

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique

Université 8 Mai 1945 – Guelma

7510, 020

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques



Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : *Equations aux dérivées partielles*



Par :

Melle Bouakkaz Maroua et Melle Djedouani Lamia

Intitulé

**Opérateur de régularisation et ses applications
pour une classe d'équation parabolique**

Dirigé par : CHAOUI Abderrezak

Devant le jury

**PRESIDENT:
RAPPORTEUR:
EXAMINATEUR:**

**A.Friou
F. Ellagoune
K.Benarioua
F.Aissaoui**

**M.A.A
M.C.A
M.C.B
M.A.A**

**Univ-Guelma
Univ-Guelma
Univ-Guelma
Univ-Guelma**

Session Juin 2011

Table des matières

Résumé	iii
Remerciements	v
Introduction	vii
1 Rappels d'Analyse fonctionnelle.	1
1.1 Espace de Hilbert.	1
1.2 Opérateurs linéaires bornés et non bornés.	3
1.3 Opérateurs auto-adjoints.	9
1.4 Quelques inégalités utiles.	11
1.4.1 Inégalité de Cauchy.	11
1.4.2 Inégalité de Hölder	11
1.4.3 Inégalité de Poincaré-Friedrichs.	12
2 Opérateurs abstraits de régularisation.	13
2.1 Opérateurs dépendants d'un paramètre	13
2.1.1 Continuité par rapport au paramètre.	13

2.1.2	Dérivation par rapport au paramètre.	13
2.2	Opérateurs abstraits de régularisation	15
2.3	La méthode des inégalités énergétiques	19
3	Estimation à priori	21
3.1	Présentation du problème	21
3.2	Espaces fonctionnels	22
3.3	Unicité de la solution forte généralisée	24
4	Existence de la solution forte généralisée.	33
4.1	Existence de la solution forte généralisée	33

Résumé

Dans ce travail on s'intéresse à l'étude d'un problème parabolique où le coefficient opérationnel ayant un domaine dépend de t . On démontre l'existence et l'unicité de la solution dans un espace fonctionnel. La démonstration est basée sur une estimation à priori bilatérale et sur la densité de l'image de l'opérateur engendré par le problème considéré.

Remerciements

En premier lieu, nous tenons à remercier notre Dieu notre créateur pour nous avoir donné la force pour accomplir ce travail.

Nous adressons nos vifs remerciements à notre encadreur Dr. CHAOUI Abderrezak qui nous a donné l'opportunité de réaliser ce travail nous le remercions chaleureusement de la confiance qu'il nous a toujours accordé durant ces mois, nous le remercions également pour sa disponibilité sans faille, ses précieux conseils scientifiques et ses encouragements qui nous ont indiscutablement permis d'évaluer.

Nos gratitude vont aussi à monsieurs le Dr.F.Ellaggoune et le professeur Hisao Fujita Yashima qui nous aidés avec ses expérience et ses conseils.

Nous présentons nos remèrciements au Dr.A.Frioui pour le grand honneur qu'elle me fait en présidant le jury de soutenance.

j'exprime également mes chaleureux remerciement au Dr.K.Benarioua, au Dr.F.Aissaoui et au Dr.F.Ellaggoune pour l'honneur qu'ils m'ont fait d'avoir accepté de faire partie de ce jury.

Nous n'oublions pas le département de Mathématique de l'université de 08 mai 1945-Guelma, en particulier Dr.R.chemllal, Dr.N.Azzouza, Dr.M.Z.Aissaoui et Dr.K.Fernane

Introduction

La méthode des inégalités énergétiques s'est avérée un outil efficace dans l'étude des problèmes non classiques. De tels problèmes ont été étudiés par plusieurs auteurs pour différents types d'équations : paraboliques, pseudo-paraboliques, hyperboliques et du type mixte et cela en utilisant de différentes méthodes.

Nous développons plus exactement la méthode des inégalités énergétiques à de nouvelles classes de problèmes aux limites non standards.

Nous étudions dans ce mémoire une classe d'équations différentielles paraboliques bidimensionnelles dans un espace de Hilbert; l'opérateur apparaissant dans l'équation est supposé être linéaire, positif, de domaine variable.

Nous mentionnons que ces problèmes apparaissent en cosmologie, dans la théorie du ralentissement des neutrons.

L'actualité de l'analyse de ces problèmes (avec des domaines variables) est d'un intérêt important. Cet intérêt est dicté non seulement par le développement de la théorie des équations aux dérivées partielles, mais aussi par l'étude des problèmes apparaissant au moment de la modélisation de problèmes

concrets en physique changeant avec le temps.

Le mémoire est composé d'une introduction et de quatre chapitres.

On commence dans le premier chapitre par un rappel de quelques théorèmes d'Analyse fonctionnelle. Nous donnons aussi certaines définitions et théorèmes importants sur les opérateurs, puis nous exposons quelques inégalités utiles qui vont être utilisées dans l'étude du problème posé.

Dans le deuxième chapitre, nous donnons des notions importantes sur les opérateurs à domaines variables telle que la continuité et la différentibilité. Nous définissons les opérateurs de régularisation $A_\varepsilon^{-1}(t)$, exposons leurs propriétés et la méthode des inégalités inégitiques.

Dans le troisième chapitre, on établit l'estimation à priori de la solution du problème posé. Pour cela on commence par définir les espaces fonctionnels nécessaires et puis on démontre un théorème d'unicité de la solution quand elle existe.

Dans le dernier chapitre, on démontre l'existence de la solution forte généralisée.

Le mémoire est clôturé par une bibliographie.

Chapitre 1

Rappels d'Analyse fonctionnelle.

1.1 Espace de Hilbert.

On désigne par H un espace de Hilbert complexe muni d'un produit scalaire noté par $(,)$

Définition 1.1.1 on appelle norme sur H une application :

$$\begin{aligned} H &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \|x\| \end{aligned}$$

vérifiant les axiomes suivantes :

- 1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- 2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ (où } \mathbb{C}), \forall x \in H$
- 3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in H$

Un espace vectoriel normé est un couple $(H, \|\cdot\|)$ où H est un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $\|\cdot\|$ est une norme sur H .

Proposition 1.1.1 *Le produit scalaire $(\cdot, \cdot)$ définit une norme sur H et on a :*

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}, \forall x \in H$$

Définition 1.1.2 *Soit F un sous-ensemble de H . Le complémentaire orthogonal de F (noté $F^\perp$) est défini par*

$$F^\perp = \{y \in H, (x, y) = 0, \forall x \in F\}$$

$F^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé.

Théorème 1.1.1 *Soit F un sous espace vectoriel fermé de H . Alors H est la somme directe orthogonal de F et $F^\perp$ notée par*

$$H = F \oplus F^\perp.$$

Théorème 1.1.2 *Soient H un espace de Hilbert et F un sous-espace vectoriel de H . Pour que F soit dense dans H il faut et il suffit qu'il n'existe pas de vecteur non nul orthogonal à F , i.e.*

$$F^\perp = \{0\}.$$

Théorème 1.1.3 (théorème de convergence dominée de Lebesgue)

Soit (f_n) une suite de fonctions de L_1 . On suppose que

- a) $f_n(x) \rightarrow f(x)$ p.p sur Ω ,
- b) *il existe une fonction $g \in L_1$ telle que pour chaque n , $|f_n(x)| \leq g(x)$ p.p sur Ω*

Alors $f \in L_1(\Omega)$ et $\|f_n - f\|_{L_1} \rightarrow 0$.

Preuve. Soit A continu, supposons A non borné c.à.d pour tout $m > 0$, il existe x_m tel que $\|Ax_m\| \geq m\|x_m\|$; en particulier pour tout entier n il existe x_n telle que $\|Ax_n\| \geq n\|x_n\|$. Posons : $\xi_n = \frac{x_n}{n\|x_n\|}$.

On a alors

$$\xi_n \rightarrow 0 \text{ dans } X, \text{ quand } n \rightarrow \infty$$

Comme A est continu, On déduit que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A\xi_n\| = 0, \text{ or } \|A\xi_n\| = \frac{1}{n\|x_n\|} \|Ax_n\| \geq \frac{n\|x_n\|}{n\|x_n\|} = 1$$

ce qui est en contradiction avec ce qui précède.

réciroquement :

Soit A borné .et soit (x_n) une suite telle que

$$\|x_n - x\| \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty$$

alors il existe une constante m telle que

$$\|A(x_n - x)\| \leq m\|x_n - x\|, \forall n \in \mathbb{N}$$

par suite on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|Ax_n - Ax\| = 0,$$

ce qui prouve la continuité de l'opérateur A . □

Théorème 1.2.2 *L'opérateur A^{-1} existe et est borné sur $R(A)$ l'image de A si et seulement s'il existe une constante $m > 0$ telle que*

$$\|Ax\| \geq m\|x\|, \forall x \in D(A).$$

Théorème 1.2.3 Soit A un opérateur linéaire de $D(A) \subset H \rightarrow E$, A est dit fermé si pour une suite x_n de $D(A)$ telle que :

$$\begin{cases} x_n \rightarrow x \\ \text{et} \\ Ax_n \rightarrow y \end{cases} \quad \text{on a } x \in D(A) \text{ et } y = Ax$$

Autrement dit, A est fermé si son graphe est fermé.

Théorème 1.2.4 (théorème de graphe fermé)

Soit A un opérateur linéaire de H dans E . On suppose que $G(A)$ le graphe de A est fermé dans $H \times E$. Alors A est borné.

Comme $G(A)$ est un sous espace fermé de $H \times E$ alors il est complet donc c'est un espace de Banach .

Preuve.

On considère sur E les deux normes :

$$\|x\|_1 = \|x\|_H + \|Ax\|_E, \quad \|x\|_2 = \|x\|_H;$$

telle que $\|x\|_1$ est la norme de graphe.

Comme $G(A)$ est fermé, E muni de la norme $\|\cdot\|_1$ est un espace de Banach. D'autre par $\|x\|_2 \leq \|x\|_1$. Par conséquent, ces deux normes sont équivalentes, c'est-à-dire il existe une constante $c \geq 1$ telle que :

$$\|x\|_1 \leq c\|x\|_2, \forall x \in D(A).$$

En particulier on a

$$\|Ax\|_E \leq c\|x\|_H,$$

ce qui prouve que A est continue. □

Remarque 1.2.2 Bien entendu la réciproque est vraie. En effet toute application continue (linéaire ou non linéaire) a un graphe fermé.

Définition 1.2.4 Soit A un opérateur linéaire de $D(A) \subset H \rightarrow E$, l'opérateur A est dit *fermable* s'il admet un prolongement fermé. On note $\bar{A}$ le plus petit prolongement fermé de A .

Théorème 1.2.5 A est fermable si et seulement si pour toute suite $(x_n) \in D(A)$ telle que :

$$\begin{cases} x_n \rightarrow 0 \text{ dans } H \\ \text{et} \\ Ax_n \rightarrow y \text{ dans } E \end{cases} \quad \text{alors } y = 0$$

Définition 1.2.5 Si l'opérateur A est fermable, alors sa fermeture $\bar{A}$ est définie par

$$\begin{cases} D(\bar{A}) = \{x \in H / \exists x_n \in D(A) : x_n \rightarrow x, Ax_n \rightarrow y\}, \\ \bar{A}x = y. \end{cases}$$

Remarque 1.2.3 Le graphe de $\bar{A}$ n'est que l'adhérence du graphe de A , c'est-à-dire

$$G(\bar{A}) = \overline{G(A)}.$$

Exemple 1.2.1 Soit A_0 l'opérateur non borné de domaine de définition :

$$\begin{cases} D(A_0) = \{f \in C^1([a, b]), f(a) = f(b) = 0\}, \\ A_0 f = f'. \end{cases}$$

Alors A_0 est fermable.

En effet : On considère une suite (f_n) telle que

$$f_n \in D(A_0), f_n \rightarrow 0, A_0 f_n = f'_n \rightarrow g.$$

Il est facile de voir que

$$f_n \rightrightarrows 0, \text{ et } \int_a^b g(x) dx = 0, \forall x \in]a, b[,$$

Ce qui donne que

$$g(x) = 0, p.p \Rightarrow g = 0$$

et par suite A_0 est fermable.

Cherchons maintenant $\overline{A_0}$ (fermeture de A_0).

Montrons que

$$D(\overline{A_0}) = H_0^1(a, b), \overline{A_0}f = f'$$

cela revient à montrer que :

$$G(\overline{A_0}) = \overline{G(A_0)}$$

$$A_0 \subset \overline{A_0} \Rightarrow G(A_0) \subset G(\overline{A_0})$$

$$G(A_0) \text{ est fermé} \Rightarrow \overline{G(A_0)} \subset G(\overline{A_0})$$

Montrons maintenant l'inclusion inverse, soit

$$(f, g) \in G(\overline{A_0}) \Rightarrow f \in H_0^1(a, b), g = f'$$

Comme $C_0^\infty(a, b)$ est dense dans $H_0^1(a, b)$, il existe une suite $(f_n) \subset C_0^\infty(a, b)$ telle que

$$\|f - f_n\|_{H^1(a, b)}^2 = \|f - f_n\|_{L^2(a, b)}^2 + \|f' - f'_n\|_{L^2(a, b)}^2 \rightarrow 0$$

pour $n \rightarrow \infty$, c'est-à-dire que

$$f_n \longrightarrow f \text{ et } f'_n \longrightarrow f' \text{ dans } L^2(a, b),$$

par conséquent on a

$$(f_n, f'_n) \in G(A_0) \rightarrow (f, f') \in \overline{G(A_0)}.$$

Il s'ensuit que

$$G(\overline{A_0}) \subset \overline{G(A_0)}.$$

On remarque que $D(A_0) \subsetneq D(\overline{A_0})$. Car pour $a = -1, b = 1$, la fonction $f(x) = 1 - |x| \in D(\overline{A_0})$, mais f n'appartient à la classe $C^1([-1, 1])$ et donc $f \notin D(A_0)$, ce qui prouve que A_0 n'est pas fermé.

Théorème 1.2.6 Soit $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ un opérateur linéaire. Supposons qu'il existe une constante $M > 0$ telle qu'on ait

$$\|x\| \leq M\|Ax\|. \tag{I}$$

Alors :

1. on a $\ker(A) = \{0\}$,
2. A est fermable et on a $R(\overline{A}) = \overline{R(A)}$.

Preuve.

1. L'égalité résulte immédiatement de (I) et de la définition de $\ker(A)$.
2. Soit $y \in \overline{R(A)}$. Alors il existe une suite (x_n) , $x_n \in D(A)$ telle que $Ax_n \rightarrow y$. On remarque que, d'après l'inégalité (I), on a

$$\|x_p - x_q\| \leq M\|Ax_p - Ax_q\|.$$

Comme $\|Ax_p - Ax_q\| \leq \|Ax_p - y\| + \|Ax_q - y\| \rightarrow 0$ pour $p, q \rightarrow \infty$, il résulte que (x_n) est une suite de Cauchy dans H . Donc elle est convergente vers un élément x_0 appartenant à $\overline{D(A)}$. On a :

$$\begin{cases} x_n \rightarrow x_0 \\ Ax_n \rightarrow y, \end{cases}$$

ce qui nous permet de définir la fermeture $\overline{A}$ de A et on a $y = \overline{A}x_0 \in R(\overline{A})$, d'où $\overline{R(A)} \subset R(\overline{A})$.

L'inclusion de l'autre sens $R(\overline{A}) \subset \overline{R(A)}$ est évidente.

L'égalité désirée est démontrée.

□

1.3 Opérateurs auto-adjoints.

Définition 1.3.1 Soit $A : D(A) \subset H \rightarrow E$ un opérateur linéaire, on appelle adjoint de A , l'opérateur $A^* : D(A^*) \subset E^* \rightarrow H^*$ défini par

$$\begin{cases} D(A^*) = \{v \in E^* / \exists w \in H^* : (v, Au) = (w, u), \forall u \in D(A)\}, \\ A^*v = w. \end{cases}$$

Théorème 1.3.1 Pour que la représentation $(v, Au) = (w, u)$ soit unique pour tout $u \in D(A)$ avec $w \in H^*$, il faut et il suffit que $\overline{D(A)} = H$ et dans ce cas A^* est un opérateur fermé.

Définition 1.3.2 L'opérateur A est dit auto-adjoint si

$$D(A) = D(A^*), (Ax, y) = (x, Ay), \forall x, y \in D(A).$$

Dans ce cas le nombre (Ax, x) est réel et on a :

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |(Ax, x)|.$$

Remarque 1.3.1

- i) $I^* = I, (A + T)^* = A^* + T^*, A^{**} = A.$
- ii) Si l'opérateur A est inversible, alors A^* l'est aussi et l'on a

$$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*.$$

Définition 1.3.3 L'opérateur A est dit positif si $(Ax, x) \geq 0, \forall x \in D(A).$

Théorème 1.3.2 Soit $A : D(A) \rightarrow E$ un opérateur linéaire, auto-adjoint positif. Alors il existe un opérateur $B : D(B) \rightarrow E$ telle que :

$$D(A) \subset D(B) \text{ et } Ax = B(Bx), \forall x \in D(A).$$

L'opérateur B est appelé racine carré de l'opérateur A et on le note par $A^{\frac{1}{2}}.$

On a $D(A) \subset D(A^{\frac{1}{2}}).$

En général on n'a pas l'égalité mais on a :

$$\overline{D(A)} = D(A^{\frac{1}{2}}).$$

Proposition 1.3.1 Soient H, E deux espaces de Hilbert et A une application linéaire continue de H dans E . On a alors :

$$\ker A = (R(A^*))^{\perp}, \ker A^* = (R(A))^{\perp},$$

$$(\ker A^*)^\perp = \overline{R(A)}, \quad (\ker A)^\perp = \overline{R(A^*)}.$$

En particulier, si $H = E$ et si A est auto-adjoint, alors on a

$$\ker A = (R(A))^\perp, \quad (\ker A)^\perp = \overline{R(A)}.$$

1.4 Quelques inégalités utiles.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

1.4.1 Inégalité de Cauchy.

Quelque soient $u, v \in L_2(\Omega)$, on a

$$\left| \int_{\Omega} uv dx \right| \leq \left(\int_{\Omega} |u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |v|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

Analogement, quelque soit $u = (u_1, \dots, u_n), v = (v_1, \dots, v_n) \in L_2(\Omega)$, on a

$$\left| \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N u_i v_i dx \right| \leq \left(\int_{\Omega} \sum_{i=1}^N |u_i|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} \sum_{i=1}^N |v_i|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

1.4.2 Inégalité de Hölder

C'est une généralisation des inégalités de Cauchy.

Soit $p \in]1, \infty[$, on désigne par q l'exposant conjugué de p , défini par

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Pour tout $u \in L_p(\Omega)$ et $v \in L_q(\Omega)$ c'est-à-dire :

$$\int_{\Omega} |u|^p dx < \infty$$

Chapitre 2

Opérateurs abstraits de régularisation.

2.1 Opérateurs dépendants d'un paramètre

Soient X, Y deux espaces de Banach et $\{A(t)\}_{t \in [0, T]}$ une famille d'opérateurs telle que $A(t) : D(A(t)) \rightarrow Y, D(A(t)) \subset X$. qui dépend du temps.

2.1.1 Continuité par rapport au paramètre.

Définition 2.1.1 La famille d'opérateurs $\{A(t)\}$ est dite fortement continue au point $t_0 \in [0, T[$ en $u(t_0) \in D(A(t_0))$ s'il existe une fonction $u(t)$ telle que $u(t) \in D(A(t))$ pour t appartenant à un voisinage de t_0 et que $u(t) \rightarrow u(t_0)$ dans X et $A(t)u(t) \rightarrow A(t_0)u(t_0)$ dans Y lorsque t tend vers t_0 .

2.1.2 Dérivation par rapport au paramètre.

Définition 2.1.2 La famille d'opérateurs $\{A(t)\}$ est dite fortement dérivable au point $t_0 \in [0, T[$ en $u(t_0) \in D(A(t_0))$ s'il existe une fonction $u(t)$ définie

dans un voisinage de t_0 telle que $u(t) \in D(A(t))$, et un $v(t_0) \in D(A(t_0))$ tels que

$$\frac{u(t) - u(t_0)}{t - t_0} \rightarrow v(t_0) \quad \text{dans } X$$

et

$$\frac{A(t)u(t) - A(t_0)u(t_0)}{t - t_0} \rightarrow w(t_0) \quad \text{dans } Y$$

lorsque t tend vers t_0 et la limite $w(t_0)$ ne dépend pas du choix de $u(t)$. On définit la dérivée $A'(t)$ de $A(t)$ par la relation

$$A'(t_0)u(t_0) = w(t_0) - A(t_0)v(t_0).$$

Remarque 2.1.1 Soit $A(t)$ une famille d'opérateur auto-adjoint et fortement différentiable dans un espace de Hilbert. Alors $\frac{dA(t)}{dt}$ est auto-adjoint.

Preuve. Puisque $A(t)$ est auto-adjoint, quelque soient $t \in [0, T]$ et $X, Y \in C^1([0, T]; H)$, on a $(A(t)x, y) = (x, A(t)y)$. En dérivant les deux membre de l'égalité, on obtient

$$\left(\frac{dA(t)}{dt}x + A(t)\frac{dx}{dt}, y\right) + \left(A(t)x, \frac{dy}{dt}\right) = \left(\frac{dx}{dt}, A(t)y\right) + \left(x, \frac{dA(t)}{dt}y + A(t)\frac{dy}{dt}\right).$$

Comme A est auto-adjoint, l'égalité précédente se réduit à

$$\left(\frac{dA(t)}{dt}x, y\right) = \left(x, \frac{dA(t)}{dt}y\right), \forall x, y \in D\left(\frac{dA(t)}{dt}\right).$$

Ce qui prouve que $\frac{dA(t)}{dt}$ est auto-adjoint. □

2.2 Opérateurs abstraits de régularisation

Définition 2.2.1 Soit A un opérateur linéaire auto-adjoint, défini de $D(A)$ dans H tel que

$$(Av, v) \geq c_1|v|^2, \forall v \in D(A), c_1 > 0$$

Pour $\varepsilon > 0$, on définit la famille d'opérateurs

$$A_\varepsilon^{-1} = (I + \varepsilon A)^{-1}.$$

A_ε^{-1} s'appelle opérateur abstrait de régularisation.

Théorème 2.2.1 L'opérateur A_ε^{-1} est borné et vérifie l'inégalité

$$\|A_\varepsilon^{-1}\| \leq \frac{1}{1 + \varepsilon c_1}. \quad (P_1)$$

Preuve. Pour montrer la propriété (P_1) on va utiliser le théorème du graphe fermé. Vu que l'opérateur A_ε est fermé, montrons qu'il est surjectif.

Nous avons $A_\varepsilon : D(A) \subset H \rightarrow H$. le théorème 1.1.1 et la proposition 1.3.1 entraînent que

$$H = \text{Ker}(A_\varepsilon) \oplus \overline{R(A_\varepsilon)}.$$

Montrons que $\text{Ker}(A_\varepsilon) = \{0\}$.

Soit $x \in \text{Ker}(A_\varepsilon)$. Alors $A_\varepsilon x = 0$, d'où

$$\varepsilon Ax = -x$$

donc on a

$$-|x|^2 = (-x, x) = (\varepsilon Ax, x) \geq \varepsilon c_1 |x|^2$$

il s'ensuit que

$$(\varepsilon c_1 + 1)|x|^2 \leq 0$$

par conséquent on a

$$x = 0.$$

Montrons que $\overline{R(A_\varepsilon)} = R(A_\varepsilon)$, on a :

$$(A_\varepsilon u, u) = |u|^2 + \varepsilon(Au, u) \quad (a_1)$$

$$\geq (\varepsilon c_1 + 1)|u|^2$$

D'après le théorème 1.2.6, on conclut que

$$\overline{R(A_\varepsilon)} = R(A_\varepsilon).$$

et d'après le théorème 1.2.2, A_ε^{-1} existe et est borné sur $R(A_\varepsilon)$. De (a_1) on peut tirer la relation

$$(1 + \varepsilon c_1)|u| \leq |A_\varepsilon u|; \forall u \in D(A). \quad (a_2)$$

Soit $u = A_\varepsilon^{-1}v$; où v est un élément quelconque de H , D'après la relation (a_2) , on a

$$(1 + \varepsilon c_1)|A_\varepsilon^{-1}v| \leq |v|, \forall v \in H$$

d'où

$$\frac{|A_\varepsilon^{-1}v|}{|v|} \leq \frac{1}{1 + \varepsilon c_1}; \forall v \in H;$$

en passant au sup, l'inégalité (P_1) est démontrée. □

Théorème 2.2.2 *Les opérateurs de régularisation A_ε^{-1} vérifient les propriétés suivantes*

$$\varepsilon AA_\varepsilon^{-1} = I - A_\varepsilon^{-1} \quad (P_2)$$

$$|\varepsilon AA_\varepsilon^{-1}x| = |Ix - A_\varepsilon^{-1}x| \rightarrow 0; \text{ lorsque } \varepsilon \rightarrow 0 \quad (P_3)$$

$$L'opérateur A_ε^{-1} est positif, auto-adjoint et commute avec A . \quad (P_4)$$

Preuve. Montrons (P_2) , on a

$$\varepsilon AA_\varepsilon^{-1} = \varepsilon \left(\frac{A_\varepsilon - I}{\varepsilon} \right) A_\varepsilon^{-1} = I - A_\varepsilon^{-1}$$

Pour montrer (P_3) , on doit établir que $|A_\varepsilon^{-1}x - x| \rightarrow 0$ lorsque ε tend vers 0. D'après la propriété (P_2) on peut voir que l'opérateur AA_ε^{-1} est uniformément borné et

$$|A_\varepsilon^{-1}x - x| = |\varepsilon AA_\varepsilon^{-1}x| \leq \varepsilon |AA_\varepsilon^{-1}x| \leq \varepsilon \|AA_\varepsilon^{-1}\| |x|$$

$\Rightarrow$

$$\|A_\varepsilon^{-1} - I\| \leq \varepsilon \|AA_\varepsilon^{-1}\| \rightarrow 0 \text{ lorsque } \varepsilon \rightarrow 0,$$

d'où le résultat.

Pour montrer (P_4) on remarque que

$$A^{-1}A_\varepsilon = A^{-1}(I + \varepsilon A) = A^{-1} + \varepsilon A^{-1}A = A^{-1} + \varepsilon I.$$

D'autre part on a

$$A_\varepsilon A^{-1} = (I + \varepsilon A)A^{-1} = A^{-1} + \varepsilon A^{-1}A = A^{-1} + \varepsilon I,$$

d'où il résulte que A commute avec A_ε^{-1} .

□

Théorème 2.2.3 *Si l'opérateur $A^{-1}(t)$ est différentiable alors $A_\varepsilon^{-1}(t)$ est différentiable et on a :*

$$\frac{d(A(t)A_\varepsilon^{-1}(t))}{dt} = \frac{-1}{\varepsilon} \frac{dA_\varepsilon^{-1}(t)}{dt} \quad (P_5)$$

$$\frac{dA_\varepsilon^{-1}(t)}{dt} = \varepsilon A(t)A_\varepsilon^{-1}(t) \frac{dA^{-1}(t)}{dt} A(t)A_\varepsilon^{-1}(t) \quad (P_6)$$

Preuve. Montrons (P_5) . En effet : d'après (P_2) on a

$$\begin{aligned} \varepsilon AA_\varepsilon^{-1} &= I - A_\varepsilon^{-1} \\ \Rightarrow \varepsilon \frac{d(AA_\varepsilon^{-1})}{dt} &= -\frac{dA_\varepsilon^{-1}}{dt} \\ \Rightarrow \frac{d(AA_\varepsilon^{-1})}{dt} &= \frac{-1}{\varepsilon} \frac{dA_\varepsilon^{-1}(t)}{dt} \end{aligned}$$

Montrons (P_6) . En effet : d'après (P_2) on a

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} A_\varepsilon^{-1} + \frac{dA_\varepsilon^{-1}}{dt} A &= \frac{-1}{\varepsilon} \frac{dA_\varepsilon^{-1}}{dt} \\ \Rightarrow \frac{dA}{dt} A_\varepsilon^{-1} &= \frac{-1}{\varepsilon} \frac{dA_\varepsilon^{-1}}{dt} (I + \varepsilon A) \\ \Rightarrow \frac{-1}{\varepsilon} \frac{dA_\varepsilon^{-1}}{dt} A_\varepsilon &= \frac{dA}{dt} A_\varepsilon^{-1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{dA_\varepsilon^{-1}}{dt} = -\varepsilon A_\varepsilon^{-1} \frac{dA}{dt} A_\varepsilon^{-1}$$

comme $AA^{-1} = I$ et A, A_ε^{-1} commute

$$\Rightarrow \frac{dA}{dt} A^{-1} = -A \frac{dA^{-1}}{dt} \Rightarrow \frac{dA_\varepsilon^{-1}}{dt} = \varepsilon AA_\varepsilon^{-1} \frac{dA^{-1}}{dt} AA_\varepsilon^{-1}$$

□

2.3 La méthode des inégalités énergétiques

La méthode des inégalités de l'énergie, appelée aussi méthode d'analyse fonctionnelle, trouve son origine dans les travaux de I.G. Petrovsky, où elle a été utilisée dans la résolution du problème de Cauchy lié aux équations du type hyperbolique. Par la suite les développements importants de la méthode ont été dus à J. Leray et L. Garding.

Cette méthode a été également utilisée et développée dans les travaux de O. A. Ladyzenskaya, K. Friedrichs et N. I. Yurchuk.

Le schéma de la méthode a été donné pour la première fois par A. A. Dezin ; il peut être résumé comme suit :

Pour l'opérateur L engendré par le problème considéré, on démontre l'inégalité énergétique du type

$$\|u\|_E \leq C \|Lu\|_F, \forall u \in D(L) \quad (1)$$

La démonstration se base sur une analyse précise des formes obtenues en multipliant l'équation donnée par un opérateur Mu contenant la fonction u

ou ses dérivées et une certaine fonction poids. Le choix de l'opérateur Mu est fondamental, il est dicté par l'équation et les conditions aux limites. Ensuite dans les topologies fortes des espaces E et F , on construit la fermeture $\bar{L}$ de l'opérateur L et la solution de l'équation $\bar{L}u = \mathcal{F}$, $\mathcal{F} \in F$ est appelée solution forte du problème considéré. A l'aide d'un passage à la limite, on prolonge l'inégalité (1) à $u \in D(\bar{L})$.

Comme l'opérateur L^{-1} est continu on conclut pour l'image de l'opérateur $\bar{L}$ l'égalité $R(\bar{L}) = \overline{R(L)}$. Pour la démonstration de l'existence de la solution forte pour tout $\mathcal{F} \in F$, il suffit d'établir la densité de $R(L)$ dans F qui est obtenue à l'aide des opérateurs de régularisation. Le choix des opérateurs de régularisation est lié au caractère du problème étudié.

La méthode des estimations à priori est une méthode efficace pour l'étude de beaucoup de problèmes de la physique mathématique, elle est fondée sur un support théorique solide et est développée dans un cadre abstrait élégant. Mais dans l'application de cette méthode on trouve des difficultés parmi lesquelles nous citons :

- . Le choix des espaces fonctionnels.
- . Le choix du multiplicateur Mu
- . Le choix de l'opérateur de régularisation.

Chapitre 3

Estimation à priori

3.1 Présentation du problème

Soit $D =]0, T_1[\times]0, T_2[\subset \mathbb{R}^2$. On désigne par $|\cdot|$ et $(\cdot, \cdot)$ la norme et le produit scalaire dans un espace de Hilbert H .

On considère dans D le problème au bord bidimensionnel suivant :

$$lu = \frac{\partial u}{\partial t_1} + \frac{\partial u}{\partial t_2} + A(t)u = f(t), \quad (3.1.1)$$

$$\begin{cases} l_1 u(t_1, t_2) = u(t_1, 0) = \varphi(t_1), \\ l_2 u(t_1, t_2) = u(0, t_2) = \psi(t_2), \end{cases} \quad (3.1.2)$$

où $f : D \rightarrow H$, $\varphi :]0, T_1[\rightarrow H$ et $\psi :]0, T_2[\rightarrow H$ sont les données et u est la fonction inconnue à valeurs dans H .

L'opérateur $A(t)$ est linéaire, non borné et auto-adjoint pour tout $t = (t_1, t_2) \in D$

On suppose que les conditions suivantes sont vérifiées :

(a) il existe une constante $c_1 > 0$ indépendante de t et de $v(t)$ telle que :

$$(A(t)v(t), v(t)) \geq c_1 |v(t)|^2, \forall v(t) \in D(A(t)) \text{ p.p. } t \in D$$

(b) Les opérateurs inverses de $A(t)$ existent pour tout $t \in D$ et $A^{-1}(t)$ est fortement différentiable par rapport à t dans H ; de plus on a

$$\frac{\partial A^{-1}(t)}{\partial t_1}, \frac{\partial A^{-1}(t)}{\partial t_2} \in L_\infty(D, \mathcal{L}(H)),$$

où $\mathcal{L}(H)$ est l'espace des opérateurs linéaires bornés de H à valeurs dans H . muni de la norme

$$\|A\|_{\mathcal{L}(H)} = \sup_{u \in H, u \neq 0} \frac{|A(t)u|}{|u|}$$

3.2 Espaces fonctionnels

Soit $D(A^{\frac{1}{2}}(t)) \neq \emptyset$. On construit l'espace de Hilbert H sur $D(A^{\frac{1}{2}}(t))$ pour $t \in D$ muni de la norme

$$|u|_t = |A^{\frac{1}{2}}(t)u|.$$

On désigne par L l'opérateur (l, l_1, l_2) engendré par le problème (3.1.1)-(3.1.2) de domaine définition

$$D(L) = \{u \in L_2(D, H), u(t) \in D(A(t)), \frac{\partial u}{\partial t_1}, \frac{\partial u}{\partial t_2}, A(t)u \in L_2(D, H)\}.$$

L'opérateur L agit de E_1 à valeurs dans E_2 où E_1 est le complété de $D(L)$ par rapport à la norme

$$\|u\|_1^2 = \sup_{(s_1, s_2) \in \overline{D}} \left\{ \int_0^{s_1} |u(t_1, s_2)|^2 dt_1 + \int_0^{s_2} |u(s_1, t_2)|^2 dt_2 + 2 \int_0^{s_1} \int_0^{s_2} |u|_t^2 dt_1 dt_2 \right\},$$

E_2 est l'espace de Hilbert $L_2(D, H) \times L_2(]0, T_1[, H) \times L_2(]0, T_2[, H)$, muni de la norme

$$\|F\|_2^2 = \|f\|_{L_2(D, H)}^2 + \|\varphi\|_{L_2(]0, T_1[, H)}^2 + \|\psi\|_{L_2(]0, T_2[, H)}^2.$$

Lemme 3.2.1 *Si les conditions (a) et (b) sont vérifiées, alors $D(L)$ est dense dans $L_2(D, H)$.*

Preuve. Soit $v \in L_2(D, H)$ telle que

$$\int \int_D (u, v) dt_1 dt_2 = 0, \forall u \in D(L).$$

On pose $u = A^{-1}(t)h$, où h est une fonction quelconque dans $L_2(D, H)$. On peut facilement voir que

$$\int \int_D (A^{-1}(t)h, v) dt_1 dt_2 = 0.$$

En particulier si $v = h$, alors d'après la condition (a) on obtient

$$A^{-1}(t)v = 0,$$

et par suite

$$v = 0 \text{ sur } D.$$

□

3.3 Unicité de la solution forte généralisée

Théorème 3.3.1 *Sous les conditions (a) et (b), on obtient pour chaque $u \in D(L)$ l'estimation*

$$\|u\|_1^2 \leq C \|Lu\|_2^2 \quad (3.3.1)$$

où C est une constante positive indépendante de t et de u .

Preuve. Comme les opérateurs $A(t)$ sont non bornés, on va les approximer par des opérateurs bornés et fortement différentiables $A(t)A_\varepsilon^{-1}(t)$ où

$$A_\varepsilon^{-1}(t) = (I + \varepsilon A(t))^{-1}; \varepsilon > 0.$$

En intégrant par parties deux fois l'expression $e^{c(s_1+s_2-t_1-t_2)}(lu, A_\varepsilon^{-1}(t)u)$ sur le domaine $D_s =]0, s_1[\times]0, s_2[\subset D$, on obtient :

$$\begin{aligned} & \int \int_{D_s} e^{c(s_1+s_2-t_1-t_2)}(lu, A_\varepsilon^{-1}(t)u) dt_1 dt_2 = \\ & \int \int_{D_s} e^{c(s_1+s_2-t_1-t_2)} \left(\frac{\partial u}{\partial t_1} + \frac{\partial u}{\partial t_2} + A(t)u, A_\varepsilon^{-1}(t)u \right) dt_1 dt_2 = \\ & \int \int_{D_s} e^{c(s_1+s_2-t_1-t_2)} \left(\frac{\partial u}{\partial t_1}, A_\varepsilon^{-1}(t)u \right) dt_1 dt_2 \\ & + \int \int_{D_s} e^{c(s_1+s_2-t_1-t_2)} \left(\frac{\partial u}{\partial t_2}, A_\varepsilon^{-1}(t)u \right) dt_1 dt_2 \\ & + \int \int_{D_s} e^{c(s_1+s_2-t_1-t_2)} (A(t)u, A_\varepsilon^{-1}(t)u) dt_1 dt_2 \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

Par conséquent la formule (3.3.2) prend la forme suivante :

$$\int \int_{D_s} e^{c(s_1+s_2-t_1-t_2)}(lu, A_\varepsilon^{-1}(t)u) dt_1 dt_2 = \sum_{i=1}^3 I_i \quad (3.3.3)$$

En faisant les calculs on trouve

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_0^{s_2} e^{c(s_1+s_2-t_1-t_2)} (u, A_\varepsilon^{-1}(t)u)|_0^{s_1} dt_2 \\
 &+ c \int \int_{D_s} e^{c(s_1+s_2-t_1-t_2)} (u, A_\varepsilon^{-1}(t)u) dt_1 dt_2 \\
 &- \int \int_{D_s} e^{c(s_1+s_2-t_1-t_2)} (u, \frac{\partial A_\varepsilon^{-1}(t)}{\partial t_1} u) dt_1 dt_2 \\
 &- \int \int_{D_s} e^{c(s_1+s_2-t_1-t_2)} (A_\varepsilon^{-1}(t)u, \frac{\partial u}{\partial t_1}) dt_1 dt_2 \\
 &= \int_0^{s_2} e^{c(s_2-t_2)} |A_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(t)u|_{t_1=s_1}^2 dt_2 - \int_0^{s_2} e^{c(s_1+s_2-t_2)} |A_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(t)u|_{t_1=0}^2 dt_2 \\
 &+ c \int \int_{D_s} e^{c(s_1+s_2-t_1-t_2)} |A_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(t)u|^2 dt_1 dt_2 \\
 &- \int \int_{D_s} e^{c(s_1+s_2-t_1-t_2)} (u, \frac{\partial A_\varepsilon^{-1}(t)}{\partial t_1} u) dt_1 dt_2 \\
 &- \int \int_{D_s} e^{c(s_1+s_2-t_1-t_2)} (A_\varepsilon^{-1}(t)u, \frac{\partial u}{\partial t_1}) dt_1 dt_2 \\
 I_2 &= \int_0^{s_1} e^{c(s_1-t_1)} |A_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(t)u|_{t_2=s_2}^2 dt_1 - \int_0^{s_1} e^{c(s_1+s_2-t_1)} |A_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(t)u|_{t_2=0}^2 dt_1 \\
 &+ c \int \int_{D_s} e^{c(s_1+s_2-t_1-t_2)} |A_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(t)u|^2 dt_1 dt_2 \\
 &- \int \int_{D_s} e^{c(s_1+s_2-t_1-t_2)} (u, \frac{\partial A_\varepsilon^{-1}(t)}{\partial t_2} u) dt_1 dt_2
 \end{aligned}$$

$$- \int \int_{D_s} e^{c(s_1+s_2-t_1-t_2)} (A_\varepsilon^{-1}(t)u, \frac{\partial u}{\partial t_2}) dt_1 dt_2$$

$$I_3 = \int \int_{D_s} e^{c(s_1+s_2-t_1-t_2)} |A_\varepsilon^{\frac{1}{2}}(t) A_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(t) u|^2 dt_1 dt_2$$

En remplaçant $I_i, i = 1, 3$ par ses valeurs dans (3.3.3) on trouve :

$$\begin{aligned} 2Re \int \int_{D_s} e^{c(s_1+s_2-t_1-t_2)} (lu, A_\varepsilon^{-1}(t)u) dt_1 dt_2 = \\ \int_0^{s_2} e^{c(s_2-t_2)} |A_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(t) u|_{t_1=s_1}^2 dt_2 - \int_0^{s_2} e^{c(s_1+s_2-t_2)} |A_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(t) u|_{t_1=0}^2 dt_2 \\ + \int_0^{s_1} e^{c(s_1-t_1)} |A_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(t) u|_{t_2=s_2}^2 dt_1 - \int_0^{s_1} e^{c(s_1+s_2-t_1)} |A_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(t) u|_{t_2=0}^2 dt_1 \\ + 2 \int \int_{D_s} e^{c(s_1+s_2-t_1-t_2)} [c |A_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(t) u|^2 + |A_\varepsilon^{\frac{1}{2}}(t) A_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(t) u|^2] dt_1 dt_2 \\ - \int \int_{D_s} e^{c(s_1+s_2-t_1-t_2)} (u, \frac{\partial A_\varepsilon^{-1}(t)}{\partial t_1} u + \frac{\partial A_\varepsilon^{-1}(t)}{\partial t_2} u) dt_1 dt_2 \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

Posons maintenant ;

$$K_1 = \int_0^{s_1} [e^{c(s_1+s_2-t_1-t_2)} |A_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(t) u|^2]_{t_2=s_2} dt_1$$

et

$$g_\varepsilon(t) = |A_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(t) u|^2.$$

On voit que $g_\varepsilon(t) \longrightarrow |u|^2$, qd $\varepsilon \rightarrow 0$ (converge simplement) et d'après les propriétés des opérateurs de régularisation ($A_\varepsilon^{-1}(t)$ est borné et $\|A_\varepsilon^{-1}\| < 1$) on

a :

$$g_\varepsilon(t) = |A_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(t) u|^2 \leq \|A_\varepsilon^{-1}(t)\| |u|^2 \leq |u|^2.$$

comme $u \in D(L)$ alors :

$$K_1 = \int_0^{s_1} [e^{c(s_1+s_2-t_1-t_2)} |A_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(t)u|^2]_{t_2=s_2} dt_1 \longrightarrow \int_0^{s_1} [e^{c(s_1+s_2-t_1-t_2)} |u|^2]_{t_2=s_2} dt_1, \text{ qd } \varepsilon \rightarrow 0$$

De manière analogue quand $\varepsilon \rightarrow 0$ on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^{s_1} [e^{c(s_1+s_2-t_1-t_2)} |A_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(t)u|^2]_{t_2=0} dt_1 &\longrightarrow \int_0^{s_1} [e^{c(s_1+s_2-t_1-t_2)} |u|^2]_{t_2=0} dt_1 \\ \int_0^{s_2} [e^{c(s_1+s_2-t_1-t_2)} |A_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(t)u|^2]_{t_1=s_1} dt_2 &\longrightarrow \int_0^{s_2} [e^{c(s_1+s_2-t_1-t_2)} |u|^2]_{t_1=s_1} dt_2 \\ \int_0^{s_2} [e^{c(s_1+s_2-t_1-t_2)} |A_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(t)u|^2]_{t_1=0} dt_2 &\longrightarrow \int_0^{s_2} [e^{c(s_1+s_2-t_1-t_2)} |u|^2]_{t_1=0} dt_2 \\ \int \int_{D_s} e^{c(s_1+s_2-t_1-t_2)} |A_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(t)u|^2 dt_1 dt_2 &\longrightarrow \int \int_{D_s} e^{c(s_1+s_2-t_1-t_2)} |u|^2 dt_1 dt_2 \end{aligned}$$

Posons K_2 l'intégrale suivante :

$$K_2 = \int \int_{D_s} e^{c(s_1+s_2-t_1-t_2)} |A^{\frac{1}{2}}(t)A_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(t)u|^2 dt_1 dt_2$$

soit

$$M_\varepsilon(t) = |A^{\frac{1}{2}}(t)A_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(t)u|^2$$

Il est clair qu'on a une convergence simple de $M_\varepsilon(t)$ vers la fonction $|u|_t^2$; et

comme u et $A(t)u \in D(L)$ on obtient :

$$\begin{aligned} K_2 &= \int \int_{D_s} e^{c(s_1+s_2-t_1-t_2)} |A^{\frac{1}{2}}(t)A_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(t)u|^2 dt_1 dt_2 \longrightarrow \\ &\int \int_{D_s} e^{c(s_1+s_2-t_1-t_2)} |u|_t^2 dt_1 dt_2, \text{ qd } \varepsilon \rightarrow 0 \end{aligned}$$

soit K_3 l'intégrale

$$K_3 = \int \int_{D_s} e^{c(s_1+s_2-t_1-t_2)} (u, \frac{\partial A_\varepsilon^{-1}(t)}{\partial t_1} u) dt_1 dt_2$$

on a la majoration suivante :

$$\begin{aligned} & \left| \int \int_{D_s} e^{c(s_1+s_2-t_1-t_2)} (u, \frac{\partial A_\varepsilon^{-1}(t)}{\partial t_1} u) dt_1 dt_2 \right| \\ & \leq \int \int_{D_s} e^{c(s_1+s_2-t_1-t_2)} \left| \frac{\partial A_\varepsilon^{-1}(t)}{\partial t_1} \right| |u|^2 dt_1 dt_2 \\ & \leq \int \int_{D_s} e^{c(s_1+s_2-t_1-t_2)} |A(t) A_\varepsilon^{-1}(t)| \frac{\partial A^{-1}(t)}{\partial t_1} A(t) A_\varepsilon^{-1}(t) |u|^2 dt_1 dt_2 \end{aligned}$$

comme l'opérateur $A(t) A_\varepsilon^{-1}(t)$ est borné et vu la condition (b) on a alors

$$\leq \varepsilon \|A(t) A_\varepsilon^{-1}(t)\|^2 \left\| \frac{\partial A^{-1}(t)}{\partial t_1} \right\| \int \int_{D_s} e^{c(s_1+s_2-t_1-t_2)} |u|^2 dt_1 dt_2$$

D'où

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} K_3 = 0$$

De la même façon on prouve que :

$$\int \int_{D_s} e^{c(s_1+s_2-t_1-t_2)} (u, \frac{\partial A_\varepsilon^{-1}(t)}{\partial t_2} u) dt_1 dt_2 \longrightarrow 0, \text{ qd } \varepsilon \rightarrow 0$$

En utilisant le δ -inégalité et en appliquant les propriétés des opérateurs de régularisation quand ε tend vers 0, on obtient

$$\begin{aligned} & \int_0^{s_2} e^{c(s_2-t_2)} |u(s_1, t_2)|^2 dt_2 + \int_0^{s_1} e^{c(s_1-t_1)} |u(t_1, s_2)|^2 dt_1 + \\ & 2 \int \int_{D_s} e^{c(s_1+s_2-t_1-t_2)} |u(t_1, t_2)|^2 dt_1 dt_2 \leq \int_0^{s_1} e^{c(s_1+s_2-t_2)} |u(0, t_2)|^2 dt_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^{s_2} e^{c(s_1+s_2-t_1)} |u(t_1, 0)|^2 dt_1 + \delta \int \int_{D_s} e^{c(s_1+s_2-t_1-t_2)} |lu(t_1, t_2)|^2 dt_1 dt_2 \\
& \left(\frac{1}{\delta} - 2c\right) \int \int_{D_s} e^{c(s_1+s_2-t_1-t_2)} |u(t_1, t_2)|^2 dt_1 dt_2. \quad (3.3.5)
\end{aligned}$$

Pour éliminer le dernier terme dans le membre droit de l'inégalité (3.3.5) on choisit $\delta = 2$ et $c = 1$, il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
& \int_0^{s_2} e^{(s_2-t_2)} |u(s_1, t_2)|^2 dt_2 + \int_0^{s_1} e^{(s_1-t_1)} |u(t_1, s_2)|^2 dt_1 + \\
& 2 \int \int_{D_s} e^{(s_1+s_2-t_1-t_2)} |u(t_1, t_2)|_t^2 dt_1 dt_2 \leq \int_0^{s_2} e^{(s_1+s_2-t_2)} |l_2 u|^2 dt_2 \\
& + \int_0^{s_2} e^{(s_1+s_2-t_1)} |l_1 u|^2 dt_1 + 2 \int \int_{D_s} e^{(s_1+s_2-t_1-t_2)} |lu(t_1, t_2)|^2 dt_1 dt_2 \quad (3.3.6)
\end{aligned}$$

Sachant que la fonction exponentielle est croissante par rapport à t_1 et t_2 , alors

$$\begin{aligned}
& \int_0^{s_2} |u(s_1, t_2)|^2 dt_2 + \int_0^{s_1} |u(t_1, s_2)|^2 dt_1 + 2 \int \int_{D_s} |u(t_1, t_2)|_t^2 dt_1 dt_2 \leq \\
& e^{T_2} \int_0^{s_2} |l_2 u|^2 dt_2 + e^{T_1} \int_0^{s_1} |l_1 u|^2 dt_1 + 2e^{(T_1+T_2)} \int \int_{D_s} |lu|^2 dt_1 dt_2. \quad (3.3.7)
\end{aligned}$$

En passant au sup par rapport $(s_1, s_2) \in \overline{D}$ dans (3.3.7) on obtient le résultat où la constante $C = 2e^{(T_1+T_2)}$. $\square$

Lemme 3.3.1 *L'opérateur L est fermable et sa fermeture $\overline{L}$ a un domaine de définition $D(\overline{L})$ vérifiant $D(\overline{L}) = \overline{D(L)}$*

Preuve. Comme les opérateurs $l_1 u$ et $l_2 u$ sont continus, il suffit de prouver que pour :

$$u_n \in D(L), u_n \rightarrow 0, lu_n \rightarrow f \in L_2(D, H) \Rightarrow f = 0 \quad (3.3.8)$$

Soit $v \in D(L)$, alors

$$\begin{aligned} (f, v)_{L_2(D, H)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int \int_D (lu_n, v) dt_1 dt_2 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int \int_D (u_n, -\frac{\partial v}{\partial t_1} - \frac{\partial v}{\partial t_2} + A(t)v) dt_1 dt_2 \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{T_2} (u_n, v)_{t_1=T_1} dt_2 + \int_0^{T_1} (u_n, v)_{t_2=T_2} dt_1 \right] = 0 \end{aligned}$$

De la densité de $D(L)$ dans $L_2(D, H)$ (voir le lemme 3.2.1) il s'ensuit que $f = 0$, alors tout élément de $D(\bar{L})$ est une limite d'une suite $u_n \in D(L)$, (i.e) :

$$\bar{L}u = \lim_{n \rightarrow \infty} Lu_n,$$

et ainsi

$$D(\bar{L}) = \overline{D(L)}.$$

□

Définition 3.3.1 *La solution de l'équation*

$$\bar{L}u = f$$

est appelée solution forte généralisée.

Par passage à limite, on prolonge l'inégalité (3.3.1) aux solutions fortes généralisées

$u \in D(\bar{L})$:

$$\|u\|_1^2 \leq C \|\bar{L}u\|_2^2, \forall u \in D(\bar{L}). \quad (3.3.9)$$

On peut facilement démontrer que $R(\bar{L}) = \overline{R(L)}$ et $(\bar{L})^{-1} = (\bar{L}^{-1})$

Remarque 3.3.1 *De l'inégalité (3.3.9), on déduit l'unicité de la solution forte généralisée si elle existe, sa dépendance continue par rapport aux données (f, φ, ψ) et la fermeture de $R(\bar{L})$.*

Pour l'existence de la solution forte généralisée, ça revient à démontrer que l'image $R(L)$ est dense dans E_2 , ce qui est équivalent à $R(L)^\perp = \{0\}$.

Chapitre 4

Existence de la solution forte généralisée.

4.1 Existence de la solution forte généralisée

Théorème 4.1.1 *On suppose que les conditions du Théorème 3.3.1 sont satisfaites, et que pour tout $t \in D$ l'inégalité*

$$-Re\left(\frac{\partial A^{-1}}{\partial t_i}v(t), v(t)\right) \leq a_i|v(t)|^2, \forall v(t) \in H, i = 1, 2 \quad (4.1.1)$$

est vérifiée, où $a_i \geq 0$, $i = 1, 2$, sont indépendantes de v et de t .

Alors pour tout $(f, \varphi, \psi) \in E_2$ quelconque, il existe une unique solution forte généralisée $u \in D(\bar{L})$ du problème (3.1.1) – (3.1.2) vérifiant

$$\|u\|_1^2 \leq c\|\bar{L}u\|_2^2, \forall u \in D(\bar{L}).$$

Preuve. Soit $V = (v, \varphi, \psi) \in R(L)^\perp$ et $u \in D(L)$, alors :

$$(Lu, V) = 0 \Rightarrow (lu, v)_{L_2(D, H)} + (l_1u, \varphi)_{L_2([0, T_1[, H)} + (l_2u, \psi)_{L_2([0, T_2[, H)} = 0$$

on va demontrer que $V = 0$.

Première étape : Soit

$$u \in D_0(L) = \{u \in D(L), l_1 u = l_2 u = 0\}.$$

Alors

$$(Lu, V) = 0 \Rightarrow (lu, v)_{L_2(D, H)} = 0. \quad (4.1.2)$$

On pose $u = A_\varepsilon^{-1}(t)h$ dans (3.3.9), où h est une fonction arbitraire dans $L_2(D, H)$, telle que $\frac{\partial h}{\partial t_1}, \frac{\partial h}{\partial t_2} \in L_2(D, H)$ et $h(t_1, 0) = h(0, t_2) = h(t_1, T_2) = h(T_1, t_2) = 0$, on obtient

$$\begin{aligned} & \int \int_D (l(A_\varepsilon^{-1}(t)h), v) dt = 0 \\ \Rightarrow & \int \int_D \left(\frac{\partial A_\varepsilon^{-1}(t)h}{\partial t_1} + \frac{\partial A_\varepsilon^{-1}(t)h}{\partial t_2} + A(t)A_\varepsilon^{-1}(t)h, v \right) dt_1 dt_2 = 0 \\ \Rightarrow & \int \int_D \left(\frac{\partial A_\varepsilon^{-1}(t)}{\partial t_1} h + \frac{\partial A_\varepsilon^{-1}(t)}{\partial t_2} h, v \right) dt_1 dt_2 \\ & + \int \int_D (A_\varepsilon^{-1}(t) \left(\frac{\partial h}{\partial t_1} + \frac{\partial h}{\partial t_2} \right), v) dt_1 dt_2 + \int \int_D (A(t)A_\varepsilon^{-1}(t)h, v) = 0 \\ \Rightarrow & \int \int_D \left(\frac{\partial h}{\partial t_1} + \frac{\partial h}{\partial t_2}, A_\varepsilon^{-1}(t)v \right) dt_1 dt_2 = \\ & - \int \int_D \left(\frac{\partial A_\varepsilon^{-1}(t)}{\partial t_1} h + \frac{\partial A_\varepsilon^{-1}(t)}{\partial t_2} h, v \right) dt_1 dt_2 - \int \int_D (A(t)A_\varepsilon^{-1}(t)h, v) \end{aligned}$$

donc

$$\int \int_D \left(\frac{\partial h}{\partial t_1} + \frac{\partial h}{\partial t_2}, A_\varepsilon^{-1}(t)v \right) dt_1 dt_2 =$$

$$- \int \int_D \left(\frac{\partial A_\varepsilon^{-1}(t)}{\partial t_1} h + \frac{\partial A_\varepsilon^{-1}(t)}{\partial t_2} h, v \right) dt_1 dt_2 - \int \int_D (A(t)h, A_\varepsilon^{-1}(t)v) dt_1 dt_2. \quad (4.1.3)$$

Alors la fonction $A_\varepsilon^{-1}(t)v$ a une dérivée dans $L_2(D, H)$ et s'annule pour $t_1 = T_1$ et $t_2 = T_2$.

en effet : on a

$$\frac{\partial A_\varepsilon^{-1}(t)v}{\partial t_i} = \frac{\partial A_\varepsilon^{-1}(t)}{\partial t_i} v + A_\varepsilon^{-1}(t) \frac{\partial v}{\partial t_i}, i = 1, 2.$$

Pour démontrer que $\frac{\partial A_\varepsilon^{-1}(t)v}{\partial t_i} \in L_2(D, H)$, on démontre que :

$$\frac{\partial A_\varepsilon^{-1}(t)}{\partial t_i} v, A_\varepsilon^{-1}(t) \frac{\partial v}{\partial t_i} \in L_2(D, H), i = 1, 2$$

1.

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial A_\varepsilon^{-1}(t)}{\partial t_i} \right\| &= \left\| \varepsilon A(t) A_\varepsilon^{-1}(t) \frac{\partial A^{-1}(t)}{\partial t_i} A(t) A_\varepsilon^{-1}(t) \right\| \\ &\leq \varepsilon \|A(t) A_\varepsilon^{-1}(t)\| \left\| \frac{\partial A^{-1}(t)}{\partial t_i} \right\| \|A(t) A_\varepsilon^{-1}(t)\|, \end{aligned}$$

puisque $\frac{\partial A^{-1}(t)}{\partial t_i} \in L_\infty(D, \mathcal{L}(H))$, on a $\frac{\partial A^{-1}(t)}{\partial t_i} \in L_2(D, H)$.

Donc $\left\| \frac{\partial A_\varepsilon^{-1}(t)}{\partial t_i} \right\| \leq c$ ($c : \text{const}$), alors $\frac{\partial A_\varepsilon^{-1}(t)}{\partial t_i} v \in L_2(D, H)$.

2.

$$\int \int_D \|A_\varepsilon^{-1}(t) \frac{\partial v}{\partial t_i}\|_H^2 dt_1 dt_2 \leq \int \int_D \|A_\varepsilon^{-1}(t)\|_{\mathcal{L}(H)}^2 \left\| \frac{\partial v}{\partial t_i} \right\|_H^2 dt_1 dt_2 < \infty$$

parceque :

$$\begin{aligned} \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} \left(\frac{\partial h}{\partial t_1} + \frac{\partial h}{\partial t_2}, A_\varepsilon^{-1} v \right) dt_1 dt_2 &= \\ \int_0^{T_1} (h, A_\varepsilon^{-1} v)|_0^{T_2} dt_1 + \int_0^{T_2} (h, A_\varepsilon^{-1} v)|_0^{T_1} dt_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int \int_D (h, \frac{\partial A_\varepsilon^{-1}(t)v}{\partial t_1} + \frac{\partial A_\varepsilon^{-1}(t)v}{\partial t_2}) dt_1 dt_2 = \\
& - \int \int_D (h, (\frac{\partial A_\varepsilon^{-1}(t)}{\partial t_1} + \frac{\partial A_\varepsilon^{-1}(t)}{\partial t_2})v) dt_1 dt_2 \\
& - \int \int_D (h, A_\varepsilon^{-1}(t)(\frac{\partial v}{\partial t_1} + \frac{\partial v}{\partial t_2})) dt_1 dt_2.
\end{aligned}$$

Donc :

$$\int \int_D (A_\varepsilon^{-1}(t)h, \frac{\partial v}{\partial t_1} + \frac{\partial v}{\partial t_2}) dt_1 dt_2 = \int \int_D (Ah, A_\varepsilon^{-1}(t)v)_{L_2(H)} dt_1 dt_2,$$

alors :

$$A_\varepsilon^{-1}(t) \frac{\partial v}{\partial t_i} \in L_2(D, H).$$

Et par conséquent $\frac{\partial A_\varepsilon^{-1}(t)v}{\partial t_i} \in L_2(D, H)$. En integrant par parties le membre gauche de (4.1.3), en prenant deux fois la partie réelle, puis remarquant que $h \in H^1$ qui est dense dans $L_2(D, H)$, on généralise l'inégalité obtenue pour toutes les fonctions $h \in L_2(D, H)$, puis si on pose $h = v$ on trouve :

$$2 \int \int_D |A_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(t) A^{\frac{1}{2}}(t)v|^2 dt_1 dt_2 = -Re \int \int_D (\frac{\partial A_\varepsilon^{-1}(t)}{\partial t_1} v, v) dt_1 dt_2. \quad (4.1.4)$$

En appliquant les propriétés des opérateurs de régularisation et l'inégalité (4.1.1) au membre droit de (4.1.4) il résulte

$$2 \int \int_D |A_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(t) A^{\frac{1}{2}}(t)v|^2 dt_1 dt_2 \leq \varepsilon (a_1 + a_2)(t) |A_\varepsilon^{-1}(t) A(t)v|^2 \quad (4.1.5)$$

Faisons tendre ε vers 0 (tenons en compte les propriétés des opérateurs de régularisation) il s'ensuit que

$$\int \int_D |A^{\frac{1}{2}}(t)v|^2 dt_1 dt_2 \leq 0$$

ce qui implique que $|A^{\frac{1}{2}}(t)v| = 0$ p.p.t $\in D$. De la condition (a) on conclut que $v = 0$ p.p.t $\in D$.

Deuxième étape : Soit $u \in D(L)$ alors

$$(Lu, V) = 0 \Rightarrow (l_1 u, \varphi)_{L_2([0, T_1[, H)} + (l_2 u, \psi)_{L_2([0, T_2[, H)} = 0.$$

Comme l'image de l'opérateur (l_1, l_2) est dense dans l'espace $L_2([0, T_1[, H) \times L_2([0, T_2[, H)$ alors $\varphi = \psi = 0$, et par suite $V = 0$.

Ce qui achève la preuve du Théorème (4.1.1). □

Bibliographie

- [1] **A.Brenner**, Polyparabolic equations with two dimensional time. Cite-seer.nj.nee.com/13366html,monograph (1988).
- [2] **H.Brezis**. Analyse fonctionnelle Théorie et application, Masson Paris New York Barcelone Milan Mexico Sao Paulo 1987.
- [3] **N.I.Brich,N.I.Yurchuk**. some new boundary value problems for a class of a class partial differential aquations.Diff.Urvn, 6, 1624 – 1630, (1968).
- [4] **A.Guezane-Lakoud, F.Rebbani, N.I.Yurchuk**. Problème aux limites pour un équation différentielle opérationnelle de second ordre. Maghreb. Mathematical Revien. V.6.N°1.39 – 48.(1997).
- [5] **A.Guezane-Lakoud**. On a class of hyperbolic aquation with abstract non-local bondary conditions. International Journal Of Applied Science end Computations. Vol 8, N°1, (2001).
- [6] **A.Guezane-Lakoud**. Etude de certains problèmes aux limites opérationnels par la méthode des inégalits énergétiques. Thésés de Doctorat D'Etat.

- [7] **V.I.Korzyuk.** The method of energy inequality and averaging operators. Vestnik. Bel.3.N°1.55 – 71.(1996).
- [8] **T.Kato.** Perturbation theory for linear operators. SPRING-VERLAG, Second edition (1980).
- [9] **S.G.Krein.** Linear differential equations in Banach space.A.M.S.Vol 29.(1971).
- [10] **J.L.Lions.** Equations différentielles opérationnelles et problèmes aux limites. Berlin (1961).
- [11] **F.E.Lomovtsev.** A boundary value problem for even order differential equations whose operator coefficients have variable domains.(Russian,Russian Summary), 8,1412-1425, 1471.(1994).
- [12] **F.E.Lomovtsev.** Differentiation and integration with respect to the parameter of infinite variable operators with variable domains of definition. Doklad. Nats. Akad. Nauk. Belarusi. Vol 43,N°1, 13 – 15. (1999).
- [13] **L.Shwartz.** Topologie générale et Analyse fonctionnelle, Edition Herman.
- [14] **V.Trinogvine.** Analyse fonctionnelle Edition Mir. Moscou,(1985).
- [15] **K.Yosida.** Functional Analysis. Springer-Verlag,Sixth Edition.

Document saisi par $\text{\TeX}$ au format $\text{\LaTeX}$.

Mille Mercis au Docteur *Chaoui Abderrezak*.

Univ de 08 Mai 1945.Département de mathématique.

