République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 – Guelma

Faculté de Mathématiques et de l'Informatique et Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire de Fin d'Etude
Master Académique en Mathématiques
Option : EDP

THEME

Schéma de discrétisation pour une équation dégénéré parabolique non linéaire

Présenté par :
Fettoum Aqila

Dirigé par:
Dr. Chaoui Abderrazek

Jury:

Dr. Ellaggoune Fateh
Mr.Chiheb Tarek

Session Juin 2012

Schéma de discrétisation pour une équation dégénérée parabolique non linéaire

FETTOUM AQILA

Remerciements

Louanges à Dieu le tout puissant de m'avoir donné courage, espoir et abnégation de réussir dans ce parcours d'érudition et de savoir.

Je tiens à exprimer toutes reconnaissances au Docteur: Chaoui Abderrazek de m'avoir proposé ce sujet de recherche et d'avoir dirigé mon travail.

Je lui témoigne aussi, ma gratitude pour son soutien, sa grande disponibilité et surtout ses conseils et ses encouragements tout au long de mes recherches.

J'adresse mes vifs remerciements au Docteur: Ellaggoune Fateh, pour le grand honneur qu'il me fait en présidant le jury de soutenance.

J'exprime également mes chaleureux remerciements au Docteur: Chiheb Tarek, pour l'honneur qu'ils m'ont fait d'avoir acceptés de faire partie de ce jury.

J'exprime également mon profonde gratitude et je sincères remercie envers ceux quia contribue de prés ou de loin dans le projet, sans oublier mon amis qui nos ont soutenus.

Une grande salutation pour tous les étudiants de la promotion 2012.

2 Position du probléme et éstimation a priori 13
2.1 Position du probléme 13
2.2 Discrétisation du temps : 15
2.3 Estimations a priori 16

3 Existence et unicité de la solution 29
3.1 La convergence : 29
3.2 l'éxistence de la solution 30
3.3 l'unicité de la solution 37

Introduction

De nombreux problèmes touchant à la physique on à l'ingénierie mathématique sont régits par des équations aux dérivées partielles.

Bien entendu, les solutions explicites de tels problèmes sont rarement connues on s'attache particulièrement à la résolution numérique de ses équations.

Evidement, le rôle du numéricien ou de l'ingénieur de calcul est de mettre en place une méthode numérique pour approcher au mieux la solution exacte.

Dans cette mémoire on est concerné par l'étude d'une équation parabolique dégénéré avec opérateur mémoire de Volterra.

Ce type des équations on le rencontre dans la modélisation du flux d'un liquide dans des milieux poreux. En appliquant la méthode de Roth on démontre l'existence et l'unicité d'une solution faible de notre problème.

Notons que : la méthode de Rothe trouve sont origine dans les travaux du mathématicien Allemand E. Rothe. En 1930 pour résoudre des équations paraboliques linéaires unidimensionnelles.

Chapitre 1

Rappel d'Analyse fonctionnelle

1.1 Espace de Lebesgue :

Définition 1.1 :

soit p un élément de $[1, +\infty]$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$; on appelle espace de Lebesgue, et on note $L^p(\Omega)$, l'espace vectoriel des fonctions numériques u de Ω dans $\mathbb{C}$, Lebesgue mesurables, vérifiant :

1.si $1 \leq p \leq +\infty$, $\int_\Omega |u(x)|^p \, dx < +\infty$,

2.si $p = +\infty$, $\sup\limits_{x\in\Omega} ess \, |u(x)| < +\infty$,où :

$$\sup_{x\in\Omega} ess \, |u(x)| = \inf \{ M \mid |u(x)| \leq M \quad p.p \}.$$

Quelques propriétés 1.2 :

a) L'application de $L^p(\Omega)$ dans $\mathbb{R}^+$:

$$u \mapsto \begin{cases} \|u\|_p = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leq p \leq +\infty \\ \\ \|u\|_\infty = \sup\limits_{x\in\Omega} ess |u(x)| \, , & p = +\infty, \end{cases}$$

définit une norme sur $L^p(\Omega)$, norme par laquelle $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach.

b) Dual.–pour tout réel p dans $[1, +\infty[$, le dual de $L^p(\Omega)$ est isomorphe algébriquement et topologiquement à $L^q(\Omega)$, avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, l'application de dualité est définit par :

$$L^p(\Omega) \times L^q(\Omega) \to \mathbb{C},$$

$$(u, v) \mapsto \int_\Omega u(x)v(x)dx,$$

pour tout Réel p dans $[1, +\infty[$, le bidual de $L^p(\Omega)$ s'identifie algébriquement et topologiquement à $L^p(\Omega)$.

on dit que l'espace $L^p(\Omega)$ est réflexif .

1.2 Espace de sobolev :

soit : $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq +\infty$.

On définit l'espace de Sobolev $W^{p,k}(\Omega)$ par :

$W^{p,k}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) : D^\alpha f$ existe et $D^\alpha f \in L^p(\Omega), \forall |\alpha| \leq k\}$.

On munit les espaces de sobolev par une structure d'espace normés dont les normes sont définies par :

$$\|f\|_{W^{p,k}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega |D^\alpha f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \qquad 1 \leq p \leq +\infty.$$

$$\|f\|_{W^{p,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha f(x)| \qquad p = +\infty.$$

si $p = 2$: H^k est un espace de Hilbert. H^k?? $H^k = W^{2,k}$

1.2.1 Espace de sobolev $H^1(\Omega)$

On appelle espace de Sobolev d'ordre 1 sur Ω, l'espace :

$$H^1(\Omega) = \left\{ f \in L^2(\Omega), \frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), 1 \leq i \leq n \right\}.$$

On munit $H^1(\Omega)$ du produit scalaire :

$$(f, g)_{1,\Omega} = \int_\Omega \left(fg + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} \right)$$

La norme correspendante sera :

$$\|f\|_{1,\Omega} = \sqrt{(f, f)_{1,\Omega}}.$$

1.2.2 Espace de sobolev $H_0^1(\Omega)$

soit Ω un ouvert borné régulier de classe C^1.

Alors $H\,_0^1(\Omega)$ est donné par :

$$H_0^1(\Omega) = \left\{v \in H^1(\Omega) \;\; v_{|\partial\Omega} = 0 \text{ sur } \partial\Omega\right\};$$

1.3 Les espases de Boschner

1) $C(I,\ L^2(\Omega)) = \{f : I \longrightarrow L^2(\Omega) \;\; quiassociéà \;\; t \longmapsto f(t) \in L^2(\Omega) \quad \text{continue}\}$

muni de la norme

$$\|f\|_{C(I,\ L^2(\Omega))} = \max_{t\in I} \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

2) $L^\infty(I,\ H_0^1(\Omega)) = \{f :\ I \longrightarrow H_0^1(\Omega) \;\; \text{essentiellement bornées}\}$

muni de la norme

$$\|f\|_{L^\infty\left(I,\ H_0^1(\Omega)\right)} = \sup_{t\in I} \|f\|_{H_0^1(\Omega)} \qquad p.p$$

3) $L^2(I,\ L^2(\Omega)) = \{f :\ I \longrightarrow L^2(\Omega) \;\; \text{à carré integrable}\}$

muni de la norme :

$$\|f\|_{L^2(I,\ L^2(\Omega))} = \int \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 \, dt \;\; < \infty$$

1.4 Convergence faible :

Soit E un espace de Banach

Définition 1.3.1 :

(x_n) converge faiblement dans E vers x si l'on a :

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \langle x', x_n \rangle = \langle x', x \rangle \Longleftrightarrow \lim_{x \longrightarrow +\infty} \langle x', x_n - x \rangle = 0, \quad \forall x' \in E'.$$

avec E' l'espace dual de E

proposition 1.3.1 : notation

on note $x_n \longrightarrow x$ faiblement dans E par : $x_n \rightharpoonup x$.

Remarque 1.3.1 :

1.si $x_n \longrightarrow x$ fortement $(\|x_n - x\|_E \longrightarrow 0) \Longrightarrow x_n \rightharpoonup x$ car :

$$\forall x' \in E' : |\langle x', x_n - x \rangle| \leq \|x'\| . \|x_n - x\| \longrightarrow 0$$

2.si $\dim E = n < \infty$ on a équivalence de deux notions :

$m \geq 1, x^m = (x_1^m, x_2^m, ..., x_n^m), \dim E' = n$;

$\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ base de $E \Longrightarrow \{e_j^*\}_{j=1}^n$ base dual tq :

$$e_j^*(e_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$x^m \rightharpoonup x = (x_1, x_2, ..., x_n) \Longrightarrow \forall i = \overline{1, n}, x' = e_i^*$$

$$\langle e_i^*, x^m - x \rangle = x_i^m - x_i \overset{m \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{i=1}^n |x_i^m - x_i| \overset{m \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0$$

alors : $\|x^m - x\|_1 \longrightarrow 0$ ce qui donne $\|x^m - x\| \longrightarrow 0$

car tout les normes de E sont équivalentes .

Théoreme 1.3.1 :

soit E un espace de Banach reflexif et x_n une suite bornée dans E, alors il est possible d' éxtraire une sous suite de x_n qui converge faiblement dans E .

Théoreme 1.3.2 :(de Risz)

E un espace de Hilbert, soit $f \in \acute{E}$, il existe un élément unique $u \in E$

tq : $\begin{cases} f(v) = (u, v) \\ \|f\|_* = \|u\| \end{cases}$ $\forall v \in E$.

Remarque 1.3.2 :

$v_n \rightharpoonup v \iff \forall u \in E, \lim\limits_{n\to\infty} (v_n, u) = (v, u)$

car :

$v_n \rightharpoonup v \iff \forall f \in \acute{E} : f(v_n) \longrightarrow f(v) \overset{\textbf{Théoreme de Risz}}{\Leftrightarrow} f(v_n) = (u, v_n)$

Théoreme :

Tout suite bornée dans un espace de Hilbert possède une sous suite faiblement convergente.

1.5 Les inégalités utilisées :

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

1.5.1 Inégalité de Cauchy-Schwartz :

$\forall u, v \in L^2(\Omega)$,

$$\left|\int_\Omega u.v \, dx\right| \leq \left(\int_\Omega |u|^2 \, dx\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |v|^2 \, dx\right)^{1/2}$$

$$\left|\int_\Omega \sum_{i=1}^N u_i v_i \, dx\right| \leq \left(\int_\Omega \sum_{i=1}^N u_i\right)^{1/2} \left(\int_\Omega \sum_{i=1}^N v_i\right)^{1/2}$$

preuve :

pour $\lambda \in \mathbb{R}$, définissons le trinôme du second degré

$p(\lambda) = (u + \lambda v, u + \lambda v) = \lambda^2 (v, v) + 2\lambda (u, v) + (u, u)$.

Comme $p(\lambda) \geq 0 \;\; \forall \lambda \in \mathbb{R}$, nécessairement le discriminant

$\Delta = (u,\ v)^2 - (u,\ u)(v,\ v)$ doit être négatif ou nul,

soit $|(u,\ v)| \leq (u,\ u)^{\frac{1}{2}} (v,\ v)^{\frac{1}{2}}$.

si $\Delta = 0$ alors le polynome $p(\lambda) = 0$ admet une racine double i.e

il existe λ_1 t.q $p(\lambda_2) = 0$ donc u et v sont colinéaires.

1.5.2 L'ε inégalité :

$$|xy| \leq \frac{\varepsilon}{2}x^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\, y^2, \quad \forall \varepsilon \geq 0$$

$\forall x, y$ $\forall x, y.$

1.5.3 Inégalité de Granwall :

Le cas continu : Soient $x(t) \geq 0$, $h(t)$, $y(t)$ des fonctions intégrables sur $[a, b]$.

si

$$y(t) \leq h(t) + \int_a^b x(\tau) y(\tau)\, d\tau \quad \forall t \in [a, b]$$

$$\text{alors : } y(t) \leq h(t) + \int_0^t \left(h(\tau) x(\tau) \exp\left(\int_\tau^t x(s)\, ds \right) \right) d\tau \quad \forall t \in [a, b]$$

En particulier si $x(t) \equiv c$ et $h(\tau)$ est croissante

alors : $y(t) \leq h(t) \exp(c(t-a))$, $\forall t \in [a, b]$

Le cas discret : soit $\{a_i\}$ une suite des nombre réels positifs tq : $a_1 \leq a$ et $a_i \leq bh\sum\limits_{k=1}^{i-1} a_k$, $\forall i = 2, \ldots$

avec a, b et h sont des constantes positives;

Alors : $a_i \leq a \exp(b(i-1)h)$, $i = 2, \ldots$

1.5.4 Inégalité de Poincaré :

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$: $\Omega \subset \tilde{\Omega} = \{x \in \mathbb{R}^n\ ,\ a < b$ pour certain $\xi \in \mathbb{R}^n\ : \|\xi\| = 1, a, b \in \mathbb{R}^n\}$

(c-à-d Ω est situé entre deux hyperplans paralleles disctencts avec

$\xi = b - a$).Alors il existe une constante universelle $c_0 > 0$ (i.e indepen-dante de Ω) telle que :

$$\|u\|_p = \left(\int_\Omega |u|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq c_0\xi \left(\int_\Omega |\nabla u|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}, \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)\,, 1 \leq p < \infty.$$

En particulier l'expression $\|\nabla u\|_p$ est une norme sur $W_0^1(\Omega)$ qui est equivalente à la norme $\|u\|_{W^{1,p}}$ sur $H_0^1(\Omega)$ l'expression $\int_\Omega \nabla u \nabla v$ est un produit scalaire qui induit la norme $\|\nabla u\|_{L^2}$ équivalent à la norme $\|u\|_{H^1}$

1.6 Quelque théorèmes utilisées :

Théorème : soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^n$, l'ensemble M des fonctions $f \in L^p(\Omega)$ est précompact ssi M est borné et équicontinue, c.à.d $\forall\varepsilon$, $\exists\delta > 0$ telle que $\forall f \in M$

$$\int_\Omega |f(x+y) - f(x)|^p\, dx < \varepsilon \qquad \textit{pour } y < \delta.$$

Notons que ce théorème connu sous le nom **critère de compacité de kolmogrov**

1.6.1 Théorème de Minty-browder :

soit $d : (0,T)\times\Omega\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application monotone pour la dèrnière variable, c.à.d : Q_T ??

$$\left(d\left(t,x,z_1\right)-d\left(t,x,z_2\right)\right)\left(z_1-z_2\right)\geq 0 \text{ pour } z_1,z_2\in\mathbb{R}^n.$$

et

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{dans } L^p\left(Q_T\right)^n.$$

$$d\left(t,x,u_n\right)\rightharpoonup\chi \qquad \text{dans } L^p\left(Q_T\right)^n.$$

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\sup\int_\Omega d\left(t,x,u_n\right)u_n dx\leq\int_\Omega\chi u dx.$$

Alors :$\chi = d\left(t,x,u\right)$.

1.6.2 Formule de Green :

on suppose que Ω est un ouvert borné de frontière $\Gamma=\partial\Omega$ régulière; alors :$\forall u,v\in H^1\left(\Omega\right)$ on a :

$$\int_\Omega\frac{\partial u}{\partial x_i}v dx=-\int_\Omega u\frac{\partial v}{\partial x_i}dx+\int_\Gamma uv\gamma_i d\sigma$$

ou γ_i la $i^{\underline{\grave{e}me}}$ composante du vecteur unitaire normale exterieure.

En remarquant $\Delta u=\operatorname{div}\left(\nabla u\right)$ alors on a :

$$\int_\Omega\Delta uv=-\int_\Omega\nabla u\ \nabla v+\int_\Gamma(\nabla u\ \eta)v$$

1.6.3 Théorème de Fubini :

Soit f une fonction intégrable sur $(E \times F, A \otimes B, \mu \otimes v)$ .Alors;

i) Pour presque tout $x \in E$, la fonction $y \longmapsto f(x,y)$ est dans $L^1(v)$; de plus la fonction $x \longmapsto \int_F f(x,y)\, v dy$, définit μ $p.p$, est μ intégrable.

ii) pour presque tout $y \in F$, la fonction $x \longmapsto f(x,y)$ est dans $L^1(\mu)$; de plus la fonction $y \longmapsto \int_E f(x,y)\, \mu dx$, définit v $p.p$ est v intégrable.

iii) On a enfin

$$\int_{E\times F} f d\mu \otimes v = \int_E \left[\int_F f(x,y)\, v dy\right] \mu dx = \int_F \left[\int_E f(x,y)\, \mu dx\right] v dy.$$

Chapitre 2

Position du probléme et éstimation a priori

2.1 Position du probléme

On va étudier le problème suivant :

$$\partial_t \beta(u(t)) - \Delta u(t) - \int_0^t a(t,s)\Delta u(s)ds \ = f(t) \ dans \ Q_T = (I \times \Omega) \tag{2.1}$$

avec la condition aux limites :

$$u(t) = 0 \ \text{ sur } \ I \times \partial\Omega.$$

et la condition initiale

$$u(0,x) = u_0(x) \quad \text{dans} \ \ \Omega$$

Où I représente un intervale du temps fini $(0,T)$, $T > 0$, Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$. Avec le bord de Ω est supposé Lipschitzien~~ne~~ cotinu~~e~~.

Le côté droite (f) est une fonction continue globalement Lipchitzienne.

càd :

$$|f(t) - f(s)| \leq C\,|t-s| \qquad \forall t, s. \tag{2.2}$$

(On peut remplacé la coté droite f par :

$$f = f\left(t, x, \beta(u(t,x)), \int_0^t K(t,s,x)\ \beta(u(s,x))ds\right).$$

On va considérer deux cas pour le noyau de Volterra $a \in L^1(I)$:

réguliére (vérifier(2.3) et une convolution singuliére(vérifier(2.4)) :

$$a(t,s) = a(t-s), \tag{2.3}$$

$$(-1)^j a^{(j)}(t) \geq 0, \forall t > 0,\ j = 0,1,2;\ \acute{a} \neq 0. \tag{2.4}$$

Notons que si une fonction a satisfait la relation (2.4), alors elle est définie positive, c'est à dire :

$$\int_0^T \int_0^t a(t-s)\phi(s)\phi(t)dsdt \geq 0, \forall T > 0,\ \phi \in C\ ([0,T]). \tag{2.5}$$

Le Problème (2.1) est non linéaire grace à la fonction β, qui vérifier :

$$\begin{aligned} &|\beta(t) - \beta(s)| \leq c\,|t-s|\ ,\quad \forall t,\ s, \quad \beta(0) = 0, \\ &\beta' \geq 0\ \ p.p \text{ dans } \mathbb{R}, \quad |\beta(s)| \leq c_1\,|s| - c \end{aligned} \tag{2.6}$$

La donné initiale vérifier

$$u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \quad . \tag{2.7}$$

2.2 Discrétisation du temps :

On divise l'intervale du temps I en n sous-intervales avec la même longueur $[t_{i-1,}t_i]$, $t_i = ih$, $h = \frac{T}{n}$.

Maintenant, nous allons introduire la notation suivante $\delta w_i = \frac{(w_i - w_{i-1})}{h}$,

et $w_i = w(t_i)$ pour tout fonction w .

On note par $(.,.)$ le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$, $\|u\|^2 = (u,u)$

et $\|u\|_{-1}$ représente la norme dans $H^{-1}(\Omega)$ L'espace dual de $H_0^1(\Omega)$.

En appliquant la formule de Green; le problème (2.1) est équivalent au problem variationnelle suivant : pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega)$: trouver u solution de :

$$(\partial_t \beta(u(t)), \varphi) + (\nabla u(t), \nabla \varphi) + \left(\int_0^t a(t,s) \nabla u(s), \nabla \varphi \right) = (f(t), \varphi) \tag{2.8}$$

alors le problème discret qui correspond à (2.8) est le suivant :

trouver $u_i \in H_0^1(\Omega)$, $(i = \overline{1,n})$ tel que pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega)$:

$$\delta\left(\beta\left(u_{i}\right),\varphi\right)+\left(\nabla u_{i},\nabla\varphi\right)+\left(\sum_{k=1}^{i}a\left(t_{i},t_{k-1}\right)\nabla u_{k}h,\nabla\varphi\right)=\left(f_{i},\varphi\right) \qquad (2.9)$$

Pour $i=\overline{1,n}$, (2.9) représente une équation non linéaire elliptique, grace à la coercivité de a .

Pour le noyau de volterra, nous avons $a\in L^{1}\left(I\right):a(t_{i},t_{i-1})h\longrightarrow 0$, quand $h\longrightarrow 0$, et par suite l'opérateur

$(\frac{\beta(u_i)}{h})-\Delta u_{i}-a\left(t_{i},t_{i-1}\right)h\ \Delta u_{i}$ est monotone est coercive ce qui implique l'existence d'une solution u_i à chaque pas du temps.

Remarque 2.1 :

c, ε,c_{ε} désignent des constantes positives indépendants du pas du temps h (ε petit et $c_{\varepsilon}=c\left(\varepsilon^{-1}\right)$ est grand).

2.3 Estimations a priori

Lemme 2.1 :

supposons que (2.2), (2.6), (2.7) et l'une de (2.3) ou (2.4) soient satisfaites alors :

$$\left\|\beta(u_{j})\right\|^{2}+\sum_{i=1}^{j}\left\|\beta(u_{i})-\beta\left(u_{i-1}\right)\right\|^{2}\leq c\left[1+\sum_{i=1}^{j}\left\|\nabla u_{i}\right\|^{2}h\right],\forall j=\overline{1,n}\,.$$

preuve :

posons $\varphi = \beta(u_i)h$ dans (2.9) faisons la somme sur $i = \overline{1, j}$ on obtient :

$$\sum_{i=1}^{j} (\beta(u_i) - \beta(u_{i-1}), \beta(u_i)) + \sum_{i=1}^{j} (\nabla u_i, \nabla\beta(u_i))\, h$$
$$+ \sum_{i=1}^{j} \left(\sum_{k=1}^{i} a(t_i, t_{k-1}) \nabla u_k h, \nabla\beta(u_i) \right) h$$
$$= \sum_{i=1}^{j} (f_i, \beta(u_i))\, h.$$

Maintenant, on va estimer chaque terme à coté :

$$2\sum_{i=1}^{j} (\beta(u_i) - \beta(u_{i-1}), \beta(u_i)) = \|\beta(u_j)\|^2 - \|\beta(u_0)\|^2 + \sum_{i=1}^{j} \|\beta(u_i) - \beta(u_{i-1})\|^2 ;$$

$$\sum_{i=1}^{j} (\nabla u_i, \nabla\beta(u_i))\, h \geq 0 ;$$

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i=1}^{j}(f_i,\beta(u_i))\,h\right| &\overset{\text{C.S}}{\leq} \sum_{i=1}^{j}\|f_i\|_{L^2}\,\|\beta(u_i)\|_{L^2}\,h \\
&\leq c\sum_{i=1}^{j}\|\beta(u_i)\|_{L^2}\;h \\
&\leq c\sum_{i=1}^{j}\|u_i\|_{L^2}\;h \qquad\qquad \text{d'aprés (2.6)}\,; \\
&\overset{\text{I.P}}{\leq} c\sum_{i=1}^{j}\|\nabla u_i\|_{L^2}\;h \\
&\overset{\varepsilon-\text{I}}{\leq} c\left(\frac{\varepsilon}{2}+\frac{1}{2\varepsilon}\sum_{i=1}^{j}\|\nabla u_i\|_{L^2}^2\right)h
\end{aligned}$$

En choisissant $\varepsilon = 1$, on obtient

$$\left|\sum_{i=1}^{j}(f_i,\beta(u_i))\,h\right| \leq c\left[1+\sum_{i=1}^{j}\|\nabla u_i\|^2\,h\right]$$

pour le cas singulière, a est un noyau de convolution, en utilisant d'abord

l'inégualité de Cauchy-Schwartz,

puis en changeant l'ordre de la somme on déduit :

$$
\begin{aligned}
\left|\sum_{i=1}^{j}\left(\sum_{k=1}^{i}a(t_i,t_{k-1})\nabla u_k h,\nabla\beta\left(u_i\right)\right)h\right| &\leq \sum_{i=1}^{j}\sum_{k=1}^{i}\left|\left(a(t_i,t_{k-1})\nabla u_k h,\nabla\beta\left(u_i\right)\right)\right|h\\
&\overset{C.S}{\leq} c\sum_{i=1}^{j}\sum_{k=1}^{i}\left\|\nabla u_k\right\|\left\|\nabla\beta\left(u_i\right)\right\|h^2 \qquad \text{voir[1]}\\
&\overset{\varepsilon-\mathrm{I}}{\leq} ch\sum_{i=1}^{j}\sum_{k=1}^{i}\left(1+\left\|\nabla u_k\right\|^2\right)h\\
&\leq ch\sum_{i=1}^{j}\sum_{i=1}^{j}\left(1+\left\|\nabla u_i\right\|^2\right)h\\
&\leq cjh\sum_{i=1}^{j}\left(1+\left\|\nabla u_i\right\|^2\right)h\\
&\leq c\sum_{i=1}^{j}\left(h+\left\|\nabla u_i\right\|^2 h\right)
\end{aligned}
$$

On choisissons n_0 tq : $\forall n \geq n_0,\ \frac{T}{n}=h<1$:

$$
\left|\sum_{i=1}^{j}\left(\sum_{k=1}^{i}a(t_i,t_{k-1})\nabla u_k h,\nabla\beta\left(u_i\right)\right)h\right| \leq c\left[1+\sum_{i=1}^{j}\left\|\nabla u_i\right\|^2 h\right].
$$

Si a est réguliére, on peut obtenir la même estimation avec un simple calcul.

En tenant compt de toutes ces considérations, on obtient

$$
\|\beta(u_j)\|^2-\|\beta(u_0)\|^2+\sum_{i=1}^{j}\|\beta(u_i)-\beta\left(u_{i-1}\right)\|^2+\sum_{i=1}^{j}\left(\nabla u_i,\nabla\beta\left(u_i\right)\right)h \leq c\left[1+\sum_{i=1}^{j}\left\|\nabla u_i\right\|^2 h\right]
$$

donc

$$\begin{aligned}
\|\beta(u_j)\|^2 + \sum_{i=1}^{j} \|\beta(u_i) - \beta(u_{i-1})\|^2 &\leq c\left[1 + \sum_{i=1}^{j} \|\nabla u_i\|^2 h\right] + \|\beta(u_0)\|^2 \left[1 + \sum_{i=1}^{j} \|\nabla u_i\|^2 h \right. \\
&\leq \max(c, \|\beta(u_0)\|^2) \left[1 + \sum_{i=1}^{j} \|\nabla u_i\|^2 h\right] \\
&\leq c\left[1 + \sum_{i=1}^{j} \|\nabla u_i\|^2 h\right]
\end{aligned}$$

On conclus la preuve.

Soit γ une fonction monotone croissante quelconque avec $\gamma(0) = 0$.

Nous introduissons

$\Phi_\gamma(z) = \int_0^z \gamma(s)\, ds$. On peut facilement vérifier

$$\gamma(z_1)(z_2 - z_1) \leq \Phi_\gamma(z_2) - \Phi_\gamma(z_1) \leq \gamma(z_2)(z_2 - z_1), \tag{2.10}$$

Quel est valable pour tout $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$. On peut généralizer cette assertion pour toute fonction abstraite monotones croissantes, en particulier pour $\gamma = \beta^{-1}$.

Lemme 2.2 :

Supposons que (2.2), (2.6), (2.7) et l'une de (2.3) ou (2.4) soient satisfaites.

Alors :

$$\sum_{i=1}^{j} \|\nabla u_i\|^2 h \leq c, \ \forall j = \overline{1, n}.$$

Preuve :

En choisissant $\varphi = u_i h$ dans (2.9) et fisant la somme de $i = \overline{1, j}$ on peut obtenir :

faisant

$$\sum_{i=1}^{j}(\beta(u_i)-\beta\left(u_{i-1}\right), u_i)+\sum_{i=1}^{j}(\nabla u_{i,} \nabla u_i)h+\sum_{i=1}^{j}\left(\sum_{k=1}^{i}a(t_i, t_{k-1})\nabla u_k h, \nabla u_i\right)h=\sum_{i=1}^{j}\left(f_i, u_i\right)h$$

Selon (2.10), on peut écrire pour le premier terme

$(\tilde{\Phi}_\beta\left(z\right) = z\,\beta\left(z\right) - \Phi_\beta\left(z\right) \geq 0)$:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{j}(\beta(u_i) - \beta\left(u_{i-1}\right), u_i) &= \sum_{i=1}^{j}(\beta(u_i), u_i) - \sum_{i=1}^{j}(\beta\left(u_{i-1}\right), u_i) \\
&= \sum_{i=1}^{j}(\beta(u_i), u_i) - \sum_{i=1}^{j}(\beta\left(u_{i-1}\right), u_i - u_{i-1}) - \sum_{i=1}^{j}(\beta\left(u_{i-1}\right), u_{i-1}) \\
&= \left(\beta\left(u_j\right), u_j\right) - \left(\beta\left(u_0\right), u_0\right) - \sum_{i=1}^{j}(u_i - u_{i-1}, \beta(u_{i-1})) \\
&\geq \left(\beta\left(u_j\right), u_j\right) - \left(\beta\left(u_0\right), u_0\right) - \sum_{i=1}^{j}\int_\Omega \left[\phi_\beta\left(u_i\right) - \phi_\beta\left(u_{i-1}\right)\right] \\
&= \left[\left(\beta\left(u_j\right), u_j\right) - \int_\Omega \phi_\beta\left(u_j\right)\right] - \left[\left(\beta\left(u_0\right), u_0\right) - \int_\Omega \phi_\beta\left(u_0\right)\right] \\
&= \int_\Omega [\tilde{\phi}_\beta\left(u_j\right) - \tilde{\phi}_\beta\left(u_0\right)] \\
&\geq -c.
\end{aligned}$$

Si a vérifie (2.4), alors :

$$\sum_{i=1}^{j}\left(\sum_{k=1}^{i} a(t_i,t_{k-1})\nabla u_k h, \nabla u_i\right) h \geq 0$$

grace à la coercivité de a càd :

$$h^2\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{i} a_{i+1-j}\phi^j\phi^i \geq 0 \qquad \forall\phi = \left(\phi^1,...,\phi^m\right) \in \mathbb{R}^m,\ m \geq 1. \tag{2.11}$$

Pour le cas réguliére (2.3) on en déduit

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i=1}^{j}\left(\sum_{k=1}^{i} a(t_i,t_{k-1})\nabla u_k h, \nabla u_i\right) h\right| &\leq \sum_{i=1}^{j}\sum_{k=1}^{i} \left|(a(t_i,t_{k-1})\nabla u_k, \nabla u_i)\right| h^2 \\
&\leq c\sum_{i=1}^{j}\sum_{k=1}^{i} \left|(\nabla u_k, \nabla u_i)\right| h^2 \qquad \text{voir [1]} \\
&\overset{\text{C.S}}{\leq} ch^2\sum_{i=1}^{j}\sum_{k=1}^{i} \|\nabla u_k\| \, \|\nabla u_i\| \\
&\overset{\varepsilon-\text{I}}{\leq} ch^2\sum_{k=1}^{i}\sum_{k=1}^{i} \left(\tfrac{1}{2\varepsilon}\|\nabla u_k\|^2 + \tfrac{\varepsilon}{2}\|\nabla u_i\|^2\right) \\
&\leq ch^2\ \tfrac{\varepsilon}{2}\left(\sum_{i=1}^{j} i\ \|\nabla u_i\|^2\right) + ch^2\tfrac{1}{2\varepsilon}\sum_{i=1}^{j}\sum_{k=1}^{i}\|\nabla u_k\|^2 \\
&\leq \varepsilon h\sum_{i=1}^{j}\|\nabla u_i\|^2 + c_\varepsilon h^2\sum_{i=1}^{j}\sum_{k=1}^{i}\|\nabla u_k\|^2 \\
&\leq \varepsilon\sum_{i=1}^{j}\|\nabla u_i\|^2 h + c_\varepsilon + c_\varepsilon\sum_{i=1}^{j}\sum_{k=1}^{i}\|\nabla u_k\|^2 h^2
\end{aligned}$$

Pour le côté droite on obtien

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i=1}^{j}(f_i,u_i)h\right| &\leq \sum_{i=1}^{j}|(f_i,u_i)|\,h \overset{\text{C.S}}{\leq} \sum_{i=1}^{j}\|f_i\|\,\|u_i\|\,h \\
&\leq c\sum_{i=1}^{j}\|u_i\|\,h \overset{\text{I.P}}{\leq} c\sum_{i=1}^{j}\|\nabla u_i\|\,h \\
&\overset{\varepsilon\text{--I}}{\leq} c\left(\frac{1}{2\varepsilon}+\frac{\varepsilon}{2}\|\nabla u_i\|^2\right)h
\end{aligned}$$

$$\leq c_\varepsilon + \varepsilon\sum_{i=1}^{j}\|\nabla u_i\|^2\,h.$$

Donc :

$$-c+\sum_{i=1}^{j}\|\nabla u_i\|^2\,h \;\leq\; c_\varepsilon+\varepsilon\sum_{i=1}^{j}\|\nabla u_i\|^2\,h+c_\varepsilon\sum_{i=1}^{j}\sum_{k=1}^{i}\|\nabla u_k\|^2\,h^2$$

Alors

$$(1-\varepsilon)\sum_{i=1}^{j}\|\nabla u_i\|^2\,h-c-c_\varepsilon\leq c_\varepsilon h\sum_{i=1}^{j}\sum_{k=1}^{i}\|\nabla u_k\|^2\,h$$

En choisissant $0<\varepsilon<1$ et on divise sur $(1-\varepsilon)$ on obtient

$$\sum_{i=1}^{j}\|\nabla u_i\|^2\,h-c\leq ch\sum_{k=1}^{j}\sum_{i=1}^{k}\|\nabla u_i\|^2\,h$$

En appliquant le lemme de Granwall, on obtient le résultat souhaité.

D'aprés les lemmes 2.2, 2.1 et l'hypothèse sur β, nous avons :

$$\|u_j\|\leq c,\qquad j=\overline{1,n} \tag{2.12}$$

Preuve : On a d'aprés le lemme 2.1 :

$$\|\beta(u_j)\|^2 + \sum_{i=1}^{j} \|\beta(u_i) - \beta(u_{i-1})\|^2 \leq c \left[1 + \sum_{i=1}^{j} \|\nabla u_i\|^2 h\right], \forall j = \overline{1,n}$$

et On a d'aprés le lemme 2.2 :

$$\sum_{i=1}^{j} \|\nabla u_i\|^2 h \leq c$$

Alors

$$\begin{aligned} \|\beta(u_j)\|^2 &\leq c(1+c), \qquad \forall j = \overline{1,n} \\ &\leq c \end{aligned}$$

Cela implique que $\|\beta(u_j)\|$ est bornée.

Maintenant, On suppose que $\beta(u_i) = \alpha_i$ avec $\alpha_i \in \mathbb{R}$, donc $u_i = \beta^{-1}(\alpha_i)$;

comme β est bornée alors β^{-1}est aussi bornée

donc $\|u_i\| = \left\|\beta^{-1}(\alpha_i)\right\| \leq c$, on conclus la preuve.

Soit la fonction linéaire par morceaux w_n :

$$w_n(0) = \beta(u_0),$$

$$w_n(t) = \beta(u_{i-1}) + (t - t_{i-1})\,\delta\beta(u_i) \text{ pour } t \in (t_{i-1}, t_i)$$

Et la fonction d'état $\overline{w_n}, \overline{u}_n$:

$$\overline{w_n}(0) = \beta(u_0), \quad \overline{w_n}(t) = \beta(u_i),$$

$$\overline{u_n}(0) = u_{0,} \quad \overline{u_n}(t) = u_i \quad \text{pour } t \in [t_{i-1}, t_i].$$

Lemme 2.3 :

supposons que (2.2), (2.6), (2.7) sont vérifiées, et l'une de (2.3) ou (2.4) soit satisfaite. Alors

$$\int_0^T \|\partial_t w_n\|_{-1}^2 \leq c.$$

preuve :

L'identité (2.9) peut être réécrite pour $t \in [0, T]$ comme suit :

$$(\partial_t w_n (t), \varphi) + (\nabla \bar{u}_n (t), \nabla \varphi) + \left(\sum_{k=1}^{i} a(t_i, t_{k-1}) \nabla \bar{u}_n h, \nabla \varphi \right) = (\bar{f}_n, \varphi). \tag{2.13}$$

~~Rappelant~~ la définition de la norme dual :
Rappelons

$$\|\partial_t w_n\|_{-1} = \sup_{\|\varphi\|_1 \leq 1} |(\partial_t w_n, \varphi)|$$

et en appliquant le lemme 2.2, on conclus la preuve .

A la fin de cette section, on va démontrer quelques estimations a priori

pour les noyaux de Volterra régulières.

Lemme 2.4 : (noyau intégral régulière) :

Supposant que (2.2), (2.3), (2.6) et (2.7) sont satisfaites. Alors :

$$\sum_{i=1}^{j}\|\delta\beta(u_i)\|^2 h+\|\nabla u_j\|^2+\sum_{i=1}^{j}\|\nabla u_i-\nabla u_{i-1}\|^2\leq c,\qquad \forall j=\overline{1,n}.$$

preuve :

En choisissant $\varphi=u_i-u_{i-1}$ dans (2.9) et en faisant la somme de $i=\overline{1,j}$

on peut écrire

$$\sum_{i=1}^{j}(\delta\beta(u_i),u_i-u_{i-1})+\sum_{i=1}^{j}(\nabla u_i,\nabla u_i-\nabla u_{i-1})$$

$$+\sum_{i=1}^{j}\left(\sum_{k=1}^{i}a(t_i,t_{k-1})\nabla u_k h,\nabla u_i-\nabla u_{i-1}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{j}(f_i,u_i-u_{i-1})$$

Maintenant, on va estimer chaque terme à part.

Un Calcul simple implique :

$$\sum_{i=1}^{j}(\delta\beta(u_i),u_i-u_{i-1})\geq c_0\sum_{i=1}^{j}(\delta\beta(u_i),\delta\beta(u_i))\,h,$$

$$\sum_{i=1}^{j}(\nabla u_i,\nabla u_i-\nabla u_{i-1})=\frac{1}{2}\left[\|\nabla u_j\|^2-\|\nabla u_0\|^2+\sum_{i=1}^{j}\|\nabla u_i-\nabla u_{i-1}\|^2\right]$$

Selon sommation d'Abel et de (2.12) on en déduit

$$\left|\sum_{i=1}^{j}(f_i, u_i - u_{i-1})\right| \leq c$$

pour le terme de Volterra on utilise sommation par parties et le lemme 2.2 on obtient :

$$\left|\sum_{i=1}^{j}\left(\sum_{k=1}^{i}a(t_i, t_{k-1})\nabla u_k h, \nabla u_i - \nabla u_{i-1}\right)\right| \leq \varepsilon \left\|\nabla u_j\right\|^2 + c_\varepsilon.$$

En choisissant ε suffi samment petit, on conclut la preuve.

Chapitre 3

Existence et unicité de la solution

3.1 La convergence :

D'aprés les estimations a priori du lemme 2.1 - 2.3 on aura

$$\max_{t\in[0,T]} \|\bar{w}_n(t)\| + \int_0^T \|\partial_t w_n\|_{-1}^2 \leq c.$$

Le lemme 1.3.13 dans [2] implique l'existence d'un certain

$w \in C(I, H^{-1}(\Omega)) \cap L^\infty(I, L^2(\Omega))$ avec $\partial_t w \in L^2(I, H^{-1}(\Omega))$ et

une sous suite de w_n (qu'on la note encore w_n), pour chaque $(t \in I)$

$$w_n \longrightarrow w \quad \text{dans} \quad C(I, H^{-1}(\Omega)); \qquad \bar{w}_n(t) \rightharpoonup w\ (t) \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega)$$

$$w_n \rightharpoonup w \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega)\,; \quad \partial_t w_n \rightharpoonup \partial_t w \quad \text{dans} \quad L^2(I, H^{-1}(\Omega)) \tag{3.14}$$

L'étape prochaine est consacré à prouver la compacité relative de w_n dans L^2.

Théorème 3.1 :

On suppose que (2.2), (2.6), (2.7) et l'une de (2.3) ou (2.4) soient satisfaites, alors il existe une sous suite de w_n (qu'on la note encore par w_n)telle que :

$$w_n \longrightarrow w \quad \text{dans} \quad L^2(\Phi_T).$$

Preuve :

Soit $w_n(t,x) = 0$ si $t \notin I$ ou $x \notin \Omega$. d'aprés le critère de compacité de Kolmogrov (voir[3]), il suffi t de prouver

$$(1)\int_0^T \int_\Omega |w_n(t,x)|^2 \, dxdt \leq c, \quad \forall n \ ;$$

$$(2)\int_0^T \int_\Omega |w_n(t+s,x+h) - w_n(t,x)|^2 \, dxdt \longrightarrow 0$$

pour s, $|h| \longrightarrow 0$ uniformément par rapport à n.

Ceci peut être obtenu de manière simple en utilisant des estimations a priori de la dernière section.

3.2 l'éxistence de la solution

Maintenant, on va démontrer l'existence d'une solution au problème (2.1).

Théorème 3.2 : (Existence)

on suppose que (2.2), (2.6), (2.7) et l'une de (2.3) ou (2.4) soient satisfaites alors il existe un $u \in L^2(I, H_0^1(\Omega))$ avec $\beta(u) \in C(I, H^{-1}(\Omega))$; $\partial_t \beta(u) \in L^2(I, H^{-1}(\Omega))$ qui résout (2.8).

Preuve :

d'aprés le lemme 2.2, la réflexivité de $L^2(I, H_0^1(\Omega))$ et (3.14) on peut extraire une sous suite de u_n (on la note encore par u_n) tq $u_n \rightharpoonup u$ dans

$L^2(I, H_0^1(\Omega))$;

Le Théorème 3.1 et le Théorème de Minty-Browder (voir [4]), nous donne : $w = \beta(u)$.

En integrant l'identité (2.13) sur l'interval $(0, T)$ et en faisant tendre $n \longrightarrow \infty$, par un calcul simple on arrive à (2.8).

On va faire la preuve uniquement pour le terme de Volterra.

d'aprés le lemme 2.2 et les propriétés du noyau a on aura pour $t \in (t_{i-1}, t_i)$

$$\left| \int_0^T \left(\sum_{k=1}^{i} a(t_i, t_{k-1}) \nabla \bar{u}_n(t_k) h, \nabla \varphi \right) dt - \int_0^T \left(\int_0^t a(t, s) \nabla \bar{u}_n(s) \, ds, \nabla \varphi \right) dt \right| \longrightarrow 0$$

quand $h \longrightarrow 0$.

Comme $\bar{u}_n \rightharpoonup u$ dans $L^2(I, H_0^1(\Omega))$ on en déduit

Preuve :

Le lemme 2.4 implique

$$\max_{t\in[0,T]} \|\nabla \bar{w}_n(t)\| + \int_0^T \|\partial_t w_n\|^2 \leq c.$$

d'aprés le lemme 1.3.13 dans [2], il existe un certain

$w \in C\left(I, L^2(\Omega)\right) \cap L^\infty\left(I, H_0^1(\Omega)\right)$ avec $\partial_t w \in L^2\left(I, L^2(\Omega)\right)$ et une sous suite de w_n (noté encore w_n) pour chaque ($t \in I$)

$$\begin{aligned} &w_n \longrightarrow w && \text{dans } C\left(I, L^2(\Omega)\right), \quad \bar{w}_n(t) \rightharpoonup w(t) \quad \text{dans } H_0^1(\Omega), \\ &w_n(t) \rightharpoonup w(t) && \text{dans } H_0^1(\Omega), \ \partial_t w_n \rightharpoonup \partial_t w \quad \text{dans } L^2\left(I, L^2(\Omega)\right) \end{aligned} \tag{3.15}$$

Le lemme 3.2 et la réflexivité de $L^2\left(I, H_0^1(\Omega)\right)$ impliquent qu'il existe une sous suite de u_n (noté encore u_n) telle que $u_n \rightharpoonup u$ dans $L^2(I, H_0^1(\Omega))$. En utilisant (3.15) et le théorème de Minty-Browder, on obtient $w = \beta(u)$, en suite en intégrant l'identité (2.13) sur l'intervale $(0, T)$, et en faisant tendre $n \longrightarrow \infty$, en arrive à (2.8).

Maintenant, on va montrer que $u_n \longrightarrow u$ dans $L^2\left(I, H_0^1(\Omega)\right)$, on note par $w(s)$ une fonction réelle positive générique vérifiant (pas forcément la même dans différent places)

$$\lim_{s \longrightarrow 0} w(s) = 0.$$

Soit $\xi \in [t_{j-1}, t_j]$ un point arbitraire dans $(0.T)$,

posons $\varphi = \bar{u}_n(t) - u(t)$ dans (2.13), puis intégrons par rapport au temps sur $(0, \xi)$ il resulte :

$$\begin{aligned}\int_0^{\xi} (\partial_t w_n, \bar{u}_n - u) + \int_0^{\xi} (\nabla \bar{u}_n, \nabla[\bar{u}_n - u]) \\ + \int_0^{\xi} \left(\sum_{k=1}^{i} a(t_i, t_{k-1}) \nabla \bar{u}_n(t_k) h, \nabla [\bar{u}_n(t) - u(t)] \right) dt \\ = \int_0^{\xi} (\bar{f}_n, \bar{u}_n - u).\end{aligned} \tag{3.16}$$

La continuité Lipschitzienne de f et $u_n \rightharpoonup u$ dans $L^2(I, L^2(\Omega))$ implique :

$$\left| \int_0^{\xi} (\bar{f}_n, \bar{u}_n - u) \right| \leq \left| \int_0^{\xi} (\bar{f}_n - f, \bar{u}_n - u) \right| + \left| \int_0^{\xi} (f, \bar{u}_n - u) \right| = w(h); \tag{3.17}$$

En outre, u_n converge faiblement vers u dans $L^2(I, H_0^1(\Omega))$. Cela donne

$$\begin{aligned}\int_0^{\xi} (\nabla \bar{u}_n, \nabla[\bar{u}_n - u]) &= \int_0^{\xi} \|\nabla \bar{u}_n - \nabla u\|^2 - \int_0^{\xi} (\nabla u, \nabla[\bar{u}_n - u]) \\ &\geq \int_0^{\xi} \|\nabla \bar{u}_n - \nabla u\|^2 - \omega(h).\end{aligned} \tag{3.18}$$

Sachant que le noyau integralle a est régulière, donc pour $t \in (t_{i-1}, t_i)$, nous avons

$$\left| \int_\Omega \sum_{k=1}^{i} a(t_i, t_{k-1}) \nabla \bar{u}_n(t_k) h - \int_\Omega \int_0^t a(t,s) \nabla \bar{u}_n(s)\, ds \right| = \omega(h).$$

Par conséquent

$$\left| \int_0^\xi \left(\sum_{k=1}^{i} a(t_i, t_{k-1}) \nabla \bar{u}_n(t_k) h, \nabla [\bar{u}_n(t) - u(t)] \right) dt \right|$$

$$\leq \left| \int_0^\xi \left(\int_0^t a(t,s) \nabla \bar{u}_n(s)\, ds, \nabla [\bar{u}_n(t) - u(t)] \right) dt \right| + \omega(h)$$

$$\leq \left| \int_0^\xi \left(\int_0^t a(t,s) \nabla [\bar{u}_n(s) - u(s)]\, ds, \nabla [\bar{u}_n(t) - u(t)] \right) dt \right| + \omega(h)$$

$$\leq \varepsilon \int_0^\xi \|\nabla \bar{u}_n(t) - \nabla u(t)\|^2 dt + c_\varepsilon \int_0^\xi \int_0^t \|\nabla \bar{u}_n(s) - \nabla u(s)\|^2 ds dt + \omega(h). \tag{3.19}$$

Il rest à estimer l'intégrale par rapport au temps contenant la dérivée en temps $\partial_t w_n(t)$.

En tenant compte $\partial_t w_n \rightharpoonup \partial_t \beta(u)$ dans $L^2(I, L^2(\Omega))$, on peut écrire

$$\int_0^\xi (\partial_t w_n(t), u(t))\, dt \longrightarrow \int_0^\xi (\partial_t \beta(u(t)), u(t))\, dt$$

avec
$$\int_0^\xi (\partial_t \beta(u(t)), u(t))\, dt = \int_\Omega \int_0^\xi \partial_t \Phi_{\beta^{-1}}(\beta(u))$$
$$= \int_\Omega \Phi_{\beta^{-1}}(\beta(u(\xi))) - \int_\Omega \Phi_{\beta^{-1}}(\beta(u(0))). \tag{3.20}$$

En appliquant le lemme 3.4, on aura

$$\int_0^{\xi} (\partial_t w_n, \bar{u}_n) = \int_0^{t_j} (\partial_t w_n, \bar{u}_n) + \int_{t_j}^{\xi} (\partial_t w_n, \bar{u}_n) \geq \int_0^{t_j} (\partial_t w_n, \bar{u}_n) - \omega(h) \tag{3.21}$$

En outre, on peut déduire

$$\begin{aligned} \int_0^{t_j} (\partial_t w_n, \bar{u}_n) &= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{j} \left[\Phi_{\beta^{-1}}(\beta(u_i)) - \Phi_{\beta^{-1}}(\beta(u_{i-1}))\right] \\ &= \int_{\Omega} \left[\Phi_{\beta^{-1}}(\beta(u_j)) - \Phi_{\beta^{-1}}(\beta(u_0))\right]. \end{aligned} \tag{3.22}$$

On pose $\gamma = \beta^{-1}$, $z_2 = \beta(u_j)$, $z_1 = \beta(u(\xi))$ dans (2.10) on obtien

$$\begin{aligned} (u(\xi), \bar{w}_n(\xi) - \beta(u(\xi))) \leq & \int_{\Omega} \left[\Phi_{\beta^{-1}}(\bar{w}_n(\xi)) - \Phi_{\beta^{-1}}(\beta(u(\xi)))\right] \\ & \leq (\bar{u}_n(\xi), \bar{w}_n(\xi) - \beta(u(\xi))). \end{aligned}$$

d'autre part

$$|(\bar{u}_n(\xi) - u(\xi), \bar{w}_n(\xi) - \beta(u(\xi)))| \leq c \|\bar{w}_n(\xi) - \beta(u(\xi))\| \longrightarrow 0;$$

puisque $\bar{w}_n \longrightarrow \beta(u)$ dans $C(I, L^2(\Omega))$. quant $n \longrightarrow \infty$:

$$\int_{\Omega} \Phi_{\beta^{-1}}(\bar{w}_n(\xi)) \longrightarrow \int_{\Omega} \Phi_{\beta^{-1}}(\beta(u(\xi))) ; \tag{3.23}$$

En prenant en cosidération (3.16) - (3.23) et en choisissant ε suffi sament petit, on arrive à

$$\int_{\Omega} \|\nabla \bar{u}_n(t) - \nabla u(t)\|^2 dt \leq w(h) + c\int_0^{\xi}\int_0^t \|\nabla \bar{u}_n(s) - \nabla u(s)\|^2 dsdt\,;$$

qui est vrai $\forall \xi \in (0,T)$.

Le lemme de Granwall implique

$$\int_0^{\xi} \|\nabla \bar{u}_n(t) - \nabla u(t)\|^2 dt \leq w(h)\,;$$

ce qui achève la démonstration.

3.3 l'unicité de la solution

On va démontrer l'unicité de la solution uniquement dans le cas ou le noyau a est régulière.

Théorème 3.4 : (unicité) :

On suppose que (2.2), (2.6) et (2.7) sont satisfaites, de plus, on suppose que a est :

(i) soit constante.

(ii) soit $(-1)^j b^{(j)}(t) \geq 0 \quad \forall t > 0;\ j = 0, 1, 2;\ b' \neq 0.$

avec $b(t) = \int_0^t a(s)\, ds.$

Alors, la solution de (2,8) est unique.

Preuve :

On suppose que u et v deux solutions de (2.4).

en intégrant (2.4) par rapport au temps sur $(0,\eta)$ avec $\eta \in (0,T)$,

faisons la différence pour les deux solutions,

en posant $\varphi = u(\eta) - v(\eta)$ et en intégrant une autre fois sur $(0,\xi)$ par rapport au temps pour $\xi \in (0.T)$,

on peut écrire

$$\int_0^\xi (\beta(u) - \beta(v), u - v) + \int_0^\xi \left(\int_0^\eta \nabla [u(t) - v(t)]\, dt, \nabla [u(\eta) - v(\eta)] \right) d\eta$$
$$+ \int_0^\xi \left(\int_0^\eta \int_0^t a(t-s) \nabla [u(s) - v(s)]\, ds dt, \nabla [u(\eta) - v(\eta)] \right) d\eta = 0. \tag{3.24}$$

La continuité Lipchitzienne de β nous donne

$$\int_0^\xi (\beta(u(\eta)) - \beta(v(\eta)), u(\eta) - v(\eta))\, d\eta \geq c_0 \int_0^\xi \|\beta(u(\eta)) - \beta(v(\eta))\|^2\, d\eta.$$

L'intégration par partie implique

$$\int_0^\xi \left(\int_0^\eta \nabla [u(t) - v(t)]\, dt, \nabla [u(\eta) - v(\eta)] \right) d\eta = \frac{1}{2} \left\| \nabla \int_0^\xi [u(\eta) - v(\eta)]\, d\eta \right\|^2.$$

on note par $g(s) = \nabla [u(s) - v(s)]$,

premiérement on va considérer le cas (ii), en appliquant le théorème de

Fubini on obtient

$$\int_0^\eta \int_0^t a(t-s)g(s)\,dsdt = \int_0^\eta g(s)\int_s^\eta a(t-s)dtds$$
$$= \int_0^\eta b(\eta - s)\,g(s)\,ds.$$

Puisque b est définie positive il s'ensuit

$$\int_0^\xi \left(\int_0^\eta \int_0^t a(t-s)g(s)\,dsdt, g(\eta)\right) d\eta = \int_\Omega \int_0^\xi \int_0^\eta b(\eta - s)\,g(s)\,dsg(\eta)\,d\eta \geq 0.$$

En tenant count tous les consédirations ci-dessus avec (3.24), on aura

$$\int_0^\xi \|\beta(u(\eta)) - \beta(v(\eta))\|^2\,d\eta \leq 0,$$

ce qui implique $\beta(u) = \beta(v)$ et $\partial_t\beta(u) = \partial_t\beta(v)$.

par substraction de (2.4) pour les deux solutions u et v,

avec $\varphi = u(t) - v(t)$, l'intégrale par rapport au temps sur $(0, T)$, nous donne

$$\int_0^T \|g(t)\|^2\,dt + \int_0^T \left(\int_0^t a(t-s)g(s)\,ds, g(t)\right) dt = 0.$$

un calcul simple implique

$$\int_0^T \|g(t)\|^2\,dt \leq c\int_0^T \int_0^t \|g(s)\|^2\,dsdt,$$

on appliquant l'inégalité de Granwall on en déduit $g(s) = 0$ c.à.d l'unicité de la solution dans le cas (ii).

On considère maintenant le cas (i). L'intégration par partie implique

$$\left|\int_0^{\xi}\left(\int_0^{\eta}\int_0^{t} g(s)\,dsdt, g(\eta)\right)d\eta\right|$$

$$= \left|\left(\int_0^{\xi}\int_0^{\eta} g(s)\,dsd\eta, \int_0^{\xi} g(s)\,ds\right) - \int_0^{\xi}\left(\int_0^{\eta} g(s)\,ds, \int_0^{\eta} g(s)\,ds\right)d\,\eta\right|$$

$$\leq \varepsilon\left\|\nabla\int_0^{\xi}[u(s)-v(s)]\,ds\right\|^2 + c_{\varepsilon}\int_0^{\xi}\left\|\nabla\int_0^{\eta}[u(s)-v(s)]\,ds\right\|^2 d\eta.$$

Choisissant ε suffi sament petit, (3.24) nous donne

$$\int_0^{\xi}\|\beta(u(\eta))-\beta(v(\eta))\|^2 d\eta + \left\|\nabla\int_0^{\xi}[u(\eta)-v(\eta)]\,d\eta\right\|^2 \leq c\int_0^{\xi}\left\|\nabla\int_0^{\eta}[u(s)-v(s)]\,ds\right\|^2 d\eta.$$

On applique l'inégalité de Granwall on obtient

$$\left\|\nabla\int_0^{\xi}[u(\eta)-v(\eta)]\,d\eta\right\|^2 = 0,$$

donc

$$\int_0^{\xi}\|\beta(u(\eta))-\beta(v(\eta))\|^2 d\eta = 0.$$

De maniére analogue de ce qu'on a fait dans le cas (ii) on obtient le resultat sohaité.

Remarque 3.1 :

Notons que l'unicité de la solution implique la convergence de toute les sous suites w_n, u_n vers $\beta(u)$, u, respectivement.

Bibliographie

[1] M.Slodička, An approximation scheme for a non linear degenerate parabolic equation with a second-order differential Volterra operator, computational and applied Mathematics 168(2004) 474-458.

[2] J.Kačur, Method of Rothe in Evolution equations, in : Teubner-Texte zur Mathematic, Vol .80, Teubner, Leipzig, 1985.

[3] Necas, J.(1967), les méthodes directes en théorie des equations elliptiques prague : Academie.

[4] Evan, L.C.(1998), partial Differential equation, providence, RI :American Mathematicl Society.

[5] H.Bediafi et N.Khechaimia, Méthode de Rotheappliquée sur un problème hyperbolique intégrodifférentiaelle avec conditions intégrales, setenue en Juin 2011.

[6] Jean-Emile Rakotoson et Jean-Michel Rakotoson, Analyse fonctionnelle appliquée aux équations aux dérivées partielles, Pesses Universitaires de France.

[7] H.Brezis, Analyse fonctionnelle (Théorie et applications).Masson,paris,1983.

[8] Charles-Michel Marle &Philippe Pilibossian,Distributions Espaces de Sobolev Applications, Ellipses.