remerciements s'adressent également à Monsieur Dr. Aissaoui Med Zine : directeure du Laboratoire de Mathématiques appliquées et de modélisation, (LMAM), pour sa générosité et la grande patience dont il a su faire preuve malgré ses charges académiques et professionnelles.

J'adresse également mes remerciements, à l'ensemble du laboratoire (LMAM) ; leur accueil chaleureux et leur aide précieuse ont contribué fortement à l'aboutissement de ce travail.

☺Merci à tous et à toutes.

Dédicace

A MON DIEU QUI J'ADRESSE MON REMERCIEMENT PAR SA GRÂCE INFINIE POUR MOI.

A MES ADORABLES PARENTS

A MON CHER FRÈRE MOUSTAFA

A MES CHÈRES SŒURS SAKINA, AMEL ET SELMA

A TOUTES MES AMIES ASSIA, AMIRA, NAJET, ZAHIA, HAYETTE, MERYIEME , HODA,WAHIDA

JE DÉDIE CE TRAVIAL

RIMA

RIMA

Table des matières

0.1 Introduction

Dans la vie quotidienne, dans la nature et dans le domaine industuriel, les écoulement sont toujours présents. La circulation de l'oxygène dans notre organisme est un des exemples de l'importance de l'écoulement dans la vie humaine. Les tsunamis, les cyclones ou les coulées de lave sont aussi des exemples de l'écoulement mais qui conduisent quelque fois à des dégâts pour l'humainité.

Seul le critère physique serve à distinguer l'écoulement compressible de celui incompressible, ainsi que l'écoulement non visquex comme l'écoulement de l'eau (qui peut être décrit à partir de la seule connaissance de sa viscosité et sa densité. Comme c'est le cas pour beaucoup d'autres fluides qualifiés de newtoniens) et écoulement visqueux comme certains matériaux qui s'écoulent selon des lois plus compliquées et sont rassemblés sous la banière des fluides non newtoniens, tels que des miels, des huiles et les poudres comme les sels ou sables. Ces fluides sont trés répandus dans la nature, la vie courante ou l'industrie .

Ce travial est consacré à l'étude de l'écoulement d'un fluide dilatant incompressible, car ce type des fluides concerne un grand nombre de produits qui jouent un rôle important dans notre vie.

0.2 Résumé

On considère le système d'équations du mouvement d'un fluide dilatant incompressible dans un domaine de R^3, C'est un des cas de fluides non newtoniens. On applique en particulier l'approximation de Galarkin en faisant la comparaison avec celle pour les équations de Navier-stokes.

On donne également une remarque pour le problème d'unicité de la solution.

Chapitre 1

Notion préliminaire

1.1 Les fluides

Qu'est-ce qu'un fluide ?

Un fluide (liquide ou gaz), selon les physiciens est un corps simple composé d'atomes ou de molécules identiques. Du point de vue mécanique, la définition d'un matériau est liée à sa déformtion en fonction de contrainte :"un fluide c'est quelque chose qui coule" sous l'action d'une contrainte donnée et même si la déformation est grande, ceci ne provoque pas la perte de cohésion entre ses molécules.

Il ya 2 types du fluides : Les fluides parfaits, dont l'écoulement se font "sans frottements internes" et les fluides visqueux

Qu'est-ce qu'un fluide visqueux ?

La viscosité d'un fluide, qui est la propriété inverse de la fluidité, est la caractéristique de résistance au glissement ou à la déformation d'un fluide. Ces forces de résistances proviennent du fait que les couches des fluides en mouvement ne peuvent pas glisser indépendament et librement les unes sur les autre. Ce qui donne naissance à des forces des frottements qui s'opposent directement à l'écoulement. Cette viscosité, dite dynamique, s'exprime comme le quotient d'une masse par une vitesse et dépent de la température. Dans un liquide, elle est inversement propotionnelle à la température. (Au contraire, elle augmente avec la température dans le cas d'une phase gazeuse).

1.2 Notion de viscosité dans un fluide en mouvement

L'expérience montre que, lors d'un écoulement d'un fluide, les forces de préssion (forces normales) ne suffisent pas à expliquer les phénomènes et qu'il convient d'introduire des forces tangentielles qui s'opposent le mouvement du fluide. Ces forces de types frottements, dues aux interactions entre molécules du fluide, sont appelées *forces de viscosité.*

1.3 Les fluides newtoniens

Ces fluides sont les fluides qui ont la viscosité indépendante de la contraintre appliquée, ils se caractérisent par le fait que la vitesse de cisaillement $\dot{\gamma}$ est proportionnelle à la contrainte tangentielle $(\sigma = \eta\dot{\gamma})$

1.4 Les fluides non newtoniens

Le caractère non newtonien le plus répandu est la variation de la viscosité avec la vitesse de cisaillement. Ce type de comportement est de loin le plus fréquent. Il concerne les polymères à longue chaînes en solution ou à l'état fondu, les pâtes à papier, les colles et les ciments.

Nous distinguons :

1. ***Fluides rhéofluidifiants que l'on nomme également pseudo-plastiques***

   La viscosité de ces fluide diminue si la contraite augmente. Ces le cas du sang, des polymères liquides à longue chaîne, des jus de fruits, des colles et des ciments, des shampoing.

2. ***fluides à seuil ou plastiques ou fluides de Bingham :***

   Ces fluides ne s'écoulent que si la contrainte appliquée est supérieur à la valeur seuil. Exemple : Dentifrice.

3. ***Fluides thixotropes :***

   Les fluides thixotropes sont des fluides ayant une mémoire à courte et à grande échelle. Le comportement à un instant t d'un fluide thixotrope est fonction de contraintes subies dans un passé récent(mémoire à courte échelle). Lorsque la contrainte disparait, le fluide recouvre ses propriétés d'origine(mémoire à grande échelle). Exemple : ketchup, yaourt.

4. ***viscoélasticité linéaire :***

   Un autre comportement non newtonien trés important est le caratère viscoélastique, trés fréquent dans les solutions de polymères et dans les polymères fondus. C'est le comportement (liquide) et elastique (solide). La réponse du fluide à une déformation présete à la fois un aspect visqueux et élastique (contrainte proportionnelle à la déformation). Un exemple de fluide viscoélastique : Une boule de silly-putty apparaît comme une boule de caoutchouc

1.5 Comportement rhéoépaississant ou dilatant

On rencontre également le comportement rhéoépaississant : La viscosité augmente lorsqu'on augmente le taux de cisaillement.C'est le cas de certains amidons dans l'eau, le miel d'eucalyptus,............

Nous nous intéressons par le cas des fluides dilatants, et nous prenons comme un exemple :

Le miel d'eucalyptus :

Les miels d'eucalyptus sont dilatants : ils présentent une viscosité très élevée lorsqu'ils sont soumis à une agitation, ceci explique pourqoi ils peuvent arriver à bloquer l'extracteur en fonctionnement, alors qu'au repos il coule sans difficulté.

La viscosité du miel :

La viscosité du miel dépend de sa teneur en eau, de sa composition chimique et de sa température. La plupart des miels se comportent comme des liquides newtoniens mais certains d'entre eux ont, du fait de leur composition particulière, des proprietés particulières.

1.6 comportement non newtonien

Il est bien connu que beaucoup de fluide ne satisfont pas la loi newtonienne $\tau = 2\nu D[v]$
où

τ désigne la partie tangentielle du tenseur des contraintes
ν est la viscosité du fluide, et $(\nu > 0)$
$v = v(t, x) \in R^3$ est la vitesse
$(D[v])_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i})$ est le tenseur de taux de déformation.

Cepandant, il n'existe pas une loi constitutive générale satisfaite par tous les fluides. Lorsque la viscosité n'est plus indépendante du taux de cisaillement, il est nécessaire d'utiliser plusieurs paramètres pour décrire le comportement mécanique du fluide. Un certain nombre de modèles empiriques permettent cette description, citons par exemple les modèles d'Ericksen-Rivlin ou les modèles introduits par Ladyzhenskaya. Dans ces modèles, le tenseur de contraintes de cisaillement τ dépend de $D[v]$ d'une manière non linéaire. Il y a également des modèles étudié, où la viscosité dépend de $D[v]$ et de μ. Dans ces modèles τ est remplacé par

$$\tau - 2\mu(|D[v]|^2)D[v]$$

Où

$$\mu=\frac{\tau}{\dot{\gamma}}$$

tellque

τ est le contrainte de cisaillement, $\dot{\gamma}$ est le vitesse de cisaillement

Un modèle très fréquent est le modèle en loi de puissance d'Ostwald. Dans certaine gamme de taux de cisaillement, on peut représenter la viscosité comme une loi de puissance de $D[v]$ en particulier pour les polymères

$$\mu(|D[v]|^2) = \nu + \beta|D[v]|^{(q-2)}$$

Où $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ est la viscosité cinétique et $\nu \geq 0$, $\beta > 0$ et $q \geq 1$. Selon q, nous distinguons les cas suivant :

$1 \leq q < 2$, cas d'un fluide viscoplastique,

$q = 2$, cas d'un fluide newtonien classique,

$q > 2$, cas d'un fluide dilatant.

Bien que ce modèle permette de résoudre bon nombre de problèmes d'écoulement de fluides non newtoniens, il faux garder à l'ésprit qu'il décrit très mal le comportement à faible taux de cisaillement et que les paramètres β et p n'ont pas d'interprétation claire en termes de paramètres microscopiques tels que la masse moléculaire.

1.7 Équations du mouvement d'un fluide non-newtonien (cas dilatant)

Nous considérons l'équations d'écoulement d'un fluide dilatant incompressible

$$\partial_t v_i + (v \cdot \nabla) v_i = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}((\nu + \beta |D[v]|^{(q-2)})(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i})) - \partial_{x_i} p + f \quad (1.1)$$

$$\nu \geq 0, \qquad \beta > 0, \qquad q > 2$$

$$div(v) = 0. \quad (1.2)$$

où

$$(D[v])_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i})$$

$v = v(t, x) \in R^3$ est la vitesse, ν est la viscosité cinétique de fluide, p est le préssion, β est un costante strictement positif.

Dans le cas où $\beta = 0$, ν est strictement positif, l'équation (1.1) se réduit à l'équation de Navier Stokes. En effet

$$\partial_t v_i + (v \cdot \nabla) v_i = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}(\nu(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i})) - \partial_{x_i} p + f. \quad (1.3)$$

$$div(v) = 0. \quad (1.4)$$

De plus

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}(\nu(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i})) = \nu \Delta v$$

car

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}(\nu(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i})) = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 v_i}{\partial^2 x_j} + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{x_i}(\frac{\partial v_j}{\partial x_j})$$

Et comme $div(v) = 0$. Alors

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{x_i}(\frac{\partial v_j}{\partial x_j}) = 0$$

En effet

$$\partial_t v_i + (v \cdot \bigtriangledown) v_i = \nu \Delta v - \partial_{x_i} p + f \tag{1.5}$$

$$div(v) = 0. \tag{1.6}$$

Chapitre 2

Propriétés mathématiques des Equations de Navier-Stokes

2.1 Espaces fonctionnels utiles pour l'étude des équations d'écoulement d'un fluide dilatant incompressible

Considérons un domaine Ω de R^3 muni de sa frontière $\partial\Omega$ suffisament régulière. Désigons par $L^2(\Omega, R^3)$ l'espace de Hilbert des fonctions $u = (u_1, u_2, u_3)$ définies sur Ω à valeurs dans R^3 telles que ses trois composantes u_1, u_2, u_3 appartiennent à $L^2(\Omega) = L^2(\Omega, R^3)$ qui est un espace de Hilbert muni de produit scalaire

$$< u, v >=< u, v >_{L^2(\Omega,R^3)}= \int_\Omega \sum_{j=1}^{3} u_j(x)v_j(x)dx \qquad pour \qquad u, v \in L^2(\Omega, R^3)$$

Désignons par ϑ l'ensemble des fonctions définies sur Ω à valeur dans R^3 de classe C^∞ à divergence nulle et à support compact

$$\vartheta = \{u \in C^{\infty}(\Omega, R^3) \backslash \nabla \cdot v = 0, supp(u) \subset \Omega\} \tag{2.1}$$

On rappelle que, comme le support de u est par définition un enssemble fermé et que Ω est un enssemble ouvert par hypothèse, la condition $supp(u) \subset \Omega$ implique que u s'annule dans une région rapprochée de la frontière $\partial\Omega$.

Désignons par V^0 la fermeture de ϑ par rapport à la topologie de $L^2(\Omega, R^3)$, c'est-à-dire

$$V^0 = \overline{\vartheta}^{L^2(\Omega,R^3)} \tag{2.2}$$

On remarque que V^0 est un sous-espace fermé de $L^2(\Omega, R^3)$. En effet, si u et v appartiennent à V^0, il existe deux suites $\{u^k\}_{k=1}^{\infty}$ et $\{v^k\}_{k=1}^{\infty}$ telles que

$$u^k \cdot v^k \in \vartheta, \qquad \|u^k - u\|_{L^2(\Omega,R^3)}, \|v^k - v\|_{L^2(\Omega,R^3)} \to 0 \qquad pour \quad k \to \infty$$

Donc. quelques soient deux nombres réels α et λ, on a

$$\|\alpha u^k + \lambda v^k - (\alpha u + \lambda v)\|_{L^2(\Omega,R^3)}$$

$$\leq |\alpha|\|u^k - u\|_{L^2(\Omega,R^3)} + |\lambda|\|v^k - v\|_{L^2(\Omega,R^3)} \to 0 \qquad pour \quad k \to \infty$$

Ce qui signifie que $\alpha u + \lambda v \in V^0$. Comme V^0 est fermé par définition, il s'ensuit qu'il est un sous-espace fermé de $L^2(\Omega, R^3)$. □

Désignons par G le complémentaire orthogonal de V^0 dans l'espace de Hilbert $L^2(\Omega, R^3)$

$$G = (V^0)^{\perp} = \{u \in L^2(\Omega, R^3) \backslash < u, v >_{L^2(\Omega,R^3)} = 0, \forall v \in V^0\} \tag{2.3}$$

Comme on le connait bien de la théorie genérale des espaces de Hilbert, étant le complémentaire d'un enssemble, G est un sous-espace fermé de $L^2(\Omega, R^3)$ et on a

$$L^2(\Omega, R^3) = V^0 \oplus G \tag{2.4}$$

Alors $\forall u \in L^2(\Omega, R^3), \exists u^0 \in V^0$ et $\exists u^1 \in G$ tels que

$$u = u^0 + u^1$$

et les éléments $u^0 \in V^0$ et $u^1 \in G$ qui satisfont à cette égalité sont uniques. On a en outre

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega,R^3)} = \|u^0\|^2_{L^2(\Omega,R^3)} + \|u^1\|^2_{L^2(\Omega,R^3)}$$

On voit aisément que, si $\varphi \in H^1(\Omega, R^3)$. Alors on a

$$< \nabla\varphi, v >_{L^2(\Omega,R^3)} = 0 \qquad \forall v \in V^0 \tag{2.5}$$

En effet, si $v \in V^0$ $\exists\{v^k\}_{k=1}^{\infty}$, telle que $v^k \in \vartheta$ et $v^k \to v$ dans $L^2(\Omega, R^3)$. On a donc

$$< \nabla\varphi, v >_{L^2(\Omega,R^3)} = \lim_{k\to\infty} < \nabla\varphi, v^k >_{L^2(\Omega,R^3)} = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega \nabla\varphi \cdot v^k dx$$
$$= \lim_{k\to\infty} [\int_{\partial\Omega} \varphi v^k \cdot ndS - \int_\Omega \varphi\nabla \cdot v^k dx] = 0$$

où n désigne la normale extérieur à frontière $\partial\Omega$ tandis que dS est l'élément de surface sur $\partial\Omega$

La relation montrée dans (2.5) peut être exprimée par

$$\{u \in L^2(\Omega, R^3) \backslash \exists\varphi \in H^1(\Omega, R), u = \nabla\varphi\} \subset G$$

Mais en réalité dans cette relation on a aussi l'égalité, c'est-à-dire, on a le théorème suivant.

Théorème 2.1.1 *Le sous-espace G est formé par les fonctions $u = \nabla\varphi$ avec $\varphi \in H^1(\Omega, R)$.*

Démonstration.

Il est bon de rappeler que, même si les fonctions $u \in L^2(\Omega, R^3)$ n'ont ni ses dérivées $\frac{\partial u}{\partial x_j}$ ni sa trace $u|_{\partial\Omega}$ sur la frontière $\partial\Omega$, pour les fonctions $v \in V^0$ on a

$$\nabla \cdot v = 0 \quad \textit{dans} \quad \Omega \qquad v \cdot n = 0 \quad \textit{sur} \quad \partial\Omega$$

dans le sens faible de distribution, de (2.5) il résulte que, si $v \in V^0$ on a

$$\int_\Omega v \cdot \nabla\varphi dx = 0$$

$\forall\varphi \in H^1(\Omega, R)$. En faisant formellement l'integration par parties, on a

$$\int_\Omega \varphi\nabla \cdot v dx - \int_{\partial\Omega} \varphi(v \cdot n) dS = -\int_\Omega v \cdot \nabla\varphi dx = 0$$

$\forall\varphi \in H^1(\Omega, R)$. Donc, comme $\varphi \in H^1(\Omega, R)$ est arbitraire, on peut dire que

$$\nabla v = 0 \quad \textit{dans} \quad \Omega, \qquad v \cdot n = 0 \quad \textit{sur} \quad \partial\Omega$$

dans le sens de distribution. □

On désigne par V^1 la fermeture de ϑ par rapport à la norme $\|v\|_{H^1(\Omega,R^3)}$.

$$V^1 = \overline{\vartheta}^{H^1(\Omega,R^3)} \tag{2.6}$$

On introduit en outre le produit scalaire

$$< v, w >_{\widetilde{H}^1(\Omega)} = \int_\Omega \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \frac{\partial w_j}{\partial x_k} dx \tag{2.7}$$

et la norme

$$\|v\|_{\widetilde{H}^1(\Omega)} = \sqrt{(v, v)_{\widetilde{H}^1(\Omega)}} \tag{2.8}$$

Désignons par $\widetilde{V}^1$ la fermeture de l'enssemble ϑ par rapport à la norme $\|v\|_{\widetilde{H}^1(\Omega)}$ introduite ci-dessus, c'est-à-dire

$$\widetilde{V}^1 = \overline{\vartheta}^{\widetilde{H}^1(\Omega)} \tag{2.9}$$

$\widetilde{V}^1$ est un espace de Hilbert muni de produit scalaire et de la norme définis dans (2.7)-(2.8)

$$< v, w >_{\widetilde{V}^1} = < v, w >_{\widetilde{H}^1}, \qquad \|v\|_{\widetilde{V}^1} = \|v\|_{\widetilde{H}^1} \quad pour \quad v \in \widetilde{V}^1.$$

On remarque que, si Ω est borné, la norme $\|v\|_{\widetilde{H}^1(\Omega)}$ dans ϑ est équivalente à la norme de l'espace de Sobolev

$$\|v\|_{H^1(\Omega,R^3)} = (\int_\Omega \sum_{j=1}^{3} {v_j}^2 dx + \sum_{j,k=1}^{3} |\frac{\partial v_j}{\partial x_k}|^2 dx)^{1/2}$$

Donc dans le cas $\widetilde{V}^1$ coïncide avec la fermeture V^1 de ϑ par rapport à la norme $\|v\|_{H^1(\Omega,R^3)}$. Or, il est bon de préciser que, pour que la norme $\|v\|_{\widetilde{H}^1(\Omega)}$

soit équivalente à la norme de l'espace de Sobolev $\|v\|_{H^1(\Omega,R^3)}$ dans ϑ, il suffit que l'inégalité de Poincaré

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

soit valable et donc il suffit le domaine Ω soit borné dans une direction.

Dans le cas où le domaine n'est pas borné de sorte que cette inégalité ne soit pas vérifiée, l'espace $\widetilde{V}^1$ est plus grand que V^1, c'est-à-dire

$$V^1 \subset \widetilde{V}^1, \qquad V^1 \neq \widetilde{V}^1.$$

2.2 Equations de Stokes

Nous allons considérer les équations stationnaires linéarisées du système de Navier -Stokes

$$-\nu\Delta v + \nabla p = f \tag{2.10}$$

$$\nabla \cdot v = 0 \tag{2.11}$$

Le système d' équations (2.10)-(2.11) porte le nom d'équations de stokes. Pour que le système d'équations (2.10)-(2.11) soit bien posé, il doit être complété par la condition aux limites homogène

$$v = 0 \qquad sur \;\; \partial\Omega \tag{2.12}$$

dans lequel les équations (2.10)-(2.11) sont envisagées.

Nous supposons que Ω est un domaine borné de R^3 de frontières régulières.

L'hypothèse qu'il soit borné implique en particulier que l'injection de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte.

On remarque d'abord que, si $v \in \widetilde{V}^1$ alors les conditions (2.11) et (2.12) sont vérifiées. D'autre part, si $p \in H^1(\Omega, R)$, alors en vertu de (2.3), on a

$$P_{V^0} \nabla P = 0$$

où P_{V^0} désigne la projection orthogonale de $L^2(\Omega, R^3)$ sur V^0. Donc, en appliquant formellement la projection orthogonale P_{V^0} à l'équation (2.10) on obtient

$$-\nu P_{V^0} \triangle v = P_{V^0} f \tag{2.13}$$

Suggéré par ces relation, on va définir la solution généralisée du problème (2.10)-(2.12). Pour cela, on rappelle que le dual $(\widetilde{V}^1)'$ de l'espace $\widetilde{V}^1$ est formé des fonctionnelles linéaires continues $< f, >$ sur $\widetilde{V}^1$

Définition 2.1.1 *Soit $f \in (\widetilde{V}^1)'$. On dit que v est solution généralisée du problème (2.10)-(2.12) si $v \in \widetilde{V}^1$ et si*

$$\nu < v, \psi >_{\widetilde{H}^1(\Omega)} = < f, \psi > \qquad \forall \psi \in \widetilde{V}^1. \tag{2.14}$$

où $< f, >$ est une fonctionnelle linéaire définie sur $\widetilde{V}^1$ par la relation

$$< f, \psi > = \int_\Omega \sum_{j=1}^{3} f_j \psi_j dx \qquad \forall \psi \in \widetilde{V}^1.$$

où l'integrale est etendue dans le sens généralisé de sorte f puisse être une distrubition.

On remarque que, si v et p sont de classe $C^2(\Omega, R^3)$ et $C^1(\Omega, R)$ et si (v,p) vérifie les relation (2.10)-(2.12), c'est-à-dire, si (v,p) est une solution classique du problème (2.10)-(2.12) , alors v est une solution généralisée dans le sens de la définition introduite ci-dessus.

En effet, comme ϑ est dense dans l'enssemble $\{u \in C^2(\Omega, R^3)\backslash\nabla \cdot u = 0, u|_{\partial\Omega} = 0\}$ dans la topologie de $C^2(\Omega, R^3)$, il y a une suite $\{v^k\}_{k=1}^{\infty} \subset \vartheta$ telle que $v^k \to v$ dans $C^2(\Omega, R^3)$ et donc dans $\widetilde{V}^1, v$ appartient donc à $\widetilde{V}^1$. Par ailleurs, en multipliant le premier terme de (2.10) par une fonction ψ appartenant à $\widetilde{V}^1$ et on l'integrant sur Ω, par l'integration par parties on obtient

$$-\nu\int_\Omega (\triangle v)\cdot\psi dx = \nu\int_\Omega \sum_{j,k=1}^{3} \frac{\partial v_j}{\partial x_k}\frac{\partial \psi_j}{\partial x_k}dx = \nu < v, \psi >_{\widetilde{H}^1(\Omega)}$$

En outre, en multipliant ∇p par une fonction ψ appartenant à $\widetilde{V}^1(\Omega)$ (et donc appartanant à V^0) et on l'integrant sur Ω, on a en vertu de(2.5)

$$\int_\Omega \psi\cdot\nabla p dx = 0$$

Donc v satisfait à (2.14). Par conséquent v est une solution généralisée du (2.12).

D'autre part, si v est de classe $C^2(\Omega, R^3)$ et est solution généralisée du problème (2.10)-(2.12) avec $f \in C^0(\Omega, R^3) \subset L^2(\Omega, R^3)$, alors, outre les conditions (2.11)-(2.12) qui sont vérifiées par l'appartenance de v à $\widetilde{V}^1 \cap C^2(\Omega, R^3)$, on a

$$\nu < v, \psi >_{\widetilde{H}^1(\Omega)} = < f, \psi >_{L^2(\Omega,R^3)} \qquad \forall\psi \in \widetilde{V}^1$$

Or, par l'integration par parties on a

$$\nu < v, \psi >_{\widetilde{H}^1(\Omega)} = -\nu \int_\Omega \psi \cdot \triangle v dx$$

On a donc

$$\int_\Omega (-\nu \triangle v - f)\psi dx = 0 \qquad \forall \psi \in \widetilde{V}^1$$

comme ϑ est contenu dans $\widetilde{V}^1$ et ϑ est dense dans V^0, cette relation entraîne que

$$\nu \triangle v + f \in G$$

Donc, en vertu du théorème 2.1.1, il y a une fonction $p \in H^1(\Omega, R^3)$ telle que

$$\nu \triangle v + f = \nabla p.$$

et, grâce aux relations $v \in C^2(\Omega, R^3)$, $f \in C^0(\Omega, R^3)$ on a $\nabla p \in C^0(\Omega, R^3)$. On peut donc conclure que (v, p) est une solution classique du problème (2.10)-(2.12). $\square$

On va démontrer l'existence et l'unicité de la solution du système d'équations de Stokes (2.10)-(2.12).

Théorème 2.2.1. *Soit $f \in (\widetilde{V}^1)'$. Alors le problème (2.10)-(2.12) admet une solution généralisée $v \in \widetilde{V}^1$ et une seule et on a*

$$\|v\|_{\widetilde{H}^1(\Omega)} = \frac{1}{\nu}\|f\|_{(\widetilde{V}^1)'} \tag{2.15}$$

où $\|.\|_{(\widetilde{V}^1)'}$, désigne la norme de l'espace dual $(\widetilde{V}^1)'$.

Démonstration.

Comme $\frac{1}{\nu} < f, >$ est une fonctionnelle linéaire continue sur l'espace de Hilbert $\widetilde{V}^1$, d'aprés le théorème de représentation de Riesz $\exists ! v \in \widetilde{V}^1$ tel que

$$< v, \psi >_{\widetilde{H}^1(\Omega)} = \frac{1}{\nu} < f, \psi > \qquad \forall \psi \in \widetilde{V}^1(\Omega)$$

qui est précisément (2.14). Donc le problème (2.10)-(2.12) admet une solution généralisée $v \in \widetilde{V}^1$ et une seule.

En outre, la norme de v dans $\widetilde{V}^1 = \frac{1}{\nu}\|f\|_{(\widetilde{V}^1)'}$. $\square$

En rappellant (2.13) (est la définition de $\widetilde{V}^1$). On peut reformuler la solution du système d'équations de Stokes comme suit :
étant donné $f' \in V^0$, trouver $v \in \widetilde{V}^1$ tel que

$$-\nu P_{V^0} \triangle v = f' \tag{2.16}$$

Or, comme $V^0 \subset (\widetilde{V}^1)'$, d'après le théorème 2.1.1 il existe une solution $v \in \widetilde{V}^1$ et une seule de l'équation (2.16). Autrement dit le théorème 2.2.1 définit l'opérateur inverse $(-P_{V^0}\triangle)^{-1}$ de $-P_{V^0}\triangle$ de sorte que

$$v = (-P_{V^0}\triangle)^{-1}(\frac{1}{\nu}f') \tag{2.17}$$

L'opérateur $-P_{V^0}\triangle$ et son inverse $(-P_{V^0}\triangle)^{-1}$ joueront, comme on le verra, un rôle important dans l'étude des équations d'un fluide dilatant incompressible. Commençons par le théorème suivant :

Théorème 2.2.2 *L'opérateur $-P_{V^0}\triangle$ est un opérateur auto-adjoit dans l'espace de Hilbert V^0 ayant son domaine $D(-P_{V^0}\triangle)$ dense dans V^0 et il existe l'opérateur inverse $(-P_{V^0}\triangle)^{-1}$, qui est un opérateur auto-adjoit et compact. Les valeurs propres λ_k de l'opérateur $-P_{V^0}\triangle$ et celles $\mu_k = \frac{1}{\lambda_k}$ de $(-P_{V^0}\triangle)^{-1}$ sont tous positives et, en les ordonnant par l'ordre de leur grandeur, on a*

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ...... \leq \lambda_k \qquad \lambda_k \to \infty \quad pour \quad k \to \infty$$

$$\mu_1 \geq \mu_2 \geq ...... \geq \mu_k \geq ....., \mu_k > 0 \qquad \mu_k \to 0 \quad pour \quad k \to \infty$$

Les vecteurs propres e_k (avec $\|e_k\|_{V^0} = 1$ correspondantes à λ_k (et donc à $\mu_k = \frac{1}{\lambda_K}$), $k = 1, 2......$ forment une base orthonormale de l'espace de Hilbert V^0.)

Démonstration.

Comme pour $v \in \vartheta$ on a $\triangle v \in C_0^\infty(\Omega, R^3) \subset L^2(\Omega, R^3)$, on a $-P_{V^0}\triangle v \in V^0$. Donc on a $\vartheta \subset D(-P_{V^0}\triangle)$. Or, par la définition de V^0, ϑ est dense dans V^0. Par conséquent $D(-P_{V^0}\triangle)$ lui aussi est dense dans V^0.
Considérons deux éléments $u, w \in D(-P_{V^0}\triangle)$. Alors on a

$$< -P_{V^0}\triangle u, w >= \int_\Omega (-\triangle u) \cdot w dx = \int_\Omega \sum_{j,k=1}^{3} \frac{\partial u_j}{\partial x_k}\frac{\partial w_j}{\partial x_k}.$$

$$= \int_{\Omega} u \cdot (-\triangle w) dx = < u, -P_{V^0} \triangle w >_{V^0}$$

dans la première et la dernière égalité nous avons utilisé les propriétés de la projection orthogonale P_{V^0} et de l'appartenance de u, w à $D(-P_{V^0}\triangle) \subset V^0$. C'est-à-dire $-P_{V^0}\triangle$ est un opérateur symétrique. En outre du théorème 2.2.1 on déduit que

$$-P_{V^0}\triangle(D(-P_{V^0}\triangle)) = V^0.$$

Il s'ensuit que l'opérateur $-P_{V^0}\triangle$ est un opérateur auto-adjoit.

D'autre part, en vertu du théorème 2.1.1 il existe l'opérateur inverse $(-P_{V^0}\triangle)^{-1}$ définit sur V^0 a valeurs dans $D(-P_{V^0}\triangle) \subset \widetilde{V}^1 \subset V^0$. Comme Ω est borné par l'hypothèse, l'injection $H^1(\Omega, R^3)$ dans $L^2(\Omega, R^3)$ est compacte et donc l'est aussi l'injection de $\widetilde{V}^1$ dans V^0, ce qui, joint à (2.15)- et à l'inégalité $\|u\|_{V^0} \leq C\|u\|_{\widetilde{V}^1}$, implique que $(-P_{V^0}\triangle)^{-1}$ est un opérateur compact. Il est claire que l'opérateur $(-P_{V^0}\triangle)^{-1}$ n'a pas de valeur propre égale à 0 (c'est-à-dire il n'est pas possible que $-P_{V^0}\triangle 0 = f \neq 0$). Donc, en rappelant qu'il est un opérateur auto-adjoint, on en déduit que son spectre est fermé par les valeurs propres isolées μ_k avec multiplicité finie.

Si μ_k est une valeur propre de $(-P_{V^0}\triangle)^{-1}$ et si e_k est un vecteur propre correspondant à μ_k, on a

$$(-P_{V^0}\triangle)^{-1} e_k = \mu_k e_k$$

ou

$$e_k = \mu_k(-P_{V^0}\triangle) e_k$$

Donc on a

$$-P_{V^0}\triangle e_k = \lambda_k e_k, \qquad \lambda_k = \frac{1}{\mu_k}$$

En multipliant les deux membres de cette égalité par e_k, on obtient

$$< -P_{V^0}\Delta e_k, e_k >_{L^2(\Omega,R^3)} = \int_\Omega (-\Delta e_k)\cdot e_k dx = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} |\frac{\partial e_{k,i}}{\partial x_j}|^2 dx$$

$$= \lambda_k < e_k, e_k >_{L^2(\Omega,R^3)} = \lambda_k \|e_k\|^2_{L^2(\Omega,R^3)} = \lambda_k \|e_k\|^2_{V^0}$$

De cette relation on déduit que les valeurs propres μ_k de $(-P_{V^0}\Delta)^{-1}$ sont positives et ont 0 comme point d'accumulation et $\lambda_k = \frac{1}{\mu_k}$ sont les valeurs propres de $-P_{V^0}\Delta$. Donc, en les ordonnant selon l'ordre naturel des nombres réels et en écrivant toutes fois comme la multiplicité d'une valeur propre , on a

$$\mu_1 \geq \mu_2 \geq \ldots\ldots \geq \mu_k \geq \ldots.., \mu_k > 0 \qquad \mu_k \to 0 \quad pour \quad k \to \infty$$

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots\ldots \leq \lambda_k \qquad \lambda_k \to \infty \quad pour \quad k \to \infty$$

En outre, comme on le connaît bien, on peut construire une base orthonormale $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ de V^0 avec les vecteurs propres e_k de $(-P_{V^0}\Delta)^{-1}$, qui sont également les vecteurs propres de $-P_{V^0}\Delta$.

Le théorème est démontré.□

La base orthonormale $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ de V^0 jouit également de la propriété suivante.

Proposition 2.2.1. *La base orthonormale $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ de V^0 construite dans le théorème 2.2.2 est un système orthogonale complet de $\widetilde{V}^1$.*

complet dans $\widetilde{V}^1$ aussi.$\square$

Il est bon de rappeler que pour le théorème 2.2.2 et la proposition 2.2.1 l'hypothèse que Ω soit borné est essentielle.

Chapitre 3

Méthode d'approximation de Galerkin

Comme $\widetilde{V}^1$ est un espace de Hilbert séparable, une des idées naturelles pour obtenir la solution $v(x,t)$ du système d'équations (1.1)-(1.2) serait celle de son approximation par les fonctions $v^{[n]}(t,x), n = 1, 2......$, appartenant aux sous-espaces V_n de dimension finie.

Nous appliquons l'approximation de Galerkin pour démontrer l'existence de solution (v,p) du le système d'equation (1.1)-(1.2) dans un domaine borné Ω de R^3 muni de frontière régulière $\partial\Omega$ avec la condition aux limites

$$v = 0 \qquad sur \;\; \partial\Omega \tag{3.1}$$

et la condition initiale

$$v(0,x) = v_0(x) \qquad dans \;\; \Omega \tag{3.2}$$

Pour la condition initiale , on devra préciser l'espace auquel v_0 appartient.

nous supposons, au moins le moment, que

$$v_0 \in V^0 \tag{3.3}$$

Soit $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ la base orthonormale de V^0 introduite dans le théorème 2.2.2, pour laquelle on a

$$P_{V^0}\Delta e_k = \lambda_k e_k \tag{3.4}$$

Comme il est bien connu, chaque élément u de V^0 peut être représenté dans la forme

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k e_k(x), \qquad C_k =< u, e_k >_{V^0} \tag{3.5}$$

Donc le champ de vitesse de la solution $v(x,t)$, s'il existe, à chaque instant t, peut être représenté dans la forme

$$v(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k(t) e_k(x), \qquad C_k(t) =< v(t,), e_k >_{V^0} . \tag{3.6}$$

On remarque que, si v est de la forme (3.6), on a

$$< \frac{\partial v}{\partial t}, e_k >_{V^0} = \frac{d}{dt} C_k(t).$$

$$< -P_{V^0}\Delta v, e_k >_{V^0} = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial e_{k,i}}{\partial x_j} dx =< v, -P_{V^0}\Delta e_k >_{V^0} = \lambda_k C_k(t).$$

$$< (v\cdot\nabla)v, e_k >_{V^0} = -\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} v_j v_i \frac{\partial e_{k,i}}{\partial x_j} dx = -\sum_{q,r=1}^{\infty} \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} e_{q,j} e_{r,i} \frac{\partial e_{k,i}}{\partial x_j} dx C_q(t) C_r(t).$$

On remarque aussi que

$$\sum_{i,j=1}^{3} < -\beta \frac{\partial}{\partial x_j}(|D[v]|^{q-2}\{\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\}), e_k >_{V^0} =$$

$$= \beta \sum_{i,j=1}^{3} < |D[v]|^{q-2}\{\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\}, \frac{\partial e_{k,i}}{\partial x_j} >_{V^0} .$$

ici, on a utilisé l'integration par parties.

On rappelle que

$$(D[v])_{lm} = \frac{1}{2}\{\frac{\partial v_l}{\partial x_m} + \frac{\partial v_m}{\partial x_l}\} = \frac{1}{2}(\sum_{k'=1}^{\infty} C_{k'} \frac{\partial e_{k',l}}{\partial x_m} + \sum_{k''=1}^{\infty} C_{k''} \frac{\partial e_{k'',m}}{\partial x_l}).$$

De ces expressions, on déduit qu'il existe une fonction continue

$$\xi_k(C_1, ..., C_n) = \beta \sum_{i,j=1}^{3} < |D[v^{[n]}]|^{q-2}\{\frac{\partial v_i^{[n]}}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j^{[n]}}{\partial x_i}\}, \frac{\partial e_{k,i}}{\partial x_j} >_{V^0} =$$

$$= 2\beta \sum_{i,j=1}^{3} < |D[v^{[n]}]|^{q-2}(D[v^{[n]}])_{ij}, \frac{\partial e_{k,i}}{\partial x_j} >_{V^0} .$$

où

$$< |D[v^{[n]}]|^{q-2}(D[v^{[n]}])_{ij}, \frac{\partial e_{k,i}}{\partial x_j} >_{V^0} = \int_\Omega (|D[v^{[n]}]|^{q-2}(D[v^{[n]}])_{ij}) \frac{\partial e_{k,i}}{\partial x_j} dx.$$

et

$$v^{[n]} = \sum_{k=1}^{n} C_k(t) e_k(x).$$

On voit facilement que $\xi_k(C_1, ..., C_n)$ est localement lipschitzienne en $(C_1, ..., C_n) \in R^n$ à cause de compertement de $q > 2$.

Nous rappelons de théorème de Cauchy-Lipschitz suivant

Soit le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(x,t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{3.7}$$

où $f : U \to R^n$, avec U ouvert de $R \times R^n$, et $(t_0, x_0) \in U$.

Théorème (Cauchy-Lipschitz) 3.1.1 *Si f est continue sur U, et localement lipschitzienne en x (i.e. pour tout $(t_1, x_1) \in U$, il existe un voisinage V de x_1 et un voisinage W de t_1 et une constante $k > 0$ tels que pour tous $x, y \in V$ et tout $t \in W, \|f(t,x) - f(t,y)\| \leq k\|x - y\|$), alors*

le problème de (3.7) admet une unique solution maximale .

Démonstration. voir [2] page 102 pour "J.Lelong-Ferrand et J.Armaudies"

Qu'est-ce qu'une solution maximale ?

On dit que (J, x) est une solution maximale de (3.7) s'il n'existe pas de solution $(\widetilde{J}, \widetilde{x})$ vérifiant $J \subsetneq \widetilde{J}$ et $\widetilde{x}|_J = x$.
(i.e. Il n'admet pas de prolongement à un intervalle contenant stictement J).

Remarques

- une solution maximale est forcément définie sur un domaine ouvert.
- Toute solution définie sur le domaine entier est dite globale.

Comme le théorème de Cauchy-Lipschitz assure que le problème (3.7) admet une unique solution maximale définie sur l'intervalle de temps $]a, b[$ avec $-\infty \leq a < 0 < b \leq +\infty$. dans la suite nous nous intéresserons par l'étude de la solution sur $[0, b[$; Le temps d'existance de la solution dépend de la fonction f et la donnée initiale. nous intéressonsé à l'étude en particulier le comportement de la solution au voisinage de b ?

Théorème 3.1.2 *On a l'alternative suivante*

$(i) b = +\infty$

$(ii) b < +\infty$ *et* $\|x(t)\| \to +\infty$ *quand* $t \to b$.

Démonstration.

voir [4] corollaire 2.4.2 page 72 pour "P.Martinez and J.Vancostnonle".

dans le cas (i), que l'existance de la solution est globale (c'est-à-dire que la solution est défini sur $[0, +\infty[$), il est souvent intéressant d'étudier son comportement quand $t \to +\infty$. Dans le cas (ii) on dit que la solution explose en temps fini, dans ce cas, ce qui devient intéressant est de connaitre, si possible, la valeur du temps d'existance b.

Donc, si on suppose que le système d'équations (1.1)-(1.2) avec les conditions (3.1)-(3.2) admet une solution (v, p) et si on fait le produit scalaire des deux membres de (1.1) avec e_k, compte tenu de la relation $< e_k, \nabla p >_{L^2(\Omega, R^3)}= 0$, on aura

$$\frac{d}{dt}C_k(t) + \nu\lambda_k C_k(t) - \sum_{q,r=1}^{\infty} \theta_{kqr} C_q(t) C_r(t) = f_k(t) - \xi_k(t). \tag{3.8}$$

où

$$\theta_{kqr} = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} e_{q,j} e_{r,j} \frac{\partial e_{k,i}}{\partial x_j} dx. \tag{3.9}$$

$$f_k(t) = \int_\Omega f(t, x) \cdot e_k(x) dx. \tag{3.10}$$

et

$$\xi_k(t) = 2\beta \sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega |D[v^{[n]}]|^{q-2} (D[v^{[n]}])_{ij} \frac{\partial e_{k,i}}{\partial x_j} dx. \tag{3.11}$$

En outre les fonctions $C_k(t)$ devront satisfaire à la condition initiale

$$C_k(0) = C_k^0 =< v_0, e_k >_{V^0} . \tag{3.12}$$

Si on pouvait trouver les fonctions $C_k(t)$ qui satisfont aux relations (3.8)-(3.12), alors on pourrait construire une solution $v(t,x)$ par (3.6) (et ∇p par la décomposition orthogonale de $L^2(\Omega, R^3)$). Toutefois, on ne connait pas de méthode pour construire directement les fonctions $C_k(t)$ satisfant à (3.8)-(3.12). Pour cela, on va construire la suite de solutions approchées $v^{[n]}$ ayant la forme

$$v^{[n]} = \sum_{k=1}^{n} C_k^{[n]}(t) e_k(x). \tag{3.13}$$

où $C_k^{[n]}(t)$ sont les solutions du système d'équations différentielles ordinaires

$$\frac{d}{dt} C_k^{[n]}(t) + \nu\lambda_k C_k^{[n]}(t) - \sum_{q,r=1}^{n} \theta_{kqr} C_q^{[n]}(t) C_r^{[n]}(t) = f_k(t) - \xi_k(t). \tag{3.14}$$

avec la condition initiale

$$C_k^{[n]}(0) = C_k^0 =< v_0, e_k >_{V^0} . \tag{3.15}$$

où θ_{kqr}, $f_k(t)$ et $\xi_k(t)$ sont comme (3.9), (3.10) et (3.11). La fonction $v^{[n]}$ est une solution approchée dans le sous-espace $V^{[n]}$ engendré par $e_1, \ldots\ldots, e_n$ dans le sens que $v^{[n]}$ donnée par (3.13) avec $C_k^{[n]}(t)$ satisfaisant à (3.15) vérifie

$$P_{V_n}[\partial_t v^{[n]} + (v^{[n]} \cdot \nabla) v^{[n]} - 2\nabla(\nu + \beta |D[v]|^{q-2}) D[v]] = P_{V_n} f. \tag{3.16}$$

où P_{V_n} est la projection orthogonale de $L^2(\Omega, R^3)$ sur V_n, c'est-à-dire

$$< \partial_t v^{[n]} + (v^{[n]} \cdot \nabla) v^{[n]} - 2\nabla(\nu + \beta |D[v]|^{q-2}) D[v], \varphi >_{L^2(\Omega,R^3)} = \tag{3.17}$$

$$=< f, \varphi >_{L^2(\Omega,R^3)} .$$

$$\forall \varphi \in V_n$$

Dans ces égalités il n'est pas nécessaire d'introduire le terme $\nabla p^{[n]}$, en effet, même si on définit $\nabla p^{[n]}$, on aura $P_{V_n}\nabla p^{[n]} = 0$ et $< \nabla p^{[n]}, \varphi >_{L^2(\Omega,R^3)}= 0$ pour $\varphi \in V_n$ et donc la présence du terme $\nabla p^{[n]}$ ne modifiera pas ces égalités. Avant de démontrer l'existance et l'unicité de la solution $C_k^{[n]}(t)$ du système d'équations (3.14), nous explicitons la condition sur la fonction f figurant dans le second membre de (1.1). Nous supposons en effet que

$$f \in L^2_{loc}(0; +\infty, H^{-1}(\Omega, R^3)). \tag{3.18}$$

où $H^{-1}(\Omega, R^3)$ est l'espace dual de $H^1(\Omega, R^3)$. Comme $e_k \in \widetilde{V}^1$, on a

$$f_k(t) \in L^2_{loc}[0; +\infty[. \tag{3.19}$$

pour tout k.

Maintenant on démontre la proposition suivante.

Proposition 3.1.1. *Quelque soit $n \in N - \{0\}$ le système d'équations* (3.8)-(3.12) *avec la condition initiale et la condition* (3.18) *admet une solution et une seule dans l'intervalle* $[0; +\infty[$.

Démonstration.

Posons

$$g(C_1, ..., C_n) = \sum_{q,r=1}^{n} \theta_{kqr} C_q C_r.$$

Alors la fonction $g(C_1, ..., C_n)$ est localement lipschitzienne en $(C_1, ..., C_n) \in R^n$ et on aussi la fonction $\xi(C_1, ..., C_n)$ est localement lipschitzienne en

$(C_1, ..., C_n)$. Donc, en vertu du théorème d'existance et d'unicité de solution locale pour les équations différentielles ordinaires, il existe un $T_0 > 0$ tel que le système d'équations (3.14) avec la condition initiale (3.15) admet une solution et une seule dans l'intervalle $[0, T_0[$.

Reste à démontrer que cet intervalle d'existence $[0, T_0[$ peut être prolongé jusqu'à l'infini.

En multipliant les deux membres de (3.14) par $C_k^{[n]}(t)$ et en faisant la somme pour $k = 1, ..., n$, on obtient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{n}(C_k^{[n]}(t))^2+\nu\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(C_k^{[n]}(t))^2-\sum_{k=1}^{n}\theta_{kqr}C_q^{[n]}(t)C_r^{[n]}(t)C_k^{[n]}(t) = \qquad (3.20)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}f_k(t)C_k^{[n]}(t)-\sum_{k=1}^{n}\xi_k(t)C_k^{[n]}(t)$$

où

$$\sum_{k=1}^{n}\xi_k(t)C_k^{[n]}(t)=\sum_{k=1}^{n}2\beta\sum_{i,j=1}^{3}\int_\Omega|D[v^{[n]}]|^{q-2}(D[v^{[n]}])_{ij}\frac{\partial e_{k,i}}{\partial x_j}C_k^{[n]}(t)dx=$$

$$(3.21)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}2\beta\int_\Omega|D[v^{[n]}]|^{q-2}\sum_{i,j=1}^{3}(D[v^{[n]}])_{ij}\frac{\partial v_i^{[n]}}{\partial x_j}dx.$$

On remarque aussi

$$(D[v^{[n]}])_{ij}=(D[v^{[n]}])_{ji}.$$

donc

$$\sum_{i,j=1}^{3}(D[v^{[n]}])_{ij}\frac{\partial v_i^{[n]}}{\partial x_j}=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3}(D[v^{[n]}])_{ij}\{\frac{\partial v_i^{[n]}}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j^{[n]}}{\partial x_i}\}=$$

$$=\frac{1}{2}|D[v^{[n]}]|^2.$$

Et on a aussi de la définition de θ_{kqr} (voir (3.9) que

$$\sum_{k,q,r=1}^{n}\theta_{kqr}C_q^{[n]}(t)C_r^{[n]}(t)C_k^{[n]}(t)=\sum_{k,q,r=1}^{n}C_q^{[n]}(t)e_{q,j}C_r^{[n]}(t)e_{r,i}\int_\Omega\sum_{k,q,r=1}^{n}C_k^{[n]}(t)\frac{\partial e_{k,i}}{\partial x_j}dx=$$

$$= \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} (\sum_{q=1}^{n} C_q^{[n]} e_{q,j}) (\sum_{r=1}^{n} C_r^{[n]} e_{r,i} (\frac{\partial}{\partial x_j} (\sum_{k=1}^{n} C_k^{[n]} e_{k,i})) dx.$$

Cette dernière expression peut être écrire dans la forme

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} v_j^{[n]} v_i^{[n]} \frac{\partial v_i^{[n]}}{\partial x_j} dx$$

avec $v^{[n]} = \sum_{k=1}^{n} C_k^{[n]} e_k$. Or, en faisant l'integration par parties et en tenant compte de (1.2) on a

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} v_j^{[n]} v_i^{[n]} \frac{\partial v_i^{[n]}}{\partial x_j} dx = -\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial v_j^{[n]}}{\partial x_j} |v_i^{[n]}|^2 dx - \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} v_j^{[n]} \frac{\partial v_i^{[n]}}{\partial x_j} v_i^{[n]} dx$$

$$= -\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} v_j^{[n]} \frac{\partial v_i^{[n]}}{\partial x_j} v_i^{[n]} dx$$

c'est-à-dire

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} v_j^{[n]} v_i^{[n]} \frac{\partial v_i^{[n]}}{\partial x_j} dx = 0$$

ou

$$\sum_{k,q,r=1}^{n} \theta_{kqr} C_q^{[n]}(t) C_r^{[n]}(t) C_k^{[n]}(t) = 0$$

Par conséquent (3.20) se réduit à

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{n} (C_k^{[n]}(t))^2 + \nu \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (C_k^{[n]}(t))^2 \tag{3.22}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f_k(t) C_k^{[n]}(t) - \beta \int_\Omega |D[v^{[n]}]|^{q-2} |(D[v^{[n]}])|^2 dx.$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f_k(t) C_k^{[n]}(t) - \beta \int_\Omega |D[v^{[n]}]|^q dx.$$

Comme on a

$$\sum_{k=1}^{n} (f_k(t)) C_k^{[n]}(t) \leq \frac{1}{2}\nu \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (C_k^{[n]}(t))^2 + \frac{1}{2\nu} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda_k} (f_k(t))^2$$

et comme le terme $-\beta \int_\Omega |D[v^{[n]}]|^q dx$ est négatif, de (3.19) on déduit que

$$\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{n}(C_k^{[n]}(t))^2 + \nu\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(C_k^{[n]}(t))^2 \leq \frac{1}{\nu}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\lambda_k}f_k(t). \qquad (3.23)$$

Compte tenu de la condition initiale (3.15), de (3.17) on déduit que

$$\sum_{k=1}^{n}(C_k^n(t))^2 \leq \sum_{k=1}^{n}(C_k^0)^2 + \frac{1}{\nu}\int_0^t\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\lambda_k}(f_k(t')dt'.$$

En vertu, de (3.19) le second membre de (3.22) est borné pour chaque $t \in [0, +\infty[$ pourvu que la solution $(C_1^{[n]}(t), ..., C_n^{[n]}(t))$ existe jusqu'au instant t. Or, $\sum_{k=1}^{n}(C_k^n(t))^2$ est borné et donc, quelque soit l'intervalle pris en cosidération, la solution peut être prolongé outre cet intervalle. ça signie que la solution $(C_1^{[n]}(t), ..., C_n^{[n]}(t))$ existe dans tout l'intervalle $[0, +\infty[$.

L'unicité de la solution résulte du théorème d'unicité de la solution locale.

La proposition est démontré $\square$.

Pour les solutions approchées $v^{[n]}$ ainsi construites on a l'estimation suivante.

proposition 3.1.2 *Soit $v^{[n]}$ la fonction définie par (3.13) avec la solution $\{C_k^n(t)\}_{k=1}^n$ du problème (3.14)-(3.15) avec la condition (3.18). Alors quelque soit $n \in N - \{0\}$ on a*

$$\sup_{0\leq t\leq T}\|v^{[n]}\|_{V^0}^2 + \nu\int_0^T\|v^{[n]}\|_{\tilde{V}^1}^2 dt < 2(\frac{1}{\nu}\int_0^T\|f\|_{(\tilde{V}^1)'}^2 dt + \|v_0\|_{V^0}^2). \qquad (3.24)$$

.

Démonstration.

Comme les fonctions $C_k^{[n]}(t)$ sont les solutions du systhème d'équatios différentielles et que e_k sont élément de $\widetilde{V}^1$, avec la définition de $v^{[n]}$ par (3.13) les termes $\partial_t v^{[n]}$, $(v^{[n]}\cdot\nabla)v^{[n]}$, $\nu\Delta v^{[n]}$ sont bien définis (au moins dans $L^2(\Omega,R^3)$). Donc on peut substituer $v^{[n]}(t)$ au lieu de φ dans (3.17) de sorte qu'on a

$$< \partial_t v^{[n]} + (v^{[n]}\cdot\nabla)v^{[n]} - \nu\Delta v^{[n]}, v^{[n]} >_{L^2(\Omega,R^3)}= \tag{3.25}$$

$$=< f, v^{[n]} >_{L^2(\Omega,R^3)} -2\beta\sum_{i,j=1}^{3}\int_\Omega |D[v^{[n]}]|^{q-2}(D[v^{[n]}])_{ij}\frac{\partial v_i^{[n]}(x)}{\partial x_j}dx.$$

On remarque

$$< \partial_t v^{[n]}, v^{[n]} >_{L^2(\Omega,R^3)}= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v^{[n]}\|^2_{V^0}, \qquad < -\nu\Delta v^{[n]}, v^{[n]} >_{L^2(\Omega,R^3)}= \nu\|v^{[n]}\|^2_{\widetilde{V}^1}$$

En outre, comme nous l'avons vu dans la proposition 3.1.1, on a

$$< (v^{[n]}\cdot\nabla)v^{[n]}, v^{[n]} >_{L^2(\Omega,R^3)}= 0$$

et comme on sait que dans (3.21)

$$\xi_k(t)C_k(t) = -2\beta\sum_{i,j=1}^{3}\int_\Omega |D[v^{[n]}]|^{q-2}(D[v^{[n]}])_{ij}\frac{\partial v_i^{[n]}(x)}{\partial x_j}dx =$$

$$= \beta\int_\Omega |D[v^{[n]}]|^q dx.$$

De plus on a

grâce à l'équivalence entre les normes $\|u\|_{H^1(\Omega,R^3)}$ et $\|u\|_{\widetilde{V}^1}$ pour $u\in\widetilde{V}^1$ la condition (5.18) entraine que

$$f\in L^2_{loc}([0,+\infty[,(\widetilde{V}^1)')$$

on a donc

$$< f, v^{[n]} >_{L^2(\Omega,R^3)} \leq \|v^{[n]}\|_{\widetilde{V}^1} \|f\|_{(\widetilde{V}^1)'} \leq \frac{\nu}{2}\|v^{[n]}\|^2_{\widetilde{V}^1} + \frac{1}{2\nu}\|f\|^2_{(\widetilde{V}^1)'}.$$

et comme le terme $-\beta \int_\Omega |D[v^{[n]}]|^q dx$ est négatif et à l'aide de ces relations on déduit de (3.25) l'inégalité (3.24). □

Proposition 3.1.3. *La fonction $v^{[n]}$ définie par (3.15) vérifie l'inégalité*

$$\sup_{0\leq t\leq T} \|v^{[n]}\|^2_{V^0} + \nu \int_0^T \|v^{[n]}\|^2_{\widetilde{V}^1} dt + \beta \int_0^T \|D[v^{[n]}]\|^q_{L^q(\Omega)} dt \leq \tag{3.26}$$

$$\leq 2(\frac{1}{\nu} \int_0^T \|f\|^2_{(\widetilde{V}^1)'} dt + \|v_0\|^2_{V^0}).$$

Démonstration.

En réécrivant (3.22) dans la forme

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^n (C_k^{[n]}(t))^2 + \nu \sum_{k=1}^n \lambda_k (C_k^{[n]}(t))^2 + \beta \int_\Omega |D[v^{[n]}]|^q dx \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\nu \sum_{k=1}^n \lambda_k (C_k^{[n]}(t))^2 + \frac{1}{2\nu}\sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_k}(f_k(t))^2,$$

ou

$$\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^n (C_k^{[n]}(t))^2 + \nu \sum_{k=1}^n \lambda_k (C_k^{[n]}(t))^2 + 2\beta \int_\Omega |D[v^{[n]}]|^q dx \leq \frac{1}{\nu}\sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_k}(f_k(t))^2.$$

On en déduit que

$$\frac{d}{dt}\|v^{[n]}\|^2_{L^2} + \nu \|v^{[n]}\|^2_{\widetilde{V}^1} + 2\beta \int_\Omega |D[v^{[n]}]|^q dx \leq \frac{1}{\nu}\|f\|^2_{(\widetilde{V}^1)'}.$$

En intégrant cette inégalité par rapport à t, on obtient (3.26). □

Chapitre 4

Vers le théorème d'existence de solution du système d'équations de l'écoulement d'un fluide dilatant incompressible

Les inégalités obtenues dans les propositions 3.1.2 et 3.1.3 nous permettent d'extraire de la suite de solutions approchées une sous-souite faiblement convergente. C'est-à-dire il existe une suite $\{v^{[n_q]}\}_{q\in\mathbb{N}}$ telle que

$$v^{[n_q]} \to v \quad \text{faiblement dans} \quad L^2(0,T;\widetilde{V}^1),$$

$$v^{[n_q]} \to v \quad \text{faiblement-* dans} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)).$$

C'est assez similaire au cas de l'équations de Navier-Stokes. Il faut toutefois remarquer que, à différence du cas de l'équations de Navier-Stokes, dans l'équation (1.1) il y a un autre terme non-linéaire

$$\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}((\nu+\beta|D[v]|^{(q-2)})(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i})),$$

ce qui nécessitera une autre procédure pour le passage à la limite et ce ne sera pas très simple. Toutefois nous pouvons prévoir que le raisonnement de base sera celui du cas de l'équations de Navier-Stokes. Pour cette raison dans la suite nous exposons la démonstration du théorème d'existence pour l'équations de Navier-Stokes.

4.1 Théorème d'existence pour l'équation de Navier-Stokes

On a le théorème suivant de l'existence de solution de l'équation de Navier-Stokes, dans le cas $p = 2$ de notre système d'équations.

Théorème 4.1.1 *Soit Ω un domaine borné de R^3 muni de la frontière régulière. Soient $v_0 \in V^0, f \in L^2(0,T;(\widetilde{V}^1)')$. Alors il existe au moins une fonction $v \in L^\infty(0,T;V^0) \cap L^2(0,T;(\widetilde{V}^1))$ telle que*

$$\int_0^T \int_\Omega (-v \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nu \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} - \sum_{i,j=1}^{3} v_j v_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j})dxdt = \tag{4.1}$$

$$= \int_\Omega v_0 \cdot \varphi(0,.)dx + \int_0^T \int_\Omega f \cdot \varphi dxdt.$$

pour toute $\varphi \in C^1([0,T[,\widetilde{V}^1)$ telle que $\varphi(T,.) = 0$.

Démonstration.

Soient $v^{[n]}, n = 1,2.....$, les fonctions définies par (3.13). avec les solutions $\{C_k^{[n]}(t)\}_{k=1}^n$ du problème (3.14)-(3.15), solutions dont l'existance et l'unicité sont démontrées dans la proposition 3.1.1.

Choisissons un nombre positif $T > 0$. D'après de la proposition 3.1.2 la norme de $v^{[n]}, n = 1,2,.....$, est uniformément bornée dans $L^\infty(0,T;V^0) \cap L^2(0,T;\widetilde{V}^1)$. Par conséquent de $\{v^{[n]}\}_{n=1}^\infty$ on peut extraire une sous-suite convergente $\{v^{[n_q]}\}_{n=1}^\infty$, plus précisément, sous-suite $\{v^{[n_q]}\}_{q=1}^\infty$ telle que

$$v^{[n_q]} \to v^* \quad pour \quad q \to \infty \quad faiblement \;\; dans \;\; L^2(0,T;\widetilde{V}^1), \tag{4.2}$$

$$v^{[n_q]} \to v^* \quad pour \quad q \to \infty \quad faiblement^* \tag{4.3}$$

$$dans \;\; L^\infty(0,T;V^0),$$

où $v^* \in L^\infty(0,T;V^0) \cap L^2(0,T;\widetilde{V}^1)$.

Or, il faut rappeler que dans le terme non-lineaire de (4.1) on peut pas passer à la limite directement en utilisant les convergences faibles données ci-dessus. Nous avant besoin du lemme suivant.

Lemme 4.1.1. *La suite $\{v^{n_q}\}_{q=1}^{\infty}$ converge fortement vers v^* dans la topologie de $L^2(0,T;L^2(\Omega,R^3))$.*

Démonstration.

Soit $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ la base orthonormale de V^0 et aussi le systhème orthogonal complet dans $\widetilde{V}^1$. On rappelle que, en vertu de (2.5) et de (3.8), on a

$$\|e_k\|^2_{\widetilde{H}^1(\Omega)} = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} |\frac{\partial e_{k,i}}{\partial x_j}|^2 dx = \int_\Omega (-\triangle e_k) \cdot e_k dx = \lambda_k \|e_k\|^2_{V^0}.$$

et que

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq .... \leq \lambda_k ...., \lambda_k \to \infty \;\; pour \;\; k \to \infty.$$

(voir le théorème 2.2.2). Donc, $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon$ tel que

$$\lambda_{N_\varepsilon} \geq \frac{1}{\varepsilon}$$

Rappellons aussi que, pour tout $u \in V^0$ on a

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} < u, e_k >_{V^0} e_k. \qquad \|u\|_{V^0}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} | < u, e_k >_{V^0} |^2.$$

Considérons un élement arbitraire $u \in \widetilde{V}^1$. Si on pose

$$u_{[N_\varepsilon]} = \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} < u, e_k >_{V^0} e_k.$$

Alors on a

$$\|u - u_{[N_\varepsilon]}\|_{\widetilde{V}^1}^2 \geq \lambda_{N_\varepsilon} \|u - u_{[N_\varepsilon]}\|_{V^0}^2 \geq \frac{1}{\varepsilon} \|u - u_{[N_\varepsilon]}\|_{V^0}^2.$$

Donc

$$\|u_{[N_\varepsilon]}\|_{V^0}^2 = \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} | < u, e_k >_{V^0} |^2, \quad \|u - u_{[N_\varepsilon]}\|_{\widetilde{V}^1}^2 \leq \|u\|_{\widetilde{V}^1}^2,$$

On obtient

$$\|u\|_{V^0}^2 \leq \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} | < u, e_k >_{V^0} |^2 + \varepsilon \|u\|_{\widetilde{V}^1}^2. \tag{4.4}$$

On remarque que le choix du nombre N_ε ne dépend pas de u. Donc on ne peut pas conclure que, etant $\varepsilon > 0$, il existe un nombre naturel N_ε tel que pour $u \in \widetilde{V}^1$ et si on pose$u = v^{[n_q]} - v^{[n_r]}$ dans (4.4) et integrer de 0 à T. Alors on a

$$\int_0^T \|v^{[n_q]} - v^{[n_r]}\|_{V^0}^2 \leq \tag{4.5}$$

$$\leq \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} \int_0^T | < v^{[n_q]} - v^{[n_r]}, e_k >_{V^0} |^2 dt + \varepsilon \int_0^T \|v^{[n_q]} - v^{[n_r]}\|_{\widetilde{V}^1}^2 dt.$$

De la proposition 3.1.2 on déduit que

$$\int_0^T \|v^{[n_q]} - v^{[n_r]}\|_{\widetilde{V}^1}^2 dt \leq C$$

avec une constante C indépendante de n_q, n_r. D'autre part du lemme 4.1.2, que nous démontrons dans la suite, on déduit que

$$\sum_{k=1}^{N_\varepsilon} \int_0^T | < v^{[n_q]} - v^{[n_r]}, e_k >_{V^0} |^2 dt \to 0 \quad pour \quad n_q, n_r \to \infty.$$

Puisque dans (4.5) on peut choisir ε arbitrairement petit, il s'ensuit que

$$\int_0^T \|v^{[n_q]} - v^{[n_r]}\|_{V^0}^2 dt \to 0 \to \quad pour \quad n_q, n_r \to \infty. \tag{4.6}$$

C'es-à-dire, la suite $\{v^{n_q}\}_{q=1}^{\infty}$ converge fortement vers v^* dans $L^2(0, T; L^2(\Omega, R^3))$.

Lemme 4.1.1. *Si on fixe un nombre naturel N, on a*

$$\sum_{k=1}^{N} \int_0^T | < v^{[n_q]} - v^{[n_r]}, e_k >_{V^0} |^2 dt \to 0 \quad pour \quad n_q, n_r \to \infty. \tag{4.7}$$

Démonstration.

Comme $v^{[n_q]}$ est définie par la formule (3.3) et $C_k^{[n_q]}(t), k = 1, 2, ...n_q$, sont les solutions du système d'équations (3.14) et de même pour $v^{[n_r]}$, on a

$$\frac{d}{dt} < v^{[n_q]}(t,.) - v^{[n_r]}(t,.), e_k >_{V^0} = \frac{d}{dt}(C_k^{[n_q]}(t) - C_k^{[n_r]}(t)). \tag{4.8}$$

$$= -\nu\lambda_k(C_k^{[n_q]}(t) - C_k^{[n_r]}(t)) + \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} (v_j^{[n_q]}(t,.)v_i^{[n_q]}(t,.) - v_j^{[n_r]}(t,.)v_i^{[n_r]}(t,.))\frac{\partial e_{k,i}}{\partial x_j} dx.$$

On remarque que, grâce à la proposition 3.1.2 et aux inégalités de Sobolev et de Hölder, on a

$$C_k^{[n_q]}(t) \leq \|v^{[n_q]}(t,.)\|_{L^2(\Omega,R^3)} \leq C$$

$$\|v_j^{[n_q]}(t,.)v_i^{[n_q]}(t,.)\|_{L^2(\Omega,R^3)} \leq \|v^{[n_q]}(t,.)\|^2_{L^4(\Omega,R^3)}$$

$$\leq \|v^{[n_q]}(t,.)\|^{\frac{1}{4}}_{L^2(\Omega,R^3)}\|v^{[n_q]}(t,.)\|^{\frac{3}{4}}_{L^6(\Omega,R^3)} \leq C\|v^{[n_q]}(t,.)\|^{\frac{3}{4}}_{\widetilde{H}^1(\Omega)}.$$

$$\int_t^{t+h} \|v^{[n_q]}(t,.)\|^{\frac{3}{2}}_{\widetilde{H}^1(\Omega)}dt' \leq (\int_t^{t+h} \|v^{[n_q]}(t,.)\|^{2}_{\widetilde{H}^1(\Omega)}dt')^{\frac{3}{4}} - |h|^{\frac{1}{4}} \leq C|h|^{\frac{1}{4}}.$$

où C est une constante indépendante de n_q, et de même pour $v^{[n_r]}$. À l'aide de ces relations, de (4.8) on déduit que

$$| < v^{[n_q]}(t+h,.) - v^{[n_r]}(t+h,.), e_k >_{V^0} - \tag{4.9}$$

$$- < v^{[n_q]}(t,.) - v^{[n_r]}(t,.), e_k >_{V^0} \leq 2\nu\lambda_k C|h| + 2C\sum_{j-1}^{3}\|\frac{\partial e_k}{\partial x_j}\|_{L^2(\Omega,R^3)}|h|^{\frac{1}{4}}.$$

Rappelons que la suite $\{v^{n_q}\}_{k=1}^{\infty}$ converge faiblement vers v^* dans $L^2(0,T;\widetilde{V}^1)$ et donc, quelque soit $\varphi(.) \in L^2(0,T;R)$, on a

$$\int_0^T < v^{[n_q]}(t,.) - v^{[n_r]}(t,.), e_k >_{V^0} \varphi(t)dt \to 0 \;\; pour \;\; n_q, n_r \to \infty.$$

Il s'ensuit, compte tenu de la continuité Hölderienne démontrée dans (4.9), que

$$< v^{[n_q]}(t,.) - v^{[n_r]}(t,.), e_k >_{V^0} \to 0.$$

dans [0,T]. Par conséquent, en remarquant qu'il existe une constante C'' indépandante de n_q, n_r, telle que

$$| < v^{[n_q]}(t,.) - v^{[n_r]}(t,.), e_k >_{V^0} | \leq C''$$

en vertu du théorème de la convergence dommée on a (4.7). Maintenant retournons à la démonstration du théorème 4.1.1.

Suite de la démonstration du théorème 4.1.1.

On considère une fonction $\varphi \subset C^1([0,T[,V_n)$ telle que $\varphi(T,.) = 0$. Alors $\forall n_q \geq n$, compte tenu de la relation $V_n \subset V_{n_q}$, de manière analogue à (3.17) on a

$$\int_0^T \int_\Omega (-v^{[n_q]} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nu \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial v_i^{[n_q]}}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} - \sum_{i,j=1}^{3} (v_j^{[n_q]} v_i^{[n_q]} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}))dxdt = \tag{4.10}$$

$$= \int_\Omega v_0 \cdot \varphi(0,.)dx + \int_0^T \int_\Omega f \cdot \varphi dxdt.$$

En vertu de la convergence faible donnée dans (4.2) et (4.3) de $v^{[n_q]}$ vers v^*, on a immédiatemment

$$\int_0^T \int_\Omega v^{[n_q]} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} dxdt \to \tag{4.11}$$

$$\to \int_0^T \int_\Omega v^* \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} dxdt \qquad pour \ \ n_q \to \infty$$

$$\sum_{i,j=1}^{3} \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial v_i^{[n_q]}}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} dxdt \to \tag{4.12}$$

$$\to \sum_{i,j=1}^{3} \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial v_i^*}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} dxdt \qquad pour \ \ n_q \to \infty.$$

En ce qui concerne la convergence du terme $\sum_{i,j=1}^{3} v_j^{[n_q]} v_i^{[n_q]} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}$, on remarque que l'ensemble de fonctions $\varphi^1 \in C^1([0,T], W_4^1(\Omega, R^3) \cap \widetilde{V}^1)$ et satisfaisant à $\varphi(T,.) = 0$ est dense dans $\{\varphi \in C^1([0,T], \widetilde{V}^1) | \varphi(T,.) = 0\}$. Donc,

Donc on a (4.15) $\forall\varphi \in C^1([0,T],\widetilde{V}^1)$ telle que $\varphi(T,.) = 0$, ce qu'il fallait démontrer. □

4.2 lemme de compacité.

Le point le plus délicat du point de vue technique de la démonstration du théorème d'existance pour le systhème d'équations de Navier-Stokes et le lemme 4.1.1, dans lequel on démontre la convergence forte de $v^{[n_d]}$ pour $L^2(0,T;L^2(\Omega,R^3))$, Cette technique peut être généralisée dans un schéma plus général peut être appliquée à différents problèmes non-linéaires. Une version assez diffusée en est connue sous le nom de lemme de compacité qui trouve une large possibilité d'applications pour les équations de mécanique des fluides. En utilisant ce lemme, on démontre le théorème d'existance pour les èquations de Navier-Stokes.

Considérons trois espaces de Banach B_0, B, B_1 tels que

$$B_0 \subset B \subset B_1 \quad avec\ les\ injections\ continues\ B_0, B_1 : reflexifs. \tag{4.16}$$

$$l'injection\ de\ B_0\ dans\ B\ est\ compacte. \tag{4.17}$$

Définissons

$$W = \{u \in L^{p_0}([0,T];B_0)|\frac{du}{dt} \in L^{p_1}(0,T;B_1)\}, \tag{4.18}$$

où T est un nombre positif (fini), tandis que $1 < p_i < \infty$ pour $i = 0,1$. Etant muni de la norme

$$||u||_{L^{p_0}([0,T];B_0)} + ||\frac{du}{dt}||_{L^{p_1}(0,T;B_1)}.$$

W est espace de Banach.

Il est clair que $W \subseteq L^{p_0}(0,T;B_0)$. Mais cette immertion est même une injection compacte, comme on le voit dans le théorème suivant

8medskip

Théorème 4.2.1. *Soit W l'espace de Banach défini dans* (4.18). *Supposons les conditions* (4.16) *et* (4.17) . *L'injection de l'espace W dans $L^{p_0}(0,T;B_0)$ est compacte.*

pour démontrer le théorème 4.2.1, on commence par la démonstration du lemme suivant.

Lemme 4.2.1. *pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe un nombre C_ε tel que l'on ait*

$$\|u\|_B \leq C_\varepsilon \|u\|_{B_1} + \varepsilon \|u\|_{B_0}. \tag{4.19}$$

Démonstration. Supposons par absurde que (4.19) ne soit pas valable. Alors pour chaque $\varepsilon > 0$ il existerait une suite d'éléments $u_n \in B_0 \setminus \{0\}$ et de nombres réels c_n tels que $c_n \to \infty$ pour $n \to \infty$ et que

$$\|u_n\|_B \geq c_n \|u_n\|_{B_1} + \varepsilon \|u_n\|_{B_0}.$$

En posant $w_n = \frac{u_n}{\|u_n\|_{B_0}}$, on obtiendrait

$$\|w_n\|_B \geq c_n \|w_n\|_{B_1} + \varepsilon. \tag{4.20}$$

Mais puisqu'il existe une constante finie C telle que $\|u\|_B \leq C\|u\|_{B_0}$ et $\|w_n\|_{B_0} = 1$ pour tout n, on a

$$\|w_n\|_B \leq C\|w_n\|_{B_0} \leq C.$$

Alors de (4.20) et de l'hypothèse sur c_n il résulterait que

$$\|w_n\|_{B_1} \to 0 \qquad pour \;\; n \to \infty.$$

ou bien

$$w_n \to 0 \;\; dans \;\; B_1 \qquad pour \;\; n \to \infty.$$

En d'autre, de la relation $\|w_n\|_{B_0} = 1, \forall n$ et l'hypothèse selon laquelle l'injection de B_0 dans B_1 est compacte, il résulterait l'existence d'une sous suite $\{w_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ fortement convergente dans B. Mais comme la suite w_{n_k} converge vers 0 dans B_1, pour l'unicité de la limite, sa limite dans la topologie de B ne peut être que 0. Mais la convergence dans B de w_{n_k} vers 0 et donc celle de $\|w_n\|_B$ vers 0 contrediraient (4.20). Le lemme est démontré. □

Démonstration du théorème 4.2.1.

Nous avons à démontrer que, si $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ est une suite bornée dans W, alors il existe une sous-suite fortement convergente dans $L^{p_0}(0, T; B)$.
On sait que, si $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ est bornée dans W. Alors il existe une suite d'elle faiblement convergente dans W. Donc le problème se réduit à démontrer que, si u_n converge faiblement vers un élément $\overline{u}$ dans W, alors u_n converge fortement vers $\overline{u}$ dans $L^{p_0}(0, T; B)$. Or, on peut constater facilement qu'il n'est pas restrictif de considérer la limite égale à 0. Donc il suffit de démontrer que

$$si \;\; u_n \to 0 \;\; faiblement \;\; dans \;\; W, \;\; alors \;\; u_n \to 0 \tag{4.21}$$

$$fortement \;\; dans \;\; L^{p_0}(0,T;B), \qquad pour \;\; n \to \infty.$$

Supposons alors que u_n converge faiblement vers 0 dans W pour $n \to \infty$. En vertu du lemme 4.2.1, pour chaque $\varepsilon_1 > 0$ il existe une constante finie C_{ε_1} telle que

$$\|u_n\|_{L^{p_0}(0,T;B)} \leq C_{\varepsilon_1}\|u_n\|_{L^{p_0}(0,T;B_1)} + \varepsilon_1\|u_n\|_{L^{p_0}(0,T;B_0)}. \tag{4.22}$$

Fixons un $\varepsilon > 0$. Comme la norme de u_n dans $L^{p_0}(0,T;B_0)$ est bornée, on peut choisir ε_1 de telle manière que $\varepsilon_1\|u_n\|_{L^{p_0}(0,T;B_0)}$ soit majoré par $\frac{\varepsilon}{2}$. Ainsi (4.22) se réduit à

$$\|u_n\|_{L^{p_0}(0,T;B)} \leq C_{\varepsilon_1}\|u_n\|_{L^{p_0}(0,T;B_1)} + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.23}$$

Comme u_n sont uniformément bornées dans W et donc $\frac{du_n}{dt}$ elles aussi sont uniformément bornées dans $L^{p_1}(0,T;B_1)$, u_n appartient à la classe $C^0([0,T],B_1)$ et la norme $\|u_n(t)\|_{B_1}$ est uniformément bornée.

Choisissons un point générique $t_0 \in [0,T]$ et posons

$$w_n(t) = u_n(t_0 + \lambda(t - t_0)). \tag{4.24}$$

où λ est une constante à déterminer dans l'intervalle $]0,1[$ (c'est-à-dire $0 < \lambda < 1$). On a évidemment

$$w_n(t_0) = u_n(t_0). \tag{4.25}$$

En outre, comme on a

$$\|w_n\|_{L^{p_0}(0,T;B_0)} = (\int_0^T \|u_n(t_0+\lambda(t-t_0))\|_{B_0}^{p_0} dt)^{1/p_0} =$$

$$= (\int_{t_0-\lambda t_0}^{p_0} {}^{t_0+\lambda(T-t_0)}(\|u_n(t)\|_{B_0}\lambda) \frac{1}{\lambda} dt)^{1/p_0}.$$

en posant

$$C_1 = \sup_{n\in N/0} \|u_n\|_W.$$

on a

$$\|w_n\|_{L^{p_1}(0,T,B_0)} < C_1\lambda^{-1/p_0}. \tag{4.26}$$

Analoguement, de la relation

$$\|\frac{dw_n}{dt}\|_{L^{p_1}(0,T;B_1)} = (\int_0^T \|u_n'(t_0+\lambda(t-t_0))\|_{B_1}^{p_1} \lambda dt)^{1/p_1} =$$

$$= (\int_{t_0-\lambda t_0}^{t_0+\lambda(T-t_0)} (\|u_n'(t)\|_{B_1}\lambda)^{p_1} \frac{1}{\lambda} dt)^{1/p_1}.$$

$(u_n'(\tau)$ désigne la dérivée par rapport à τ, auquel on substitue $\tau = t_0 + \lambda(t-t_0)$ on déduit que

$$\|\frac{dw_n}{dt}\|_{L^{p_1}(0,T;B_1)} \leq C_1\lambda^{1-1/P_1}. \tag{4.27}$$

On considère une fonction $\varphi \in C^1([0,t_0],R)$ telle que $\varphi(0)=0$ et $\varphi(t_0)=1$ ou bien $\varphi \in C^1([t_0,T],R)$ telle que $\varphi(t_0)=1$ et $\varphi(T,.)=0$ (on peut choisir un des deux cas selon la commodité). Dans le premier cas on a

$$u_n(t_0) = w_n(t_0) = \int_0^{t_0} \frac{d}{dt}(\varphi w_n)dt = \beta_n + \gamma_n. \tag{4.28}$$

avec

$$\beta_n = \int_0^{t_0} \varphi\frac{dw_n}{dt}dt. \qquad \gamma_n = \int_0^{t_0} w_n\frac{d\varphi}{dt}dt.$$

En vertu de (4.27) on a

$$\|\beta_n\|_{B_1} \leq C_2' \lambda^{1-1/p_1}. \tag{4.29}$$

où C_2 est une constante. Puisque $1 - 1/p_1 > 0$, quand $\varepsilon' > 0$ est donné, on peut choisir un $\lambda > 0$ suffisamment petit de telle sorte que $C_2\lambda^{1-1/p_1} \leq \varepsilon'/2$. De cette manière de (4.28) et (4.29) on déduit

$$\|u_n(t_0)\|_{B_1} \leq \frac{\varepsilon'}{2} + \|\gamma_n\|_{B_1}. \tag{4.30}$$

Rappelons que w_n converge faiblement vers 0 dans $L^{p_0}(0,T;B_0)$ pour $n \to \infty$. Par conséquent γ_n converge faiblement vers 0 dans B_0. Mais l'injection de B_0 dans B_1 est compacte. Donc γ_n converge fortement vers 0 dans B_1. Il s'ensuit que $\|\gamma_n\|_{B_1}$ tend vers 0 quand $n \to \infty$. Par conséquent, compte tenu que le choix de $\varepsilon' > 0$ est arbitraire, de (4.30) on déduit que

$$\|u_n(t_0)\|_{B_1} \to 0 \qquad \textit{pour} \quad n \to \infty. \tag{4.31}$$

Il est clair que même dans le cas où on utilise une fonction $\varphi \in C^1([t_0,T], R)$ avec $\varphi(t_0) = 1$ et $\varphi(T) = 0$, d'une manière analogue on peut obtenir (4.31).

Comme t_0 est un point générique de l'intervalle $[0,T]$, on peut en déduire que (4.31) est valable $\forall t_0 \in [0,T]$. Ceci implique que

$$\|u_n\|_{L^{p_0}(0,T;B_1)} \to 0 \qquad \textit{pour} \quad n \to \infty. \tag{4.32}$$

Compte tenu que ε figurant dans (4.23) est arbitraire de (4.23) et (4.29) on déduit que

$$\|u_n\|_{L^{p_0}(0,T;B)} \to 0 \qquad pour \quad n \to \infty. \tag{4.33}$$

La relation (4.33) implique (4.21) qui, comme nous l'avons déja remarqué, est suffaisant pour démontrer le théorème. □

En revenant aux équations de Navier-Stokes, le point délicat de la démonstration du théorème d'existance était celui d'obtenir une sous-suite $\{v^{[n_q]}\}_{q=1}^{\infty}$ de la suite des solutions approchées $\{v^{[n]}\}_{q=1}^{\infty}$, sous-suite qui converge fortement dans la topologie de $L^2(0,T;L^2(\Omega,R^3))$, dans le paragraphe précident nous l'avons obtenu dans le lemme 4.2.1. Il n'est pas difficile de voir que le même résultat peut être obtenu par l'application du théorème 4.2.1 (lemme de compacité).□

Nous prenons en effet dans le schéma (4.16)-(4.17)

$$B_0 = \widetilde{V}^1, \quad B = V^0, \quad B_1 = H^{-2}(\Omega, R^3), \quad p_0 = p_1 = 2. \tag{4.34}$$

On rapelle que, comme le domaine Ω est borné, l'injection de $\widetilde{V}^1 = B_0$ dans $V^0 = B$ est compacte.

En outre, comme $v^{[n]}$ est définie par (3.13), de (3.14) si on soustrait $\xi(t)$ on déduit que

$$\frac{\partial v^{[n]}}{\partial t} = \sum_{k=1}^{n} e_k \frac{d}{dt} C_k^{[n]}(t) = \sum_{k=1}^{n} e_k[-\nu\lambda_k C_k^{[n]}(t) + \sum_{q,r=1}^{n} \theta_{kqr} C_q^{[n]}(t) C_r^{[n]}(t) + f_k(t)]. \tag{4.35}$$

Il est immédiat (voir (3.13) et (3.17)) que

$$\sum_{k=1}^{n} e_k f_k(t) = P_{V_n} f, \qquad \|P_{V_n} f\|_{L^2(0,T;H^{-2}(\Omega,R^3))} \leq \|f\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega,R^3))} < \infty$$

D'autre part, en vertu de (4.24) on a

$$-\nu \sum_{k=1}^{n} e_k \lambda_k C_k^{[n]}(t) = \nu \sum_{k=1}^{n} P_{V^0} \Delta e_k C_k^{[n]}(t) = \nu P_{V^0} \Delta \sum_{k=1}^{n} C_k^{[n]}(t) e_k = \nu P_{V^0} \Delta v^{[n]}.$$

Or, en vertu du lemme 3.1.2, on a

$$\|\nu P_{V^0} \Delta v^{[n]}\|_{L^2(0,T;H^{-2}(\Omega,R^3))} \leq \|\nu P_{V^0} \Delta v^{[n]}\|_{L^2(0,T;(\tilde{V}^1)')} \leq \nu \|v^{[n]}\|_{L^2(0,T;\tilde{V}^1)} \leq C$$

où C est une constante indépendete de n.

En ce qui concerne le terme $\sum_{k=1}^{n} e_k \sum_{q,r=1}^{n} \theta_{kqr} C_q^{[n]}(t) C_r^{[n]}(t)$, on écrit θ_{kqr} (voir (3.9)) dans la forme

$$\theta_{kqr} = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} e_{q,j} e_{r,i} \frac{\partial e_{k,i}}{\partial x_j} dx = -\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} e_{q,j} \frac{\partial e_{r,i}}{\partial x_j} e_{k,i} dx = -<(e_q \cdot \nabla) e_r, e_k>_{L^2(\Omega,R^3)} .$$

On a donc

$$\sum_{k=1}^{n} e_k \sum_{q,r=1}^{n} \theta_{kqr} C_q^{[n]}(t) C_r^{[n]}(t) =$$

$$= -\sum_{k=1}^{n} < \sum_{q=1}^{n} C_q^{[n]}(t)(e_k \cdot \nabla) \sum_{r=1}^{n} e_r C_r^{[n]}(t), e_k >_{L^2(\Omega,R^3)} e_k = -P_{V_n}(v^{[n]} . \nabla) v^{[n]}.$$

or, grâce à l'inégalité $\|u\|_{L^\infty(\Omega,R)} \leq C\|u\|_{H_0^2(\Omega)}$ avec une constante C, on a

$$\|P_{V_n}(v^{[n]} . \nabla) v^{[n]}\|_{H^{-2}(\Omega,R^3)} \leq C\|(v^{[n]} . \nabla) v^{[n]}\|_{L^1(\Omega,R^3)} \leq C\|v^{[n]}\|_{L^2(\Omega,R^3)} \|v^{[n]}\|_{\tilde{V}^1}.$$

Donc d'après la proposition 3.1.2 on a

$$\|P_{V_n}(v^{[n]} \cdot \nabla) v^{[n]}\|_{L^2(0,T;H^{-2}(\Omega,R^3))} \leq \|v^{[n]}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega,R^3))} \|v^{[n]}\|_{L^2(0,T;\tilde{V}^1} \leq C'.$$

avec une constante C'.

l'égalité (4.35) jointe à ces relations nous donne

$$\|\frac{\partial v^{[n]}}{\partial t}\|_{L^2(0,T;H^{-2}(\Omega,R^3))} \leq C.$$

avec une constante C indépendate de n. Cette relation, jointe à (4.34), implique que la suite des solutions approchées $\{v^{[n]}\}_{n=1}^{\infty}$ est un enssemble borné dans l'espace W défini dans (4.19). Donc, en vertu du théorème 4.2.1 il existe une sous-suite $\{v^{[n]}\}_{n=1}^{\infty}$ qui converge fortement dans la topologie de $L^2(0,T;L^2(\Omega,R^3))$.

Chapitre 5

Question de l'unicité de solution du système des équations de l'écoulement d'un fluide dilatant

5.1 théorème d'unicité pour Navier-stokes

Dans le paragraphe 4.1.1 nous avons démontré l'exitence d'une solution généralisée du système d'équations de Navier-Stokes. Mais le problème de l'unicité de la solution n'est pas encore résolu.

Il faut préciser que pour le système d'équations de Navier-Stokes de l'espace R^3, n'est pas encore de l'unicité de la solution. que l'on ne connait pas le théorème d'unicité de la solution ni son éventuelle négation. Si nous supposons que la composante v_3 du vecteur vitesse ainsi que celle f_3 les équations de Navier-Stokes (1.3)-(1.4) se réduit à un système d'équations en deux dimensions spatiales, dans un domaine borné R^2 .

Soit le système d'équations de Navier-stokes

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} - \nu \triangle v_i + \sum_{j=1}^{2} v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + f_i \qquad i = 1, 2, \tag{5.1}$$

$$\nabla \cdot v = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0. \tag{5.2}$$

dans

$$x \in \Omega \in R^2. \qquad t > 0.$$

Nous considérons la condition aux limites

$$v = 0 \qquad sur \;\; \partial\Omega. \tag{5.3}$$

et la condition initiale

$$v(0, x) = v_0(x) \qquad pour \;\; x \in \Omega. \tag{5.4}$$

On peut définir de manière analogue les espaces V^0 et $\widetilde{V}^1$ relatif à un domaine de dimension 2.

pour le probleme (5.1)-(5.4) on peut démontrer l'existance et l'unicité de la solution généralisée dans le même espace fonctionnel $L^\infty(0, T; V^0) \cap L^2(0, T; \widetilde{V}^1)$, d'après le théorème suivant.

Théorème 5.1.1. *Soit Ω un domaine borné de R^2 muni de la frontière régulière $\partial\Omega$. Soient $v_0 \in V^0, f \in L^2(0, T; (\widetilde{V}^1)')$. Alors il existe une fonction $v \in L^\infty(0, T; V^0) \cap L^2(0, T; \widetilde{V}^1)$ et une seule satisfaisant à l'équation*

$$\int_0^T \int_\Omega (-v \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nu \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}) dx dt = . \tag{5.5}$$

$$= \int_\Omega v_0 \cdot \varphi(0,.)dx + \int_0^T \int_\Omega f \cdot \varphi dx dt.$$

$\forall \varphi \in C^1([0,T],V^1)$ *telle que* $\varphi(T,.) = 0$.

On dira que la fonction $v \in L^\infty(0,T;V^0) \cap L^2(0,T;\widetilde{V}^1)$, vérifiant à (5.5) elle appelée solution généralisée du problème (5.1)-(5.4).

Nous allons exposer seulement la démonstration de l'unicité.

Nous commençons par le lemme suivant de caractère général.

Lemme 5.1.1. *Soit D un ensemble ouvert de R^2. Pour tout $u \in H_0^1(D,R)$ on a*

$$\|u\|^4_{L^4(D,R)} \leq 2\|u\|^2_{L^2(D,R)}\|\nabla u\|^2_{L^2(D,R)}. \tag{5.6}$$

Démonstration.

Comme $C_0^1(D,R)$ est dense dans $H_0^1(D,R)$, il suffit de démontrer (5.6) pour $u \in C_0^1(D,R)$. soit $u \in C_0^1(D,R)$.

On prolonge u avec $u(x) = 0$ pour $x \in R^2 \backslash D$. On a alors

$$|u(x_1,x_2)|^2 = 2\int_{-\infty}^{x_1} u(x_1',x_2)\frac{\partial u(x_1',x_2)}{\partial x_1}dx_1.$$

et donc

$$\max_{x_1' \in R} |u(x_1',x_2)|^2 \leq 2\int_{\infty}^{+\infty} |u(x_1',x_2)||\frac{\partial u(x_1',x_2)}{\partial x_1}|dx_1'.$$

Analoguement on a

$$\max_{x_2'\in R}|u(x_1,x_2')|^2 \leq 2\int_{-\infty}^{+\infty}|u(x_1,x_2')||\frac{\partial u(x_1,x_2')}{\partial x_2}|dx_2'.$$

Il s'ensuit que

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|u(x_1,x_2)|^4dx_1dx_2 \leq$$

$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(\max_{x_1'\in R}|u(x_1',x_2)|^2)(\max_{x_2'\in R}|u(x_1,x_2')|^2)dxdt -$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\max_{x_1'\in R}|u(x_1',x_2)|^2dx_2\int_{-\infty}^{+\infty}\max_{x_2'\in R}|u(x_1,x_2')|^2dx_1 \leq$$

$$\leq 4\int_{R^2}|u(x_1,x_2)||\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_1}|dx_1dx_2\int_{R^2}|u(x_1,x_2)||\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_2}|dx_1dx_2 \leq$$

$$\leq \|u\|^2_{L^2(R^2,R)}\|\frac{\partial u}{\partial x_1}\|_{L^2(R^2,R)}\|\frac{\partial u}{\partial x_2}\|_{L^2(R^2,R)} \leq$$

$$\leq 2\|u\|^2_{L^2(R^2,R)}(\|\frac{\partial u}{\partial x_1}\|_{L^2(R^2,R)} + \|\frac{\partial u}{\partial x_2}\|_{L^2(R^2,R)}) = 2\|u\|^2_{L^2(R^2,R)}\|\nabla u\|^2_{L^2(R^2,R)}$$

ce qui achève la démonstration. □

Démonstration du théorème 5.1.1.

On suppose que $v^{[1]}$ et $v^{[2]}$ sont deux solutions généralisées du problème (5.1)-(5.4). On pose

$$U = v^{[1]} - v^{[2]}.$$

Puisque $v^{[1]}$ et $v^{[2]}$ satisfont à (5.5), on a

$$\int_0^T\int_\Omega(-U\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \nu\sum_{i,j=1}^{2}\frac{\partial U_i}{\partial x_j}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j} - \sum_{i,j=1}^{2}v_j^{[1]}U_i\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j} - \sum_{i,j=1}^{2}U_jv_i^{[2]}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j})dxdt = . \tag{5.7}$$

$$= 0$$

Si on pose

$$g_i = \sum_j^2 \frac{\partial}{\partial x_j}(v_j^{[1]} U_i + U_j v_i^{[2]}). \tag{5.8}$$

la fonction U satisfaisant à (5.7) peut être considérée comme solution généralisée de l'équations

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \nu P_{V^0} \triangle U = -P_{V^0} g. \tag{5.9}$$

avec la condition initiale $U(0,.) = 0$. Si on multiplie les deux membres de (5.9) par U et on l'intégre sur Ω, plus précisément on les multiplie par une fonction approchée de U convenablement régularisée par rapport à t, on l'integre sur Ω et passe à la limite dans cette approximation, on obtient

$$\frac{1}{2}\|U(t,.)\|_{V^0}^2 + \nu \int_0^t \int_\Omega \sum_{i,j=1}^2 |\frac{\partial U_i}{\partial x_j}|^2 dx dt' = \int_0^t < -g, U >_{L^2(\Omega,R^2)} dt'.$$

En rappelant l'expression (5.8) de g et compte tenu de la relation

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^2 v_j^{[1]} U_i \frac{\partial U_i}{\partial x_j} dx = 0$$

on obtient

$$\frac{1}{2}\|U(t,.)\|_{V^0}^2 + \nu \int_0^t \int_\Omega \sum_{i,j=1}^2 |\frac{\partial U_i}{\partial x_j}|^2 dx dt' = \int_0^t \int_\Omega \sum_{i,j=1}^2 U_j v_i^{[2]} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} dx dt'. \tag{5.10}$$

On a

$$\int_0^t \int_\Omega \sum_{i,j=1}^2 U_j v_i^{[2]} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} dx dt' \leq$$

$$\leq \|U\|_{L^2(0,t;\widetilde{V}^1)}\|v^{[2]}\|_{L^4(0,t;L^4(\Omega,R^2))}\|U\|_{L^4(0,t;L^4(\Omega,R^2))}.$$

En vertu du lemme 5.1.1, on a

$$\|U\|_{L^4(0,t;L^4(\Omega,R^2))} = (2\int_0^t \|U\|^2_{L^2(\Omega,R^2)}\|U\|^2_{\widetilde{V}^1}dt')^{1/4} \leq$$

$$\leq 2^{-1/4}(2(\|U\|_{L^\infty(0,t;V^0)}\int_0^t \|U\|^2_{\widetilde{V}^1}dt')^{1/2})^{1/2} \leq$$

$$\leq 2^{-1/4}(\|U\|_{L^\infty(0,t;V^0)} + \|U\|^2_{L^2([0,t],\widetilde{V}^1)})^{1/2}.$$

$$\|U\|_{L^2(0,t;\widetilde{V}^1)}\|U\|_{L^4(0,t;L^4(\Omega,R^2))} \leq 2^{-1/4}\|U\|_{L^2(0,t;\widetilde{V}^1)}(\|U\|_{L^\infty(0,t;V^0)}+\|U\|^2_{L^2(0,t;\widetilde{V}^1)})^{1/2} \leq$$

$$\leq 2^{-1/4}(\frac{1}{2}\|U\|_{L^\infty(0,t;V^0)} + \|U\|^2_{L^2(0,t;\widetilde{V}^1)}).$$

$$\|v^{[2]}\|_{L^4(0,t;L^4(\Omega,R^2))} \leq 2^{1/4}\|v^{[2]}\|^{1/2}_{L^\infty(0,t;\widetilde{V}^1)}\|v^{[2]}\|^{1/2}_{L^2(0,t;\widetilde{V}^1)}.$$

Il résulte que

$$\int_0^t\int_\Omega \sum_{i,j=1}^2 U_j v_i^{[2]}\frac{\partial U_i}{\partial x_j}dxdt' \leq$$

$$\leq \|v^{[2]}\|^{1/2}_{L^\infty(0,t;\widetilde{V}^1)}\|v^{[2]}\|^{1/2}_{L^2([0,t],\widetilde{V}^1)}(\frac{1}{2}\|U\|_{L^\infty(0,t;V^0)} + \|U\|^2_{L^2(0,t;\widetilde{V}^1)}).$$

En substituant cette inégalité dans (5.10), on a

$$\frac{1}{2}\|U\|_{L^\infty(0,t;L^2(\Omega,R^2))} + \nu\|U\|^2_{L^2(0,t;\widetilde{V}^1)} \leq \tag{5.11}$$

$$\leq 2\|v^{[2]}\|^{1/2}_{L^\infty(0,t;\widetilde{V}^1)}\|v^{[2]}\|^{1/2}_{L^2(0,t;\widetilde{V}^1)}(\frac{1}{2}\|U\|_{L^\infty(0,t;V^0)} + \|U\|^2_{L^2(0,t;\widetilde{V}^1)}).$$

Si on a

$$2\|v^{[2]}\|^{1/2}_{L^\infty(0,t;\widetilde{V}^1)}\|v^{[2]}\|^{1/2}_{L^2([0,t],\widetilde{V}^1)} < \min(1,\nu). \tag{5.12}$$

alors de (5.11) il résulte que $U = 0$ dans l'intervalle $[0, t]$.

En vertu de l'hypothèse $v^{[2]} \in L^\infty(0, T; V^0) \cap L^2(0, T; \widetilde{V}^1)$, dans quelconque sous-intervalle $[t_0, t_1]$ de $[0, T]$ on a

$$\|v^{[2]}\|_{L^\infty(0,t;V^0)} \leq \|v^{[2]}\|_{L^\infty(0,t;V^0)} < \infty. \tag{5.13}$$

en outre $\forall \varepsilon > 0$ il existe une partition finie de l'intervalle $[0, T]$

$$0 = t_0 < t_1 < .... < t_k < .... < t_{N_\varepsilon - 1} < t_{N_\varepsilon} = T.$$

telle que pour tout $k = 0, 1, ..., N_\varepsilon$ on ait

$$\int_{t_k}^{t_k+1} \|v^{[2]}\|^2_{\widetilde{V}^1} dt' \leq \varepsilon. \tag{5.14}$$

En particulier, nous pouvons choisir un $\varepsilon > 0$ de manière telle que

$$2\varepsilon \|v^{[2]}\|^{1/2}_{L^\infty([0,t],V^0)} < \min(1, \nu). \tag{5.15}$$

Si on pose $t = t_1$ dans (5.11), en vertu des relations (5.13)-(5.15) la condition (5.12) sera vérifiée et donc on a $U = 0$ dans $[0, t_1]$. Il est clair que, compte tenu de la relation obtenue $U(t_1, .) = 0$, on peut appliquer le même raisonnement à l'intervalle $[t_1, t_2]$ et on obtient $U = 0$ dans $[t_1, t_2]$. De cette manière, compte tenu des relations (5.13)-(5.15) on peut répéter le même raisonnement dans les intervalles $[t_k, t_{k+1}]$ pour $k = 1, 2,$ jusqu'à $k = N_\varepsilon - 1$, ce qui nous permet d'obtenir $U = 0$ dans $\cup_{k=0}^{N_\varepsilon - 1}[t_k, t_{k+1}] = [0, T]$.
Le théorème est démontré.$\square$

5.2 problème d'unicité pour les équations d'un fluide dilatant

Pour les équations d'un fluide dilatant la présence du terme de la viscosité non-newtonienne peut être utile pour démontrer éventuellement l'unicité de la solution. Même si la complexicité du problème ne nous permet pas de développer l'argument de manière complète , il nous semble utile de donner ici quelques remarques essentielles sur ce problème.

Pour examiner le problème de l'unicité de la solution, on considère deux éventuelles solutions $v^{[1]}$ et $v^{[2]}$ de notre équation. Si on pose

$$u = v^{[1]} - v^{[2]},$$

on a

$$\partial u_i + (v^{[1]} \cdot \nabla) u_i + (u \cdot) v_i^{[2]} + \nu \triangle u_i =$$

$$= \beta \sum_{i,j=1}^{3} [\frac{\partial}{\partial x_j}(|D[v^{[1]}]|^{q-2}(\frac{\partial v_i^{[1]}}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j^{[1]}}{\partial x_i}) - \frac{\partial}{\partial x_j}(|D[v^{[2]}]|^{q-2}(\frac{\partial v_i^{[2]}}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j^{[2]}}{\partial x_i}))].$$

En multipliant par u_i et en faisant la somme pour $i = 1, 2, 3$ et l'intégration sur Ω, on obtient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|_{L^2}^2 + \int_{\Omega} (u \cdot \nabla) v^{[2]} \cdot u dx + \nu \|\nabla u\|_{L^2}^2 =$$

$$= -\beta \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{3} (|D[v^{[1]}]|^{q-2}(\frac{\partial v_i^{[1]}}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j^{[1]}}{\partial x_i}) - |D[v^{[2]}]|^{q-2}(\frac{\partial v_i^{[2]}}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j^{[2]}}{\partial x_i})) \cdot$$

$$\cdot (\frac{\partial v_i^{[1]}}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j^{[1]}}{\partial x_i} - \frac{\partial v_i^{[2]}}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j^{[2]}}{\partial x_i}) dx$$

Si on pose

$$\zeta_{ij} = (D[v^{[1]}])_{ij} = \frac{\partial v_i^{[1]}}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j^{[1]}}{\partial x_i},$$

$$\eta_{ij} = (D[v^{[2]}])_{ij} = \frac{\partial v_i^{[2]}}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j^{[2]}}{\partial x_i},$$

$$|\zeta| = \sum_{i,j=1}^{3} \zeta_{ij}^2 \quad , \quad |\eta| = \sum_{i,j=1}^{3} \eta_{ij}^2,$$

le second membre de cette égalité peut être écrite dans la forme

$$-\frac{\beta}{4}\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} (|\eta|^{q-2}\eta_{ij} - |\eta|^{q-2}\eta_{ij})(\zeta_{ij} - \eta_{ij})dx.$$

Dans cette expression

$$(\zeta_{ij})_{i,j=1,2,3} \quad , \quad (\eta_{ij})_{i,j=1,2,3}$$

peuvent être considérés comme vecteurs de R^9. Pour les vecteurs de R^n en général on a le lemme suivant.

Lemme *Soit ζ et $\eta \in R^n$ et $\alpha > 0$, on a*

$$(|\zeta|^\alpha\zeta - |\eta|^\alpha\eta)\cdot(\zeta - \eta) \geq 0. \tag{5.16}$$

Preuve.

En effit on a

$$(|\zeta|^\alpha\zeta - |\eta|^\alpha\eta)\cdot(\zeta - \eta) = |\zeta|^\alpha\zeta^2 - |\zeta|^\alpha\zeta\cdot\eta - |\eta|^\alpha\zeta\cdot\eta + |\eta|^\alpha\eta^2 =$$

$$= |\zeta|^{\alpha+2} + |\eta|^{\alpha+2} - |\zeta|^\alpha\zeta\cdot\eta - |\eta|^\alpha\zeta\cdot\eta.$$

D'autre part on a

$$|\zeta|^\alpha\zeta\cdot\eta \geq \frac{1}{2}|\zeta|^\alpha(|\zeta|^2 + |\eta|^2) = \frac{1}{2}|\zeta|^{\alpha+2}\frac{1}{2}|\zeta|^\alpha|\eta|,$$

$$|\eta|^\alpha\zeta\cdot\eta \geq \frac{1}{2}|\zeta|^\alpha(|\zeta|^2+|\eta|^2) = \frac{1}{2}|\zeta|^2|\eta|^\alpha\frac{1}{2}|\eta|^{\alpha+2}$$

On a en outre

$$|\zeta|^\alpha|\eta|^2 \leq \frac{\alpha}{\alpha+2}|\zeta|^{\alpha+2}+\frac{2}{\alpha+2}|\eta|^{\alpha+2},$$

$$|\zeta|^2|\eta|^\alpha \leq \frac{2}{\alpha+2}|\zeta|^{\alpha+2}+\frac{\alpha}{\alpha+2}|\eta|^{\alpha+2}.$$

(ces inégalités résultent de l'inégalité $a^\theta b^{(1-\theta)} \leq \theta a+(1-\theta)b \qquad (a,b\geq 0)$).
De ces inégalités on déduit l'inégalité

$$|\zeta|^\alpha\zeta\cdot\eta+|\eta|^\alpha\zeta\cdot\eta \leq |\zeta|^{\alpha+2}+|\eta|^{\alpha+2},$$

ou

$$-|\zeta|^\alpha\zeta\cdot\eta-|\eta|^\alpha\zeta\cdot\eta \geq -|\zeta|^{\alpha+2}-|\eta|^{\alpha+2},$$

ce qui implique que

$$|\zeta|^{\alpha+2}+|\eta|^{\alpha+2}-|\zeta|^\alpha\zeta\cdot\eta-|\eta|^\alpha\zeta\cdot\eta \geq 0,$$

on a donc

$$(|\zeta|^\alpha\zeta-|\eta|^\alpha\eta)\cdot(\zeta-\eta) \geq 0.$$

l'inégalité (5.16) est démontrée.□

Le lemme 5.2.1 est utile pour le problème de l'unicité. Mais pour démontrer l'unicité de la solution dans un domaine de dimension 3 il faudrait un théorème pour l'estimation de v dans $L^p(0,t;W_p^1(\Omega))$ qui devrait être obtenue à partir de l'estimation de $D[v] \in L^p(0,t;L^p(\Omega))$. Nous renvoyons ce problème aux études futures.

Bibliographie

[1] HISAO FUJUTA YASHIMA *cours de fluide Newtoniens*[Université 08 Mai -Guelma-Algerie]

[2] J.LELONG-FERRAND ET J.ARMAUDIES *Cours de mathématique tome 4 "équation differentielles, integrales multiples*[Dunod Université]

[3] ZAYNAB SALLOUM *Étude mathématique découlement de fluide visco-élastique dans des dommaines singuliers*[These de doctorat de l'université Paris Est]

[4] P.MARTINEZ AND J.VANCOSTNONLE *"Explosion" En temps fini de solutions bornées d'équation édifférentielles ordinaires*

[5] IOANI.VRABIE *Differential equations an introduction to basic concepts results and applications*["AL.I CUZA" université of Iasi and "O.Mayer" Mathématics Institute of the Romain Academy]