République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 – Guelma

Faculté de Mathématiques et de l'Informatique et Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire de Fin d'Etude
Master Académique en Mathématiques
Option : Analyse

THEME

Le laplacien sur un ouvert de R(N)

Présenté par :

NAILI SAMEH

Jury :

CHAOUIA BENRABAH .R

Session Juin 2012

Introduction

Les mathématiques sont considérées comme des sciences exactes qui regroupent l'algébre, l'analyse et la géométrie.

La théorie des semi groupes d'opérateurs linéaires sur des espaces de Banach devient un outil indispensable dans beaucoup de problémes de l'analyse moderne tels que : équations aux dérivées partielles,équations intégro différentielles,équations d'évolutions de la chaleur,d'onde et de schrodinger.

Dans le premier chapitre,on expose des résultats qui seront utiles par la suite telsque :

Les espaces L^p,formule de Green, transformation de Fourier, théorie des semi groupes.

Dans le deuxiéme chapitre, nous présentons le laplacien sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et on choisit comme un exemple le laplacien de Dirichlet et le laplacien de Neumann qui engendrent des semigroupes fortement continus.Nous terminons ce chapitre par l'etude du laplacien dans $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Dans le troisiéme chapitre, nous etudiont le comportement assymptotique lorsque t tend vers l'infini d'un probléme d'évolution défini par un opérateur générent un semi-groupe fortement continu.

Chapitre 1

Notions fondamentales et définitions

Dans ce chapitre, on rappelle les définitions de base et on donne quelques notions fondamentales.

1.1 Les Espaces L^p

Définition 1.1
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert nom vide , soit $p \in \mathbb{R}$, avec $1 \leq p \leq \infty$ on définit l'espace normé :

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, f \text{ mesurable et } |f|^p \in L^1(\Omega)\}$$

de norme :

$$\|f\|_p = \left[\int_\Omega |f(x)|^p \, dx\right]^{\frac{1}{p}}$$

Définition 1.2 On définit:

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ \begin{array}{c} f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, f \text{ mesurable et } \exists \text{ une constante } C \text{ tq :} \\ |f(x)| \leq c \; pp \text{ sur } \Omega \end{array} \right\}$$

et on note:

$$\|f\|_\infty = \inf\{c\ ;\ |f(x)| \le c\ pp \text{ sur } \Omega\}.$$

Définition 1.3 On définit :

$$L^1_{loc}(\Omega) = \left\{ \begin{array}{c} f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}; f/Q \in L^1(Q) \\ \forall Q \subset \Omega \text{ compact.} \end{array} \right\}$$

Définition 1.4 On définit:

$$\begin{aligned} D(\Omega) &= \{\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \text{ et } \sup \varphi \subset \Omega\} \\ &= C_c^\infty(\Omega) \end{aligned}$$

1.2 Dérivée Faible

Définition 1.5 Soit $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, soit $j = 1, 2, .., n$.

Une fonction $g \in L^1_{loc}(\Omega)$ est appelée la j'éme dérivée faible de f (dans Ω) si :

$$-\int_\Omega f D_j \varphi dx = \int_\Omega g \varphi dx, \quad \forall \varphi \in D(\Omega).$$

1.3 Espace de Sobolev

Définition 1.6 Soit $k \in N$, $1 \le p \le \infty$.

L'espace de Sobolev $W^{p,k}(\Omega)$ est définit par :

$$W^{p,k}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega),\ D^\alpha f \text{ existe et } D^\alpha f \in L^p(\Omega), \forall |\alpha| \le k\}.$$

ou' $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2 ... \alpha_n\} \in \mathbb{N}^n, |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$

L'espace de Sobolev $W^{p,k}(\Omega)$ muni de la norme définie par:

$$\| f \|_{k,p} (\Omega) = \left[\sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_p \right]^{\frac{1}{p}} \quad 1 \leq p \leq$$

et

$$\| f \|_{k,\infty} (\Omega) = \max_{0 \leq \alpha \leq k} \|D^\alpha f\|_\infty$$

est un espace de Banach.

1.3.1 Espace de sobolev d'order 1

On appelle espace de sobolev d'order 1 l'espace $H^1(\Omega)$ tq :

$$H^1(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega), \frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), i = 1..n\}.$$

On le munit d'un produit scalaire:

$$\langle f, g \rangle = \int_\Omega (f \cdot g + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}).$$

La norme correspondante est :

$$\|f\|_{H^1(\Omega)} = \sqrt{(f, f)_{H^1(\Omega)}}$$

1.3.2 Espace de sobolev $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$

Soit Ω un ouvert borné regulier de classe C^1.
On note $H_0^1(\Omega)$ l'adhérence de $D(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$ au sens de la norme $\|\cdot\|_{1,2}$ et on écrit

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega), v = 0 \quad sur \partial\Omega\}.$$

Théoréme1.1

Si Ω est un domaine de classe $C^m, m \geq 1, 1 \leq p \leq \infty$,alors $C^m(\overline{\Omega})$ est dense dans $W^{m,p}(\Omega)$.

1.4 Formule de Green

Définition 1.7 Soit Ω un ouvert borné de classe C^1.
Pour tout $u \in C^2(\overline{\Omega})$ et $v \in C^1(\overline{\Omega})$, on a:

$$\int_\Omega \Delta u(x)v(x)dx = \int_\Gamma \frac{\partial u(x)}{\partial n}v(x)dx - \int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)dx$$

telle que:

$\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u(x)n$ est la dérivée normale.

1.5 Transformation de Fourier

Définition 1.8 La transformé de Fourier de $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$ est définie par la l'expression:

$$F(f)(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_\mathbb{R} e^{-i\xi x} f(x)dx$$

et on dit que $\hat{f}(\xi)$ est la transformée de Fourier de $f(x)$.

Définition1.9 Soit $\hat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R})$, la transformée inverse de Fourier de $\hat{f}(\xi)$ est définie par:

$$F^{-1}(\hat{f})(x) = f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_\mathbb{R} e^{-i\xi x}\hat{f}(\xi)$$

Un des but de l'analyse transformationnelle est de representer certains opérateurs d'une façon simple

$$F(f')(\xi) = \int_\mathbb{R} e^{-i\xi x} f'(x)dx$$

$$= e^{-i\xi x} f(x)|_{\mathbb{R}} + \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} i\xi f(x) d\xi$$

$$= i\xi F(f)(\xi)$$

de méme façon, on vérifié que:

$$F(f^{(n)})(\xi) = (i\xi)^n F(f)(\xi)$$

La convolution est une autre opération qui survient dans l'analyse transformationnelle

Définition1.10 La convolution de f et g noté $f * g$ est définie par la formule:

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) g(x - y) dy \tag{1.1}$$

Téoréme1.2

Si $f, g \in L^2(\mathbb{R})$

$$F(f * g) = F(f) F(g) \tag{1.2}$$

$$F^{-1}(\hat{f} * \hat{g}) = 2\pi (F^{-1}\hat{f})(F^{-1}\hat{g}) \tag{1.3}$$

1.6 Semi Groupes

1.6.1 Semi groupe fortement continu

Définition1.11 Soit X un espace de Banach ;et $(T(t))t \geq 0$ une famille d'opérateurs linéaires bornés de X dans X

$$T(t) : X \longrightarrow X$$

$$u \longrightarrow T(t)u$$

est un semi groupe si :

$i)\forall t \geq 0, T(t) \in L(X)$.

$ii) T(0) = Id$.

$iii)$ $\forall s, t \in \mathbb{R}$, $T(t+s) = T(t).T(s)$.

Si de plus :

$iv)$ $\forall u \in D(A), \lim_{t \longrightarrow 0_+} T(t)u = u$.

Ce semi groupe s'appelle semi groupe fortement continu, ou de classe C_0.

1.6.2 Générateur infinitésimal

Définition 1.12 Soit $(T(t))_{t \geq 0}$un semi groupe fortement continu.
L'opérateur $A : D(A) \subset X$, définie par:

$$D(A) = \left\{ u \in X, \exists \lim_{t \longrightarrow 0^+} \frac{T(t)u - u}{t} \right\}$$

$$Au = \lim_{t \longrightarrow 0^+} \frac{T(t)u - u}{t}, u \in D(A).$$

S'appelle le générateur infinitésimale d'un semi groupe $T(t)$.
On a la notation:

$T(t) := e^{tA}$

Proposition1.1
Soit $(T(t))_{t \geq 0}$un semi groupe fortement continu sur X,alors il existe deux constantes réelles, $M \geq 1$ et $\omega \in \mathbb{R}$ telle que :

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$$

Si:
$\omega = 0, \|T(t)\| \leq M$, $T(t)$ est un C_0 semi groupe unifofmement bornée.
Si :
$\omega = 0$, $M \leq 1, \|T(t)\| \leq 1, T(t)$ est un C_0semi groupe de contraction.

Lemme 1.1

Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ un semi groupe fortement continu,et A sa générateur infini tésimal.Alors :

$$\forall u \in X,\ \frac{d}{dt}T(t)u = AT(t)u = T(t)Au. \tag{1.4}$$

1.6.3 Théoréme de Hille Yosida[Pazy 1.3]

Ce théoréme donne la condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur linéaire le générateur infinitésimal d'un semi groupe fortement continu dans un espace de Banach.

Théoréme 1.2
Soit A un opérateur linéaire définie dans un espace de banack.

$$A : D(A) \subset X \longrightarrow X$$

Alors les conditions nécessaires et suffisantes pour que A soit le générateur infinitésimal d'un semi groupe fortement continu de contraction sont:

i) A est fermé.

ii)$D(A)$ est dence dans X.

iii) $]0, +\infty[\subset \rho(A)$ et $\|R_\lambda(A)\| \leq \frac{1}{\lambda}, \forall \lambda \in]0, +\infty[$.

telle que:
$R_\lambda(A) = (\lambda I - A)^{-1}$ est l'opérateur résolvant de A.

1.6.4 Probléme de Cauchy Abstrait

Soit X un espace de Banach, et A un opérateur linéaire nom borné.

Probléme homogéne

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = Au(t)\ ,\ t \geq 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{1.5}$$

Soit A le générateur infinitésimal d'un C_0 semi groupe $T(t)$.

Le probléme (1.2) admet une solution unique u(t) exprime sous la forme :

$$u(t) = T(t)\,u_0$$

Probléme nom homogéne

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = Au(t) + f(t) \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{1.6}$$

Avec A est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi groupe $T(t)$.

Si $u(t)$ une solution de (1.3) , alors $u(t)$ se presente par :

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds.$$

Chapitre 2

Le Laplacien sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$

Dans ce chapitre, on presente le Laplacien de Dirichlet et le Laplacien de Neumann dans un ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$,et on montre que ce Laplacien défini dans certains espaces de Banach est un générateur infinitésimal d'un semi groupe fortement continu.

2.1 Le laplacien

Définition 2.1 pour $f \in C^2(\Omega)$,on définit le laplacien Δf par:

$$\Delta f = \sum_{j=1}^{n} D_j^2 f, \ ou\prime\ D_j^2 f = \frac{\delta^2 f}{\delta^2 x_j}.$$

Définition 2.2 On définit le laplacien faible comme suit:
soit $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, $g \in L^1_{loc}(\Omega)$,on dit que:

$$\begin{aligned} \Delta f &= g \text{ faiblement si :} \\ \int_\Omega \Delta\varphi f dx &= \int_\Omega \varphi g dx, \text{pour tout } \varphi \in D(\Omega). \end{aligned}$$

et dans ce cas, on écrit

$$\Delta f = g \text{ faiblement sur } \Omega \ ou\prime \text{dans } D\prime(\Omega)$$

2.2 Opérateur dissipatif

Définition 2.3 Soit H un espace de Hilbert de dimension infinie et

$$A : H \longrightarrow H.$$

Un opérateur linéaire A se nomme dissipatif si :

$$Re \langle Au, u \rangle \leq 0, \forall u \in D(A). \tag{2.1}$$

Définition2.4 Un opérateur $A : H \longrightarrow H$ s'appelle m-dissipatif(m=maximal) si :

$$A \text{ est dissipatif et}$$
$$(I - A)\text{est surjectif.}$$

c'est à dire si:

$$i) Re \langle Au, v \rangle \leq 0.$$

$$ii) \forall v \in H, \exists u \in D(A), u - Au = v. \tag{2.2}$$

Définition2.5 Un opérateur A sur H est appelé symetrique si :

$$\langle Au, v \rangle = \langle u, Av \rangle, \text{ pour tout } u, v \in D(A).$$

Lemme 2.1 :

Soit $A : H \longrightarrow H$ un opérateur m-dissipatif, alors A est un opérateur fermé.

Preuve

Soit $\{u_n\} \subset D(A); u_n \longrightarrow u, Au_n \longrightarrow v.$
et on montre que :$u \in D(A)$ et $v = Au.$
donc:

$$u_n - Au_n = (I - A)\, u_n \longrightarrow u - v.$$

comme: $(I - A)^{-1}$ est continu alors:

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} (I - A)^{-1} (u_n - Au_n) = (I - A)^{-1} (u - v)$$

c'est à dire :

$$u = (I - A)^{-1} (u - v) \tag{2.3}$$

Ceci montre que :

$$u \in D(I - A) = D(A)$$

$$et\, (I - A)\, u = u - v$$

$$\Rightarrow Au = v.$$

On conclut que A est fermé...$\square$

Lemme2.2

Si A est un opérateur m-dissipatif ,alors A est à domaine dense.

Preuve

On utilise le raisonnement par l'absurbe.

On suppose que An'est pas de domaine dense,alors il existe $u_0 \in D(A)^{\perp}$ telle que:

$$\forall u \in D(A) : \langle u, u_0 \rangle = 0 \tag{2.4}$$

comme A est m-dissipatif, alors il existe $u_1 \in D(A)$,telle que:

$$u_1 - Au_1 = u_0 \tag{2.5}$$

On prend le produit scalaire de (2.5) avec u_1 :

$$\langle u_1 - Au_1, u_1 \rangle = 0. \tag{2.6}$$

Puis on prend la partie réelle de (2.6) :

$$Re\langle u_1 - Au_1, u_1\rangle = 0.$$

$$\langle u_1, u_1\rangle - Re\langle Au_1, u_1\rangle = 0$$

Comme :

$$Re\langle Au_1, u_1\rangle \leq 0.$$

Donc :

$$\langle u_1, u_1\rangle = 0.$$

On déduit que:

$$u_1 = 0$$

et par (2.5),on obtient:

$u_0 = 0$,contradiction.

donc A est à domaine dense...□

Proposition2.1 :

Soit A un opérateur dissipatif sur H,supposons qu'il existe $\lambda \in \mathbb{k}$,
$Re\ \lambda \geq 0$,telle que : $(\lambda - A)$ est surjectif, $\lambda \in \varrho(A)$
alors $\|R(u,\lambda)\| \leq \frac{1}{\lambda}$.

Preuve

Soit $\lambda \in \varrho(A), u \in D(A), \lambda u - Au = v.$

puis :

$$\begin{aligned} Re\lambda \|u\|^2 &= Re\langle \lambda u, u\rangle \\ &= Re\langle Au + v, u\rangle \\ &= Re\langle Au, u\rangle + Re\langle v, u\rangle \end{aligned}$$

$$\leq Re\langle v,u\rangle \tag{2.7}$$

On utilise l'inégalité de Cauchy Schawrtz
(2.7) devient :

$$Re\lambda\left\|u\right\|^2 \leq \left\|u\right\|\left\|v\right\|$$

$$\Rightarrow Re\lambda\left\|u\right\| \leq \left\|v\right\|.$$

$$\Rightarrow \left\|u\right\| \leq \frac{1}{\mathrm{Re}\,\lambda}\left\|v\right\| (\mathrm{Re}\,\lambda \geq 0) \tag{2.8}$$

Comme $(I-A)u = v$, (2.8) devient :

$$\left\|(\lambda I - A)^{-1}\right\|\left\|v\right\| \leq \frac{1}{Re\lambda}\left\|v\right\|.$$

Donc :
$\left\|(\lambda I - A)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{Re\lambda} \Rightarrow \left\|R(\lambda, A)\right\| \leq \frac{1}{Re\lambda}, \forall\lambda \in]0, +\infty[\ldots\Box$

Remarque2.1
par le lemme 2.1, lemme 2.2 et proposition 2.1;on conclut que la condi tion pour que A soit le générateur infinitésimal d'un semi groupe forte ment continu de contraction est A est m-dissipatif.

2.3 Le Laplacien de Dirichlet

Définition 2.6 On définit l'opérateur A sur $L^2(\Omega)$ par :

$$D(A) = \{f \in H_0^1(\Omega), \exists\ g \in L^2(\Omega), \text{tq } \Delta f = g \ \text{ faiblement}\} \tag{2.9}$$

$$Af = \Delta f.$$

on note A par: Δ_Ω^D.

L'opérateur A s'appelle le laplacien de Dirichlet.

Théoréme 2.1
L'opérateur A est définit par (2.9) est un opérateur dissipatif auto adjoint.

Preuve

.Montrons que A est dissipatif

Soit $u \in D(A)$,comme $v \in H_0^1(\Omega)$,il s'ensuit que:

pour $v \in D(\Omega)$:

$$\langle Au, v\rangle = -\int_\Omega \nabla u \nabla v dx, \forall v \in D(A) \tag{2.10}$$

soit $v \in H_0^1(\Omega)$ quelconque.

comme:

$$H_0^1(\Omega) = \overline{D(\Omega)} \text{ dans } H^1(\Omega).$$

Alors:

$$\exists (v_n) \subset D(\Omega) \text{ telleque :}$$

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} v_n = v \text{ dans } H^1(\Omega).$$

D'aprés (2.10),on a :

$$\langle Au, v_n\rangle = -\int_\Omega \nabla u \nabla v_n dx, \forall n \tag{2.11}$$

passons à la limite quant $n \longrightarrow \infty$:

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \langle Au, v_n\rangle = \lim_{n\longrightarrow\infty} \left(-\int_\Omega \nabla u \nabla v_n dx\right), \forall n. \tag{2.12}$$

(2.12) devient:

$$\langle Au, v\rangle = -\int_\Omega \nabla u \nabla v dx, \forall v \in H_0^1(\Omega) \tag{2.13}$$

pour $u = v$, (2.13) devient:

$$\langle Au, u\rangle = -\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \leq 0. \tag{2.14}$$

(2.14)montre que A est dissipatif.

.Montrons que A est m-dissipatif

Soit $f \in L^2(\Omega)$, $\Phi(v) = \int_\Omega fv\ dx$, défini une forme linéaire continu sur $H_0^1(\Omega)$.par le lemme de Riez:

$\exists! u \in H_0^1(\Omega)$, telle que:

$$\int_\Omega f\ v\ dx = \int_\Omega u\ v\ dx + \int_\Omega \nabla u\ \nabla v\ dx \tag{2.15}$$

Pour tout $v \in C_c^\infty(\Omega)$, pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$, on obtient:

$$\int_\Omega fv\ dx\ = \int_\Omega u\ v\ dx - \int_\Omega \Delta uv\ dx. \tag{2.16}$$

C'est .à .dire:

$$f = u - \Delta u. \tag{2.17}$$

(2.17) montre que A est m-dissipatif.

.Montrons que A est symetrique

$$\forall u \in D(A), \forall v \in D(\Omega) :$$

$$\langle Au, v\rangle = -\int_\Omega \nabla u \nabla v dx$$

$$= \int_{\Omega} u\Delta v dx.$$

Donc:

$$\langle Au, v\rangle \ = \langle u, Av\rangle . \tag{2.18}$$

(2.18) montre que A est symetrique.

(2.14), (2.17)et (2.18) montrent que A est un opérateur dissipatif auto adjoint.

Remarque2.2

Le laplacien de Dirichlet est un générateur infinitésimal d'un semi groupe fortement continu de contraction $T(t)$; et on a la notation suivante:

$$T(t) = e^{tA}$$

Théoréme2.2

Si $u_0 \in L^2(\Omega)$,alors l'équation:

$$\begin{cases} \grave{u}(t) = \Delta u(t) \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{2.19}$$

admet une unique solution:

$$u(t) = T(t)u_0$$

Preuve

Si on prend :$\Delta = A$ et $X = L^2(\Omega)$;donc le probléme (2.19) prend la forme :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = Au(t) \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{2.20}$$

Càd :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} - Au(t) = 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{2.21}$$

Pour montrer que (2.21)admet une unique solution on a besoin du théréme suivant :

Théoréme2.3

Supposons que A est m-dissipatif dans un espace de Banach X,et $u_0 \in D(A)$;Alors le probléme (2.21) admet une unique solution u telque :

u vérifié :

Preuve

Le théoréme (1.2) et le lemme (1.1) montrent que :

$$u(t) = T(t)u_0$$

est une solution de (2.19).

Pour montrer l'unicité, on suppose par l'absurb qu'il y'a deux solutions u_1, u_2 alors :

$u = u_1 - u_2$.

et u satisfait :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} - Au(t) = 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

Pour tout $t_0 \prec 0$,soit :

$$\Phi(t) = T(t)u(t - t_0)$$

D'aprés le lemme (1.1) ; on a :

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = T(t)\frac{du}{dt}(t - t_0) - T(t)Au(t - t_0)$$

$$= T(t)Au(t - t_0) - T(t)Au(t - t_0)$$

$$= 0$$

Donc

$\Phi(t) = c$ ou c :est une constante et par conséquant :
$\Phi(0) = u(t_0) = c$ et $u(t_0) = 0$.

2.4 Le laplacien de Neumann

Définition2.7 Soit $\Omega \neq \emptyset \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert.
On définit l'opérateur:

$$B : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega) par :$$

$$D(B) = \left\{ \begin{array}{c} f \in H^1(\Omega), \exists g \in L^2(\Omega) tq : \\ -\int_\Omega \nabla f \; \nabla\varphi \; dx = \int_\Omega g \; \varphi \; dx, \forall\varphi \in H^1(\Omega) \end{array} \right\} \tag{2.22}$$

et:

$$Bf = g$$

On note B par: Δ_Ω^N : le laplacien de Neumann.

Théoréme2.3
L'opérateur B définit par (2.21) est dissipatif auto adjoint.
Preuve
$\forall u \in D(B), u \in H^1(\Omega), \forall v \in H^1(\Omega)$ on a:

$$\begin{aligned} \langle Bu, v\rangle &= \int_\Omega Buvdx \\ &= \int_\Omega \Delta uvdx \\ &= -\int_\Omega \nabla u \nabla vdx \end{aligned}$$

pour: $u = v$,on a :

$$\begin{aligned} \langle Bu, v\rangle &= -\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

donc B est dissipatif.
Par (2.21),on conclut que:

$$\langle Bu, v\rangle = \int_\Omega \Delta uv dx$$

$$= -\int_\Omega \nabla u \nabla v dx$$

$$= \int_\Omega u \Delta v dx$$

$$= \langle u, Bv\rangle$$

donc B est symetrique.

Remarque2.3

Le Laplacien de Neumann est un générateur infinitésimal d'un semi groupe fortement continu de contraction $T(t)$; et on a la notation suivante:

$$T(t) = e^{tB}$$

Remarque2.4

Si $u_0 \in L^2(\Omega)$,alors l'équation:

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = Bu(t) \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{2.23}$$

admet une unique solution:

$$u(t) = T(t)u_0$$

2.5 Semi groupe engendré par le laplacien dans $L^2(\mathbb{R}^n)$:

Si: $X = L^2(\mathbb{R})$

Soit l'équation d'évolution suivante :

$$\begin{cases} u_t & = u_{xx} \\ u(0) & = u_0 \,, \quad x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{2.24}$$

La transformée de fourier de l'équation d'évolution par rapport à la variable x est une équation différentielle séparable en t avec paramétre ξ :

$$\hat{u}_t(\xi, t) = \hat{u}_{xx}(\xi, t)$$

$$= (-i\xi)^2 \hat{u}(\xi, t)$$

$$\frac{\hat{u}_t(\xi, t)}{\hat{u}(\xi, t)} = -\xi^2$$

$$\ln |\hat{u}(\xi, t)| = -\xi^2 t + k$$

$$\hat{u}(\xi, t) \quad = \exp\left(-\xi^2 t\right) k$$

pour trouver k :

$$\hat{u}(\xi, t) = \hat{u}_0(\xi) = k$$

donc :

$$\hat{u}(\xi, t) = \hat{u}_0(\xi) \exp(-\xi^2 t) \tag{2.25}$$

Le second membre est le produit de deux fonctions de ξ;donc sa transfor mée de Fourier inverse de (2.25) sera une convolution :

$$u^{-1}(\hat{u}(\xi, t)) = F^{-1}(\hat{u}_0(\xi)) F^{-1}(\exp(-\xi^2 t))$$

$$= u_0 * \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{t}} \exp(-\xi^2 t)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(y)\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{t}}\exp(\frac{-(x-y)^2}{4t})dy$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(\frac{-(x-y)^2}{4t})u_0(y)dy$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{4\pi^2 t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(\frac{-(x-y)^2}{4t})u_0(y)dy$$

c'est à dire:

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(\frac{-(x-y)^2}{4t})u_0(y)dy \tag{2.26}$$

posons:

$$K_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\exp\left(\frac{-x^2}{4t}\right)$$

(2.25) peut écrit comme suit:

$$u(x,t) = K_t * u_0$$

Théoréme La famille d'opérateurs $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ définie sur X par :

$$T(t)u\,(x) = (4\pi t)^{\frac{-n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}\exp(\frac{-(x-y)^2}{4t})u(y)dy,\ t\geq 0 \text{ et } T\,(0) = I \tag{2.27}$$

est un semi groupe.

Preuve
Remarque

Le semi groupe définit par la formule(2.27) s'appelle semi groupe Gaussienne.

Définition 2.8 On définit le laplacien de Dirichlet dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ par: $\Delta_2 = \Delta^D_{\mathbb{R}^n}$ telle que:

$$\begin{aligned} D(\Delta_2) &= \{u \in H^1(\mathbb{R}^n) : \Delta u \in L^2(\mathbb{R}^n)\} \\ &= H^2(\mathbb{R}^n) \\ \Delta u &= \Delta_2 u \end{aligned}$$

Δ_2 s'appelle le laplacien dans $L^2(\mathbb{R}^n)$.

On a l'exemple suivante :

Exemple :
Soit l'équation d'évolution suivante :

$$\begin{cases} u_t = au_{xx} + f(u), \ x \in \mathbb{R}, \ 0 \leq t \leq T \\ u(x,0) = u_0(x), \ x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{2.28}$$

ou $a \geq 0$ est une constante et $u_0 \in X$, $X = \{u \in \mathbb{C}_u(\mathbb{R}, \mathbb{R}), u \text{ est bornée}\}$

muni de la norme sup,i.e.$\|u\| = \sup |u(x)|$

.La fonction f vérifie

: $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $f(u) \in X$, pour tout $u \in X$

.Il existe une constante $k \geq 0$ telle que:

$\|f(u) - f(v)\| \leq k\|u - v\|$,pour tout $u, v \in X$

(a) Montrer que $(T(t))_{t \geq 0}$ définie par:

$$T(t)u = \frac{1}{\sqrt{4a\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(\frac{-(x-y)^2}{4at}) u(y)dy, 1 \geq 0 \ et \ T(0) = I$$

est un semi groupe fortement continu sur X.

(b) On admet que le générateur de $(T(t))_{t \geq 0}$ est l'opérateur Adéfini par :

$$Au = au_{xx}.$$

Donner la définition d'une solution mild du probléme(2.28).

(c) Soit l'espace de Banach $C([0,T]; X)$ des applications continues de

$[0,T]$ à valeurs dans X muni de la norme :$\|u\|_\infty = \sup_{t\in[0,t]} \|u\|$.

On définit l'application F :$C([0,T];X) \longrightarrow C([0,T];X)$ par:

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds.$$

Appliquons le principe du point fixe pour montrer que (2.28)posséde une

solution mild locale unique.

Preuve

(a) $i)$ $T(t)(t \geq 0)$ est un opérateur linéaire définie sur X.

En effet :

$.T(t)(u_1(x)+u_2(x)) = \frac{1}{\sqrt{4a\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(\frac{-(x-y)^2}{4at})\,(u_1(x)+u_2(x))\,dy$

$= \frac{1}{\sqrt{4a\pi t}} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(\frac{-(x-y)^2}{4at}) u_1(x)dy + \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(\frac{-(x-y)^2}{4at}) u_2(x)dy\right]$

$= \frac{1}{\sqrt{4a\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(\frac{-(x-y)^2}{4at}) u_1(x)dy + \frac{1}{\sqrt{4a\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(\frac{-(x-y)^2}{4at}) u_2(x)dy$

$= T(t)u_1(x) + T(t)u_2(x)$

$.T(t)\,(\alpha u(x)) \;= \frac{1}{\sqrt{4a\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(\frac{-(x-y)^2}{4at})\,(\alpha u(y))\,dy$

$= \frac{\alpha}{\sqrt{4a\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(\frac{-(x-y)^2}{4at})\,(u(y))\,dy$

$= \alpha\,(T(t)u(x))$.

$ii)T(t)$ est bornée :

$|T(t)u| \leq \frac{\|u\|}{2\sqrt{a\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(\frac{-(x-y)^2}{4at})dy$ $\;(u \in X \Longrightarrow u$ est bornée)

Soit le changement variable:

$$\xi = \frac{-x+y}{2\sqrt{at}}$$

$$|T(t)u| \leq \frac{\|u\|}{2\sqrt{a\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\exp\left(-\xi^2\right)\right] \left[2\sqrt{at}\right] d\xi$$

$$\leq \|u\| \quad \left(\text{car} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\exp\left(-\xi^2\right)\right] d\xi = \sqrt{\pi}\right)$$

iii) $T(0) = I.$
iv) pour $t, s \geq 0$

$$T\left(t+s\right)u = \frac{1}{2\sqrt{\pi a(t\ +\ s)}} \int_{-\infty}^{-\infty} \exp\left(\frac{-\left(x-y\right)^2}{4a\left(t+s\right)}\right) u\left(y\right) dy$$

Posons: $K_t\left(y\right) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a t}} \exp\left(\frac{-y^2}{4at}\right).$
Alors: $T(t)u(x) = K_t * u\left(x\right)$ (produit de convolution).

Donc: $T\left(t+s\right)u\left(x\right) = K_{t+s} * u\left(x\right).$
On a alors: $T\left(t+s\right)u\left(x\right) = T(t)\left[K_s * u\left(x\right)\right]$

$$= K_t * \left[K_s * u\left(x\right)\right]$$

$$= \left(K_t * K_s\right) * u(x)$$

càd,pour montrer que: $T(t+s) = T(t)T(s)$, il suffit de montrer que:

$$K_{t+s} = K_t * K_s$$

et seci équivalent à:

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi a(t+s)}} \exp\left(\frac{-(x)^2}{4a(t+s)}\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi a t}} \frac{1}{2\sqrt{\pi a s}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{-\left(x\right)^2}{4at}\right) \exp\left(\frac{-\left(x-y\right)^2}{4as}\right) dy. \qquad (2.29)$$

On a:
$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{y^2(t+s)-2txy+x^2t}{4ats}\right) dy$ (c'est le second terme sans le facteur constante)
$= \exp\left(-\frac{x^2t}{4\pi ts}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{t+s}{4a\pi ts}\left(y^2 - \frac{2xt}{t+s}y\right)\right] dy$
$= \exp\left(-\frac{x^2}{4as}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{t+s}{4ats}\left(y - \frac{xt}{t+s}\right)^2 + \frac{x^2t}{4as(t+s)}\right] dy$
$= \exp\left(-\frac{x^2}{4as}\right) \exp\left(\frac{x^2t}{4as(t+s)}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{t+s}{4ats}\left(y - \frac{xt}{t+s}\right)^2\right] dy$
posons: $\xi = y - \frac{xt}{t+s}$
$= \exp\left[-\frac{x^2}{4a(t+s)}\right] \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(t+s)}{4ats}\xi^2\right] d\xi$
$= \exp\left[-\frac{x^2}{4a(t+s)}\right] \int_{-\infty}^{+\infty} \left[-\left(\sqrt{\frac{t+s}{4ats}}\xi\right)^2\right] d\xi$
posons: $\eta = \sqrt{\frac{t+s}{4ats}}\xi$
$= \left\{\exp\left[-\frac{x^2}{4a(t+s)}\right]\right\} \sqrt{\frac{4ats}{t+s}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\eta^2\right) d\eta$
$= 2\exp\left[-\frac{x^2}{4a(t+s)}\right] \sqrt{\frac{a\pi ts}{t+s}}$
pour montrer (2.29) on a besoin seulement de vérifier:
$\frac{1}{\sqrt{4\pi a(t+s)}} = 2\sqrt{\frac{a\pi ts}{t+s}} \frac{1}{\sqrt{4\pi at}} \frac{1}{\sqrt{4\pi as}}$

iv) $\lim_{t\downarrow 0} \|T(t)u - u\| = 0$

on a:

$$T(t)u(x) - u(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi at}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(x-y)^2}{4at}\right] u(y)\, dy - u(x) \quad (2.30)$$

Soit le changement de variable suivant :

$$\xi = \frac{y-x}{2\sqrt{at}}$$

(2.30) devient :

$$T(t)u(x) - u(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\xi^2\right) u\left(x + 2\sqrt{at}\xi\right) d\xi - u(x)$$

comme :

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\xi^2\right) u\left(x + 2\sqrt{at}\xi\right) d\xi$$

comme u est uniformément continu :

$$\forall \delta \geq 0, |\grave{x} - x| \leq \delta \Longrightarrow |u(\grave{x}) - u(x)| \leq \varepsilon$$

donc,pour un ε donné et $t \geq 0$ (fixé) $\left(\grave{x} = x + 2\sqrt{at}\xi\right)$

$|\grave{x} - x| = 2\sqrt{at}\,|\xi| \leq \delta$ cad $|\xi| \leq \frac{\delta}{2\sqrt{at}} = \grave{\delta}$

donc :

$$\begin{aligned}
|T(t)u(x) - u(x)| &\leq \tfrac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{|\xi| \leq \grave{\delta}} \exp(-\xi)^2 \left|u\left(x + 2\sqrt{at}\xi\right) - u(x)\right| d\xi \\
&\quad + \tfrac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{|\xi| \geq \grave{\delta}} \exp(-\xi)^2 \left|u\left(x + 2\sqrt{at}\xi\right) - u(x)\right| d\xi \\
&\leq \tfrac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}} \int_{|\xi| \leq \grave{\delta}} \exp(-\xi)^2 + \tfrac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{|\xi| \geq \grave{\delta}} \exp(-\xi)^2 \left|u\left(x + 2\sqrt{at}\xi\right) - u(x)\right| d\xi \\
&\leq \varepsilon + \tfrac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{|\xi| \geq \grave{\delta}} \exp(-\xi)^2 \left|u\left(x + 2\sqrt{at}\xi\right) - u(x)\right| d\xi \\
&\leq \varepsilon + \tfrac{2\|u\|}{\sqrt{\pi}} \int_{|\xi| \geq \grave{\delta}} \exp(-\xi)^2 d\xi
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \|T(t)u - u\| \leq \varepsilon + \tfrac{2\|u\|}{\sqrt{\pi}} \int_{|\xi| \geq \grave{\delta}} \exp(-\xi)^2 d\xi$$

passons à la limite quant $t \longrightarrow 0^+, \exists t_1 \geq 0, t \leq t_1$:

$$\frac{2\|u\|}{\sqrt{\pi}} \int_{|\xi| \geq \delta} \exp(-\xi)^2 d\xi \leq \varepsilon$$

(car $\lim \int_{|\xi| \geq \delta} \exp(-\xi)^2 \, d\xi = 0$)

cad :

$$\forall \varepsilon \geq 0, \exists t_1 : t \leq t_1 \Longrightarrow \|T(t)u - u\| \leq 2\varepsilon$$

cad:

$$\lim_{t \downarrow 0} \|T(t)u - u\| = 0.$$

(b) Une solution mild est une application continu $u : [0, T] \longrightarrow X$ vérifions l'équation intégrale :

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds.$$

(c) Il suffit de montrer que F posséde un point fixe $u \in C([0,T] \; ; \; X)$

$\|(Fu) - (Fv)(t)\| \leq \int_0^t \|T(t-s)\| \, \|f(u(s)) - f(v(s))\| \, ds$

$\leq MkT \|u - v\|_\infty \, (M = \sup_{0 \leq t \leq T} \|T(t)\|)$

$\Longrightarrow \|(Fu) - (Fv)(t)\|_\infty \leq MkT \|u - v\|_\infty ,$

par recurrence :

$$\|F^n u - (F^n v\| \leq \frac{(MkT)^n}{n!} \|u - v\|_\infty$$

pour n assez grand $\lambda = \frac{(MkT)^n}{n!} \leq 1$.

Alors d'aprés le Théoréme du point fixe,

$\exists! u \in C([0,T] \; ; \; X)$ vérifiant $u = F^n u$

u est aussi un point fixe de F

Donc :

$\exists! u \in C([0,T] \; ; \; X)$ telle que :

$u = Fu$

cad :

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(u(s))ds.$$

Chapitre 3

Comportement asymptotique des solutions pour t$\longrightarrow +\infty$

On suppose tout d'abord que le probléme :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = f \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{3.1}$$

$f \in C^0([0,+\infty[\,; X)$

pour $u_0$donné dans X, (3.1) admet une solution forte donnée par la fomule :

$$u(t) = G(t)u_0 + \int_0^t G(t-s)f(s)dx \tag{3.2}$$

On a alors le resultat suivant :

Théoréme3.1

On suppose outre les hypothése précédentes que :

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} f(t) = f_\infty, \ f_\infty \in X \tag{3.3}$$

$$\|G(t)\| \leq Me^{-\omega t} \text{ pour tout } t \succ 0 \tag{3.4}$$

$(Met\omega = \text{constantes} \geq 0)$

Alors u donné par (3.2) vérifié :

$$\lim_{t\longrightarrow\infty} \|u(t)-u_\infty\|_x = 0 \tag{3.5}$$

ou u_∞ est la solution de :

$$Au_\infty = f_\infty, u_\infty \in D(A)$$

Preuve

D'aprés (3.4) :

$\|G(t)u_0\| \longrightarrow 0$, quant $t \longrightarrow +\infty$.

etudions la limite de :

$$v(t) = \int_0^t G(t-s)f(s)ds = \int_0^t G(t-s)\left[f(s)-f_\infty\right]ds + \int_0^t G(t-s)f_\infty ds$$
$$= v_1(t) + v_2(t).$$

Nous allons tout d'abord montrer que :

$$\lim_{t\longrightarrow\infty} v_1(t) = 0 \tag{3.6}$$

En effet, étant donné $\varepsilon \succ 0$, on peut trouver t_0 telque pour $t \succ t_0$,on ait :

$$\|f(t)-f_\infty\|_x \leq \frac{\varepsilon\omega}{2}(\text{d'aprés}(3.3)) \tag{3.7}$$

De sorte que :

$\|v_1(t)\|_x \leq \int_0^t \|G(t-s)\| \, \|f(s)-f_\infty\|_x \, ds + \int_0^t \|G(t-s)\| \, \|f(s)-f_\infty\|_x \, ds.$

Et d'aprés (3.4), (3.7) :

$$\|v_1(t)\|_x \leq \frac{4}{\omega}\sup_{t\geq} \|f(s)\|_x \, M\exp(-\omega(t-t_0)) + \frac{\delta}{2} \leq \varepsilon$$

(Si t est assez grand),d'ou (3.6).

Considérons maintenant :

$$v_2(t) = \int_0^t G(t-s)f_\infty ds = \int_0^t G(s)f_\infty ds.$$

Alors :

$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} v_2(t) = \int_0^{+\infty} G(s) f_\infty ds = R(0, -A) f_\infty = A^{-1} f_\infty.$$

d'ou le théoréme.

Un resultat de meme nature que le précédent,relatif au comportement d'une solution,d'une équation d'évolution dépendant d'un paramétre ε pour $\varepsilon \longrightarrow 0$ est le suivant :

Théoréme 3.2

Soit $\varepsilon \succ 0$ donné, et u_ε une solution forte de :

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{du_\varepsilon}{dt} + Au_\varepsilon & = f(t) \\ u\varepsilon(0) & = u_0 \end{cases} \tag{3.8}$$

On suppose outreles conditions $u_0 \in X; f \in C^0([0, +\infty[)$ que $-A$ est le générateur infinitésimal d'un semi groupe vérifiant (3.4), de class c^0.

Alors si $0 \prec \delta \prec T$,on a:

$$\lim \sup_{\delta \leq t \leq T} \left\| u_\varepsilon - A^{-1} f(t) \right\|_X = 0 \tag{3.9}$$

Preuve

L'opérateur $(-\varepsilon^{-1} A)$ est le générateur infinitésimal du semi-groupe $\{G_\varepsilon(t) = G(\frac{t}{\varepsilon})\}$ et l'on a d'aprés (3.4) :

$$\|G_\varepsilon(t)\| \leq M \exp(\frac{-\omega}{\varepsilon} t)$$

De plus :

$$u_\varepsilon(t) = G_\varepsilon(t) u_0 + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t G(t-s) f(s) ds$$

On peut écrire :

$$v_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t G(t-s) f(s) ds$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t G_\varepsilon(t-s)\left[f(s)-f(t)\right]ds \\ &+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t G_\varepsilon(t-s)f(s)ds \end{aligned}$$

soit

$$v_\varepsilon(t) = v_{1\varepsilon}(t) + v_{2\varepsilon}(t);$$

on a tout d'abord

$$\begin{aligned} \|v_{1\varepsilon}(t)\|_X &\leq \frac{1}{\varepsilon}\left\|\int_0^t G_\varepsilon(t-s)\left[f(s)-f(t)\right]ds\right\|_X \\ &\leq \frac{M}{\varepsilon}\int_0^t \exp(\frac{-\omega\tau}{\varepsilon})\left\|f(t-\tau)-f(t)\right\|_X d\tau \\ &\leq \frac{M}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon\tau} \exp(\frac{-\omega\tau}{\varepsilon})\left\|f(t-\tau)-f(t)\right\|_X d\tau \\ &+2\sup_{t\in[0,t]}\|f(t)\|_X \exp(-\omega\tau\frac{M\tau}{\omega}) \end{aligned}$$

d'ou :

$$\|v_{1\varepsilon}(t)\|_X \leq M\int_0^\tau \exp(-\omega\sigma)\left\|f(t-\varepsilon\sigma)-f(t)\right\|_X d\sigma + \tag{2.10}$$

$$2\exp(-\omega\tau\frac{M\tau}{\omega})\sup_{t\in[0,T]}\|f(t)\|_X . \tag{3.1}$$

Soit $\varrho \succ 0$, on peut choisir r assez grand de telle sorte que le deuxiéme terme du deuxiéme membre de (3.10) soit inférier à $\frac{\varrho}{2}$.Ce choitx réalise, on peut prendre ε assez petit de maniére que le premier trme du deuxiéme de (3.10) soit inférieur à $\frac{\varrho}{2}$.

Ainsi

$v_{1\varepsilon}(t) \longrightarrow 0$ lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0$ pour t fixé (et uniformément sue $(0,T)$).

Par ailleurs :

$$v_{2\varepsilon}(t) = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t G_\varepsilon(t-s)f(t)ds$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t G_\varepsilon(\tau)f(t)d\tau$$

$$= \int_0^{+\infty} G(\tau)f(t)d\tau - \int_{\frac{t}{\varepsilon}}^{+\infty} G(\tau)f(t)d\tau$$

$$= R(0;-A)f(t) + G_\varepsilon(t)R(0,A)f(t);$$

Lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0$,

$G_\varepsilon(t)R(0,A)f(t) \longrightarrow 0$ uniformément sur $[\delta,T]$ $(0 \prec \delta \prec T)$ et $v_{2\varepsilon}(t) \longrightarrow R(0,-A)f(t)$ uniformément sur $[\delta,T]$ de sorte que l'on a bien d'aprés (2.11) et

$\lim_{t\longrightarrow\infty} G_\varepsilon(t)u_0 = 0$ dans X :

$$\lim_{t\longrightarrow\infty}\sup_{\delta\leq t\leq T}\|u_\varepsilon(t)-u(t)\|_X = 0 \tag{3.12}$$

Avec $u(t) = R(0,A)f(t)$,donc solution de $Au(t) = f(t)$ $\square$

Théoréme3.3

Soit $(-A)$ le générateur infinitésimal d'un semi-groupe $\{G(t), t \geq 0\}$ de classe C^0 dans l'espace de Banach X.On suppose qu'il existe $p, 1 \leq p \prec +\infty$ tel que

$$\int_0^{+\infty} \|G(t)\|_x^p \leq +\infty \tag{2.13}$$

Alors on peut trouver deux constantes M et μ telle que $\{G(t)\}$vérifier (3.4).

Preuve

i) Montrons d'abord que (3.13) implique que $t \longrightarrow G(t)$ est bornée dans $\mathcal{L}(X)$ c'est- à-dire :

$$\begin{cases} \text{il existe } M_2 \text{ constante } \succ 0 \text{ telle que} \\ \qquad \|G(t)\| \ \leq \ M_2, \ t \ \geq \ 0 \end{cases} \tag{3.14}$$

Tout d'abord , le semi -groupe étant de classe C^0 :

$$\begin{cases} \text{il existe } \omega \ \geq \ 0 \text{ et } M_1 \ \geq \ 1 \text{ tels que} \\ \qquad \|G(t)\| \ \leq \ M_1 e^{\omega t} \end{cases} \tag{3.15}$$

Nous pouvons supposer $\omega \succ 0$.

Montrons que (3.13) et (3.15) entraînement que $\lim_{t \longrightarrow \infty} G(t)x = 0$ pour tout $x \in X$.

En effet, dans le cas contraire, on peut trouver $x \in X, \delta \succ 0$ et une suite $t_j \longrightarrow \infty$ tels que

$$\|G(t_j)x\|_X \geq \delta \succ 0.$$

Comme on peut choisir la suite t_j telle que $t_{j+1} - t_j \succ \frac{1}{\omega}$,posons $\Delta_j = \left[t_j - \frac{1}{\omega}, t_j\right]$, et notons $\overline{\Delta_j} = \frac{1}{\omega}$ et que les intrvalles Δ_j sont disjoints. Supposons $t \in \Delta_j$, alors

$$G(t_j)x = G\left(t_j - t\right) G(t)x$$

d'ou

$$\delta \leq \|G(t_j)x\|_X \leq \|G(t)x\|_X \, M_1 \exp(\omega(t_j - t)) \leq \|G(t)x\|_X \, M_1 e$$

et

$$\|G(t)x\|_X \geq \frac{\delta}{M_1 e}. \tag{3.16}$$

Alors

$$\int_0^{+\infty} \|G(t)\|_x^p \, dt \geq \sum_j \int_{\Delta_j} \|G(t)\|_x^p \, dt \geq \left(\frac{\delta}{M_1 e}\right)^p \sum_j \overline{\Delta_j} = +\infty.$$

Ce qui contredit (3.13).

Ainsi $\lim_{t \longrightarrow \infty} G(t)x = 0$ pour tout $x \in X$ et on en déduit (3.14).

ii) Considérons l'opérateur linéaire $S : X \longrightarrow L^p(\mathbb{R}^+; X)$, défini par :

$$Sx = G(.)x : t \longrightarrow G(t)x. \tag{3.17}$$

De (3.13) , il resulte que le domaine de S est X et est facile de vérifier que S est fermé.

Alors du théoréme du graphe fermé, il resulte que S est borné.Donc, il existe une constante M' telle que

$$\left(\int_0^{+\infty} \|G(t)\|_x^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq M' \|x\|_X \quad \text{pour tout} \quad x \in X \tag{3.18}$$

Soit alors ρ tel que $0 \prec \rho \prec M_2^{-1}$, M_2 défini en(3.14).

Posons :

$$t_x(\rho) = \sup(S; \|G(t)x\|_X \geq \rho \|x\|_X \, pour S \in [0, T]). \tag{3.19}$$

Comme

$\|G(t)x\|_X \longrightarrow 0$ quand $t \longrightarrow +\infty, t_x(\rho)$ est fini pour chaque $x \in X$.
De plus

$t_x(\rho)\rho^p \|x\|_X^p \leq \int_0^{t_x(\rho)} \|G(t)x\|_X \, dt \leq \int_0^{+\infty} \|G(t)x\|_X \, dt \leq M'^p \|x\|_x^p$.

d'ou l'on déduit

$$t_x(\rho) \leq \left(\frac{M'}{\rho}\right)^p = t_0. \tag{2.20}$$

Pour $t \succ t_0$, on a

$$\|G(t)x\|_x \leq \|G(t - t_x(\rho))\| \, \|G(t_x(\rho))x\|_x \leq M_2\rho \|x\|_X = \beta \|x\|_X \tag{3.21}$$

ou $0 \prec \beta \prec 1$.

Soit t_1 fixé $\geq t_0$ et soit $t = nt_1 + S$ ou $0 \leq S \leq t_1$; alors on déduit de (2.20) – (2.21) :

$$\begin{aligned} \|G(t)\| &\leq \|G(s)\| \, . \, \|G(nt_1)\| \leq M_2 \, \|G(t_1)\|^n \leq M_2\beta^n = M_2 \exp(n \log \beta) \\ &\leq (M_2 \exp(-\log \beta)) \exp(\tfrac{t}{t_1} \log \beta) = M \exp(-\mu t) \end{aligned}$$

ou $M = M_2\beta^{-1}$ et $\mu = -\frac{1}{t_1} \log \beta \succ 0$.

d'ou le théorémé...$\square$

Bibliographie

[1] A.Pazy,Semi groupe of linear operators and application to partial Equation,Springer-Verleg new york 1983.

[2] Robert Dautry-jacques Liouis Lions.Analyse Mathématique et calcule Numérique pour les sciences et techniques.masson 1984.

[3]Songmu Zheng,Non linear evolution equation,2004.

[4] Heat kernels,ISEM 2005/06,byWolf gong Arendt.

[5] Haim Brezis .Analyse Fonctionnelle.Théorie et Application , masson 1987.