République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 – Guelma

Faculté de Mathématiques et de l'Informatique et Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire de Fin d'Etude
Master Académique en Mathématiques
Option : Analyse

THEME

Equation de Transport et Modélisation de certains phénomènes physiques

Présenté par :

BENTEBOULA Zeyneb

Dirigé par :

Dr. HITTA Amara

Jury :

Mm A. FRIOUI

Mm F.Z. AISSAOUI

Session Juin 2012

Remerciement

Tout d'abord, j'adresse mes remerciements très particulièrement à **ALLAH** pour la volonté, la force, la santé et la patience qu'il m'a donné afin de réaliser ce travail.

Je tiens à remercier notre honorable Encadreur Monsieur **HITTA Amara** pour son soutien, ses conseils tous au long notre travail malgré ses occupations.

Je tiens à remercier mes parents pour leurs encouragements et leurs soutiens pour ma réussite.

Je souhaite exprimer toute ma gratitude envers ma famille, mes deux frères *Badr Eddine* et *Chams Eddine*, mes oncles surtout *Salah Eddine*, mes tantes surtout *Lamia* et mes amies.

Table des Matières

Chapitre 1

Introduction

En mathématiques, plus précisement en calcul différentiel, une équation aux dérivées partielles est une équation dont les solutions sont les fonctions inconnues vérifiant certains conditions concernant leurs dérivées partielles.
La modélisation d'un problème réel utilise les lois de la physique (mécanique, thermodynamique, électromagnétisme, acoustique, etc.). Ces lois sont, généralement, écrites sous la forme de bilans qui se traduisent mathématiquement par des Equations Différentielles Ordinaires ou par des Equations aux Dérivées Partielles.
Les équations aux dérivées partielles interviennent dans beaucoup de domaines :

① En chimie pour modéliser les réactions,

② En économie pour étudier le comportement des marchés,

③ En finance pour étudier les produits dérivés (options et obligations).

Les équations aux dérivées partielles sont un sujet de recherche très actif en mathématiques et elles sont à l'origine de la création de beaucoup de concepts mathématiques comme, par exemple, la transformée de Fourier et la théorie

des distributions.
Parmis ces EDP, on va traiter la plus simple d'entre elles, à savoir **"l'équation de transport"**.
L'origine de cette équation est très variée. Elle provient principalement de la physique et sert à décrire des particules neutres comme les neutrons et les photons.

Le plan de ce mémoire est le suivant:

① Dans le **premier chapitre**, on donne une introduction sur le sujet.

② Dans le **deuxième chapitre**, on traite l'origine physique de l'équation de transport et son aspect mathématique ainsi que quelques exemples.

③ Dans le **troisième chapitre**, on traite tous les aspects de l'équation de transport plus particulièrement : sa définition, ses différentes types. Enfin, on aborde sa relation avec l'équation des ondes.

④ Dans le **quatrième chapitre**, on traite les grands problèmes qui sont liés à cette équation, à savoir : **le problème de Cauchy** et **le problème aux limites**.

⑤ Finalement, dans le **cinquième chapitre**, on traite la modélisation de certains phénomènes physiques par cette équation.

Chapitre 2

Origine et exemples de l'équation de transport

2.1 Origine de l'équation de transport

Considérons un fluide, coulant avec une vitesse v, dans un tube mince et droit dont la section transversale sera notéé A.
Supposons que le liquide contient un contaminant dont la concentration à la position x à l'instant t sera désignée par $u(x,t)$.

A l'instant t, la quantité de contaminant dans une section du tube entre des positions, x_1 et x_2 est donné par l'expression :

$$\boxed{\int_{x_1}^{x_2} u(x,t)Adx = \text{quantité de contaminants dans } (x_1,x_2) \text{ à l'instant } t.}$$

A à la position x, la quantité de contaminant qui coule à travers un plan pendant l'intervalle de temps allant de t_1 à t_2 :

$\int_{t_1}^{t_2} u(x,t)Avdt$ = quantité de contaminant s'écoulant à travers un plan en position x, pendant l'intervalle (t_1, t_2).

L'équation exprimant un équilibre matériel pour le contaminant peut être écrite comme suit :

$$\int_{x_1}^{x_2} u(x,t_2)Adx = \int_{x_1}^{x_2} u(x,t_1)Adx + \int_{t_1}^{t_2} u(x_1,t)Avdt - \int_{t_1}^{t_2} u(x_2,t)Avdt$$

C'est-à-dire :
la quantité de contaminant dans la section (x_1, x_2) à l'instant t_2 est égale à la quantité de contaminant dans la section (x_1, x_2) à l'instant t_1, plus la quantité de contaminant qui coulait à travers le plan en position x_1 pendant l'intervalle de temps (t_1, t_2) moins la quantité de contaminant qui coulait à travers le plan à la position x_2 pendant l'intervalle de temps (t_1, t_2).

Bien entendu, cette équation est basée sur l'hypothèse selon laquelle il n'y a pas d'autres sources de contaminant dans le tube et il n'y a pas de perte de contaminant à travers les parois du tube.

Le théorème fondamental d'analyse implique que :

$$\int_{x_1}^{x_2} u(x,t_2)Adx - \int_{x_1}^{x_2} u(x,t_1)Adx = \int_{x_1}^{x_2}\int_{t_1}^{t_2} \partial_t u(x,t)Adtdx.$$

et

$$\int_{t_1}^{t_2} u(x_1,t)Avdt - \int_{t_1}^{t_2} u(x_2,t)Avdt = -\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2} \partial_x u(x,t)Avdxdt.$$

En combinant ces résultats avec l'équation du bilan on obtient :

$$\int_{x_1}^{x_2}\int_{t_1}^{t_2} \partial_t[u(x,t)A]dtdx + \int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2} \partial_x[u(x,t)Av]dxdt = 0$$

Si nous supposons que cette égalité vaut pour tous les $x \in]x_1, x_2[$ dans le tube et pour à chaque intervalle de temps $]t_1, t_2[$ et si la fonction $u(x,t)$ et ses dérivées partielles d'ordre un sont des fonctions continues de x et t, il s'ensuit une propriété élémentaire des fonctions continues qui est :

$$\boldsymbol{\partial_t[u(x,t)A] + \partial_x[u(x,t)Av] = 0 \qquad \textbf{pour tout} \qquad (x,t)}$$

Si la vitesse v du fluide et la section transversale du tube A sont des constantes, alors cette équation est réduite à :

$$\boldsymbol{\partial_t u(x,t) + v\partial_x u(x,t) = 0 \qquad \textbf{pour tout} \qquad (x,t)}$$

C'est **"l'équation du transport"** en une dimension.

2.2 Quelques exemples de l'EDT

1. L'équation de Vlasov :

Supposons que la variable est un couple position-vitesse (x,v). Une densité $u(x,v,t)$ de particules soumise à une force $U(x,t)$ vérifie l'équation :

$$\boxed{\boldsymbol{\partial_t u + v \cdot \nabla_x u + U(x,t) \cdot \nabla_v u = 0}}$$

C'est bien une équation de transport car si on écrit $y = (y_1, y_2) = (x,v)$ et $B(y,t) = (v, U(x,t)) = (y_2, U(y_1,t))$.

On peut ré-écrire l'équation précédente sous la forme :

$$\partial_t u(y,t) + B \cdot \nabla_y u(y,t) = 0$$

On remarquera par ailleurs que :

$$\mathrm{div}_y B = \mathrm{div}_x v + \mathrm{div}_v U = 0$$

Ce qui implique que l'équation de Vlasov peut aussi être écrite sous la forme conservative :

$$\partial_t u + \mathrm{div}_v(vu) + \mathrm{div}_y(U(x,t)u) = 0$$

L'équation écrite ici est une équation de Vlasov linéaire, mais dans les cas physiquement intéressants (modélisation d'une galaxie ou d'un plasma).
Le champ de force U dépend aussi de la distribution u des particules sous la forme d'une équation de champ moyen : la force dépend de toute la distribution des particules via une formule du type :

$$U(x,t) = \int -\bigtriangledown P(x-y)\rho(y,t)dy \qquad \text{avec} \qquad \rho(y,t) = \int u(y,z,t)dz$$

où P est le potentiel d'intéraction entre deux particules, et ρ est la densité en position uniquement [1].

1. L'équation d'Euler incompressible :

Elle modélise un fluide incompressible en mouvement. La densité d'un fluide incompressible reste constante, et on s'intéresse alors au champ de vitesse $\overrightarrow{v(x,t)}$ du fluide. Celui-ci vérifie l'équation :

$$\boxed{\begin{cases} \partial_t \overrightarrow{v} + (\overrightarrow{v}\cdot\bigtriangledown)\overrightarrow{v} = -\bigtriangledown p \\ div\,\overrightarrow{v} = 0 \end{cases}}$$

où p : désigne la préssion (que l'on peut voir comme un multiplicateur de Lagrange pour que la condition $\mathrm{div} v = 0$ soit toujours vérifiée au cours de l'évolution). L'opérateur $\overrightarrow{v}\cdot\bigtriangledown$ désigne la dérivée dans la direction $\overrightarrow{v}$ et s'écrit : $(\overrightarrow{v}\cdot\bigtriangledown)u = \sum_i v_i\partial_i u$. Pour l'appliquer à un vecteur, on l'applique indépendamment à chacune des composantes.

C'est une équation de transport non-linéaire, la vitesse $\overrightarrow{v}$ étant transporté par elle-même.
Un cas particulier intéressant est le cas de la dimension deux, où si le domaine considéré est l'espace tout entier, on peut écrire une équation scalaire sur la vorticité $\omega = \partial_2 v_1 - \partial_1 v_2$:

$$\boxed{\begin{cases} \partial_t \omega + v(x,t) \cdot \nabla \omega = 0 \\ v(x,t) = \int \dfrac{(x-y)^{\perp}}{|x-y|^2} \omega(y,t) dy \end{cases}}$$

qui est également une équation de champ moyen [1].

Chapitre 3

Equation de transport

3.1 Equation de transport et exemples

Une équation de transport est une équation aux dérivées partielles linéaires du premier ordre la plus simple de type hyperbolique.

Elle permet, dans certains cas, de généraliser les méthodes de résolution des équations différentielles ordinaires. Elle régit, entre autres, le comportement d'une quantité dépendante du temps t et d'une variable x (qui peut-être une position, une vitesse, un couple position-vitesse ou bien d'autres choses encore...) appartenant à un domaine de $\mathbb{R}^n$.

Suivant que le second membre est nul ou non, les équations de transport sont séparées en deux types; à savoir :

① Les équations de transport homogènes.

② Les équations de transport non homogènes *i.e.* avec second membre.

Cette équation qui semble être simple, à première vue, pose des difficultés numériques considérables qui fait toujours l'objet de recherches actuellement (il s'agit notamment de savoir calculer la solution sur des temps très grands).

3.1.1 Equations de transport homogènes

Soit $x \in \mathbb{R}^*$, l'équation de transport homogène de premier ordre s'écrit sous la forme :

$$\boxed{a\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + b\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 0} \tag{3.1}$$

Si l'on pose $v = \frac{b}{a}$ avec $a \neq 0$, alors l'équation de transport devient :

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + v\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 0} \tag{3.2}$$

où :

- La fonction cherchée est $u : \mathbb{R} \star \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$.
- v est une fonction de l'espace $C_b^1(\mathbb{R} \star \mathbb{R}^+)$. En physique, c'est la vitesse de propagation associée à l'équation, au point x à l'instant t.

Pour simplifier la notation posons :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \partial_t u(x,t) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = \partial_x u(x,t)$$

Le problème se réduit, alors, à trouver u qui vérifie :

$$\boxed{\partial_t u(x,t) + v\partial_x u(x,t) = 0 \qquad \forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R}} \tag{3.3}$$

Dans le cas général, c'est-à-dire en dimension supérieure, l'équation de transport se présente sous la forme :

$$\boxed{\partial_t u(x,t) + v\nabla_x u(x,t) = 0 \qquad \forall t > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^n} \tag{3.4}$$

3.1.2 Equations de transport avec second membre

Dans le cas bidimentionnel, les EDP avec second membre peuvent s'écrire sous la forme générale suivante :

$$\boxed{a(x,t)\partial_t u(x,t) + b(x,t)\partial_x u(x,t) + c(x,t)u(x,t) = d(x,t)} \tag{3.5}$$

Pour $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, supposons que la fonction $a(x,t)$ est non nulle partout sur Ω, alors :

$$\boxed{\partial_t u(x,t) + \frac{b(x,t)}{a(x,t)} \cdot \partial_x u(x,t) = \frac{d(x,t) - c(x,t)u(x,t)}{a(x,t)} = \frac{f(u,x,t)}{a(x,t)}} \tag{3.6}$$

Posons $\dfrac{b(x,t)}{a(x,t)} = v(x,t) \in \mathbb{R}^n$, l'équation devient :

$$\boxed{\partial_t u(x,t) + v(x,t) \cdot \partial_x u(x,t) = \frac{f(u,x,t)}{a(x,t)} \qquad \forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R}.} \tag{3.7}$$

- $v(x,t)$ désigne, dans le sens physique, la vitesse.

- $\dfrac{f(u,x,t)}{a(x,t)} = D(x,t)$ est la dérivée directionnelle de u dans le sens de la vitesse $v(x,t)$.

Nous verrons que l'on peut envisager de la méme façon des EDP linéaires du premier ordre dans des espaces de dimension supérieure en considérant que la variable $x \in \mathbb{R}^n$, on obtient alors une forme plus générale qui est :

$$\boxed{\partial_t u(x,t) + v(x,t) \cdot \nabla_x u(x,t) = D(x,t) \qquad \forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n} \tag{3.8}$$

3.2 Méthode des caractéristiques

En mathématiques, la méthode des caractéristiques est une technique permettant de résoudre les équations aux dérivées partielles. Particulièrement adaptée aux problèmes de transport, elle est utilisée dans de nombreux domaines tels que la mécanique des fluides ou le transport de particules.

Dans certains cas particuliers, la méthode des caractéristiques peut permettre la résolution purement analytique de l'EDP. Dans les cas plus complexes (rencontrés par exemple en modélisation des systèmes physiques), la méthode des caractéristiques peut être utilisée comme une méthode de résolution numérique du problème.

Pour une équation aux dérivées partielles (EDP) du premier ordre, la méthode des caractéristiques cherche des courbes (appelées "lignes caractéristiques", ou plus simplement "caractéristiques") le long desquelles l'EDP se réduit à une simple équation différentielle ordinaire (EDO). La résolution de l'EDO le long d'une caractéristique permet de retrouver la solution du problème original.

Le cas simple qui se présente est le cas où le second terme est nul. Autrement dit, on cherche $u \equiv u(x,t)$ solution du problème de Cauchy pour l'équation de transport :

$$\begin{cases} [\partial_t + v.\nabla_x]u(x,t) = 0 \quad \forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases}$$

Soit $y \in \mathbb{R}^n$. Posons, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X(t) = y + tv$; alors X est une application de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$ vérifiant :

$$\boxed{\frac{dX}{dt}(t) = v}$$

L'ensemble :

$$\boxed{\{t, X(t)) : t \in \mathbb{R}\}}$$

est une droite de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, appelée **courbe caractéristique issue de y pour l'opérateur de transport** $\partial_t + v.\nabla_x$.

Soit $u \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ solution de l'équation de transport, l'application $t \mapsto u(t, X(t))$ est de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$ comme composée de deux applications de classe C^1. En dérivant par rapport à t, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}u(t,X(t)) &= \partial_t u(t,X(t)) + \sum_{k=1}^{n} \partial_{x_k} u(t,X(t)) \frac{dX_k}{dt}(t) \\ &= \partial_t u(t,X(t)) + \sum_{k=1}^{n} v_k \partial_{x_k} u(t,X(t)) \\ &= (\partial_t u + v.\nabla_x u)(t,X(t)) = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, l'on déduit que :

Toute solution de l'équation de Transport de classe C^1 reste constante le long de chaque courbe caractéristique.

3.3 Equation de Transport homogène à Vitesses constante et variable

Dans $\mathbb{R}$, l'équation de transport à vitesse constante prend la forme :

$$\boxed{\partial_t u(x,t) + v\partial_x u(x,t) = 0 \qquad \forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R}} \tag{3.9}$$

Les solutions sont définies sur le demi-plan $\mathbf{D} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ dont la frontière est $\partial\mathbf{D} = \mathbb{R} \times 0$.
Un cas particulier, consiste à chercher la solution sous une forme prédéfinie. Cette solution est dite **Solution auto-semblable**. Ainsi, l'on peut trouver la solution de (3.3) sous la forme :

$$u(x,t) = t^\alpha f(\frac{x}{t^\beta})$$

où f est une fonction quelconque donnée et les constantes α et β sont à choisir de tel sorte est ce que la solution existe.

En procèdant comme suit :

① Calcule des dérivées partielles $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ et $\dfrac{\partial u}{\partial x}$.

② Pour le choix de $\beta = 1$ et $y = \dfrac{x}{t}$ on montre que f vérifie une équation differentielle à déterminer.

③ On donne l'expression de f et on et Trouve la solution auto-semblable $u(x,t)$.

la solution sera $u(x,t) = |x - ct|^\alpha$ où c est une constante quelconque.
Et avec $u_0(t) = x^\alpha$

Pour l'équation de transport à vitesse variable, on cherche des solution u définies dans $]a, b[\times\mathbb{R}_+^*$.

$$\boxed{\partial_t u(x,t) + v(x,t)\partial_x u(x,t) = 0 \qquad \forall t > 0, \forall x \in]a,b[} \tag{3.10}$$

On étudie maintenant une équation proche des équations qu'on vient d'étudier, il s'agit de l'équation de transport conservative (ETC). Elle prend la forme :

$$\boxed{\partial_t u(x,t) + \partial_x (v \cdot u)(x,t) = 0 \quad \forall t > 0, \forall x \in]a,b[} \tag{3.11}$$

où la vitesse $v(x,t)$ est donnée telle que $v(a) = v(b) = 0$.
On va voir pourquoi cette équation est dite conservative.

Proposition 3.3.1 *Si $u(x,t)$ est solution de (3.11) Alors son intégrale reste inchangée sur un intervalle. c'est-à-dire :*

$$\int_a^b u(x,t)dx = \int_a^b u_0(x)dx \qquad \forall t > 0.$$

Preuve : : Comme u est solution de (3.11) on a :

$$\int_a^b \left(\partial_t u + \partial_x(v(x,t)u)\right)(x,t)dx = 0$$

on a :

$$\int_a^b \partial_x(v(x,t)u)(x,t) = [v(x,t)u(x,t)]_a^b = 0$$

car $v(a,t) = v(b,t) = 0$. On conclue que :

$$\frac{d}{dt}\int_a^b u(x,t)dx = 0.$$

Ceci implique que : $\int_a^b u(x,t)dx$ est constante $\forall t > 0$. ■

Remarque 1 : On remarquera que cette équation possède un terme supplémentaire, par rapport à l'équation de transport $\frac{\partial v}{\partial x}u$. De ce fait, on ne peut plus dire que la solution est constante le long des caractéristiques.

Remarque 2 : Par ailleurs, pour l'équation de transport à vitesse non constante, malgré le fait que la solution soit ponctuellement constante le long des caractéristiques l'intégrale, ne se conserve pas. En effet, de :

$$\frac{d}{dt}\int_a^b u(x,t)dx + \int_a^b v(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)dx = 0$$

on conclue que :

$$\frac{d}{dt}\int_a^b u(x,t)dx = \int_a^b \frac{\partial v}{\partial x}(x,t)u(x,t)dx$$

où on a, bien sur, utilisé le fait que $v(a,t) = v(b,t) = 0$.
Si on écrit l'équation conservative le long d'une caractéristique on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t}u(\mathrm{X}(t),t) + \frac{\partial}{\partial x}(v(\mathrm{X}(t),t)u(\mathrm{X}(t),t)) = 0.$$

On note maintenant que :

$$\frac{\partial}{\partial t}u(\mathrm{X}(t),t) + \frac{d\mathrm{X}}{dt}(t)\frac{\partial u}{\partial x}(\mathrm{X}(t),t) = \frac{d}{dt}u(\mathrm{X}(t),t)$$

Ce qui entraine :

$$\frac{d}{dt}u(\mathrm{X}(t),t) + \frac{\partial v}{\partial x}(\mathrm{X}(t),t)u(\mathrm{X}(t),t) = 0$$

Si on définit la fonction :

$$w(t) = u(\mathrm{X}(t),t)\exp(\int_0^t \frac{\partial v}{\partial x}(\mathrm{X}(\tau),\tau))d\tau$$

Elle vérifie :

$$\frac{w(t)}{dt} = \left(\frac{d}{dt}(u(\mathrm{X}(t),t)) + \left(u\frac{\partial v}{\partial x}\right)(\mathrm{X}(t),t)\right)\exp(\int_0^t \frac{\partial v}{\partial x}(\mathrm{X}(\tau),\tau))d\tau$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{\partial u}{\partial t}(\mathrm{X}(t),t) + \frac{d\mathrm{X}}{dt}\frac{\partial u}{\partial x}(\mathrm{X}(t),t) + \left(u\frac{\partial v}{\partial x}\right)(\mathrm{X}(t),t)\right)\exp(\int_0^t \frac{\partial v}{\partial x}(\mathrm{X}(\tau),\tau))d\tau \\
&= \left(\frac{\partial u}{\partial t}(\mathrm{X}(t),t) + \frac{\partial}{\partial x}\left(v(\mathrm{X}(t),t)\frac{\partial u}{\partial x}\right)(\mathrm{X}(t),t))\right)\exp(\int_0^t \frac{\partial v}{\partial x}(\mathrm{X}(\tau),\tau))d\tau \\
&= 0
\end{aligned}
$$

■

3.4 Equation de transport non-homogène à vitesse constante

On aborde, maintenant, le cas des équations de transport avec second membre.
Il y'a deux formes de l'EDT à vitesse constante :

① La première est :

$$\boxed{\partial_t u(x,t) + v\partial_x u(x,t) = S(x,t) \quad \forall t>0, \forall x>0} \tag{3.12}$$

Sa solution est :

$$\boxed{u(x,t,v) = u_0(x-tv,v) + \textstyle\int_0^t S(x-v(t-s),s)ds} \tag{3.13}$$

En effet, on a :

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t,v) = -v\partial_x u_0(x-tv,v) + S(x,t) + \int_0^t (-v\partial_x)S(x-v(t-s),s)ds$$

et

$$\frac{\partial}{\partial x}u(x,t,v) = \partial_x u_0(x-tv,v) + \int_0^t \partial_x S(x-v(t-s),s)ds.$$

En additionnant ces deux dérivées partielles on obtient l'équation (3.12).

② La deuxième elle s'écrit pour tous $t > 0$ et $x > 0$:

$$\boxed{\partial_t u(x,t) + v\partial_x u(x,t) + \sigma(x,t)u(x,t) = S(x,t)} \tag{3.14}$$

Sa solution est :

$$\boxed{u(x,t,v) = e^{-\sigma t}u_0(x-tv,v) + \int_0^t e^{-\sigma(t-s)}S(x-v(t-s),s)ds} \tag{3.15}$$

Preuve : On a :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}u(x,t,v) &= -\sigma e^{-\sigma t}u_0(x-tv,v) - ve^{-\sigma t}\partial_x u_0(x-tv,v) \\
&\quad + e^{-\sigma(t-t)}S(x,t) + \int_0^t \partial_t(\exp(-\sigma(t-s))S(x-v(t-s),s)ds \\
&= -\sigma e^{-\sigma t}u_0(x-tv,v) - ve^{-\sigma t}\partial_x u_0(x-tv,v) \\
&\quad + S(x,t) + \int_0^t e^{-\sigma(t-s)}(-v\partial_x)S(x-v(t-s),s)ds \\
&\quad - \int_0^t \sigma e^{-\sigma(t-s)}S(x-v(t-s),s)ds.
\end{aligned}$$

Et aussi :

$$\frac{\partial}{\partial x}u(x,t,v) = e^{-\sigma t}\partial_x u_0(x-tv,v) + \int_0^t e^{-\sigma(t-s)}\partial_x S(x-v(t-s),s)ds.$$

En substituant dans (3.14), on trouve le résutat. ■

3.5 Equation des ondes

L'équation des ondes est l'équation générale qui décrit la propagation d'une onde dans un milieu continu. Elle peut être représentée par une grandeur

scalaire ou vectorielle.
Elle se présente sous la forme :

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial^2 t} - v^2 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial^2 x} = 0 & \forall x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) & \forall x \in \mathbb{R} \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x) & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}} \tag{3.16}$$

où v est la vitesse de propagation de l'onde.
Cette équation n'est qu'un système de deux équations de transport homogènes, l'une à vitesse $+v$ et l'autre à vitesse $-v$.
En effet, on a :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t} - v^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} = \left(\frac{\partial^2}{\partial^2 t} - v^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial^2 x}\right) u = 0$$

où : $\left(\dfrac{\partial^2}{\partial^2 t} - v^2 \cdot \dfrac{\partial^2}{\partial^2 x}\right)$ est **L'opérateur de D'Alembert**.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial^2 t} - v^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial^2 x}\right) u &= \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - v \cdot \frac{\partial}{\partial x}\right) \circ \left(\frac{\partial}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial}{\partial x}\right)\right] u \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial^2 t} + v\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} - v\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Pour que la dernière équation soit une équation des ondes il faut que u soit continue (i.e : les dérivées mixtes soient égales).
C'est-à-dire :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}.$$

Donc :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t} - v^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - v \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

■

La solution de l'équation des ondes est donnée par le théorème de formule de D'Alembert suivant :

Théorème 3.5.1 *La solution où u_0 est différentiable est sous la forme :*

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[u_0(x+vt) + u_0(x-vt)\right] + \frac{1}{2v}\int_{x-vt}^{x+vt} u_1(y)\,dy \tag{3.17}$$

Chapitre 4

Problème de Cauchy et problème aux Limites

4.1 Problème de Cauchy

Le problème de Cauchy pour l'équation de transport linéaire consiste à se donner une valeur initiale $u_0 \equiv u_0(x)$ de la densité u et à chercher une solution u vérifiant à la fois l'équation de transport et la condition initiale :

Trouver $u(x,t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ tel que :

$$\boxed{\begin{cases} \partial_t u(x,t) + v(x,t) \cdot \partial_x u(x,t) = S(x,t) & \forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = u_0(x) & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}} \tag{4.1}$$

où :

- v : est une fonction dans l'espace $C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$.
- S : est une fonction donnée dans l'espace $C^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$.

- u_0 : est donnée dans $C^1(\mathbb{R})$ (on peut admettre une régularité moindre, par exemple $u_0 \in L^\infty$ ou $u_0 \in L^2$).

Le problème (4.1) décrit le transport du champ scalaire $u(x,t)$ dans un milieu fluide avec une vitesse v et avec l'apport d'une source de densité S.
L'inconnue u peut-être la tempéerature ou la concentration d'un composant chimique dans l'air par exemple.

On dit que u est une **solution classique** du problème (4.1) si c'est une fonction qui satisfait (4.1) point par point.

Dans ce qui suit, nous allons montrer que le problème (4.1) admet une unique solution classique en utilisant la méthode des caractéristiques.

Dans un premier lieu, on suppose tout d'abord que la vitesse est constant. Donc, on considère le problème Cauchy :

$$\boxed{\begin{cases} \partial_t u(x,t) + v\partial_x u(x,t) = 0 & \forall t > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = u_0(x) & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}} \tag{4.2}$$

Théorème 4.1.1 *Si u_0 est dérivable sur $\mathbb{R}$. Alors il existe une unique solution différentiable u du problème (4.2) en (x,t), elle est donnée par :*

$$\boxed{u(x,t) = u_0(x - vt) \qquad \forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R}} \tag{4.3}$$

Preuve : : On définit les caractéristiques comme les courbes de $\mathbb{R}^2$ définies par $(X(t),t)$ où la fonction $X(t)$ est solution de l'équation différentielle ordinaire :

$$\frac{dX}{dt} = v.$$

Le long des caractéristiques, la solution du problème (4.2) vérifie :

$$\frac{d}{dt}(u(X(t),t)) = \frac{dX}{dt}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

ce qui implique que les solutions sont constantes le long des caractéristiques. Soit (x^*, t^*) un point du plan avec $t^* > 0$. Soit $X^*(t)$ la caractéristique passant par ce point, alors, elle vérifie :

$$\begin{cases} \dfrac{dX^*}{dt} = v \\ X^*(t^*) = x^*, \end{cases}$$

la solution est alors :

$$X^*(t) = vt + x^* - vt^*.$$

Pour $t = 0$ ceci donne :

$$X^*(0) = x^* - vt^*.$$

et on a :

$$u(x^*, t^*) = u(X^*(0), 0) = u(x^* - vt^*, 0) = u_0(x^* - vt^*).$$ ■

Supposons maintenant que la vitesse est variable. Le problème de Cauchy se présente sous la forme :

$$\boxed{\begin{cases} \partial_t u(x,t) + v(x,t)\partial_x u(x,t) = 0 & \forall t > 0,\ \forall x \in]a,b[\\ u(x,0) = u_0(x) \quad \forall x \in]a,b[\end{cases}} \quad (4.4)$$

On suppose, de plus, que $v(a,t) = v(b,t) = 0$.

On cherche alors les courbes caractéristiques qui sont les solutions de l'équation différentielle ordinaire :

$$\frac{dX}{dt} = v(X(t), t)$$

le long de ces courbes on a :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(u(\mathrm{X}(t),t)) &= \frac{\partial u}{\partial t}(\mathrm{X}(t),t)+\frac{\partial u}{\partial x}(\mathrm{X}(t),t)\frac{d\mathrm{X}}{dt}\\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial t}+v(x,t)\frac{\partial u}{\partial t}\right)(\mathrm{X}(t),t)=0\end{aligned}$$

Ceci veut dire que les solutions sont constantes le long des caractéristiques, il suffit alors de prendre en compte la condition initiale.

La solution au point (x_0, t_0) est égale à la valeur de $u_0(x^*)$ où x^* est la valeur pour $t = 0$ de la caractéristique qui passe par le point (x_0, t_0), en d'autres termes :

$$u(x_0,t_0)=u_0(x^*) \qquad \text{et} \qquad x^*=\mathrm{X}(0)$$

et $\mathrm{X}(t)$ est solution de :

$$\begin{cases}\dfrac{d\mathrm{X}}{dt}=v(x,t)\\ \mathrm{X}(x_0)=t_0\end{cases}$$

☞ Exemple **4.1.1** *Trouver la solution du problème de Cauchy suivant :*

$$\begin{cases}\partial_t+x(1-x)\partial_x=0 & sur\ ]0,1[\times\mathbb{R}_+^*\\ u(x,t)=u_0(x) & sur\ ]0,1[\end{cases}$$

En fait, on a affaire à une EDT dont la vitesse est variable $v(x,t) = x(x-1)$. Au point (x_0, t_0), la caractéristique qui passe par ce point est solution de :

$$\begin{cases}\dfrac{d\mathrm{X}(t)}{dt}=v(x,t)=x(1-x)\\ \mathrm{X}(t_0)=x_0\end{cases}$$

On peut résoudre cette équation différentielle par séparation de variables :

$$\frac{d\mathrm{X}(t)}{\mathrm{X}(t)(1-\mathrm{X}(t))}=dt$$

Si on intègre on obtient :

$$\int_{x_0}^{X} \frac{ds}{s(1-s)} = \int_{t_0}^{t} dw$$

ce qui donne :

$$-\ell n|\frac{1-X}{X}| + \ell n|\frac{1-x_0}{x_0}| = t_0 - t.$$

L'éxpression pour la caractéristique $X(t)$ est :

$$X(t) = \frac{x_0}{x_0 + (1-x_0)\exp(t_0 - t)}$$

La solution de ce problème est alors :

$$u(x_0, t_0) = u_0\left(\frac{x_0}{x_0 + (1-x_0)\exp t_0}\right)$$

Considérons, maintenant, le cas d'une équation conservative dont le problème de Cauchy est :

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) + \partial_x(v(x,t)u)(x,t) = 0 & \forall t > 0, \forall x \in]a,b[\\ u(x,t) = u_0(x) & \forall x \in]a,b[\end{cases} \tag{4.5}$$

Proposition 4.1.2 *Le long d'une caractéristique la solution du problème (4.5) vérifie :*

$$u(X(t),t) = u_0(X(0)) \exp\left(-\int_0^t \frac{\partial v}{\partial x}(X(\tau),\tau)\right) d\tau$$

Sans rentrer dans les détails de la preuve, traitons ce cas par un exemple.

☞ Exemple 4.1.2 *Soit à résoudre le problème :*

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x(xtu) = 0 & \forall t > 0, \forall x > 0 \\ \\ u(x,0) = u_0(x) & \forall x > 0 \end{cases}$$

Pour cela, la caractéristique $X(\theta)$ passant par le point (x,t) est solution de l'équation :

$$X'(\theta) = X(\theta)\theta.$$

Il s'agit d'une équation à variables séparées, sa solution est :

$$X(\theta) = c\exp(\frac{\theta^2}{2})$$

On détermine la constante c à partir de l'égalité :

$$X(t) = x$$

Ce qui donne :

$$c = x\exp(-\frac{t^2}{2})$$

Donc :

$$X(\theta) = x\exp\left(\frac{\theta^2 - t^2}{2}\right).$$

La vitesse et sa dérivée partielle en x sont données par :

$$v(x,t) = xt \qquad \frac{\partial v}{\partial x}(x,t) = t$$

et la solution de ce problème est donnée par :

$$\begin{aligned} u(x,t) &= u_0(X(0))\exp\left(\int_0^t \frac{\partial v}{\partial x}(X(\tau),\tau)d\tau\right) \\ &= u_0\left(x\exp(-\frac{t^2}{2})\right)\exp(\int_0^t \tau d\tau) \\ &= x\exp(-\frac{t^2}{2})\exp(-\frac{t^2}{2}) \\ &= x\exp\left(-t^2\right). \end{aligned}$$

4.2 Problème aux limites

Comme la méthode des caractéristiques réduit l'étude de l'équation de transport à celle d'une équation différentielle ordinaire le long des caractéristiques de l'opérateur de transport.

D'ailleurs, comme on va le voir, le cas monodimentionnel contient l'essentiel des difficultés à résoudre.
Soient donc $x_a < x_b \in \mathbb{R}$. Ainsi, l'on considérera des équations de transport posées sur le domaine $]x_a, x_b[$.

Théorème 4.2.1 *Supposons que $v > 0$.*
Soient donc $u_0 \in C^1([x_a, x_b])$, une densité initiale donnée au bord $u_a \in C^1(\mathbb{R}^+)$. Le problème aux limites s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) + v(x,t)\partial_x u(x,t) = 0 & \forall t > 0, x \in]_a, x_b[\\ u(x_a, t) = u_a(x) & \forall t > 0 \\ u(x_a, 0) = u_0(x) \end{cases} \tag{4.6}$$

et admet une unique solution de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+ \times [x_a, x_b]$ donnée par :

$$u(x,t) = \begin{cases} u_0(x - tv) & si \quad x - tv > x_a \\ u_a\left(t - \dfrac{x - x_a}{v}\right) & si \quad x - tv < x_a \end{cases} \tag{4.7}$$

si et seulement si :

$$u_a(0) = u_0(x_a) \qquad et \qquad u_a'(0) + v u_0'(x_a) = 0$$

Chapitre 5

Modélisation de certains phénomènes physiques par l'équation de transport

Les mathématiques sont essentielles pour le développement de la physique. Cette science permet à la construction de modèles mathématiques pour représenter et résoudre les phénomènes physiques et consiste à mettre au point des équations mathématiques capables de reproduire des observables et d'en prédire de nouveaux, c'est ce qu'on appelle :

Modélisation mathématique pour la physique

Elle est d'une importance capitale puisqu'elle intervient, aussi bien, dans la maitrise et la compréhension de processus physique ou physico-chimique que dans l'élaboration, la conception et l'optimisation d'un produit.

Cette technique intervient également dans l'industrie. Ses utilisations portent aussi bien sur des produits de grande consommation que sur des produits high-tech et ce à toutes les étapes de leurs conceptions.

Ainsi et grâce à la modélisation, les coûts de développement seront considérablement réduits et engagent des enjeux économiques considérables.

5.1 Modélisation des champs sonores en acoustique architecturale

Généralement, lorsque la source sonore se trouve dans un local, l'énergie sonore est réfléchie sur les parois et vient s'ajouter à l'énergie rayonnée directement par la source.

L'acoustique architecturale est le domaine scientifique et technologique qui vise à comprendre et maîtriser la qualité sonore des bâtiments. L'application privilégiée de l'acoustique architecturale est bien entendue la construction des salles de spectacle et de studios d'enregistrement, mais cette technique est aussi utilisée dans la conception des lieux de travail, des maisons d'habitation pour lesquelles la qualité acoustique peut avoir d'importantes implications en matière de santé et de bien-être.

Plus particulièrement, l'acoustique des salles vise à offrir la meilleure qualité possible d'écoute à différents lieux dédiés au spectacle : salle de concert, théâtre, opéra, mais aussi aux lieux publics comme des halls d'entrée, des gymnases, des piscines...

La modélisation des champs sonores en acoustique architecturale est à l'origine de nombreux développements.

En raison de la complexité des phénomènes physiques et des formes architecturales, la plupart des applications professionnelles se sont orientées vers des méthodes totalement numériques et, notamment, les méthodes de tracés de rayons.
Néaumoins, par construction, ces modèles se heurtent encore aux difficultés de modélisation de certains phénomènes, en particulier les effets des réflexions

diffuses au niveau des parois, la diffusion par des encombrements dans le milieu de propagation et la prise en compte des effets météorologiques.

Ici, dans notre chapitre, on va traiter le coté théorique de cette modélisation, c'est la :

Modélisation des champs sonores en acoustique architecturale par l'équation de transport.

Définissons tout d'abord les domaines d'études :

① Le domaine d'espace et le domaine des vitesses sont définis respectivement sur les ensembles : $X \subset \mathbb{R}^3$ et $V = [-c, c] \times [-c, c] \times [-c, c]$.
Dans le milieu de propagation, la trajectoire de la particule est entièrement caractérisée par son vecteur position x et son vecteur vitesse v, de norme $||v|| = c$ qui égale à la vitesse du son, tels que :

$$\begin{cases} x = (\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}) & \text{avec} \quad (\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}) \in \mathrm{X} \\ v = (\mathrm{u}, \mathrm{v}, \mathrm{w}) & \text{avec} \quad (\mathrm{u}, \mathrm{v}, \mathrm{w}) \in \mathrm{V} \end{cases}$$

On note par ∂X : la frontière de X qui correspond aux limites géométriques du domaine de propagation.

② On note par $u(x, v, t)$: la fonction de distribution à une particule du gaz, telle que :

$$\boxed{dN = u(x, v, t)d^3x d^3v} \tag{5.1}$$

Elle représente le nombre de molécules de gaz situées à l'instant t dans un petit volume d'espace d^3x autour du point x et ayant une vitesse v définie à d^3v près.

③ N : représente le nombbre d'atomes (c'est la vitesse de désintégration du matériau radioactif la constituant).

L'inconnue du notre problème est la fonction $u(x, v, t)$. Sa connaissance permet de définir les quantités suivantes :

- ***La densité de particules n au point x et au temps t :***
  C'est la somme de FDP sur l'espace des vitesses :

$$\boxed{n(x,t) = \int_v u(x,v,t)dv \qquad \text{pour} \qquad x \in \mathrm{X} \text{ et } v \in \mathrm{V}} \tag{5.2}$$

- ***La densité locale d'énergie sonore $\mathcal{E}$ au pt x et au temps t :***
  Elle est définie comme le produit de e (une énergie élémentaire qui chaque particule étant porteuse d'elle) avec la densité locale de particules $n(x, t)$ d'équation (5.2), soit pour $x \in \mathrm{X}$ et $v \in \mathrm{V}$:

$$\boxed{\mathcal{E}(x,t) = e \cdot n(x,t) = e \int_v u(x,v,t)dv} \tag{5.3}$$

- ***Le flux local de particules $J(x,t)$:***
  C'est-à-dire le nombre de particules traversant une surface par unité de temps, exprimé au point x et au temps t.
  Le flux local de particules est la somme sur l'espace des vitesses du produit du vecteur vitesse avec la fonction de distribution :

$$\boxed{\mathrm{J}(x,t) = \int_v v \cdot u(x,v,t)dv \qquad \text{pour} \qquad x \in \mathrm{X} \text{ et } v \in \mathrm{V}} \tag{5.4}$$

- ***Le flux total d'énergie sonore $\mathrm{E}(x,t)$ en x et au temps t :***
  C'est la multiplication de la dernière expression par l'énergie élémentaire e d'une particule. Ainsi pour $x \in \mathrm{X}$ et $v \in \mathrm{V}$:

$$\boxed{\mathrm{E}(x,t) = e \cdot \mathrm{J}(x,t) = e \cdot \int_v v \cdot u(x,v,t)dv} \tag{5.5}$$

Grace à un tel concept, il est donc possible de lier les quantités particulaires à des quantités acoustiques et de décrire ainsi l'énergie du champs sonore par une densité de particules. Le problème acoustique est insoluble par les méthodes usuelles, est alors transposé en un problème de physique des gaz.

La physique des gaz et la théorie de transport plus spécifiquement, bénéficient d'outils mathématiques puissants permettant d'exprimer la variation spatiale et temporelle de la densité de particules et donc d'estimer facilement cette double variation de l'énergie sonore.

5.1.1 Modélisation par l'équation de transport

Le problème envisagé étant monocinétique, les phonons ont une vitesse constante, dont la norme est égale à la célérité du son "c".

Considérons un élément de volume de l'espace des phases $dxdv$ qui contient, à un temps quelconque t, $u(x, v, t)dxdv$ particules.

Au temps $(t + dt)$ cet élément devient $dx'dv'$ et contient :
$u(x + \delta x, v + \delta v, t + dt)dx'dv'$ particules.
Où :

- $\delta x = vdt$: représente ici le déplacement infinitésimal qu'effectue la particule pendant le temps dt et ne doit pas etre confondu avec le volume d'étude dx de l'espace des phases $dxdv$.
- δv : représente la variation infinitésimale de la vitesse de la particule pendant le temps dt et ne doit pas etre confondu avec le volume d'étude dx de l'espace des vitesses dv.

Par hypothèse, l'espace d'observation reste le même au cours du temps, ce qui se traduit par $dxdv = dx'dv'$.

Les particules sont indépendantes et n'interagissant pas entre elles.
Par conséquent, la direction et la norme du vecteur vitesse v des particules

restent constantes au cours du mouvement, ce qui s'exprime par :

$$\boxed{u(x+\delta x, v+\delta v, t+dt) = u(x+\delta x, v, t+dt)} \tag{5.6}$$

De plus, en absence de source sonore (elle sera introduite dans les conditions initiales) et en négligeant l'absorption atmosphérique, le domaine d'étude n'est le siège d'aucune création et d'aucune disparition spontanées de phonons.

Le nombre de particules de vitesse v en x est donc égal au nombre de particules de vitesse v en $(x+\delta x)$.
Dans ce cas, l'expression (5.6) devient :

$$\boxed{u(x, v, t) = u(x+\delta x, v, t+dt)} \tag{5.7}$$

Par ajout du terme nul $-u(x+\delta x, v, t) + u(x+\delta x, v, t)$ dans l'équation (5.7), on trouve :

$$\boxed{u(x, v, t) - u(x+\delta x, v, t) + u(x+\delta x, v, t) - u(x+\delta x, v, t+dt) = 0} \tag{5.8}$$

Par définition des dérivées partielles, la relation (5.8) s'écrite comme :

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t}dt + \frac{\partial u}{\partial x}\delta x = 0} \tag{5.9}$$

La division de l'équation (5.9) par dt fait apparaitre l'équation de la vitesse :

$$v = \frac{\delta x}{dt}$$

Finalement, la variation spatiale et temporelle de la FDP est régie par l'équation

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} + v \cdot \nabla_x u = 0 \qquad \text{pour} \qquad x \in \mathbf{X} \qquad \text{et} \qquad v \in \mathbf{V}} \tag{5.10}$$

qui porte le nom : *l'équation du flux moléculaire libre* ou plus communément **l'équation de transport**.

5.2 Modélisation du transfert radiatif

l'astronomie est la science de l'observation des astres, cherchant à expliquer leur origine, leur évolution, ainsi que leurs propriétés physiques et chimiques.

Le transfert radiatif (transfert de rayonnement) est le domaine de la physique décrivant l'interaction du rayonnement électromagnétique de la matière.

Cette discipline permet notamment d'analyser la propagation de la lumière à travers un milieu gazeux et joue de ce fait un rôle fondamental dans les diagnostics effectués en astrophysique qui concerne principalement la physique et l'étude des propriétés des objets de l'univers (étoiles, planètes, galaxies, milieu interstellaire par exemple) à partir des spectres stellaires.

La modélisation du transfert radiatif (TR) est une méthode pour la mise en relation physique de la réflectance bidirectionnelle à la surface (RBS) dérivée d'imageries de télédétection avec les propriétés d'un couvert végétal.

5.2.1 Equation de transport en transfert radiatif

Le modèle simple de gaz radiatif abordé dans le travail du modélisation de transfert radiatif vise à décrire des interactions entre les états internes atomiques de la matière et les radiations.

Les radiations sont décrites par leur intensité specifique $u(x, v, w, t)$, fonction du temps $t \in \mathbb{R}^+$, de la position $x \in \mathbb{R}^3$, de la direction de déplacement des photons $v \in \mathbb{S}^2$ et de la fréquence $w \in \mathbb{R}^+$.

Cette intensité satisfait l'équation du transport suivante :

$$\boxed{\frac{1}{c}\partial_t u + v \cdot \nabla_x u = \eta - \chi u} \tag{5.11}$$

où c : est la vitesse de la lumière.

Le photon se déplace à la vitesse de la lumière dans la direction v.
η : est le coefficient d'émissivité de photons par la matière.
χ : est le coefficient d'extinction, qui caractérise l'absorption des photons par la matière.
Si η et χ sont donnés, alors l'équation (5.11) est linéaire en u et on obtient l'expression de u en intégrant sur les caractéristiques.
Mais en réalité, ces coefficients dépendent des états internes de la matière.[5]

5.3 Modélisation d'un liquide

Dans $\mathbb{R}^n$, on considère un liquide qui évolue à la vitesse $c(x,t)$ et dans lequel des particules de polluant sont introduites.
On note $u(x,t)$ la concentration des particules de polluant dans le liquide et $S(x,t)$ la source de polluant.
Le champ de vecteurs $V(x,t) = u(x,t)c(x,t)$ représente le flux de particules de polluant.

On suppose que les particules de polluant sont simplement entrainées par le liquide, i.e : il n'y a pas de diffusion du polluant et u, S et c sont réguliers.

Posons $m(t) = \int_\Omega u(x,t)dx$ et étudions la variation de la quantité de particules dans Ω.

$$m'(t) = \int_{\partial\Omega} u_t(x,t)dx$$

Or la variation de m est due à la perte de polluant à travers $\partial\Omega$ et à l'apparition de particules dans Ω (en utilisant le théorème de la divergence) :

$$m'(t) = \int_{\Omega} S(x,t)dx - \int_{\partial\Omega} V(x,t)\cdot\eta(x)dF_x = \int_{\Omega} \left(S(x,t) - div(V(x,t))\right) dx$$

Donc :

$$\int_{\Omega} \left(div(V) + u_t\right) dx = \int_{\Omega} S(x,t)dx$$

pour tout $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, on en déduit la loi d'équilibre du polluant :

$$u_t + div(V) = u_t + \nabla u \cdot c + u \cdot div(c) = S$$

Si on suppose que $c = v \in \mathbb{R}^n$ est constante et si $u_0(x)$ est la distribution initiale du polluant , on obtient l'équation de transport ou d'advection (transport horizontal)[6] :

$$\boxed{\begin{cases} u_t + v\cdot\nabla_x u = S(x,t) & \text{pour} \quad x\in\mathbb{R}^n, t>0 \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{pour} \quad x\in\mathbb{R}^n \end{cases}} \tag{5.12}$$

5.4 Modélisation du trafic routier

Une particularité du trafic automobile est essentiellement liée à la conception de l'infrastructure qui est conçue, selon une demande projetée, pour répondre à un optimum collectif mais que chaque individu réalise son déplacement en cherchant à atteindre son optimum individuel, ce qui est souvent antagoniste avec l'optimum collectif.

Définition 5.4.1 *Le trafic routier est une Circulation de nombreux véhicules sur un itinéraire ou un réseau.*

Définition 5.4.2 *Le trafic routier est un mouvement d'un fluide qui circule.*

Les deux définitions ci-dessus montrent bien le double aspect individuel et collectif du trafic.
L'aspect individuel : étant représenté par le fait que le trafic est formé par différents véhicules.
L'aspect collectif : étant représenté par le fait que le trafic est interprété comme un fluide (i.e. un flux de véhicules).

Définition 5.4.3 *Par contre, au point de vu mathématique, c'est un modèle simple non linéaire d'EDP hyperbolique.*

Les phénomènes de trafic sont donc des phénomènes complexes résultants d'un système offre-demande, ils sont étudiés depuis de nombreuses années pour permettre principalement de contrôler ce système.
Il s'agit d'identifier les phénomènes afin de pouvoir, entre autres, anticiper sur ceux-ci et les gérer au mieux.
On distingue des prévisions à court, moyen et long terme.

- Le court terme : permet de controler les flots (ré-affectation dynamique, controles d'accès) et de donner de l'information de trafic temps-réel ou prévisionnelle rapprochée.
- Le moyen terme : permet de donner de l'information prévisionnelle.
- Le long terme : permet de redéfinir les infrastructures et d'infléchir la demande (plan urbain, plan autoroutier).

La modélisation mathématique du trafic routier est un domaine de recherche et de développement, à part entière, et la littérature qui y est consacrée et extrêmement abondante depuis plusieurs décennies.
De ce fait de nombreux modèles mathématiques du trafic ont vu le jour ainsi que de nombreux outils de simulation qui ont été inspirés.

5.4.1 Modélisation de ce phénomène

On considère le probléme du trafic routier :

Soit $u(x,t)$ la densité de véhicules en un instant t et à une position x sur une autoroute supposée rectiligne et infinie dans la direction x.

Le nombre de véhicules entre x_0 et x_1 est :

$$\mathrm{N}(x_0, x_1, t) = \int_{x_0}^{x_1} u(x,t)dx$$

Soit $v(x,t)$ la vitesse des véhicules. Le flux de véhicules $f(x,t)$ s'écrit :

$$f(x,t) = u(x,t)v(x,t)$$

et représente le nombre de véhicules par seconde qui passe par le point x en l'instant t.
Ecrivons maintenant une loi de conservation du nombre de véhicules.
On considère une portion finie d'autoroute entre x_0 et x_1.
On considère un pas de temps $\triangle t$.
Le nombre de véhicules varie sur la portion $[x_0, x_1]$ entre t et $(t + \triangle t)$ d'une quantité :

$$\mathrm{N}(x_0, x_1, t + \triangle t) - \mathrm{N}(x_0, x_1, t)$$

La vitesse étant comptée positive dans le sens de l'axe des x, le bilan net de voitures entrant et sortant du domaine est :

$$-f(x_1,t)\triangle t + f(x_0,t)\triangle t$$

La conservation du nombre de véhicules s'écrit donc :

$$\mathrm{N}(x_0, x_1, t + \triangle t) - \mathrm{N}(x_0, x_1, t) = -f(x_1,t)\triangle t + f(x_0,t)\triangle t$$

Faisons tendre $\triangle t \to 0$:

$$\frac{d}{dt}\mathrm{N}(x_0, x_1, t) = -f(x_1,t) + f(x_0,t)$$

Conclusion

Dans ce travail, nous nous somme intéressés à l'équation de transport et son application dans la modélisation de certains phénomènes physiques.

Pour un premier temps, on a commencé par l'origine de l'équation de transport, puis on a traité cette équation mathématiquement en détails.

Enfin, des applications physiques sont réalisées dans le but de montrer où se trouve l'importance de cette équation.

Bibliographie

[1] MAXIME HAURAY. "***Equation différentielles ordinaires et équations de transport***". Notes de cours, 2ème partie, 2010-2011.

[2] PEDRO FERREIRA ET SYLVIE MAS-GALLIE. "***Equations aux Dérivées Partielles***". 11 Décembre 2001.

[3] G.ALLAIRE ET F.GOLSE. "***Transport et diffusion(MAT/MAP 567)***". 4 Janvier 2010.

[4] U.MAINE. THESE de DOCTORAT "***Modélisation des champs diffus en acoustique urbaine par la théorie des transports***". Thèse soutenue le 28 Mars 2006.

[5] U.S.T DE LILLE. THÈSE pour obtenir le grade de DOCTEUR. "***Modèles mathématiques de la théorie du transfert radiatif***".

[6] U.RENÉ DESCARTES. Maitrise d'Ingénierie Mathématique. "***EQUATIONS AUX DEERIVEES PARTIELLES***". Georges Koepfler 2001-gk@math-info.univ-paris5.fr.

[7] "***Modélisation du trafic routier***". FSAb1103-Mathématiques 3, partie EDP.